

L'ACADEMIE PONTIFICALE
DES SCIENCES EN MEMOIRE DE
SON SECOND PRESIDENT
GEORGES LEMAITRE
A L'OCCASION DU CINQUIEME
ANNIVERSAIRE DE SA MORT



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MCMLXXII

L'ACADEMIE PONTIFICALE
DES SCIENCES EN MEMOIRE DE
SON SECOND PRESIDENT
GEORGES LEMAITRE
A L'OCCASION DU CINQUIEME
ANNIVERSAIRE DE SA MORT



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

PRESENTATION

L'Académie Pontificale des Sciences veut, par cette publication, honorer en ce cinquième anniversaire de sa mort la mémoire de GEORGES LEMAÎTRE, inoubliable second Président de l'Académie.

Le succès de ses grands travaux scientifiques l'avait introduit dans le cercle des plus grands mathématiciens du siècle, les EINSTEIN, EDDINGTON, DIRAC, DE SITTER, mais son caractère demeura toujours aussi simple et enjoué et ceux qui eurent la bonne fortune de le connaître conservent un vivant souvenir d'une telle personnalité.

Derrière ce visage ouvert et accueillant se cachaient les plus beaux dons d'une nature ardente: une intelligence brillante et pénétrante, l'équilibre entre un puissant génie et une volonté à la fois sereine et ferme.

De toutes ces qualités GEORGES LEMAÎTRE donna un témoignage singulier dans la dernière période de sa vie lorsqu'il

assuma la présidence de notre Académie, tâche certainement peu facile vu la complexité très particulière d'un tel organisme.

Ayant eu alors la chance d'être son plus proche collaborateur, plus que tout autre je puis évoquer avec admiration et nostalgie les laborieuses années de sa présidence, sanctionnées d'une approbation générale.

Pour notre Institution ces années furent vraiment uniques, marquées d'un intense et fructueux travail. Il convient de signaler: la création d'une série caractéristique de courtes publications de haut niveau scientifique; l'organisation de nos Semaines d'Etude, rendues annuelles mais qui déjà à l'époque avaient une résonance internationale; l'attribution annuelle d'une grande « Médaille d'Or Pie XI » à un jeune chercheur déjà connu pour ses travaux; la création à l'interne du corps académique de commissions spéciales et restreintes pour étudier et concrétiser les idées et orientations nouvelles touchant la recherche; une nouvelle structuration organique de la Session Plénière, et un calendrier académique plus adapté et précis.

Malheureusement, au milieu de sa seconde période quadriennale de présidence, à laquelle il s'était vu reconfirmé par le Saint-Père, et alors que s'intensifiaient les préparatifs pour les prochaines réunions académiques, une attaque d'angine de poitrine vint le terrasser à l'improviste.

Une longue période de soins l'empêcha de participer à la Session Plénière et à la Semaine d'Etude tenue en avril 1966. Peu après le mal empira et le 20 juin de la même année notre Président s'éteignit à Louvain, laissant un vif regret et

une douloureuse consternation dans le monde scientifique international.

Avec GEORGES LEMAÎTRE l'Académie Pontificale des Sciences perdait un Président qui, digne successeur de l'inoubliable Père AGOSTINO GEMELLI, avait su en recueillir les idées créatrices et les valoriser par de géniales initiatives.

Le monde scientifique international perdait un chercheur doué d'exceptionnelles qualités humaines, d'une très haute valeur scientifique, d'un incomparable génie: un des plus grands noms de la science contemporaine.

PIETRO SALVIUCCI
Chancelier de l'Académie

Le présent volume commence par trois articles importants qui mettent en lumière l'oeuvre scientifique de GEORGES LEMAÎTRE.

Suit son foudroyant Mémoire sur une nouvelle théorie de l'expansion de l'univers ainsi que le commentaire appréciatif qu'en donna Sir ARTHUR EDDINGTON dans la revue anglaise « Nature » (7 juin 1930), attirant sur la nouvelle théorie l'attention de tout le monde scientifique.

Viennent ensuite deux des plus importantes publications dans lesquelles l'Auteur explique et illustre ultérieurement sa nouvelle théorie.

ACHÈVENT le volume les Mémoires présentés par GEORGES LEMAÎTRE et les commémorations qu'il a faites à l'Académie Pontificale des Sciences; deux conférences données à Rome; un exposé original sur un nouveau système de chiffres; et enfin une bibliographie de ses publications.



J. Lemaitre

COMMEMORATIONS
SCIENTIFIQUES

GEORGES LEMAITRE, LE SAVANT ET L'HOMME

C. MANNEBACK

Monseigneur GEORGES LEMAITRE, astronome, cosmologiste et professeur de Mécanique et de Méthodologie mathématique à l'Université Catholique de Louvain, Académicien Pontifical (1936), et Président de l'Académie Pontificale des sciences de 1960 jusqu'à sa mort (1966), naquit à Charleroi, le 17 juillet 1894, et décéda à Louvain le 20 juin 1966.

Il reçoit son instruction secondaire au Collège des Jésuites de sa ville natale et entre comme étudiant ingénieur à l'Université de Louvain en 1911.

En 1914 il s'engage dans l'armée belge et reçoit la Croix de Guerre avec palmes à la fin des hostilités.

Rentré à l'Université, il abandonne les études techniques pour les sciences physiques et mathématiques en en obtient le Doctorat en 1920, avec sa thèse sur l'Approximation des fonctions de plusieurs variables réelles, faite chez DE LA VALLEE POUSSIN.

Puis il embrasse l'état ecclésiastique en entre au séminaire de Malines, où il est ordonné prêtre en 1923.

En même temps, il prépare tout seul, sans direction, une thèse sur la relativité et la gravitation, d'après les récents

mémoires originaux d'EINSTEIN, peu connu dans son entourage.

En juillet 1923 il obtient la bourse de voyage du Gouvernement, à laquelle s'ajoute la bourse de la « Commission for Relief in Belgium Educational Foundation ». Il peut ainsi se rendre d'abord à Cambridge, Angleterre, chez le grand astronome et relativiste EDDINGTON, alors au sommet de la gloire, qui l'initie à l'astronomie stellaire moderne et aux méthodes numériques.

L'année suivante, 1924/25, il la passe à Cambridge, E. U. au Harvard College Observatory chez SHAPLEY, qui venait de s'illustrer par ses travaux sur les nébuleuses et au « Massachusetts Institute of Technology », qui lui confèrera le doctorat en 1927, avec une thèse « The gravitation field in a fluid ».

Rentré à Louvain en 1925 et nommé professeur ordinaire dès 1927, il restera toute sa vie attaché sans interruption à son enseignement. Celui-ci comporte un cours nouveau de Relativité, la méthodologie et l'histoire des mathématiques, puis l'astronomie et les probabilités. En 1932 il fait une nouvelle visite brève aux Etats-Unis et en 1935 il y enseigne plus longuement à l'Université Notre-Dame.

C'est par la théorie ardue de la Relativité générale que LEMAÎTRE inaugure ses travaux. On sait depuis EINSTEIN en 1917 que cette théorie fait prévoir l'existence d'un univers homogène où non seulement la répartition de la matière est uniforme, mais où toutes les positions de l'espace sont équivalentes.

Il n'y a pas de centre de gravité de l'espace; celui-ci n'est pas illimité, mais a un volume total fini, sans cependant être limité par une frontière. On dit que l'espace est « courbe » et l'on a affaire à l'espace dit sphérique ou elliptique, découvert en géométrie pure au milieu de siècle dernier par Riemann.

Deux solutions ont été proposées simultanément en 1917. Celle de DE SITTER ignore la présence de la matière et suppose sa densité nulle. Elle conduisait à de sérieuses difficultés d'interprétation, mais elle avait l'avantage d'expliquer le fait que les nébuleuses extragalactiques semblent nous fuir avec une vitesse énorme.

L'autre solution était la solution d'EINSTEIN. Tenant compte du fait évident que la densité moyenne de matière n'est pas nulle dans l'espace, elle donne une relation entre cette densité et ce qu'on appelle le rayon de courbure de l'univers. Cette relation faisait prévoir l'existence nécessaire de masses énormément supérieures à tout ce qui était connu à l'époque, mais qui ont été établies depuis sur les progrès de nos connaissances sur les nébuleuses extragalactiques. Le « rayon » de l'univers ainsi calculé se révèle plusieurs centaines de fois la distance des objets les plus lointains observés jusqu'ici.

Ces deux solutions avaient leurs avantages, tout en étant logiquement inconciliables. Une solution théorique intermédiaire, déduite de la théorie de la relativité, s'imposait, mais à première vue paraissait exclue.

LEMAÎTRE commence par lever la paradoxe de la solution de DE SITTER, dont il montre en 1925 (Journ. Math.-Phys. M.I.T., vol. 4, may 1925, pp. 37-41) un défaut théorique inhérent.

Il montre de plus que, contrairement à l'Univers d'Einstein, l'Univers de de Sitter n'est pas en repos, comme on le croyait, mais qu'il est « instable » et en expansion accélérée.

Ceci est le premier pas de LEMAÎTRE et il est d'importance. En avril 1927, il publie dans les « Annales de la Société Scientifique de Bruxelles » son fameux mémoire intitulé « Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques ». Titre particulièrement clair, rendant bien compte de la pensée nouvelle de l'Auteur.

L'idée était de modifier la géométrie statique de Riemann-Einstein et de lui substituer une géométrie dont le rayon de courbure de l'espace croissait avec le temps. LEMAÎTRE montra que cette idée était implicitement contenue dans les équations fondamentales de la relativité d'Einstein, sans avoir été aperçue jusqu'ici.

Ce mémoire avait une double portée: géométrique, d'abord, comme il vient d'être dit. Sur ce point, il avait été précédé, en 1922/24 par un jeune savant russe FRIEDMAN, ce qu'il ignore jusqu'à ce que EINSTEIN l'en avertît en 1929.

LEMAÎTRE avait cependant en plus introduit la pression dans le mécanisme. Mais il y avait aussi la portée astronomique capitale: l'observation révélait de façon croissante la fuite des nébuleuses extragalactiques, sans en donner encore à cette date la loi. LEMAÎTRE précisa la loi exigée par la théorie de la relativité: vitesse de « récession » croissant proportionnellement à la distance. C'était la loi fameuse que HUBBLE devait annoncer en 1929, résultant de ses mesures.

Fait curieux, ce mémoire fondamental resta pratiquement inconnu jusqu'à ce que le grand astronome EDDINGTON le signala au monde savant dans une lettre adressée à « Nature », Londres, publiée le 7 juin 1930. C'était en une fois la notoriété.

EDDINGTON s'était lui-même attaqué au même problème, comme il l'a dit. Il fit l'importante remarque que la solution d'EINSTEIN était « instable », c'est-à-dire, qu'une condensation ou une raréfaction locales de la matière dans l'Univers « en équilibre » d'Einstein devait provoquer son expansion ou sa contradiction. En d'autres termes, la solution d'EINSTEIN apparaissait, comme le cas limite ou « asymptotique » de la solution plus générale de LEMAÎTRE.

Immédiatement, LEMAÎTRE précise cette idée dans un mémoire important et ardu publié aux « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society » en mars 1931, sous le titre « The expanding Universe ». L'ensemble de la question est

encore une fois repris et approfondi aux « Annales de la Société Scientifique de Bruxelles » en 1933 sous le titre « l'Univers en expansion ».

Mais entretemps la pensée de LEMAÎTRE avait fait un nouveau bond. Dépasant le point de vue purement mécanique de l'instabilité de l'Univers d'Einstein causée par condensations locales, il fit une nouvelle incursion dans le domaine astronomique en assimilant les domaines de condensation et la matière à de petits Univers d'Einstein en contradiction, créant ainsi des régions connues sous le nom d'amas de nébuleuses.

Il obtenait ainsi, par sa théorie, un moyen nouveau d'attaquer le problème astronomique des amas en y calculant la densité de la matière, en relation avec les dimensions, assez uniformes, des amas. En même temps, le problème de la cosmogonie des nébuleuses et de l'évolution physique de l'univers apparaissait sous un jour nouveau. Ces considérations se retrouvent déjà dans les derniers mémoires cités.

Mais la théorie développée par LEMAÎTRE ne se limitait pas au « modèle » de 1927, lequel se développait à partir de l'instabilité d'un Univers d'Einstein considéré comme point de départ. D'autres solutions mathématiques étaient possible pour les équations relativistes.

Cette multiplicité des solutions pour un univers en expansions contraste avec l'unicité de la solution d'EINSTEIN pour un univers statique. Le problème se ramène à déduire des équations de la relativité du problème à symétrie sphérique, (équations de l'énergie et de la quantité de mouvement radiale), l'équation non linéaire du second ordre qui régit la variation du coefficient R d'expansion ou rayon variable de l'univers en fonction du temps.

Dans cette équation figurent deux paramètres ou constantes mathématiques à déterminer ultérieurement par comparaison de la théorie avec les observations. Il s'agit de la « constante de courbure spatiale » reliant la masse de l'uni-

vers et la constante de la gravitation universelle de NEWTON d'une part, et d'autre part de la fameuse « constante cosmologique lambda », objet aujourd'hui encore de controverses.

Ces deux constantes ou paramètres interviennent déjà chez EINSTEIN, où la seconde se révèle nécessaire pour assurer l'équilibre statique d'un univers de masse finie. Mais dans les solutions d'expansion, il est mathématiquement possible de fixer arbitrairement la constante cosmologique égale à zéro. C'est ce que fait EINSTEIN depuis les travaux de LEMAÎTRE. Celui-ci, par contre, avec EDDINGTON en est un défenseur convaincu. Seule, plus tard, l'expérience décidera, car en ce moment la précision des observations est encore insuffisante.

La solution qui a les préférences de LEMAÎTRE est celle qui part « initialement » d'un rayon d'espace mathématiquement nul, ce qui veut dire qu'il conçoit l'univers dans un état initial de haute concentration fantastique, échappant à toutes nos connaissances physiques actuelles.

Toute la matière de l'univers actuel se serait trouvée concentrée dans une sorte de supernoyau monstrueux, composé de neutrons sans doute. Ce serait comme un isotope géant du neutron, mais essentiellement instable, comme un noyau radioactif.

La désagrégation par explosion de ce noyau est ce que LEMAÎTRE a appelé son *hypothèse de l'atome primitif*. Il l'a énoncée avec simplicité et hardiesse dans une lettre (vol. 127, p. 106) en 1931 adressée à « Nature », sous le titre « Beginning of the World from the point of view of Quantum Theory » et a été invité à la défendre devant une assemblée particulièrement qualifiée, le Meeting du Centenaire de l'Association Britannique pour l'Avancement des Sciences, à Londres en septembre 1931. Les dirigeants de l'Association avaient mis à l'ordre du jour la discussion sur l'Evolution de l'univers, où diverse savants confrontèrent leurs opinions. Le compte rendu en a paru dans « Nature », le 24 octobre 1931; il existe traduit en français chez Gauthier-Villars à Paris.

Il ne s'agit pas dans l'hypothèse de l'atome primitif d'une simple alternative mathématique ou d'une préférence intellectuelle pour un début brusque des choses plutôt qu'une évolution à partir d'un Univers instable d'Einstein, pris comme donnée de départ.

Nous nous trouvons en présence d'un nouveau rebondissement de la pensée de LEMAÎTRE: de l'hypothèse de l'atome primitif, à laquelle s'ajoute le mécanisme de condensation des amas de nébuleuses, jaillit directement une cosmologie astronomique et physique nouvelle, dont le développement occupera LEMAÎTRE jusqu'à la fin de sa carrière.

Pour mieux le voir, résumons d'abord les données de base: initialement a lieu une explosion du type radioactif de « l'atome primitif », violente et brève. Le « rayon de l'univers » passe ainsi de quasi zéro à une valeur voisine de celle d'un Univers d'Einstein de même masse totale. Après cette première expansion intervient un second stade, une période de profond ralentissement dans les environs du « rayon d'Univers d'Einstein », et dont la durée dépend essentiellement de la valeur (encore inconnue exactement) de la constante cosmologique λ . Enfin, apparaît dans un troisième stade une nouvelle période d'expansion, extrêmement lente comparée à la première, qui s'accélère et est précisément celle où nous nous trouvons. Toutes les « théories d'expansion » s'accordent sur ce dernier stade.

A l'époque du premier travail de LEMAÎTRE, avec les données imparfaites du moment, il avait trouvé un ordre de deux milliards d'années pour la durée de cette expansion, comptée depuis son « début ».

Cette durée est trop courte pour rendre compte de l'âge connu des plus anciennes roches terrestres; elle était infiniment trop courte (un millième peut-être pour satisfaire aux exigences des théoriciens de l'évolution stellaire, dont JEANS est l'un des meilleurs représentants. Il y avait donc là une opposition formelle des théories.

Avec une audace intellectuelle qui étonne même chez le jeune savant qu'il était encore, LEMAÎTRE passe outre. Il sacrifie l'ancienne théorie de l'évolution stellaire lente, à l'échelle de milliers de milliards d'années. La formation des étoiles (concomitante ou non, les vues de LEMAÎTRE ont varié sur ce point) et des nébuleuses se fait par « condensation » durant le second stade de l'évolution, où la théorie relativiste, grâce à la constante cosmologique, trouve tout le temps nécessaire.

On le voit, LEMAÎTRE a remplacé le quasi fixisme des théories cosmogoniques anciennes par la notion *d'évolution de l'univers* et il est remarquable que ce mouvement d'idées ait suivi de si loin celui qui avait déjà révolutionné la biologie.

En même temps, LEMAÎTRE a introduit la physique à côté de la mécanique comme élément essentiel dans sa théorie. Il dit très bien « la cosmogonie est de la physique à grande échelle ». Mais on ne doit pas perdre de vue que, malgré les progrès immenses de la physique des hautes énergies, nous ne sommes encore nulle part dans la connaissance de ce que peut réellement signifier un « atome primitif ». Ceci explique la nature des travaux ultérieurs de LEMAÎTRE sur le sujet.

Après une brillante et vigoureuse période d'inductions successives élargissant la Relativité d'Einstein jusqu'à l'aboutissement à l'atome primitif, LEMAÎTRE entreprend une série déductive de travaux mathématiques dans le but d'affermir sa théorie des zones de condensation en nébuleuses et galaxies.

Cette théorie difficile de l'aggrégation de la matière cosmique remonte à LAPLACE et n'a pas encore abouti de façon satisfaisante. Elle a été publiée dans le Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale et dans les Annales de la Société Scientifique. Il y manque sans doute la contribution des forces cosmique de viscosité, liées à la présence des champs magnétiques intergalactiques.

Mais, en plus de la déduction mathématique, LEMAÎTRE

poursuit inlassablement son travail d'induction et d'imagination sur la formation des galaxies et des étoiles à partir de nébuleuses de gaz dilués. Il expose ses idées dans une série brillante de conférences (Revue des Questions Scientifiques, p. 189, 1929; p. 391, 1931; p. 357, 1935; p. 321, 1948; etc.), reprises dans un petit ouvrage « L'Hypothèse de l'Atome primitif - Essai de cosmogonie », traduit « The Primaeral Atom ».

Son bref et beau testament intellectuel pourrait-on dire est repris dans une interview donnée à Radio Canada le 15 avril 1966, dont le texte est repris dans la Revue des Questions Scientifique, avril 1967.

Une des idées chères à LEMAÎTRE, mais qui n'a pas recueilli grande audience, est que le rayonnement cosmique actuel représente pourrait-on dire un reste fossile, fort amenuisé par l'expansion, des rayonnements radioactifs puissants qui ont dû accompagner la désintégration de l'atome primitif. Par contre, la découverte récente d'un rayonnement spatial infra rouge, correspondant à une température d'environ trois degrés absolus, est considérée généralement comme le reste fossile du puissant rayonnement thermique qui a dû être engendré par l'explosion primitive, le « fire ball » des auteurs de langue anglaise. C'est peut-être aujourd'hui l'argument le plus convainquant en faveur des idées de LEMAÎTRE sur l'atome primitif.

La puissante activité de LEMAÎTRE sur laquelle nous venons de nous étendre à cause de son importance singulière ne doit pas nous faire perdre de vue ses travaux dans d'autres domaines.

En 1933, paraît dans « Physical Review » (vol. 43, p. 87), puis dans les Annales de la Société Scientifique, en collaboration avec M. S. VALLARTA et L. P. BOUCKAERT, le premier d'une série d'une quinzaine de travaux, jusqu'en 1955, consacrés à l'étude des trajectoires des rayons cosmique (parti-

cules de signe positif, en majorité protons) en provenance de l'espace galactique et captés par le champs magnétique dipolaire terrestre. Il s'agit de calculs du type de la mécanique céleste, théoriques et numériques, représentant un grand labeur, fondés sur une application du théorème de Liouville en mécanique.

LEMAÎTRE a consacré plusieurs travaux au calcul analytique numérique et à l'intégration numérique des équations différentielles, contribuant entr'autres à l'obtention d'une nouvelle formule puissante d'interpolation qu'il a dénommée l'itération rationnelle, étendant un résultat de GAUSS.

En mécanique rationnelle il a, dans les Bulletins de l'Académie Royale, en 1952 et 1953, consacré quelques travaux puissants au problème fameux des trois corps, en se servant de coordonnées symétriques rapportées aux axes d'inertie principaux instantanés du système. Il a ainsi réalisé ce que l'on appelle la « régularisation » des chocs doubles.

Il faut encore ajouter quelques notes brèves de physique théorique quantique et une note sur les quaternions d'une grande élégance parue dans les Acta de l'Académie Pontificale des Sciences, vol. XII, n. 8, en 1948.

Pour terminer, mentionnons quelques notes biographiques intéressantes, dont deux sur EINSTEIN (Rev. Quest. Scient. 20 oct. 1955 et 20 janv. 1958). LEMAÎTRE a aussi repris, d'un point de vue technique, l'ensemble de son oeuvre en cosmologie dans plusieurs publications scientifiques spécialisées.

Enfin, il s'est intéressé au calcul arithmétique élémentaire et a proposé un nouveau système de chiffres (Bull. Acad. Roy. Sc. août 1954 et Rev. Quest. Sc., juillet 1955).

Au total, pas moins de 75 publications dont 40% environ consacrées à la cosmologie et 20% aux rayons cosmiques dans le champ terrestre. Ses oeuvres ont été réunies en deux volumes reliés, déposés sous le n. 55252 à la bibliothèque de l'Académie Royale, incluant une bibliographie complète.

Les distinctions scientifiques n'ont évidemment pas manqué à GEORGES LEMAÎTRE. Nommé membre, lors de la création de l'Académie Pontificale des Sciences en octobre 1936, il en devint le président en mars 1960 et le resta jusqu'à sa mort. En même temps lui fut conférée la prélature.

Il a été élu membre associé de la Royal Astronomical Society en 1939 et a été le premier récipiendaire de la « Eddington Medal » de la Société en 1953.

En 1935 il est reçu Docteur Honoris Causa par l'Université MacGill à Montréal et en 1954 par l'Université Nationale d'Irlande et aussi de nombreuses autres Institutions scientifiques. En Italie la « Accademia Nazionale des XL », se l'adjoint comme membre en 1960 ainsi que l'Académie Internationale Neocastrum en 1966. Il est en outre membre en 1945 de l'American Philosophical Society of Philadelphia, en 1948 de l'Académie de Coïmbre.

En Belgique il fut élu correspondant en 1933 et membre en 1941 de l'Académie Royale des Sciences, Lettres et Beaux-Arts. Le 17 mars 1934 l'abbé LEMAÎTRE fut honoré avec éclat dans son pays par la remise solennelle du Prix Francqui que lui fit le Roi LÉOPOLD III dans les locaux de la Fondation Universitaire. Ses parrains étaient EINSTEIN lui-même et feu les académiciens DE LA VALLÉE POUSSIN et A. DE HEMPTINNE. Les membres du jury international étaient EDDINGTON, LANGGÉVIN, DE DONDER et DEHALU. Le rapport disait: « Le Conseil . . . considérant que, par l'originalité de son esprit créateur, par la valeur propre de ses recherches sur les systèmes des galaxies dans l'univers et des théories cosmologiques, ainsi que par l'influence profonde que ses découvertes ont exercée sur les recherches d'astrophysique et de physique poursuivies dans divers pays au cours de ces dernières années, M. le professeur GEORGES LEMAÎTRE a apporté récemment à la science une contribution importante, dont la valeur a augmenté le prestige international de la Belgique, décide de

conférer le Prix Francqui à M. le professeur GEORGES LEMAÎTRE ».

La plus haute distinction que le Gouvernement belge réserve à ses savants lui fut accordée en 1950 par l'octroi du Prix décennal des Sciences appliquées pour la 5e période 1933-1942. Le rapport détaillé sur ses travaux a paru au Moniteur belge en 1950, pp. 6027 à 6029 et est reproduit intégralement dans le volume spécial publié par l'Académie en 1968 sous le titre « Florilège des Sciences en Belgique pendant le XIXe et le début du XXe siècle, édité par P. Brien.

Mgr LEMAÎTRE était grand officier de l'Ordre de Léopold. Son buste en bronze a été exécuté par le sculpteur CHARLES LEPLAE et appartient à l'Académie.

On peut juger du savant par ce qui précède. Mais l'homme aussi mérite bien qu'on s'y arrête. LEMAÎTRE jouissait d'une constitution physique aussi robuste que l'était son intelligence. Sa santé fut excellente jusque vers les toutes dernières années.

Il avait une grande capacité de travail, mais n'aimait pas fignoler exagérément les choses. Il était un calculateur algébriste et arithméticien remarquable et utilisa dès le début de 1930 les plus grandes machines à calculer de l'époque, comme la Mercedes.

Etant étudiant, il manifestait une souplesse d'esprit remarquable, en géométrie classique entr'autres. Avant d'entrer à l'Université, il avait été formé aux problèmes de mathématiques classiques et à EUCLIDE en particulier par le R. P. HENRI BOSMANS, l'historien des sciences.

Son caractère, malgré ses grands succès ne se départit jamais d'une naturelle et profonde simplicité. Il avait le caractère ouvert, franc, gai, optimiste, jovial. Il aimait la société et adorait produire un paradoxe inattendu devant un auditoire sympathique et attentif. Il y ajoutait une bonne

dose d'humour et son gros rire, si cordial et ses boutades étaient célèbres.

Quand il était lancé sur une question, il y consacrait une concentration peu commune, accompagnée d'une rare capacité et rapidité d'assimilation, qui compensait un peu de nonchalance et son dédain de l'érudition inutile. On l'a vu ainsi littéralement s'attaquer aux travaux ardu de JACOBI sur les fonctions elliptiques, domaine où ses contributions ne sont pas négligeables.

Très sociable, fort dévoué à ses étudiants et collaborateurs son grand effort en cosmologie il l'accomplit cependant toujours seul. Il n'avait guère de correspondance ni d'échanges scientifiques avec ses pairs à l'étranger.

On peut dire que GEORGES LEMAÎTRE est né sous une bonne étoile. Il y a un demi siècle, EINSTEIN venait d'achever sa grande synthèse théorique de la gravitation et de l'univers, conception essentiellement statique et encore mal comprise. Puis, subitement des découvertes expérimentales fulgurantes en astronomie stellaire de quelques astronomes américains viennent bouleverser nos conceptions du monde des nébuleuses. A ce moment précis, un homme jeune et isolé, qui a au début orienté lui-même sa carrière, fait la synthèse entre des théories abstraites mais fondamentales et des découvertes concrètes capitales encore inexpliquées. Ce fut dans l'épopée de la science un moment, bref peut-être, mais assurément non sans grandeur. Un des acteurs fut des nôtres et honora ainsi la Belgique.

Prof. CHARLES MANNEBACK
de l'Université de Louvain

Sources, outre les références données dans le texte.

C. MANNEBACK - Hommage à la mémoire de Monseigneur Georges Lemaître. Bull. Acad. Roy. Sciences, 30 juillet 1966. Rev. Quest. Scient. octobre 1966, voir aussi Bull. Acad.

Roy. Sciences, 5 février 1955. - Florilège des Sciences en Belgique pendant le XIXe et le début du XXe siècle, édité par P. Brien, Académie Royale de Belgique, 1968. - O. GODART - Monseigneur Lemaître et son oeuvre. Ciel et Terre - mars-avril 1967. - MC VITTE - Georges Lemaître - Monthly Notices Royal Astronomical Society (1967). - MC GREA - Cosmology today - Rev. Quest. Scient., avril 1970. - Il existe trois exposés d'ensemble, fort techniques, où Lemaître a résumé ses idées sur la cosmologie: Cosmological application of Relativity - Review of modern Physics, vol 21, p. 357-366, 1949.

The cosmological constant - dans Albert Einstein Philosopher-scientist, édité par P. A. Schilpp, 1949, Evanston, Illinois. The primaeval atom hypothesis and the problem of the clusters of Galaxies - Institut International de Physique Solvay. Extrait des rapports et discussions - Bruxelles, 1958.

Une ancienne mais excellente et claire mise au point par A. EDDINGTON. The expanding universe - Cambridge, University Press, 1933.

Enfin une savante étude moderne.

P. J. E. PEEBLER - Physical Cosmology. Princeton University Press, 1971.

MONSEIGNEUR LEMAITRE ET SON ŒUVRE

O. GODART

I. LES ADIEUX.

C'était au temps où la bien aimée reine ASTRID présentait le prince BAUDOUIN, futur roi des Belges, au balcon du palais royal. Les étudiants massés Place Foch à Louvain acclamaient follement un ecclésiastique qui était apparu au balcon du premier étage de la pâtisserie Debelva. A peine s'est-il retiré que les cris reprennent: « le petit Prince », « le petit Prince ». Et l'abbé LEMAITRE réapparaît tendant à la foule un manuscrit, son petit Prince: « Le Prix Francqui » qui lui avait été remis ce jour-là par le roi LÉOPOLD. Le soir même, il fut reçu à la Carolo, société estudiantine groupant les étudiants du pays de Charleroi dont il était originaire. Au milieu des fumées de tabac et des vapeurs de la bière qui coulait abondamment, remplissant ma fonction de censeur, je présentai à une assemblée survoltée le professeur dont j'essayais de suivre les cours originaux et profonds. Ce fut une soirée inoubliable car le Chanoine LEMAITRE était et est resté très proche de l'étudiant aimant blaguer et rire, prenant la vie du bon côté, s'amusant et travaillant toujours avec le même entrain et la même bonne humeur. A de nombreuses reprises, il lui a montré sa compréhension et sa sollicitude.

Le vendredi 25 juin 1966, dans la grisaille d'une brume maussade, je suivais le corps de celui qui fut mon maître vénéré, transporté à sa dernière demeure: le cimetière de Marcinelle. Et les souvenirs d'une longue et étroite collaboration défilaient.

Il y avait une semaine à peine, nous avions eu un entretien d'une heure sur les récentes découvertes astronomiques et leurs conséquences sur les théories cosmogoniques. Bien que très malade, il exprimait lucidement sa satisfaction au sujet de la découverte d'un type de rayonnement cosmique dans les micro-ondes semblant corroborer l'idée de l'origine explosive de l'Univers.

Les progrès actuels liés aux nouvelles techniques d'observations en radioastronomie, dans le domaine des infra-rouge et du rayonnement γ , vont-ils apporter une évolution aussi profonde que celle du déplacement vers le rouge découvert par HUBBLE en 1925? Il semble que les sciences avancent par étapes; elles découvrent de nouvelles caractéristiques; puis les consolident, les analysent, les étendent jusqu'au moment où un fait nouveau attire l'attention des savants dans une autre direction et bouscule des conceptions en apparence bien établies.

Les vrais grands hommes de science sont ceux qui saisissent des rapports insoupçonnés entre des résultats expérimentaux ou d'observation et des développements théoriques, qui ont l'intuition géniale d'en déduire toute une nouvelle explication logique et cohérente, et parviennent à en donner une démonstration probante. Certes au cours du temps, comme toute œuvre humaine, elle devra être complétée; devant des faits nouveaux, les conceptions devront être corrigées, revues, améliorées. Il n'en reste pas moins vrai qu'un courant d'idées sera né, qu'un pas en avant sera franchi. Pour apprécier l'œuvre d'un tel homme, ses connaissances, son imagination et son audace, il est indispensable de situer son œuvre dans le contexte historique, au milieu des opinions reçues et des

connaissances de son époque. Et certainement, Mgr Lemaître était vraiment un grand homme.

Quelques mois ont passé; je ne vais plus lui rendre visite et discuter à bâtons rompus de choses et d'autres, en particulier de calcul numérique, sujet qui le passionnait vraiment dans les derniers temps. Mais je garde dans mon cœur tous les souvenirs de cette intimité. Cependant, il reste à tous, son œuvre toujours vivante, toujours originale.

2. LA GENÈSE DES IDÉES.

Les membres de la Société Belge d'Astronomie la connaissent bien, car il en a exposé les grandes lignes dans ses deux conférences publiées par *Ciel et Terre*: « Hypothèses cosmogoniques » [1] et « Rayon cosmiques » [2]. Pour en dégager la géniale originalité, retournons aux sources.

Lorsque l'abbé LEMAÎTRE publia en 1927 son travail fondamental « Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques » [3], il proposait une solution au dilemme entre les deux théories de cosmologie relativiste qu'il connaissait: celle d'EINSTEIN où l'Univers était tout juste rempli pour assurer l'équilibre et celle de DE SITTER, en expansion mais vide de matière. En même temps, suivant son EDDINGTON [4], il donnait une explication définitive du décalage vers le rouge du spectre des nébuleuses.

Peu après, en 1931 [5], au cours d'un colloque, il couronne son audacieuse vision de l'Univers par une première esquisse de son hypothèse cosmogonique: « l'atome primitif ».

Ces théories heurtèrent de front des préjugés fortement enracinés. Dans l'optique du temps, on admettait comme un postulat implicite un Univers en moyenne au repos et une pérennité du siècle. Pour l'homme de 1900, l'Univers ne pouvait être identifié à l'espace, ni l'espace à autre chose qu'à l'espace d'Euclide et de Newton, infini ses trois dimensions et doué d'une structure métrique immuable indépen-

dante de son contenu. Or, le monde stellaire si immense fut il, n'en occupait qu'un domaine dont l'Astronomie connaissait désormais les bornes. Cependant dès 1910, s'imposait de plus en plus la conjecture que les nébuleuses, du moins les spirales, étaient en réalité d'autres galaxies. Si l'hypothèse des « Univers-Îles » avait des défenseurs convaincus, elle avait, même en 1920, des adversaires résolus tel le grand astronome américain SHAPLEY qui, élargissant le domaine de la Voie Lactée, considérait ces objets comme en dépendant. Ce fut HUBBLE qui, ayant la bonne fortune de disposer, au Mont Wilson, du plus grand télescope jamais construit à cette date, put identifier en 1923, sur les photographies de la spirale d'Andromède, une étoile géante de la classe des Céphéides. Ces étoiles, bien connues dans notre galaxie, ont des variations d'éclat périodiques très régulières et dont la période indique avec beaucoup de précision la luminosité intrinsèque. La comparaison avec la luminosité apparente donnait à cette étoile une distance de plusieurs centaines de milliers d'années-lumière.

La grande spirale d'Andromède et a fortiori toutes les autres, beaucoup plus petites d'apparence, se trouvaient définitivement rejetées bien au-delà des frontières de la galaxie. HUBBLE avait levé le rideau et dévoilé le « royaume des nébuleuses » [6].

Le procédé spectroscopique pour mesurer les vitesses radiales, procédé déjà classique au début du siècle, était une entreprise techniquement délicate étant donné que les images nébulaires ne sont pas ponctuelles. En 1921, vingt-neuf vitesses radiales avaient été mesurées. Or, à mesure que les résultats s'accumulaient, on voyait les décalages spectraux vers le rouge (indiquant une vitesse d'éloignement) l'emporter de plus en plus sur les décalages vers le violet et devenir de plus en plus grands en valeur absolue. EDDINGTON, suivi par d'autres, en déduisit que ce décalage croissait avec la distance et tenta de l'expliquer par la cosmologie de DE SITTER [7].

Finalement en 1929, deux ans après la parution de l'article fondamental de LEMAÎTRE, HUBBLE et HUMASON, disposant

de 46 vitesses radiales et de 18 distances mesurées, publiaient la relation vitesse-distance qui porte leur nom: la question de l'expansion de l'Univers était ainsi posée par l'Astronomie d'observation.

Mais faut-il réellement interpréter le décalage vers le rouge des galaxies (red shift) comme une indication de vitesse radiale? Cette question a suscité beaucoup de controverses, mais on n'a pu trouver une explication de rechange vraiment satisfaisante. Toutes celles qui ont été proposées ou bien ne rendent pas compte de tous les caractères du phénomène observé, ou bien font prévoir dans le rayonnement des étoiles des effets importants que l'on n'a pas observés. Face aux idées normalement reçues, l'expansion de l'Univers fut longtemps considérée comme incroyable et suspecte, à tel point que l'inventeur du « déplacement vers le rouge », le grand HUBBLE, sur la foi d'observations jugées maintenant très insuffisantes, rejetait l'interprétation cinématique du « red-shift », quelque problématique que lui parût toute autre interprétation.

Les observations de HUBBLE aboutirent aux conclusions suivantes qui sont encore valables à l'heure actuelle:

1) Du point de vue cosmique, la galaxie peut être considérée comme l'agrégat élémentaire de matière-énergie; l'Univers observé est identifiable au système de galaxies.

2) Ce système présente sur la sphère céleste des apparences isotropes (la même dans toute directions); il est distribué dans l'espace de façon uniforme et l'homme y occupe une position quelconque échangeable avec toute autre.

3) L'homogénéité macroscopique n'est pas exclusive d'une grande diversité, observable dans les formes et les dimensions des galaxies, leur contenu stellaire et leur contenu matériel.

4) Le système des galaxies présente l'apparence uniforme et isotrope d'une expansion qui, en première approximation, obéit à une loi extrêmement simple: chaque galaxie paraît fuir la Terre à une vitesse proportionnelle à sa distance.

Le seul point délicat au sujet de l'homogénéité est le groupement en amas des galaxies, mais la dimension de ces derniers est si variable et leur cohérence si mal établie, qu'ils pourraient être plutôt des formes dynamiques passagères en voie de disorption rapide, de sorte qu'ils ne peuvent remplacer comme unité cosmique les galaxies si nettement définies en groupes dynamiquement stationnaires de myriades d'étoiles. La présence des amas entraîne cependant un changement d'échelle dans la considération de l'homogénéité moyenne.

D'autre part, on n'a pas pu prouver l'existence d'un groupement d'ordre supérieur du type amas d'amas.

La propriété 2, connue quelquefois sous le nom de principe cosmologique, a permis des simplifications importantes dans les modèles d'Univers. Elle a été utilisée comme principe par la plupart des cosmologistes dont LEMAÎTRE.

Pour donner la synthèse de ses observations, l'abbé LEMAÎTRE connaissait principalement deux théories cosmologiques récentes et était guidé dans ses recherches par un maître éminent: A. S. EDDINGTON.

3. L'UNIVERS STATIQUE ET FERMÉ D'EINSTEIN.

La première de ces théories [8] fut introduite en tant que complément à la théorie de la Relativité. Se rendant compte de la difficulté d'amener le lecteur de son époque à la considération de sa proposition « d'univers cylindrique » infini dans le temps mais fini dans l'espace, EINSTEIN réfléchit au prolongement de la théorie de la Relativité: « Dans une théorie cohérente de la Relativité, il ne peut y avoir d'inertie par rapport à l'espace mais seulement une inertie des masses les unes par rapport aux autres ». Cependant, le grand novateur, soucieux de la transition avec la science classique, considère les difficultés de la cosmologie newtonienne. L'équation de Poisson qui lie le potentiel de gravitation à la densité de matière, est une équation aux limites. Si l'on considère un système fini, elles s'imposent d'elles-mêmes: à l'infini, le champ est nul et le potentiel

constant. Est-il concevable d'avoir un Univers matériellement fini dans un espace infini? Il faudrait pour cela comprendre comment les corps célestes qui sont animés de vitesses individuelles quelconques, sont empêchés de sortir du système newtonnien. D'après les lois de la mécanique statistique, il faudrait pour cela que le potentiel de gravitation à la frontière du système fût très grand, hypothèse incompatible avec les vitesses stellaires modérées que nous observons effectivement.

Mais vers 1895, SEELIGER et NEUMANN avaient démontré l'existence d'une solution possible, en mécanique classique. Elle consistait à modifier l'équation de Poisson en ajoutant à la densité un terme proportionnel au potentiel de gravitation. Ainsi obtenait-on une distribution uniforme de matière s'étendant à l'infini. On dispose alors d'un système cosmique n'ayant pas de centre et en équilibre.

Une difficulté semblable se présente en Relativité; après avoir retourné le problème sous ses faces, EINSTEIN présente une solution qui paraît esquiver le problème posé. Puisqu'il est impossible de définir les conditions à l'infini, il suffit de supprimer l'infini: « S'il était possible de considérer le monde comme un continuum fermé *selon ses dimensions spatiales*, alors aucune condition aux limites de cette sorte ne serait nécessaire ».

Ce nouvel écart à partir des idées recues par ce non-conformiste génial d'EINSTEIN, paraîtra moins insolite si on considère que la forme locale de la théorie de la Relativité générale implique une modification de la structure métrique due à la présence de matière, et par conséquent conteste la validité de la géométrie euclidienne pour représenter la géométrie de l'espace physique, du moins au voisinage des fortes concentrations de matière. Une sorte de courbure de l'espace à trois dimensions est introduite, que l'on peut rendre intuitive par une analogie.

Dans un espace euclidien à trois dimensions, les coordonnées cartésiennes d'un point d'une surface sphérique, c'est-à-dire un continuum à deux dimensions, vérifient une certaine

relation algébrique, l'équation de la sphère. Si on écrit une équation identique à celle de la sphère, mais avec une dimension en plus, on définit un continuum à trois dimensions, une hypersurface qui présentera d'importantes analogies avec la sphère et, en particulier, la propriété d'être un ensemble géométrique fermé et fini.

L'introduction implicite d'un espace euclidien à quatre dimensions n'est qu'un moyen commode pour définir notre hypersurface dont peuvent se passer les géomètres depuis les théories de GAUSS et de RIEMANN [8]. Elle n'introduit aucun postulat d'ordre physique et, si difficilement imaginable que soit l'espace sphérique, il n'y a aucune difficulté de principe à ce qu'on puisse le considérer comme une figuration adéquate des propriétés géométriques de l'espace physique. Certes, la théorie de la Relativité générale lie analytiquement l'état de la matière et la structure métrique de l'espace, mais il faut encore déterminer les conditions de distribution de la matière dans l'Univers, pour que la géométrie de l'espace soit du type sphérique.

A l'échelle des phénomènes locaux, les irrégularités dans la distribution de la matière sont telles que la structure métrique de l'espace ne peut être qu'extrêmement compliquée; mais si l'on considère l'Univers à très grande échelle, la densité fluctuera peu autour d'une valeur moyenne que l'on pourra tenir comme uniforme et peu variable. Sous les irrégularités locales, se dessinera donc une structure métrique simple.

EINSTEIN émet une seconde hypothèse basée sur la petitesse des vitesses moyennes par rapport à celle de la lumière: il existe dans l'Univers un système de coordonnées par rapport auquel la matière peut être considérée comme au repos d'une façon durable.

Si les grandes découvertes astronomiques des années Vingt ont confirmé d'une façon éclatante la première hypothèse, la découverte du « red-shift » a contredit la seconde. On se demande quelle orientation auraient prise les réflexions

d'EINSTEIN, surtout axées sur le principe d'inertie, s'il avait pu connaître un phénomène d'une telle ampleur.

Grâce à ces hypothèses, EINSTEIN simplifie le tenseur d'énergie pour la matière cosmique à une seule quantité scalaire: la densité moyenne, et si l'espace est supposé fini, on est naturellement conduit à l'hypothèse que cette densité est indépendante du lieu.

Une telle hypothèse n'est cependant pas compatible avec les équations originelles du champ en Relativité, et, comme pour la cosmologie newtonienne, on doit envisager l'adjonction d'un nouveau terme dépendant de ce qui a été appelé la constante cosmologique λ . Contrairement à la modification de l'équation de Poisson, celle-ci est licite car elle donne en fait aux équations du champ, la forme la plus générale qui soit compatible avec les axiomes de la théorie de la Relativité.

Ainsi modifiées, les équations admettent comme solution une structure métrique dans laquelle l'espace est hypersphérique, fermé. La matière et l'énergie y sont réparties uniformément, sans aucune singularité où aucun point ne se distingue intrinsèquement d'aucun autre, sinon par des irrégularités locales, fortuites et dénuées de toute signification cosmique.

Sur une hypersurface à trois dimensions, la géométrie de Riemann permet de découvrir une courbure par généralisation de la courbure de Gauss des surfaces ordinaires; des courbes appelées géodésiques joueront le rôle des droites de la géométrie euclidienne. Elles définiront le parcours naturel des rayons de lumière; dans le cas de l'hypersphère, elles seront analogues aux grands cercles de la sphère; en les suivant indéfiniment, un mobile reviendra à son point de départ; le rayon de courbure de l'hypersphère ne dépend ni du point ni de la direction choisis et est une constante caractéristique que nous appellerons rayon de l'Univers. Des relations définies existent entre ce rayon, la densité cosmique et la constante λ . La courbure de l'espace n'affecte pas le temps; la distinction du temps et de l'espace, mise en question par la géométrie locale de la théorie de la relativité restreinte, se

trouve donc rétablie à l'échelle cosmique. Un temps universel s'écoule uniformément de moins l'infini à plus l'infini, sans qu'aucun instant ne se distingue intrinsèquement d'aucun autre. En fait donc, EINSTEIN adoptait l'hypothèse du repos cosmique en s'appuyant sur une équation modifiée du camp permettant de définir un système cosmique d'inertie.

4. LES ÉNIGMES DE L'UNIVERS DE DE SITTER.

A peine deux mois après la parution du travail d'EINSTEIN, DE SITTER [9] démontre que les équations du champ sous leur nouvelle forme avec le terme en λ admettent une autre solution que celle d'EINSTEIN, si l'on suppose que l'espace-temps cosmique est vide. Pouvant être considéré en première lecture comme une curiosité mathématique, c'était avant tout une critique des hypothèses cosmologiques d'EINSTEIN.

Pour lui, ce qui doit compter du point de vue de la Relativité, c'est le comportement du modèle dans les transformations mathématiques: « Il semble à première vue, inexact de dire: l'Univers est sphérique, parce qu'il peut, par une transformation analogue à la projection stéréographique, être représenté dans un espace euclidien ». Or cette transformation-là est légitime, car elle laisse invariante les quantités qu'il faut. La préférence pour sa solution (appelée B dans son mémoire, celle d'EINSTEIN à laquelle il la compare étant A) est basée sur des raisons strictement mathématiques.

Formellement, la métrique de DE SITTER s'écarte fort peu de celle d'EINSTEIN, juste ce qu'il faut pour qu'en la transformant par projection stéréographique, tous les coefficients, y compris celui de dt^2 (coordonnée du temps), s'annulent à l'infini. Une conséquence qui apparut clairement à l'époque, conduit à une certaine disjonction entre postulats physiques et axiomes mathématiques de la théorie de la Relativité, car à l'évidence dans le modèle B, qui est vide, le principe de la relativité de l'inertie n'a plus cours, puisqu'il y a une structure métrique sans qu'il y ait de matière. EINSTEIN, à la lecture du

mémoire de DE SITTER, répond que, à son avis, il ne serait pas satisfaisant qu'un monde sans matière fût même concevable: « au contraire, le champ des $g_{\mu\nu}$ doit être déterminé par la matière et ne peut subsister sans elle ». Mais DE SITTER n'était pas disposé à concéder à EINSTEIN que cela suffit à exclure sa solution du cadre conceptuel de la Relativité, même si elle n'a pas de signification physique évidente [10]. Du point de vue astronomique, il critique la trop grande densité de matière considérée dans l'Univers d'Einstein, et l'on devine qu'il considère sa solution comme solution asymptotique à l'Univers réel, mais toujours dans l'optique d'un repos cosmique.

En fait, ce modèle recelait tant d'énigmes que sa discussion a retenu l'attention de tous les théoriciens de la cosmologie. Pour rendre plus claire la distinction entre ces deux solutions, écrivons-en les métriques riemanniennes:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R_e^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (A)$$

$$ds^2 = c^2 \cos^2 \chi dt^2 - R_s^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (B)$$

(A) représente l'Univers d'Einstein, (B) l'Univers de de Sitter dans les mêmes coordonnées. R_e et R_s sont deux constantes, t est la coordonnée de temps, c la vitesse de la lumière dans le vide; les coordonnées θ et φ sont semblables à la colatitude et à la longitude des coordonnées sphériques, χ une coordonnée radiale. On voit que (B), comme (A), est, sous cette forme, une métrique statique: les coefficients de dt , $d\chi$, $d\theta$ sont indépendants de t . D'autre part, l'emploi de la coordonnée angulaire χ qui n'intervient que par des fonctions trigonométriques suggère d'elle-même la circularité, la fermeture des lignes d'espace choisies pour porter les coordonnées. (B) paraît donc être, comme (A), un Univers où l'espace est fermé; la seule différence entre les deux métriques est le terme en $\cos^2 \chi$, coefficient de dt^2 . Elle modifie profondément

la signification de t qui, chez EINSTEIN, est bien le temps cosmique de mesure universelle t c'est-à-dire le temps que mesurerait une horloge associée en permanence à un repère dans lequel la matière est en repos moyen. Mais dans l'Univers vide de de Sitter, aucune caractéristique physique ne permet de distinguer une telle coordonnée de temps. Cela aboutit à des conséquences étranges; par exemple, posons dans (B), $\chi = \pi/2$. Cela correspond, pour un observateur situé à l'origine, à l'ensemble des points situés à une distance d'un quart du tour de l'Univers.

On a alors sur toute cette hypersurface

$$ds^2 = -R_s^2 (d\chi^2 + d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (C)$$

Or, d'après la théorie de la Relativité, $ds=0$ donne la trajectoire des rayons lumineux dans le vide; mais d'après (C), cela ne peut se produire que si $d\chi$, $d\theta$, $d\varphi$ sont tous nuls; autrement dit, sur cette hypersurface, la lumière et a fortiori aucune quantité physique ne peut bouger: c'est comme une frontière infranchissable qui bloque tout signal et tout mouvement; c'est une sorte d'« horizon » pour l'origine qui, rappelons-le, peut être choisi arbitrairement.

Or cet horizon n'a pas seulement un sens géométrique, il a aussi un sens dynamique. EINSTEIN montre en effet dès 1918 [11] que, traduit en termes dynamiques, l'arrêt du cours des choses sur l'hypersurface $\chi = \pi/2$ équivaut à une accumulation de masse sur cette sphère. L'Univers que DE SITTER donne pour vide, est vide partout ailleurs mais non là; il n'est pas homogène et ne peut être pris comme base d'une cosmologie.

En fait, la fausse symétrie entre A et B cachait la caractéristique essentielle de l'Univers de de Sitter. Je ne pourrais mieux faire pour l'exposer qu'en reprenant la solution trouvée par l'abbé LEMAITRE en la donnant telle qu'elle fut publiée dans son travail de 1927: « Le choix des coordonnées de » DE SITTER rompt donc l'homogénéité qui existait dans les

» données du problème, de là proviennent les résultats paradoxaux qui apparaissent à l'horizon du centre.

» *Lorsqu'on introduit des coordonnées de l'espace et du temps respectant l'homogénéité de l'Univers, on trouve que le champ n'est plus statique, on obtient un Univers de même forme qu celui d'EINSTEIN, mais où le rayon de l'espace au lieu de demeurer invariable varie avec le temps suivant une loi particulière.*

» *Pour trouver une solution présentant simultanément les avantages de celle d'EINSTEIN et de celle de DE SITTER, nous sommes ainsi conduits à étudier un Univers d'Einstein où le rayon de l'espace varie d'une façon quelconque ».*

En même temps que l'explication des paradoxes de DE SITTER, il découvrait l'existence d'une solution cosmologique non statique des équations d'Einstein. Mais il ne fut pas seul à envisager de telles solutions. Lorsqu'une question se pose avec insistance sur l'avant-scène de la recherche scientifique, la réponse est souvent trouvée presque en même temps par plusieurs savants isolés.

5. FRIEDMAN ET L'ÉVOLUTION DES IDÉES D'EINSTEIN.

En fait, FRIEDMAN fut le premier à proposer la solution générale du problème cosmologique dans le cadre de la Relativité générale, et on lui doit la découverte capitale que, avec les hypothèses des « Kosmologische Betrachtungen » d'EINSTEIN, les équations relativistes du champ se ramènent à un système de deux équations différentielles qui admettent une infinité de solutions, spatialement ouvertes ou spatialement fermées, dans lesquelles la métrique de l'espace est fonction du temps cosmique [12]. Son œuvre fut pendant plusieurs années ignorée; ce fut le cas pour LEMAÎTRE et d'ailleurs, pour tous les anglo-saxons jusque vers 1930.

EINSTEIN lut le premier mémoire de FRIEDMAN, se trompa

dans ses critiques, s'excusa, puis se tut pendant huit ans; quand il reconsidéra les deux mémoires, leur auteur était mort. Outre cette malchance évidente, comment expliquer qu'un travail d'une telle importance n'ait pas été compris? Peut-être parce qu'il avait traité le problème avec l'impassibilité du mathématicien?

Devant les solutions multiples, comment choisir? FRIEDMAN n'en sait rien et ce n'est pas l'objet de ses préoccupations.

L'absence de toute allusion à une vérification possible par l'observation, le silence au sujet du décalage spectral de la lumière qui résulte d'une métrique non statique et qui donne la clef du « red-shift » des nébuleuses, expliquent aussi le peu d'écho de ces théories dans monde des astronomes.

LEMAÎTRE au contraire, avec une technique mathématique moins élaborée, associe une vision du monde, physique et philosophique, puis une cosmogonie, à un modèle mathématique. Il fait sortir « l'Univers en expansion » du domaine de la pure abstraction.

Si FRIEDMAN dont les travaux lui étaient inconnus, n'a eu aucune influence sur l'œuvre initiale de LEMAÎTRE, au contraire, celle d'EDDINGTON, sous la direction duquel il a travaillé en 1923-1924 pendant son premier voyage d'étude à l'étranger a été prépondérante. Elle a en tout cas été capitale pour faire connaître son mémoire de 1927 par l'annonce louangeuse qu'il en fit en 1930 dans le journal « Nature ». Dans le domaine des idées, LEMAÎTRE semble avoir subi au début l'ascendant de cette extraordinaire personnalité. Dans ses travaux de 1925 à 1927, et même dans ceux d'EDDINGTON, il est quelquefois difficile de distinguer la part de chacun. Cependant, ayant adopté l'option d'EDDINGTON pour le finitisme de l'espace et la constante cosmologique, des nuances se révéleront par la suite dans leurs interprétations respectives.

A la différence de LEMAÎTRE, EDDINGTON ne s'est jamais rallié à l'idée d'un commencement de l'Univers dans l'état singulier; sa manière de comprendre le finitisme et la constante cosmologique est aussi éloignée que possible du réalisme

de LEMAÎTRE. Alors que ce dernier considérait la constante cosmologique comme une force répulsive, il lui donnait une interprétation plus subtile d'une sorte d'étalon de longueur. A ce sujet, il est intéressant de revenir un instant à l'étrange silence d'EINSTEIN.

Sa déconvenue fut grande quand il s'aperçut qu'il n'avait pas mis le point final à la cosmologie relativiste avec son mémoire de 1917 et, poussé à l'autre extrême, il voulut s'interdire de regarder en arrière vers une illusion perdue. La première victime fut la constante cosmologique λ qu'il avait alors spécialement introduite. En 1931, il l'annule du point de vue de l'économie logique, comme si les lois de la nature étaient nécessairement les lois les plus simples et les plus facilement vérifiables. Mais il était trop tard pour la retirer de la circulation, elle avait déjà fait fortune.

Elle fait partie essentielle de l'Univers de LEMAÎTRE. EDDINGTON en fut un ardent défenseur: il « préférerait revenir à la théorie newtonienne plutôt que l'abandonner λ ; si la théorie de la Relativité devait tomber, la constante cosmologique serait le dernier bastion à s'écrouler; abandonner cette constante, ce serait en effet priver l'espace de son fondement » [13].

En l'absence de données expérimentales probantes, la dispute autour de la constante cosmologique dure toujours. LEMAÎTRE adoptait quelquefois un point de vue mathématique [14]: « λ est une constante d'intégration; je ne vois aucune raison physique pour lui donner de préférence la valeur 0 ».

Ce qui avait surtout désappointé EINSTEIN après son acceptation des équations de Friedman, c'était le grand nombre de solutions cosmologiques possibles déduites de la Relativité et la difficulté de trouver des critères d'observation pour les départager. En fait, le choix d'un modèle dépendait de certaines options extérieures présentant fatalement un caractère philosophique.

6. LE CHOIX DE LEMAÎTRE.

Il serait cependant exagéré de ranger LEMAÎTRE dans une école philosophique quelconque; on pourrait presque dire que ses options étaient liées à son tempérament et à son caractère. Quant aux influences extérieures, il a indubitablement subi l'ascendant de son maître EDDINGTON, mais il a, avec le plus grand soin, évité que ses convictions religieuses n'interfèrent en quoi que ce soit avec la liberté de ses recherches scientifiques. D'une nature optimiste et réaliste à la fois, il avait l'intime certitude que la pensée physique peut atteindre l'essence de l'Univers et que sa représentation est accessible à l'entendement humain. Une solution unique, réaliste du problème cosmologique est donc possible grâce à l'analyse mathématique qui donne un sens précis à la notion de l'Espace fini. Un Univers infini ne pourrait pas être l'objet d'un véritable traitement scientifique. Dans un article de 1929 [15], il donne une sorte de démonstration de son choix en se basant sur une définition de l'infini mathématique: un ensemble est infini lorsqu'il est égal à l'une de ses parties, l'égalité s'entendant de deux ensembles qui peuvent être mis en correspondance biunivoque. La définition précédente n'admet pas l'infinité du « nombre des étoiles qui existent maintenant ou qui existeront à une époque déterminée », et cela par application à l'ensemble des étoiles de l'axiome « le tout est plus grand que la partie ». Or, « il semble qu'à moins que nos axiomes les plus immédiatement évidents ne s'appliquent plus au-delà de Sirius et d'Aldébaran, nous devons conclure que le nombre des étoiles est fini ». D'autre part, il accepte que « le nombre des étoiles qui pourraient venir à l'existence est infini ». On voit donc qu'implicitement LEMAÎTRE admet l'existence du temps cosmique. Si les théoriciens de la cosmologie ont été amenés à en accepter l'hypothèse sans l'avoir délibérément voulu et simplement pour répondre aux exigences de la clarté mathématique, chez LEMAÎTRE, cette conviction est plus profonde et est liée à l'existence physique actuelle. Examinant

l'Univers de DE SITTER, il constate que la vacuité rend physiquement indifférent le partage entre l'espace et le temps; il déclare alors: « la présence de matière a pour effet de déterminer une partition naturelle de l'Univers en espace et temps » [16].

Sa prédilection pour les images concrètes était aussi une indication de sa théorie d'esprit réaliste. Nous le retrouverons plus loin en examinant sa théorie cosmogonique, mais elle est déjà évidente lorsqu'il interprète la constante cosmologique comme une force répulsive et elle est tout à fait significative lorsqu'il déclare: « Tout se passe comme si la matière avait horreur du vide, comme si le vide exerçait une force répulsive sur la matière » [16].

En situant la solution de LEMAÎTRE de 1927 dans le cadre des modèles de FRIEDMAN d'ailleurs inconnus de l'auteur à ce moment, il choisit le même paramètre qu'EINSTEIN en 1917, la même géométrie spatiale elliptique, et il montre qu'il existe une solution logarithmiquement asymptotique à celle d'EINSTEIN dans le passé et, par une expansion indéfinie, le raccroche à l'Univers de DE SITTER dans l'avenir. Peu satisfait par la singularité logarithmique, il modifie dans son travail la valeur de constante cosmologique en une valeur plus grande que celle d'EINSTEIN, pour aboutir à une solution où la métrique est singulière au temps $t=0$, admet une inflexion lorsque l'expansion a augmenté le rayon de l'Univers à la valeur du rayon d'équilibre d'EINSTEIN, et poursuit ensuite une expansion indéfinie du genre de l'Univers de de Sitter (voir fig. 1).

Tout naturellement, LEMAÎTRE a donc été amené à partir de ses considérations cosmologiques à développer une hypothèse cosmogonique. Mais il a fallu beaucoup d'audace en 1930 pour s'aventurer si loin. Depuis lors, la présomption traditionnelle de l'astronomie, que les objets célestes sont des formes permanentes, a été remplacée par le soupçon que, derrière toutes les apparences statiques du ciel, se cachent le mouvement et l'évolution. Indépendamment de ses relations avec la cosmologie, l'astrophysique tenant compte des pro-

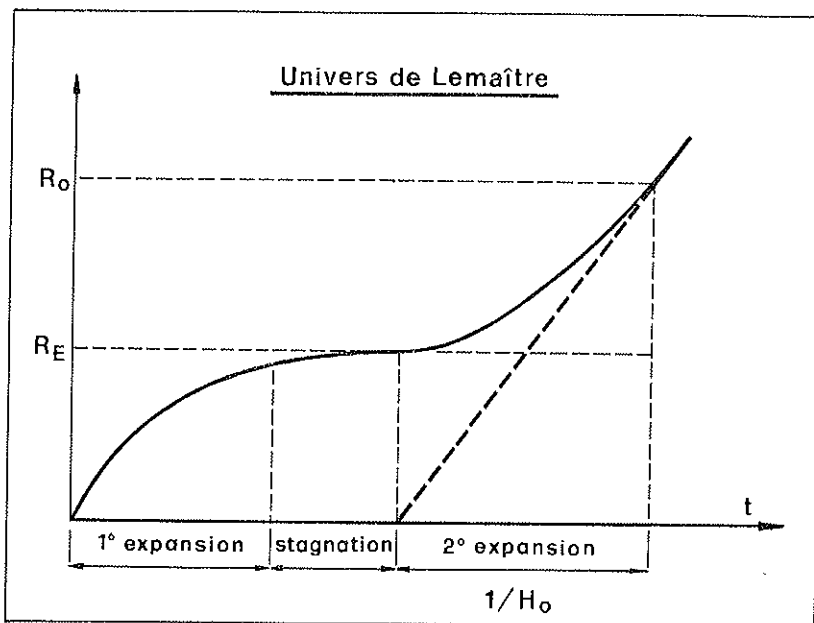


FIG. 1 — La durée de la stagnation varie beaucoup avec le choix de $\lambda > \lambda_E$

$$\lambda_E = \frac{1}{R_E^2} = \frac{2GM}{\pi C^2 R_E^3} \quad \text{où } R_E \text{ est le rayon d'univers d'équilibre d'Einstein.}$$

grès réalisés en physique, particulièrement en physique nucléaire, s'est aux problèmes de genèse et d'évolution.

Etoiles, systèmes planétaires, groupements d'étoiles de toute nature et de toutes dimensions sont considérés maintenant comme ayant un début, et éventuellement une fin, après avoir subi de multiples et profondes transformations. En fait, l'astrophysicien moderne, comme le Bourgeois Gentilhomme, fait de la cosmogonie sans le savoir. Tel n'était pas le cas au début du siècle; il faut remarquer que des savants aussi peu conformistes que EINSTEIN, DE SITTER, EDDINGTON, pour ne citer que les trois qui ont eu une influence prépondérante sur

l'œuvre de LEMAÎTRE, n'ont pas osé s'aventurer sur un terrain jugé trop glissant.

7. L'IRRÉVERSIBILITÉ DE L'ÉVOLUTION DE L'UNIVERS ET SON DÉBUT SINGULIER.

Pourtant, la théorie de l'irréversibilité physique existait déjà concrétisée dans le second principe de la thermodynamique et sous sa forme mathématique: l'augmentation de l'entropie. Rien, en principe, n'en limite la généralité, bien qu'il faille pour pouvoir l'appliquer, disposer des relations associant l'entropie d'un système en évolution aux grandeurs qui permettent de mesurer cette évolution.

L'application restreinte de ce second principe s'explique par l'existence d'une énigme non encore complètement résolue à l'heure actuelle. Comment, en composant des phénomènes élémentaires qui sont régis par des lois symétriques par rapport au temps, peut-on obtenir les phénomènes complexes qui obéissent à une loi d'irréversibilité?

La réponse, peut-être pas complètement satisfaisante, s'exprime: le second principe régit des phénomènes macroscopiques dans lesquels interviennent des nombres énormes d'éléments; l'irréversibilité est un effet de foule. C'est vers les arrangements macroscopiques les plus probables, c'est-à-dire ceux qui correspondent aux configurations microscopiques les plus nombreuses, qu'évoluent spontanément les systèmes physiques.

L'introduction du concept de probabilité a beaucoup gêné les physiciens et est responsable de la timidité dans l'application du second principe au domaine cosmique. Pourtant il est assez naturel de rattacher cette loi universelle d'irréversibilité à la plus indiscutable de toutes les évidences, que le temps passe et toujours dans le même sens.

Le phénomène du « red-shift » lui-même porte témoignage d'un processus d'usure de l'énergie, dont aucune contrepartie n'est observable sinon concevable. On peut le montrer concrè-

tement par référence à l'ensemble des relations: énergie, entropie, fréquence dans le rayonnement du corps noir. L'énergie du rayonnement noir enfermée dans un volume donné est proportionnelle à la quatrième puissance de la température, son entropie à la troisième; le rapport énergie-entropie est proportionnel à la température; pour une quantité donnée d'énergie, l'entropie est donc une fonction décroissante de la température; or la diminution de la température, donc l'augmentation de l'entropie, s'accompagne d'un décalage vers le rouge de l'ensemble du spectre du corps noir.

LEMAÎTRE avait saisi l'importance du second principe de la thermodynamique et en avait fait une des pierres fondamentales de son édifice cosmogonique. Bien que, depuis, la vérification de la dégradation d'énergie s'est toujours vérifiée non seulement à l'échelle locale, mais à l'échelle planétaire et même stellaire, il est curieux de constater combien nombreux sont ceux qui s'accrochent à l'idée d'un monde en équilibre thermodynamique souvent au moyen d'hypothèses *ad hoc* incontrôlables. Même si une partie de l'audacieuse construction de LEMAÎTRE s'effrite avec le temps, il ne lui en restera pas moins le mérite d'avoir attiré l'attention du monde savant sur l'évolution inéluctable et dans le même sens de l'Univers, avec ces deux corollaires d'origine et de fin. En conséquence, il est le premier à envisager une cosmogonie où l'Univers et le temps commencent dans un état singulier à distance finie dans le passé.

Dans cet état d'extrême condensation, quelles propriétés pouvaient avoir la matière et l'énergie? Quand il s'est posé la question en 1930, les seules particules élémentaires connues étaient l'électron et le proton; en particulier, le neutron n'avait pas encore été découvert et l'origine thermonucléaire du rayonnement solaire n'avait pas encore été établie.

Cependant, la théorie des quantas à ses débuts ouvrait des perspectives révolutionnaires. La radioactivité naturelle avec émission de rayonnement particulaire α (noyau d'hélium) et β (électron) laissait prévoir un essor considérable à la nou-

velle science de la physique nucléaire. Le rayonnement cosmique indiquait l'existence, à l'échelle cosmique, de phénomènes semblables à la radioactivité terrestre. Toutes ces connaissances le conduisirent à donner une signification nouvelle à l'évolution thermodynamique; la dégradation de l'énergie lui paraissait avoir le sens d'une pulvérisation en quantas de plus en plus nombreux et de plus en plus petits individuellement; d'autre part, la possibilité des transmutations nucléaires lui suggérait que la chaîne pouvait se continuer au-delà des éléments les plus lourds. Ainsi se forma l'idée de « l'atome primitif » avec ses caractères distinctifs de toute autre structure matérielle, structure nucléaire unique rassemblant toute la masse de l'Univers en un seul noyau unique, toute son énergie en un quantum unique. Était imaginée une « cosmogonie explosive » qui va du simple au complexe et d'une énergie noble à une énergie dégradée.

Pour apprécier toute la signification de l'atome primitif, citons ce qu'en disait LEMAÎTRE lui-même dans un de ses derniers exposés [17]: « Le commencement de la multiplicité signifie réellement le commencement du sens même de toute notion qui implique un grand nombre d'individus. L'espace et le temps sont des notions de cette sorte. Il se situe juste avant le commencement de l'espace et du temps qui acquièrent progressivement un sens tandis que la multiplicité croît assez; comme l'espace et le temps sont des instruments indispensables à la Physique, il se situe juste avant la Physique. C'est le fondement inaccessible de l'espacetemps ».

8. CRITIQUES DE L'ATOME PRIMITIF, LA CRÉATION CONTINUE.

Quelques vulgarisateurs, bien peu d'ailleurs de savants compétents, ont explicitement supposé une équivalence entre la singularité de sa théorie cosmogonique et le dogme chrétien de la création. Venant d'un ecclésiastique, elle paraissait pour des esprits non avertis comme une apologie de la création amenée par des raisonnements d'allure scientifique. Cette

position, erronée d'ailleurs, fit indubitablement tort à la théorie de LEMAÎTRE dont on ne peut cependant mettre en doute l'indépendance. Il se tut longtemps, mais au même congrès Solvay que nous venons de citer, il rompit le silence pour déclarer que sa théorie « est entièrement étrangère à toute question métaphysique ou religieuse », qu'elle « laisse le matérialiste libre de nier tout Etre transcendant » et que « pour le croyant, elle exclut toute tentative de familiarité avec Dieu, en accord avec la parole d'Isaïe parlant du Dieu caché » [18].

Un handicap plus sérieux à la théorie de LEMAÎTRE est le manque de développement physicomathématique de la partie la plus originale et la plus séduisante de sa cosmogonie: l'atome primitif et la première phase de l'expansion. Alors que la cosmogonie de la création continue de HOYLE attirait l'intérêt depuis 1950 par des développements physiques détaillés aboutissant à un corps de doctrine précisant le mécanisme de nucléosynthèse des éléments lourds dans les étoiles, LEMAÎTRE dans ses plus récents exposés de la théorie de l'atome primitif ne la précise pas davantage en utilisant les connaissances effectivement acquises depuis trente ans. Si on y regarde de plus près, on constate cependant que pendant cette période, les progrès ont été minces concernant l'état de la matière en extrême condensation comme elle devait l'être au début du temps.

On s'aperçoit d'ailleurs que les problèmes modernes d'astrophysique, où probablement règne une telle concentration, comme dans les étoiles « neutrons » ou dans les quasars, sont traités plutôt superficiellement. La théorie de HOYLE a l'avantage de s'appliquer à de la matière diluée ou en faible concentration au sujet de laquelle la physique nucléaire moderne a fait d'énormes progrès. Le quatrième état de la matière « le plasma » où les atomes sont dissociés en ions et électrons, nous a déjà reversé bien des surprises. Que penser du cinquième état, l'état nucléaire où les hautes températures et pressions rendaient les nucléons libres? Un physicien américain d'origine russe, GAMOV, brillant vulgarisateur par sur-

croît [19] et son équipe, ont essayé peu avant 1950 de définir l'état de la matière près de l'origine singulière en l'assimilant à un gaz de neutrons très dense et très chaud. Une analyse rigoureuse et fidèle aux données d'observation, d'une expansion rapide de cette matière originelle expliquait la formation des éléments atomiques par addition successive de neutrons [20]. Si cette théorie est convaincante pour la formation de l'hydrogène et de l'hélium, elle l'est moins pour la formation des éléments lourds, à cause de la manière un peu artificielle du franchissement de la barrière nucléaire de l'élément de nombre atomique trois: le lithium.

D'autre part, du point de vue cosmologique, GAMOV est plus vague, plus hésitant, moins rigoureux et s'écarte sous certains aspects des idées de LEMAÎTRE. Pour ma part, j'estime regrettable qu'une collaboration plus étroite n'ait pu s'établir entre les deux savants. LEMAÎTRE fut davantage un géomètre et un mécanicien plutôt qu'un physicien.

Il était cependant conscient que les problèmes de l'Univers ne pouvaient plus être traités en fonction de la seule loi de la gravitation, les découvertes de la microphysique ayant une inévitable incidence sur la représentation du Cosmos. Il l'a d'ailleurs fait comprendre dès 1931.

Par la suite, il eut l'impression que la physique des particules élémentaires n'était pas suffisamment au point pour définir plus rigoureusement la nature de la matière et du rayonnement primitifs et étudier en détail les premières phases de l'expansion de l'Univers. Il avait mis beaucoup d'espoir dans la « Fundamental Theory » [21] d'EDDINGTON pour comprendre la nature des processus atomiques à l'échelle cosmique, espoir déçu.

Avec le temps, le maintien de l'hypothèse de l'atome primitif, dans le sens littéral du mot, devenait difficile. La matière primitive, issue de l'explosion initiale dont les nuées avaient formé les protogalaxies, devait en toute vraisemblance contenir une abondance non négligeable d'éléments lourds. Or la prépondérance de l'hydrogène qui, avec l'hélium re-

présente plus de 90 % des abondances cosmiques, paraît ne pas cadrer avec cette interprétation du premier stade de l'expansion de l'Univers. Dans son article: L'énigme de l'hydrogène [22], LEMAÎTRE essaye d'en expliquer la formation par la matérialisation en hydrogène du rayonnement dont l'énergie devait être au début à peu près égale à celle de l'énergie matérielle. Cependant si la physique expérimentale a prouvé qu'il existe des transformations dans lesquelles la masse est transformée en énergie et réciproquement, la matérialisation de l'énergie est un phénomène bien plus rare que l'inverse et malheureusement le processus envisagé, qui aurait dû être très fréquent, ne se rattache pas apparemment à des phénomènes nucléaires connus.

Cette faiblesse de la théorie de LEMAÎTRE est la raison principale pour laquelle, à partir de 1950, la plupart des astronomes ont préféré la cosmogonie de la création continue. Celle-ci est en fait issue des théories cinématiques de MILNE [23] à partir desquelles BONDÍ et GOLD [24] ont élaboré une cosmologie déduite logiquement d'un nombre réduit d'axiomes, dont le principal est le « principe cosmologique parfait » affirmant l'existence d'un Univers homogène et stationnaire dans ses apparences à grande échelle, aussi bien que dans ses lois physiques. Non seulement, l'image du monde est identique pour tous les observateurs fondamentaux, mais encore pour un même observateur, elle est indépendante du temps. Du même coup, tombent toutes les difficultés résultant de l'état singulier initial; l'âge de l'expansion n'a plus qu'un sens relatif à l'observation: le monde est sans âge et il se renouvelle sans cesse; seuls ont un âge les processus locaux et partiels, bien que partout et incessamment le temps passe.

Si une telle théorie devait plaire aux partisans de la pérennité cosmique, si sa méthode de développement suivait la tendance moderne des mathématiques d'utiliser une axiomatique rigoureuse, en contrepartie, elle imposait une rupture complète avec la Relativité générale et à travers elle avec la physique classique. En particulier, la stationnarité associée à

l'expansion de l'espace conduit inévitablement à postuler la création continue de matière-énergie en opposition aux principes de conservation sur lesquels toutes les théories physiques s'étaient appuyées jusque là et qui avaient toujours été vérifiées expérimentalement.

Il est probable que cette théorie n'aurait pas eu une telle audience, si un astrophysicien et écrivain scientifique remarquable, F. HOYLE, ne l'avait adoptée dans ses grandes lignes et ne l'avait prolongée dans l'étude des processus nucléaires dans les étoiles. Comme la matière créée était de l'hydrogène à l'état très dilué, la grande abondance de l'hydrogène s'expliquait. Mais si une énigme était résolue, une autre apparaissait. C'était celle de l'hélium. Celui-ci, d'après cette théorie, se forme par combustion thermo-nucléaire à l'intérieur des étoiles. L'abondance en hélium dans l'Univers paraît beaucoup trop grande pour être expliquée par cet unique mécanisme. Cette grande abondance d'hélium est surtout difficile à expliquer pour certaines vieilles étoiles de population II, comparativement à celles plus jeunes de population I. Malgré des tentatives diverses de phénomènes nucléaires complexes ou de modification spectaculaire d'âges de la galaxie (de 6 jusqu'à 21 milliards d'années) [25], on est amené à accepter que la matière originelle, avant la formation des galaxies, contenait de l'hélium et que probablement cet hélium s'est formé par un processus du type de GAMOV dans une cosmogonie explosive apparentée à celle de LEMAÎTRE. Quant aux éléments plus lourds, il paraît bien établi qu'ils se sont formés par réactions nucléaires ultérieures, au centre des étoiles, pour être ensuite expulsés dans les milieux interstellaires par des processus continus ou explosifs.

9. LE RAYONNEMENT COSMIQUE.

Revenons à l'histoire de l'Univers telle que l'avait conçue initialement LEMAÎTRE. Dans son réalisme, il veut présenter des vestiges observables de la singularité; il les trouve dans

les rayons cosmiques primaires; l'isotropie de ces rayons paraissait suggérer naturellement l'image de particules parcourant les géodésiques de l'espace elliptique et accomplissant le « tour du monde » au moins aussi longtemps que le rythme de l'expansion ne rende le retour impossible. L'énorme énergie individuelle des rayons cosmiques primaires ne pouvait être conçue que si elle ne s'était pas dégradée par leur passage à travers des atmosphères stellaires. Leur origine était donc antérieure aux étoiles elles-mêmes. En supposant uniforme la densité des rayons cosmiques dans tout l'Univers, l'ensemble de leur énergie cinétique représente environ un dix millième de la totalité de la matière-énergie cosmique, proportion importante, d'autant plus qu'il faut tenir compte de la perte d'énergie résultant de l'expansion.

Espérant étayer sa théorie des rayons cosmiques à partir des observations à la surface de la Terre, il s'engage avec le Professeur VALLARTA et leurs élèves dans une série de recherches mathématiques. Les particules chargées électriquement formant le rayonnement cosmique primaire sont déviées par les champs magnétiques et en particulier, celui de la Terre. Continuant les calculs commencés par le géophysicien norvégien STÖRMER [26] pour expliquer les aurores boréales, LEMAITRE étudie les trajectoires de telles particules dans le champ d'un dipôle magnétique. Suivant les idées de POINCARÉ, il détermine les familles d'orbites singulières limitant des faisceaux de trajectoires qualitativement semblables et par l'application du théorème de LIOUVILLE, détermine la densité d'énergie dans les différentes directions d'où nous vient le rayonnement en tout point de la Terre [27]. Il y a montré une grande habileté mathématique à laquelle il a consacré de nombreux travaux, en particulier, concernant le problème des trois corps et surtout pour le calcul numérique où ses contributions sont intéressantes et originales.

Avec l'âge, il s'était de plus en plus passionné pour l'analyse numérique et toutes les aides mécaniques ou électroniques

au calcul. Sa grande capacité d'assimilation lui permettait de saisir rapidement les possibilités d'un nouvel outil de calcul.

Il n'avait pas son pareil pour établir un programme complexe et compliqué, et tirer d'une machine beaucoup plus et beaucoup mieux que ce pour quoi elle avait été prévue. Quand il s'était fixé un but, son acharnement, sa rapidité de pensée et sa puissance de travail étaient exceptionnels. S'il croyait avoir fait fausse route, alors brusquement il abandonnait et changeait de sujet, quitte à le reprendre quelque temps après avec une autre idée.

Mais revenons au rayonnement cosmique. Les progrès accomplis dans leur connaissance montrent qu'une partie importante de ce rayonnement peut s'expliquer par des phénomènes locaux et de formation récente. La relation entre la variation d'intensité des rayons cosmiques et celle de l'activité solaire montre que le rayonnement mou (de moindre énergie) est dû surtout au Soleil. Dans les étoiles et leurs enveloppes gazeuses, des mécanismes d'accélération ont été envisagés pour produire aussi un tel rayonnement. Ils pourraient être spécialement effectifs dans les enveloppes d'étoiles explosives comme les super novae. D'autre part, la présence confirmée de champs magnétiques dans la galaxie explique peut-être comment ils acquièrent par des effets d'accélération électromagnétique, une partie de leur énorme énergie cinétique. Les lignes de force magnétique, gelées dans la matière interstellaire en mouvement turbulent, auraient une structure très complexe et leur imposeraient des déviations en tout sens, pour leur conférer finalement cette remarquable isotropie qui est une de leurs énigmes. Si en conséquence, les rayons cosmiques sont retenus dans la galaxie, la densité d'énergie que nous leur connaissons ne vaut qu'à l'intérieur de la galaxie et n'exclut pas une densité quasi nulle dans l'espace intergalactique où seuls les rayons de très haute énergie (plus grande que 10^{15} e. v.) pourraient s'échapper.

L'importante proportion entre l'énergie condensée en rayons cosmiques et l'énergie totale de l'Univers serait pure-

ment illusoire. Bien que beaucoup de points restent obscurs et qu'une conclusion définitive soit prématurée, LEMAÎTRE avait abandonné sa théorie en ce qui concerne le rayonnement cosmique mou comme en fait fit sa déclaration au XI^e congrès Solvay [28]. Récemment, une radiation cosmique a été découverte pour des longueurs d'onde dans les environs de 7 cm [29] assimilable au rayonnement d'un corps noir à 3 °K d'une isotropie d'apparence parfaite et dont l'origine à partir de la structure actuelle de l'Univers paraît exclue. Ce rayonnement noir pour conserver son équilibre a dû se refroidir adiabatiquement au cours de l'expansion [30]. On en déduirait ainsi l'existence au début du temps d'un équilibre thermique à très hautes températures, certainement supérieures à 10^{10} °K entre la matière et un champ de radiation intense ayant les caractères du rayonnement noir. Ceci cadrerait assez bien avec l'hypothèse de GAMOV et comme corollaire prouverait la formation d'hélium primitif. Un jugement définitif sur toute la question est prématuré. On peut cependant conclure qu'à l'heure actuelle, la faveur des astronomes va de plus en plus à une origine explosive de l'Univers délaissant graduellement l'hypothèse de la création continue. L'hypothèse de LEMAÎTRE reste donc valable dans ses grandes lignes. Il est clair cependant que l'idée qu'il se faisait de l'atome primitif doit être revue et précisée en tenant compte des acquits de la physique moderne. Finalement, si ses travaux sur le rayonnement cosmique n'ont pas abouti aux résultats qu'il escomptait, ils ont cependant apporté une contribution importante en mécanique théorique et, exploités intelligemment, pourraient être à l'origine de développements intéressants en géophysique, en particulier en ce qui concerne les zones de VAN ALLEN.

10. FORMATION ET DISPERSION DES GALAXIES.

Examinons avec LEMAÎTRE, la phase suivante de l'évolution de l'Univers. A cause de l'expansion, les rayons corpusculaires divergeant avec des vitesses énormes, diminuent leur

vitesse propre par rapport au repère local de repos. Si R est le rayon de l'espace, la diminution se fait en $1/R$ [31]. Localement, les vitesses relatives des particules deviendront assez modérées au bout d'un certain temps pour ne donner lieu qu'à des chocs élastiques, sans phénomènes nucléaires ni émissions de radiations; étant électrisées, elles créent des champs magnétiques mobiles, qui captureront les corpuscules de faible vitesse relative [32]; ainsi se formeront localement des condensations avec un commencement d'équilibre statistique, donc très proche d'un gaz. Ces nuées gazeuses auront encore l'une par rapport à l'autre des vitesses considérables. L'expansion ensuite se ralentit au point que son action est à peu près équilibrée par la gravitation; pour un temps certainement long, l'Univers va se trouver dans un état voisin de celui de l'Univers statique d'Einstein. C'est pendant cette phase que se formeront les galaxies avec leur première génération d'étoiles. L'équilibre de l'Univers d'Einstein n'est pas exclusif d'irrégularités locales. A l'expansion globale, quasi nulle pendant toute cette période, vont donc s'ajouter des mouvements locaux de condensation dans les régions où la densité réelle l'emporte sur la densité d'équilibre. Au point de vue explication des condensations, le modèle de LEMAÎTRE offre un avantage sur les modèles de FRIEDMAN à constante cosmologique nulle.

Pour ces modèles, LIFSHITZ [33] a démontré que les condensations locales résultant d'une fluctuation fortuite de densité: elles sont vouées à se disperser, ou pour certaines d'entre elles à croître si lentement que ce mode de formation n'est pas concevable pour les galaxies. Le caractère de stagnation de l'Univers de Lemaître près du rayon d'équilibre (inexistant pour $\lambda=0$) et le manque d'équilibre thermodynamique entre les diverses nuées, lui permettent d'échapper à cette objection (Fig. 1).

LEMAÎTRE concentre ensuite son attention sur les amas de galaxies, qui constituent, pour lui, des fragments d'Univers ayant persisté dans l'état d'équilibre ou tout au moins à

expansion ralentie. Les grandes vitesses propres des galaxies composantes ne respectant pas le théorème du viriel, l'absence de condensations centrales nettes, la densité moyenne mille fois supérieure à peu près à la densité cosmique sont autant d'indices de l'exactitude de ce point de vue. Il envisage un modèle mécanique simple d'amas de nébuleuses [34] en considérant « une distribution de points matériels de symétrie sphérique où les points se déplacent sous l'action du champ gravifique global qu'ils engendrent et sous l'effet d'une répulsion qui tient compte de la modification apportée par la relativité aux lois de Newton. La distribution des points dans l'espace de phase, produit direct de l'espace proprement dit et de l'espace des vitesses, est supposée uniforme à l'intérieur d'un domaine. Cette condition perdure en vertu du théorème de Liouville et il suffit d'étudier les trajectoires correspondant aux points de la frontière du domaine d'espace de phase. Physiquement donc, LEMAÎTRE envisage un échange continu entre les galaxies dans le champ général et celles de l'amas qui garderait macroscopiquement le même aspect, mais avec des galaxies différentes au cours du temps. Malgré la simplification du modèle, celui-ci présente de grandes difficultés mathématiques qui n'ont été que partiellement vaincues. D'autre part, la structure des amas de galaxies à cause de leur éloignement est très loin d'être connue. S'il s'avère exact que les centres des amas contiennent plutôt des galaxies du genre ellipsoïdal, le modèle devra pouvoir l'expliquer et ne pas s'en tenir à un point de vue purement mécanique.

Nous serions donc dans une période d'expansion irréversible d'augmentation de l'entropie globale; la pulvérisation de l'énergie se poursuit jusqu'au moment où elle sera uniformément répartie dans l'espace. Alors disparaîtra la flèche thermodynamique du temps, alors l'Univers disparaîtra aussi car il sera impossible d'en distinguer un endroit plutôt qu'un autre. Résumons la cosmogonie de LEMAÎTRE par cette vision apocalyptique: « L'évolution du monde peut être comparée à un feu d'artifice qui vient de se terminer: quelques mèches rou-

ges, cendres et fumées. Debout sur une escarille mieux refroidie, nous voyons s'éteindre doucement les soleils et cherchons à reconstituer l'éclat disparu de la formation des mondes ».

II. COMPARISON AVEC L'OBSERVATION.

Malgré son caractère hautement spéculatif, la Cosmologie reste avant tout une science de la nature. Donnant une vue panoramique de l'Univers, ses conclusions devront être confrontées avec des données globales, s'étendant à tout le ciel ou au moins à de très vastes régions. Les instruments pénétrant le plus profondément dans l'espace n'observent que dans des champs très étroits; ils ne mesurent ni des temps, ni des longueurs, ni des quantités reliées aux énergies mécaniques. A partir de dénombrements, de mesures photométriques, de réceptions radioélectriques, d'analyses spectrales, résultats d'un nombre de sondages réduits, l'on devra reconstituer indirectement les grandeurs capables d'entrer dans les équations de la cosmologie théorique. Comme aux frontières du visible seuls les objets les plus brillants se détachent, un effet de sélection devra être corrigé. De l'échantillon minime, il faudra déduire avec toutes les ressources mais aussi en dépit de tous les traquenards des théories statistiques, les propriétés d'une population gigantesque et apprécier correctement l'erreur probable et le degré de confiance que l'on aura en général tendance à surestimer. Alors qu'en astronomie stellaire, les relations géométriques et physiques entre les grandeurs mesurables et les propriétés théoriques sont bien connues, ces relations ne sont plus valables telles quelles, en cosmologie, en raison de l'expansion et de l'éventuelle courbure de l'espace. Il faut donc les corriger, par tâtonnements ou en introduisant des hypothèses supplémentaires, avec le risque de créer un cercle vicieux. L'observation décisive, capable de révéler avec évidence une propriété indiscutable de l'Univers connu dans son ensemble, sera dans ces conditions un événement extrêmement rare. Le « red-shift » il y a quarante ans, a eu ce carac-

tère net et d'ailleurs tout à fait inattendu. Depuis lors, on a accumulé les données précisées les observations, reculé les bornes de l'observable, mais on n'a pas bouleversé la vision de l'Univers lointain. On peut se demander cependant si la Radio-astronomie n'est pas le catalyseur d'un nouveau bond en avant avec la découverte des températures. Mais on a toute raison de croire qu'elle ne détruira pas les éléments dominants du tableau cosmique actuel. En particulier, il reste acquis que le ds^2 de ROBERTSON [35] exprime les propriétés observées de l'Univers, bien qu'il donne lieu à des interprétations différentes:

$$ds^2 = c^2 dt^2 + \frac{R^2(t)}{\left(1 + \frac{k r^2}{4}\right)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

où r , θ , φ sont des coordonnées spatiales sphériques sans dimension, c la vitesse constante de la lumière.

Les deux caractéristiques cosmologiques sont:

1) le paramètre k pouvant prendre trois valeurs: -1 pour l'Univers hyperbolique ouvert et infini, 0 pour l'Univers euclidien plat et infini et $+1$ pour l'Univers elliptique fermé et fini.

2) le rayon d'Univers $R(t)$ s'interprétant dans le cas de l'Univers elliptique comme le rayon de l'hypersphère. $R(t) = \text{constante}$, est incompatible avec l'Univers observé. A l'échelle cosmique, les observations de l'astronomie peuvent être considérées comme instantanées à un temps t_0 . A partir de la fonction du temps $R(t)$, il est possible de déterminer deux paramètres théoriques convenant à la comparaison avec les données d'observation:

1) la constante de Hubble $H_0 = \dot{R}_0/R_0$ qui est l'inverse du temps d'expansion si celle-ci se faisait linéairement, c'est-à-dire de la même façon dans toute son histoire cosmique;

2) le paramètre de décélération $q_0 = -(\ddot{R}_0 \dot{R}_0) / \dot{R}_0^2$, quantité sans dimension, a le signe positif lorsque l'expansion se ralentit et négatif lorsqu'elle s'accélère.

La dernière estimation de ces deux paramètres par SANDAGE [36] donne: $H_0 = 75$ par seconde et par million de parsecs ($1/H_0 = 13,5$ milliards d'années) et $q_0 = 0,2$.

A première vue, la valeur de q_0 ne s'accorde pas avec l'Univers de Lemaître pour lequel ce paramètre aurait une valeur légèrement négative. Elle exclut tout à fait la cosmologie à création continue pour laquelle $q_0 = -1$. D'autre part, la statistique des radio-sources ne s'accorde probablement pas avec les prédictions de cette théorie [37]. En outre, la luminosité des galaxies très lointaines et donc très reculées dans le passé paraît plus grande que celle de l'Univers proche, ce qui contredit le principe cosmologique parfait, soit que cela soit interprété comme une différence de luminosité intrinsèque, soit plus vraisemblablement comme une expansion plus rapide à cette époque.

Revenons à la valeur q_0 pour mentionner qu'elle est très incertaine. En 1956, une évaluation de HUMASON, MAYALL et SANDAGE donnait 2,45. Cela n'a rien d'étonnant si, suivant nos remarques précédentes, on tient compte de toutes les possibilités d'erreur. Il serait peut-être plus raisonnable d'écrire $q_0 = 0,2 \pm 0,5$, ce qui n'exclurait pas à titre définitif toute expansion faiblement accélérée et, en particulier, l'Univers de Lemaître.

Comme il semble que seuls les modèles relativistes doivent être pris en considération et que ceux-ci s'expriment sous la forme de FRIEDMAN, écrivons-en l'équation:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = -k + \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\lambda}{3}$$

où G est la constante de gravitation et ρ la densité. Intervient donc un autre paramètre: la densité actuelle, ρ_0 . Un calcul

de OORT, généralement accepté, donnait en 1958 [38], la valeur minimale de $3,1 \times 10^{-31} \text{ g/cm}^3$. OORT admettait que ce nombre pouvait être augmenté d'un facteur dix ou estimation de 10^{-29} g/cm^3 paraît un maximum raisonnable.

On pourrait donc espérer évaluer les deux paramètres cosmologiques k et λ et finalement le modèle d'Univers. La détermination de k et λ est encore de beaucoup plus incertaine que celle de q_0 . MC VITTIE [39] retenant des valeurs plus grandes pour H_0 et q_0 avait opté pour un Univers hyperbolique $k = -1$ avec $\lambda < 0$, c'est-à-dire un Univers oscillant.

12. L'UNIVERS OSCILLANT.

Depuis les dernières découvertes liées à la radio-astronomie, la faveur des astronomes semble s'orienter vers le modèle d'Univers elliptique dit de FRIEDMAN-EINSTEIN (Fig. 2) en n'imposant pas cependant la constante cosmologique nulle. En tout cas, on ne peut apparemment pas échapper à la conclusion d'un début singulier de l'Univers. Même les cos-

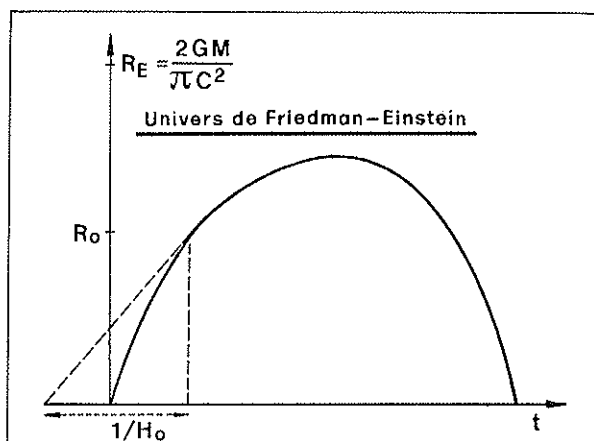


FIG. 2

mologies envisageant des anisotropies et des inhomogénéités, naturellement dans des limites raisonnables de vraisemblance, aboutissent aussi à des singularités initiales. Il faut pourtant se garder de prendre à la lettre cette réduction de l'Univers en un point. La théorie de cosmologie relativiste ne tient compte que de la gravitation et de quelques considérations thermodynamiques. Quand les nucléons sont très près les uns des autres, apparaissent des forces répulsives d'origine quantique, mais diminuant très rapidement avec la distance à tel point qu'elles n'entrent en jeu que dans les phénomènes de collision. Ces forces négligées en cosmologie empêchent la coïncidence totale des paquets de matière.

Que penser de ce modèle oscillant tel que DICKE et ses collaborateurs [40] l'ont exposé? Pour qu'il satisfasse aux deux valeurs de SANDAGE de H_0 et q_0 , il faut choisir une densité de 2 à 3×10^{-29} g/cm³, ce qui paraît beaucoup; quant à l'âge de l'Univers, il est réduit de la durée d'expansion linéaire de 13,5 milliards d'années à 7 milliards d'années, ce qui paraît définitivement trop court car il existe des amas d'étoiles dont l'âge est nettement supérieur à 15 milliards d'années. A ce point de vue, l'âge de l'Univers de Lemaître ne présente pas de difficulté, étant plus grand que celui de l'expansion linéaire; il serait de 20 milliards à 50 milliards d'années suivant la valeur donnée à la constante cosmologique et par conséquent à la période de stagnation.

Que penser aussi de cet état proche de la singularité initiale en équilibre thermodynamique à 10^{10} °K, c'est-à-dire dans un grand état de désordre, donc avec haute entropie? Faut-il en conclure que l'Univers n'en est pas à son premier cycle? Les phénomènes explosifs ne vont cependant pas de pair avec des états d'équilibre thermodynamique, comme le montre l'étude des centres actifs du Soleil avec ses protubérances éruptives et leurs prolongements dans les phénomènes de la couronne solaire. Partant d'un état de désordre, le désordre augmente encore, car les étoiles brûlent leur hydrogène en éléments lourd perdant de la matière transformée en énergie

rayonnée et dispersée dans l'espace, énergie de rayonnement qui augmentera très fort lors de la compression à la fin du cycle. Si on peut envisager lors de la compression, la transformation des cendres en hydrogène, si la matérialisation du rayonnement en paire électrons-positrons dans l'état hyper-dense n'est plus le phénomène rare des conditions actuelles, il y aura finalement un pompage résultant de l'énergie matérielle dans l'énergie de rayonnement. Donc, les cycles d'oscillation ne seront pas identiques entre eux et un tel modèle ne pourra éviter une évolution irréversible.

L'application du second principe de la thermodynamique d'un tel système fermé va donc présenter des difficultés. Si on admet l'hypothèse de DICKÉ de l'équilibre thermodynamique près de l'origine, nous avons affaire déjà une énergie initiale dégradée et nous n'en serions pas au premier cycle, ce qui paraît ne pas cadrer avec le rapport actuel relativement petit de l'énergie rayonnée par rapport à l'énergie matière. Ne devrait-on pas aussi s'attendre à avoir cette fois plus d'hélium que ce qu'on en trouve? Que penser de la définition du temps cosmique lorsque l'on passe d'un cycle à l'autre?

Ces difficultés liées à l'entropie nous ramènent à LEMAÎTRE qui y avait beaucoup réfléchi dès le début et y attachait beaucoup d'importance. Si l'on admet qu'en vieillissant, l'homme fait un retour sur lui-même et que pour un novateur, sa conception première est au mieux exprimée dans ses dernières pensées, je ne pourrais mieux faire que de citer ce qu'en avait écrit [41] Mgr LEMAÎTRE la veille de sa mort pour répondre à des questions posées par Radio-Canada: « On peut en effet se demander si le moment où le rayon de l'espace serait de zéro est vraiment un commencement de l'existence de la matière ou si, au contraire, elle n'a pas consisté en une sorte de rebondissement, l'expansion actuelle ayant été précédée par une contraction antérieure. J'ai donné à une telle éventualité le nom d'un Univers "phénix", puisque au moment du rebondissement toute structure antérieure aurait été annihilée dans le feu et qu'en rebondissant l'Univers reprendrait en

quelque sorte un nouveau départ, une nouvelle vie comme le phénix de la légende qui, paraît-il, renaissait de ses cendres.

« Une telle éventualité pose d'intéressant problèmes philosophiques. Toute structure du pré-Univers a été détruite et cet Univers est donc essentiellement inobservable, métaphysique, au plus mauvais sens que ce mot peut avoir.

« Néanmoins la question garde pourtant un certain sens physique, car il pourrait y avoir une grande différence entre l'état de la matière dans un Univers qui commence une nouvelle vie, je veux dire une nouvelle expansion, avec de la matière lésée qui a déjà servi antérieurement et un Univers vierge formé de matière neuve. Dans le premier cas la matière est entièrement dégradée, l'équilibre statistique, thermodynamique est réalisé, l'entropie est très grande. Dans l'autre cas, celui d'un véritable commencement, la matière neuve pourrait être dès le début plus différenciée; elle ne donnerait plus nécessairement lieu à une distribution gazeuse initiale, telle que la Nébuleuse de Laplace qu'il est si difficile, une fois qu'elle s'est formée, de découper pour aboutir aux galaxies et à leurs étoiles.

« Avec de la matière neuve l'uniformité du gaz de LAPLACE n'aurait jamais eu l'occasion de s'établir. Dès que le plasma primitif a pu donner lieu à du gaz, ces gaz se sont trouvés distribués en globules ou nuées distinctes et une des difficultés essentielles des cosmogonies anciennes s'évanouit d'elle-même.

« Ces idées prennent une forme plus marquée encore lorsqu'on les interprète au point de vue de la théorie des quanta, d'après laquelle l'énergie existe en un nombre fini de paquets distincts de quanta d'énergie. Grosso modo on peut dire que l'entropie est le nombre de quanta et que la dégradation de l'énergie n'est que l'inévitable pulvérisation: "les choses se cassent plus facilement qu'elles ne se raccomodent". Lorsque l'énergie est concentrée en fort quanta, les quanta de la lumière violette semblent doubles de ceux de la lumière rouge, cette énergie a des possibilités plus grandes. A l'usage elle se dégrade et tend fatalement vers un éparpillement total, une éga-

lisation parfaite de toute température où plus rien ne peut se passer. C'est sans doute l'état final du monde, pour autant qu'on puisse se le figurer.

« Au contraire, le commencement du monde peut être un état d'entropie minimum, un état où l'énergie n'existe que un nombre fort petit de quanta. Alors le début du rayon de l'espace pour un Univers vierge, un Univers qui n'est pas un rebondissement, un Univers qui commence véritablement, peut être un commencement de la multiplicité quantique, un état où l'énergie n'existe qu'en un seul paquet, et c'est cela qu'exprime l'idée d'atome primitif tel que je l'ai conçu en 1931 ».

13. CONCLUSION.

Voilà 50 ans qu'EINSTEIN a essayé de donner une explication globale de l'Univers, voilà près de 40 ans que LEMAÎTRE en a découvert le caractère dynamique et l'origine singulière; bien d'autres ont œuvré pour percer les mystères de la compréhension du Cosmos. Beaucoup de progrès ont été réalisés mais aucun modèle ne s'impose comme définitif, même dans ses grandes lignes. Celui de LEMAÎTRE, après des fortunes diverses, revient à l'avant-scène des considérations du monde savant. Certes, il faut rafraîchir les décors de l'atome primitif, il faut modifier l'éclairage du rayonnement cosmique, mais le canevas du scénario reste valable avec son prologue explosif, la lente formation du corps des galaxies et la dispersion finale du feu d'artifice cosmique.

REFERENCES

- [1] LEMAÎTRE G., *Ciel et Terre* 61, 1945, p. 1-11.
- [2] LEMAÎTRE G., *Ciel et Terre* 59, 1943, p. 1-16.
- [3] LEMAÎTRE G., *Ann. Soc. Scient. Brux.* 47A, 1927, p. 49-59.
- [4] EDDINGTON A.S., *The Mathematical theory of Relativity*. Cambridge 1923, p. 162.
- [5] LEMAÎTRE G., *The expanding universe*. *Monthly Notices of R.S.* 91, 1931, p. 483-501.
- [6] HUBBLE E.P., *The Realm of Nebulae*. Oxford 1936.
- [7] EDDINGTON A.S., *The mathematical theory of Relativity*. 1923, p. 162.
- [8] EINSTEIN A., *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeine Relativitätstheorie*. Cambridge, Sitz. der Preussischen Akademie (1917), p. 142-152.
- [8'] WEYL H., *Espace temps et matière*. (1922) Paris, Blanchard.
- [9] DE SITTER W., *On the relativity of inertia*. *Proceedings of the Koninklijke Akademie van Wetenschappen* 19 (1917), p. 1217-1225.
- [10] DE SITTER W., *On Einstein theory of gravitation and its consequences*. *Monthly Notices R.A.S.* 78 (1918), p. 28.
- [11] EINSTEIN A., *Kritisches zu einer von Herrn de Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen*. Sitz. der Königl. Preussisches Akademie (1918), p. 270-2.
- [12] FRIEDMAN A., *Über die Krümmung des Raumes*. *Zeitschrift für Physik* 10 (1922), p. 317 - FRIEDMAN A., *Z.P.* 21 (1924), p. 326.
- [13] EDDINGTON A.S., *The expanding Universe*. 1933, Cambridge.
- [14] LEMAÎTRE G., *The cosmological constant du livre*. Einstein, *Philosopher-Scientist*, New York « Tudor » 1949.
- [15] LEMAÎTRE G., *La grandeur de l'espace*. *Revue des Questions scientifiques*, 1929, p. 189-216.
- [16] LEMAÎTRE G., *L'hypothèse de l'atome primitif*. Neuchâtel, Griffon 1946, p. 65 et p. 105.
- [17] LEMAÎTRE G., *L'hypothèse de l'atome primitif et le problème des amas de galaxies* dans les comptes rendus du XI^e Congrès Solvay. « La structure et l'évolution de l'Univers ». Bruxelles, Stoop, 1958, 6.
- [18] LEMAÎTRE G., *La structure et l'évolution de l'Univers*, p. 7.
- [19] GAMOV G., *La création de l'Univers*. Traduction, Paris, Guéron 1956.

- [20] ALPHER R.A., BETHE H.A., GAMOV G., *The origin of the chemical elements*. Physical Review 73 (1948), p. 803 et Review of modern Physics 22 (1950), p. 153-212.
- [21] EDDINGTON A.S., *Fundamental theory*. Cambridge 1948.
- [22] LEMAÎTRE G., *L'énigme de l'hydrogène*. Bull. Cl. Sc. Acad. Royale de Belgique 34, 1948, p. 955-965.
- [23] MILNE E.A., *Kinematic Relativity*. Oxford 1948.
- [24] BONDI H., *Cosmology*. Cambridge 1952.
- [25] SCHWARZSCHILD M., International Astronomical Union Meeting (1961), Invited address.
- [26] STÖRMER C., *The Polar Aurora*. Oxford 1955.
- [27] en particulier avec VALLARTA M.S., *On the allowed cone of cosmic radiation*. Physical Review 50, 1936, p. 493-504.
- [28] LEMAÎTRE G., *Structure et évolution de l'Univers*. Stoops 1958, Bruxelles.
- [29] PENZIAS A. et WILSON R., Astrophys. J. 142, 419 (1965).
- [30] DICKE R.H., PEEBLES P.J.E., ROLL P.G. et WILKINSON D.T., Astrophys. J. 142, 414 (1965).
- [31] LEMAÎTRE G., *L'hypothèse de l'atome primitif*, p. 156.
- [32] LEMAÎTRE G., *Structure et évolution de l'Univers*, p. 18.
- [33] LIFSHITZ E., *On the gravitational stability of the expanding universe*. J. Phys. (U.R.S.S.) 10 (1946), p. 116.
- [34] LEMAÎTRE G., *Modèles mécaniques d'amas de nébuleuses*. Bull. Cl. Sc. Acad. Royale de Belgique 31, 1948, p. 551-565.
- [35] ROBERTSON H.P., *Relativistic Cosmology*. Review of modern Physics 5 (1933), p. 62.
- [36] SANDAGE A., Astrophys. J. 135, 349.
- [37] RYLE M. et CLARKE R.W., *An examination of the S.S. model in the light of some recent observations of radio sources*. Monthly notices 122 (1962), p. 349-361.
- [38] OORT J.H., *Structure et évolution de l'Univers*. Stoops Bruxelles 1958, p. 163-183.
- [39] VIRTIE MC, *Fact and Theory in Cosmology*. Londres Eyre 1961.
- [40] DICKE, *Gravitation and the universe*. Science Journal oct. 1966, p. 95.
- [41] Autorisé par la Radiodiffusion et Télévision Belge.

THE SCIENTIFIC WORK OF GEORGES LEMAITRE

PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC

At the time when LEMAITRE was beginning his career, science and philosophy had been overwhelmed by the principle of relativity, which had swept away long-cherished modes of thought and provided an entirely new outlook to dominate man's view of nature. LEMAITRE entered into the new discipline and soon began making contributions to it.

One of the main points of discussion at that time was simultaneity, which had lost its absolute significance. LEMAITRE considered a rigid solid, moving generally in curved space-time, and examined the problem of introducing a standard of simultaneity inside the solid, referring to its motion [1]. Two neighbouring points of space-time are defined to be simultaneous if the line joining them is orthogonal to the world-line of the matter. This local simultaneity can then be integrated along a line, giving a *line of simultaneity*, any two points of which are simultaneous with respect to this line joining them.

Now it may be that all lines joining two points give the same standard of simultaneity. There would then be a general meaning for simultaneity with respect to the solid. In such

Pontificiae Academiae Scientiarum Commentarii, vol. II, n. 11 pag. 1-20 (1968).

a case LEMAÎTRE calls the motion of class A. When this condition is not fulfilled the solid may still be a rigid one, with all distances measured along lines of simultaneity remaining constant, but any point can be simultaneous to any other by a suitable choice of the line of simultaneity joining them. LEMAÎTRE then calls the motion of class B. He made a study of all the possible kinds of motion of class B, elliptic, hyperbolic, loxodromic and parabolic.

In 1928 I introduced a relativistic wave equation for the electron having different transformation properties from the tensor equations that one had previously been confined to in relativity. Two papers of LEMAÎTRE are devoted to studying these transformation properties [2, 3].

There are various methods that one may use for building up the theory. EDDINGTON had previously developed one method, based on his system of pentads. LEMAÎTRE developed another, showing up some new transformation features of the equations.

LEMAÎTRE begins with a general antisymmetric 4×4 matrix $T_{\mu\nu} = -T_{\nu\mu}$. It can be expressed linearly in terms of six basic antisymmetric matrices, forming two sets A_1, A_2, A_3 and B_1, B_2, B_3 . They have the following properties, which LEMAÎTRE enumerates. (1) The square of each of them is unity. (2) The A 's anticommute and the B 's anticommute. (3) $A_1 A_2 A_3 = B_1 B_2 B_3 = i$. (4) Each A commutes with each B . (5) Each product $A_j B_k$ is symmetric. (6) The square of $A_j B_k$ is unity. (7) All the matrices $A_j B_k$ are linearly independent. (8) Two matrices $A_j B_k$ anticommute or commute according to whether they have or have not a common factor. A consequence of (7) is that the nine symmetric $A_j B_k$ together with the six antisymmetric A_j and B_k and the unit matrix form sixteen independent 4×4 matrices.

In terms of these matrices the wave equation may be written

$$\{A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + B_1 p_0 - imc B_3\} \Psi = 0.$$

The operator here is a special case of the general antisymmetrical 4×4 matrix

$$T = A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 + B_1 q_1 + B_2 q_2 + B_3 q_3 .$$

If we apply any transformation to the four Ψ 's, say $\bar{\Psi}^\mu = K^\mu_\nu \Psi^\nu$, or, in matrix notation, $\bar{\Psi} = K\Psi$, it corresponds to a transformation of T ,

$$\bar{T} = k'' T k' ,$$

where k' denotes the reciprocal matrix to k and k'' denotes the transpose of k . If we restrict the matrix k to be of determinant unity, then the determinant of T is invariant. The square root of this determinant is found to be

$$\sqrt{|T|} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2$$

The resulting transformation of the p 's and q 's is thus an orthogonal transformation in $3 + 3$ dimensions. The group of these transformations has fifteen independent rotations, corresponding to the fifteen independent 4×4 matrices apart from the unit matrix.

The LORENTZ transformations form a subgroup in which q_2 and q_3 remain invariant. LEMAÎTRE gives various examples of these transformations and connects up his work with EDINGTON'S. He also works out the LORENTZ coefficients in terms of the elements of k , thereby throwing new light on the LORENTZ transformation.

In his second paper LEMAÎTRE takes a slightly different starting point, building up his theory in terms of quadriquaternions, which are products of two independent kinds of quaternions. The basic elements are now similar to the previous A 's and B 's, all multiplied by i , so they satisfy $A_1 = A_2 A_3 = -A_3 A_2$, $A_1^2 = -1$, etc., and similarly for the B 's.

LEMAÎTRE introduces the quantities

$$D_1 = A_1 B_1, \quad D_2 = A_2 B_2, \quad D_3 = A_3 B_3,$$

$$\text{satisfying} \quad D_1 = D_2 D_3 = D_3 D_2, \quad D_1^2 = 1, \text{ etc.},$$

and also the quantities

$$S_1 = A_3 B_2, \quad S_2 = A_1 B_3, \quad S_3 = A_2 B_1,$$

$$\text{satisfying} \quad S_1 = S_2 S_3 = S_3 S_2, \quad S_1^2 = 1, \text{ etc.}$$

One can express the A's and B's in terms of the D's and S's. LEMAÎTRE further introduces the quantity

$$C = \frac{1}{4} (1 + D_1 + D_2 + D_3).$$

This has the property of absorbing the D's, according to

$$CD_1 = D_1 C = C, \quad C^2 = C.$$

Any quadriquaternion T can be expressed in term of S's and D's, and so TC can be written as

$$TC = (\Psi_0 + \Psi_1 S_1 + \Psi_2 S_2 + \Psi_3 S_3) C = \Psi, \quad \text{say.}$$

This is a special kind of quadriquaternion, involving just four numbers $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$. LEMAÎTRE calls it a final vector. Similarly $CT = \chi^*$ is an initial vector. A final vector and an initial vector have two kinds of product, an inner product $\chi^* \Psi = C \chi^* \Psi C$ and an outer product $\Psi \chi^* = \Psi C \chi^*$. Any quadriquaternion multiplied on the left into a final vector gives another final vector, and this allows it to be represented by a matrix. However there is no necessity to do so, and one can develop the whole theory as a symbolic calculus. LE-

MAÎTRE made further developments of his theory and again showed how to connect it with EDDINGTON's pentads.

Many new versions of the theory have been formulated since the early work of EDDINGTON and LEMAÎTRE. In particular, there is VAN DER WAERDEN's spinor analysis, which is extremely powerful.

COSMOLOGY.

LEMAÎTRE's main work lies in the realm of cosmology, the study of the structure of the universe as a whole. This is where his great contribution to science lies.

EINSTEIN started the modern development of cosmology by pointing out that his field equations, in their general form with the cosmological constant, allow the possibility of a finite universe which is closed and has no boundary. EINSTEIN's universe is static. It has a constant size. Now observations by HUBBLE showed that very distant objects, the spiral nebulae, are receding from us with velocities proportional to their distance. This leads one to believe that the universe is expanding and not static.

DE SITTER proposed another model for the universe, one that is very interesting mathematically and that does provide the expansion needed by HUBBLE's observations. But DE SITTER's universe has zero density for matter everywhere. It is empty. For this reason it is not physically acceptable.

A more powerful attack on the problem was made by FRIEDMAN. Instead of assuming a particular model, he considered generally a universe that is spatially homogeneous and isotropic, with a finite radius that varies with the time, and worked out all the possibilities that EINSTEIN's equations allow, obtaining various solutions for the way in which the radius can vary with the time. FRIEDMAN kept to the mathematics

and did not discuss whether any of his solutions could apply to the actual universe. For this reason his work did not arouse much immediate interest and was neglected by other cosmologists for many years.

LEMAÎTRE took up the subject [4] without knowing about FRIEDMAN's work. LEMAÎTRE continually had the physical conditions in mind and was striving for a theory of the real universe. He first considered the suitability of a homogeneous model. The real universe is far from homogeneous, the matter being mainly concentrated in stars, which are themselves concentrated in galaxies. But the galaxies seem to be distributed uniformly over the whole of space as far as we can see, apart from clustering, and are extremely numerous. LEMAÎTRE likens the galaxies to the molecules of a gas. Collisions are infrequent, so it is a rarified gas. One thus gets a homogeneous picture of the universe, allowing one to speak of a density of matter.

There will also be a uniform pressure, arising partly from the motion of the matter and partly from electromagnetic radiation. The part that arises from the motion of matter is very small compared with the energy density of the matter and LEMAÎTRE neglects it. The part that arises from electromagnetic radiation is also very small for the actual universe at the present time, but LEMAÎTRE retains it in his general theory, and uses it later on when he deals with stagnation.

Let p denote the electromagnetic pressure, so the electromagnetic energy density is $3p$. The total energy density is then $\rho = \delta + 3p$, where δ denotes the contribution of the matter. Let R denote the radius of the universe, varying with the time, so that the line element is

$$(1) \quad ds^2 = - R^2 d\sigma^2 + dt^2 ,$$

where $Rd\sigma$ is the elementary distance in three-dimensional space. LEMAÎTRE deduces from EINSTEIN's field equations

$$(2) \quad 3 \frac{R'^2}{R^2} + \frac{3}{R^2} = \lambda + k \rho$$

and

$$(3) \quad 2 \frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \lambda - k p ,$$

where $R' = dR/dt$ and λ is the cosmological constant, whose value is unknown. k is a known constant, whose value is 8π in natural units. Equation (2) is the same as FRIEDMAN's, and (3) is the same as FRIEDMAN's except for the pressure term, which FRIEDMAN did not take into account. These equations lead to the equation of conservation of energy

$$(4) \quad \frac{d\rho}{dt} + \frac{3R'}{R} (\rho + p) = 0 .$$

The relation between R and t can now be worked out,

$$(5) \quad t = \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{\lambda R^2}{3} - 1 + \frac{\alpha}{3R} + \frac{\beta}{R^2}\right)}} .$$

Here α is a constant connected with the total mass M ,

$$\alpha = k \delta R^3 = k M / \pi^2 ,$$

and β is a constant of integration associated with the pressure; $\beta = 0$ if $p = 0$.

For EINSTEIN's static universe there is a connection between the constants α and λ , namely

$$(6) \quad \alpha = 2/\sqrt{\lambda} .$$

LEMAÎTRE assumes this relation between the constants to hold

also for the general case (5). This gives, if we take $\beta = 0$ and put $\lambda = R_0^{-2}$,

$$(7) \quad t = R_0 \sqrt{3} \int \frac{dR}{R - R_0} \sqrt{\frac{R}{R + 2R_0}} \quad .$$

which can be integrated to give

$$(8) \quad t = R_0 \sqrt{3} \log \frac{1+x}{1-x} + R_0 \log \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3x+1}} + C \quad ,$$

where $x^2 = R/(R + 2R_0)$. This solution makes R increase steadily as t increases. Its initial value, occurring at $t = -\infty$, is R_0 . There is thus a steady expansion, with an infinite time since the start.

The expansion leads to a red-shift for distant matter, which one can easily work out. One finds that, for matter at a distance r , the velocity of recession is

$$v/c = R'r/R \quad .$$

From (5) and (6) with $\beta = 0$, one gets

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{R_0 \sqrt{3}} \sqrt{(1 - 3y^2 + 2y^3)} \quad ,$$

where $y = R_0/R$. Using HUBBLE's value for the red-shift and a value for R_0 determined from an estimate of the average density of matter in the universe, LEMAITRE calculated $y = 0.0465$, giving $R/R_0 = 21.5$.

LEMAITRE thus set up his first model, according to which the universe started off in the infinite past from some asymptotic radius R_0 , about 1/20 of the present radius, and expanded, at first very slowly, the rate of expansion tending to zero logarithmically as one goes back into the infinite past, then at an accelerating rate.

The model was obtained with the assumption of EINSTEIN's

relation (6) between the constants. One might try departing from this relation. LEMAÎTRE found that if the departure is at all considerable, one would have the expansion starting at a time of the order 10^9 years ago, which is the time provided by HUBBLE's constant if the expansion were approximately uniform. Now one of the big difficulties then confronting cosmologists was that stellar evolution required a much longer time than this. LEMAÎTRE therefore favoured his model, which pushed back the start of the expansion into the infinite past.

He subsequently modified this view, stating that it does not really help with the discrepancy to push back the start of the universe in this way, because in the early stages of the expansion all physical processes would take place extremely slowly, the rate slowing down logarithmically as one goes back to the infinite past. Thus the extra time in the early stages would not be available for much stellar evolution to occur. This kind of argument showed up LEMAÎTRE's appreciation of the need for understanding the physical significance of one's equations.

INITIATION OF THE EXPANSION.

LEMAÎTRE was interested in the question of what originally caused the expansion of a universe in equilibrium [5]. EDINGTON had suggested that the formation of condensations might be the cause. LEMAÎTRE found that condensations have no direct effect on the equilibrium. However, they lead to another effect, namely a diminution of the exchange of energy between distant parts of the universe, owing to kinetic energy no longer being able to wander freely, but having a chance of being captured by a condensation and then remaining bound to it. LEMAÎTRE calls this process *stagnation*.

To calculate the effect, LEMAÎTRE considers one particular condensation of spherical symmetry and averages over the other condensations so that they also have spherical symmetry.

There is then a neutral zone around the particular condensation, where its gravitation is balanced by the gravitational influence of the outside condensations. He calculates the expansion of this neutral zone, which gives a measure of the expansion of the universe as a whole. He gets the same equation as for the expansion of a homogeneous universe, except for having a different expression P replacing the pressure p .

Thus the condensation does not affect the expansion. However if there is stagnation, the expression P gets altered, and this does affect the expansion. Stagnation may thus start an expansion from a state previously in equilibrium.

In a further elaboration of his theory of perturbations in the homogeneous universe [6], LEMAITRE finds the possibility of a region ceasing to expand before the gravitation is completely balanced by the cosmical repulsion, so that the expansion is followed by a contraction. Thus collapsing regions can appear in a generally expanding space. Further, there is the possibility of equilibrium regions, which are unstable and divide into collapsing regions that remain approximately at the same distance from one another.

LEMAITRE suggests that the collapsing regions are the spiral nebulae and the equilibrium regions are the clusters of spiral nebulae. According to this hypothesis the mean density of all cluster should be the same and should be connected with HUBBLE's constant. LEMAITRE checks these results with observation and finds them to be approximately true.

THE PRIMEVAL ATOM.

The cosmological work discussed up to the present all follows according to established methods based on EINSTEIN's theory of gravitation. LEMAITRE was not satisfied with this orthodox approach and made a bold new departure, breaking away from accepted principles. He put forward the idea that the universe started from a single super-radioactive atom with

an extremely large mass. This idea was presented at a discussion on the evolution of the universe at a meeting of the British Association for the Advancement of Science in London in 1931 [7].

Previous speakers had brought up the difficulties arising from the usual theories of cosmology. The main difficulty was emphasized by DE SITTER, namely the discrepancy in the time scale required by the evolution of the stars and that provided by the expansion of the universe. DE SITTER concluded that there was not much connection between evolution and the expansion. Evolution must have started long before the expansion.

LEMAÎTRE pointed out how unsatisfactory such a dichotomy would be. He referred to his calculations showing that, as soon as condensations are formed in the uniform primeval gas, they will lead to stagnation, which must start the expansion. Thus evolution and the expansion must have started at the same time. This requires a complete revision of the accepted ideas of stellar evolution. In LEMAÎTRE words « *We need a fireworks theory of evolution. The last two thousand million years are slow evolution: they are ashes and smoke of bright but very rapid fireworks* ».

He then brought up the subject of cosmic rays. He pointed out that their energy is comparable with the total energy of matter, their ratio being perhaps 10^{-3} and certainly not less than 10^{-5} . If they originated before the expansion of space, their energy was then still larger. LEMAÎTRE considered that such high-energy cosmic rays could originate only in the stars, as only the stars would have enough energy. But the stars could not then have had an atmosphere, as the passage of the cosmic rays through an atmosphere would have degraded them. Thus the stars were born without atmosphere, probably some 10^{10} years ago, and their atmosphere evolved after the escape of the cosmic rays.

How can such stars have been formed? LEMAÎTRE propo-

sed that the stars were each originally a single atom of very high atomic mass, comparable to the mass of the star. Such an atom would undergo super-radioactive disintegration, the cosmic rays being then emitted. The greater part of the products of disintegration would be kept back by the gravitation of such a massive atom, although a small part would escape before the products of disintegration were numerous enough to form an atmosphere. So LEMAÎTRE states « *Cosmic rays are glimpses of the primeval fireworks of the formation of a star from an atom, coming to us after their long journey through space* ».

The energy of cosmic rays produced by such a tremendous disintegration must be extremely high, and one might wonder whether the observed energy of the cosmic rays is high enough to fit this hypothesis. One must take into account that the observed energy will not be the same as the original energy, but will be reduced in the ratio of the expansion of space. LEMAÎTRE estimated this ratio to be at least 20 and considered this adequate to avoid a discrepancy.

How does this explanation of the origin of cosmic rays appear in the light of presentday knowledge? On the basis of his theory LEMAÎTRE predicted that cosmic rays would not consist entirely of photons (as was believed in those days), but would contain fast β -rays and α -particles, and even new rays of greater masses and charges. This was later confirmed by observation. For the charged particles, we now know about the process of the synchrotron, which can accelerate them to very high energies. It is quite likely that suitable electric and magnetic fields exist in the galaxies to operate this process and thus generate some of the cosmic rays. But the energy attainable is not sufficient to account for the most energetic of the observed cosmic rays, and it may well be that not all the less energetic ones are produced in this way. There is thus a residue for which there is no known origin except a cosmical one, and presumably this would have to be somewhat on the lines

proposed by LEMAÎTRE, the rays originating at a time close to the origin of the universe when conditions were very different from what they are now.

The stars in LEMAÎTRE's theory would have various masses determined by the masses of the atoms from which they came. The luminosity would also be determined by the original mass, so there should be a connection between mass and luminosity. LEMAÎTRE did not work out this idea, but he hoped that it would provide an alternative explanation of the mass-luminosity relation (the RUSSELL diagram) not requiring such a slow evolutionary process as the usual theory.

From this discussion of stars and cosmic rays LEMAÎTRE proceeded to the climax of his theory — that the universe started with an extremely small radius, with all the mass concentrated in the form of a single atom. The whole activity and development of the universe comes from the radioactive disintegration of a single primeval atom. This was the natural conclusion to the argument that he had so painstakingly built up.

LEMAÎTRE gave us a fascinating exciting new picture of the universe in which the dominating theme is evolution. The universe had a definite beginning, an extremely active one, and conditions have gradually settled down to what we see today. There has been continual evolution from the fiery beginning. There are prospects for continuing evolution into the future, as far ahead as we can see. One may expect evolution on earth to proceed hand-in hand with cosmic evolution and to lead to a better and brighter future for all mankind.

One when I was talking with LEMAÎTRE about this subject and feeling stimulated by the grandeur of the picture that he has given us, I told him that I thought cosmology was the branch of science that lies closest to religion. However LEMAÎTRE did not agree with me. After thinking it over he suggested psychology as lying closest to religion.

Some time after this exciting work of LEMAÎTRE, a rival

and more prosaic view of the universe was put forward and received much support — the steady state cosmology. According to this view the universe had no origin, but has always existed much the same as it is now, and will continue so into the infinite future. The continual moving away of distant matter, as shown by the red-shift of the galaxies, is compensated by the continual creation of new matter. With this theory there can be no cosmic evolution. No essential change is taking place. I have never liked this view because of its denial of evolution, but still it enjoyed great popularity at one time, largely because it could be made to fit the observations and there was some interesting mathematics connected with it.

The development of radio-astronomy within the last few years has opened up new vistas and vastly increased our knowledge of distant parts of the universe. As a result, the steady state theory no longer fits the observations and has been abandoned. LEMAÎTRE's hypothesis of a violent beginning of the universe is now generally accepted. It is called big bang theory, by contrast to the steady state theory.

LATER WORK.

LEMAÎTRE has subsequently done a great deal of work on clusters of nebulae, and this has led him to a somewhat more detailed picture of the early stages of the universe [8]. He points out the difficulty of understanding the origin of clusters because of the large relative velocity of the nebulae in a cluster. Presumably the nebulae condensed from clouds of gas with similarly large relative velocities. At a sufficiently remote time in the past, when the radius of space was much smaller, these clouds would have been in contact. How could they then have acquired such large relative velocities?

To escape from the dilemma, we must suppose that at that time the clouds did not exist. In the remote past, ac-

According to LEMAÎTRE, there would only have been cosmic rays. If a small mass of gas were then formed in some way, it would absorb cosmic rays and would grow and form a cloud. Clouds that evolved like this would have enormous velocities, the velocities of the cosmic rays that happened to encounter one another sufficiently gently to make the first steps in the establishment of the clouds. Nearly all the cosmic rays would get absorbed by the clouds, only a small fraction, say 10^{-4} of them, escaping.

The early cosmic rays contained all kinds of atomic particles. There is a problem why the matter now observed in the stars is almost entirely hydrogen and helium. LEMAÎTRE supposed that there might have been some process of materialization which turned the very large kinetic energy of the early cosmic rays trapped by the clouds into hydrogen, or possibly helium. Such a process of materialization is not known in present-day physics, where we have conservation of barions, but still I think it is worth considering, because there is no certainty that conditions have not changed greatly since those early days.

With an evolutionary universe of the type proposed by LEMAÎTRE it is possible that the laws of nature are also evolving and are not so immutable as is usually supposed. Laws which are usually regarded as permanent may be changing at a rate too slow to show up in the laboratory, but large enough to require vast changes in our understanding of the early development of the universe. For example, it may be that the constant of gravitation is not really constant, but varies with the absolute time. This idea was first put forward by MILNE and I have favoured it because, with a suitable law for the variation, it provides an explanation of some of the very large numbers met with in nature.

There is not yet any reliable observational evidence to guide us in these questions, and for the present we must just try to find the most satisfying theory. Until recently the

popularity of the steady state theory has deterred people from working on such lines. But we may expect renewed activity here in the future with the resurgence of the big bang theory.

The measure of greatness in a scientific idea is the extent to which it stimulates thought and opens up new lines of research. In these respects we must rate LEMAITRE's cosmology of the highest calibre.

REFERENCES

- [1] « Phil. Mag. », 48, 164 (1924).
- [2] « Ann. Soc. Scient. », Bruxelles, 51, 83 (1931).
- [3] « Ann. Soc. Scient. », Bruxelles, 57, 165 (1937).
- [4] « Ann. Soc. Scient. », Bruxelles, 47A, 49 (1927), or « Monthly Notices of R.A.S. », 91, 483 (1931).
- [5] « Monthly Notices of R.A.S. », 91, 490 (1931).
- [6] « Proc. Nat. Acad. Sci », USA, 20, 12 (1934).
- [7] British Association Report 1931, p. 605, or « Nature Supplement », 128, 701 (1931). (The papers here are in a different order).
- [8] « Rev. Mod. Phys. », 21, 357 (1948).

L'UNIVERS EN EXPANSION

UN UNIVERS HOMOGENE DE MASSE CONSTANTE ET DE RAYON CROISSANT, RENDANT COMPTE DE LA VITESSE RADIALE DES NEBULEUSES EXTRA-GALACTIQUES

GEORGES LEMAITRE

I. GÉNÉRALITÉS.

La théorie de la relativité fait prévoir l'existence d'un univers homogène où non seulement la répartition de la matière est uniforme, mais où toutes les positions de l'espace sont équivalentes, il n'y a pas de centre de gravité. Le rayon R de l'espace est constant, l'espace est elliptique de courbure positive uniforme $1/R^2$, les droites issues d'un même point repassent à leur point de départ après un parcours égal à πR , le volume total de l'espace est fini et égal à $\pi^2 R^3$, les droites sont des lignes fermées parcourant tout l'espace sans rencontrer de frontière (¹).

Deux solutions ont été proposées. Celle de DE SITTER ignore la présence de la matière et suppose sa densité nulle. Elle conduit à certaines difficultés d'interprétation sur lesquelles nous aurons l'occasion de revenir, mais son grand intérêt est d'expliquer le fait que les nébuleuses extragalacti-

Ann. Soc. Scient. Bruxelles, 47 A, 1927, p. 49-59.

(¹) Nous considérons l'espace simplement elliptique, c'est-à-dire sans antipodes.

ques semblent nous fuir avec une énorme vitesse, comme une simple conséquence des propriétés du champ de gravitation, sans supposer que nous nous trouvons en un point de l'univers doué de propriétés spéciales.

L'autre solution est celle d'EINSTEIN. Elle tient compte du fait évident que la densité de la matière n'est pas nulle et elle conduit à une relation entre cette densité et le rayon de l'univers. Cette relation a fait prévoir l'existence de masses énormément supérieures à tout ce qui était connu lorsque la théorie a été pour la première fois comparée avec les faits. Ces masses ont été depuis découvertes lorsque les distances et les dimensions des nébuleuses extra-galactiques ont pu être établies. Le rayon de l'univers calculé par la formule d'EINSTEIN est d'après les données récentes quelques centaines de fois plus grand que la distance des objets les plus éloignés photographiés dans nos télescopes ⁽²⁾.

Les deux solutions ont donc leurs avantages. L'une s'accorde avec l'observation des vitesses radiales des nébuleuses, l'autre tient compte de la présence de la matière et donne une relation satisfaisante entre le rayon de l'univers et la masse qu'il contient. Il semble désirable d'obtenir une solution intermédiaire qui pourrait combiner les avantages de chacune d'elles.

A première vue, un tel intermédiaire n'existe pas. Un champ de gravitation statique et de symétrie sphérique n'admet que deux solutions, celle d'EINSTEIN et celle de DE SITTER, si la matière est uniformément répartie et n'est soumise à aucune pression ou tension intérieure. L'Univers de DE SITTER est vide, celui d'EINSTEIN a pu être décrit comme contenant autant de matière qu'il en peut contenir; il est étonnant que la théorie ne puisse fournir un juste milieu entre ces deux extrêmes.

⁽²⁾ Cf. Hubble E. Extra-galactic nebulae, *Ap. J.*, vol. 64, p. 321, 1926.
M^s Wilson Contr. N. 324.

Le paradoxe s'éclaircit lorsqu'on se rend compte que la solution de DE SITTER ne répond pas à toutes les nécessités du problème ⁽³⁾. L'espace y est bien homogène, de courbure positive constante; l'espace-temps aussi est homogène, tous les points de l'univers sont parfaitement équivalents; mais la division de l'espace-temps en espace et en temps ne respecte plus l'homogénéité. Les coordonnées choisies introduisent un centre auquel rien ne correspond dans la réalité; un point immobile au centre de l'espace décrit une géodésique de l'univers, un point immobile autre part qu'au centre ne décrit pas une géodésique de l'univers. Le choix des coordonnées rompt donc l'homogénéité qui existait dans les données du problème, de là proviennent les résultats paradoxaux qui apparaissent à l'« horizon » du centre. Lorsqu'on introduit des coordonnées et une division correspondante de l'espace et du temps res-

⁽³⁾ Cf. K. LANCZOS. — Bemerkung zur de Sitterschen Welt. *Phys. Zeitschr.*, vol. 23, p. 539, 1922, et H. WEYL. Zur allgemeinen Relativitätstheorie. Id., vol. 24, p. 230, 1923. Nous suivons ici le point de vue de Lanczos. Les lignes d'univers des nébuleuses forment une gerbe de centre idéal et d'hyperplan axial réel; l'espace normal à ces lignes d'univers est formé par les hypersphères équidistantes au plan axial. Cet espace est elliptique, son rayon variable étant minimum à l'instant correspondant au plan axial. Dans l'hypothèse de Weyl, les lignes d'univers sont parallèles dans le passé; les hypersurfaces normales représentant l'espace sont des horosphères, la géométrie de l'espace est donc euclidienne. La distance spatiale entre les nébuleuses augmente au fur et à mesure que les géodésiques parallèles qu'elles décrivent s'écartent l'une de l'autre, proportionnellement à e^t/R , où t est le temps propre et R le rayon de l'univers. L'effet Doppler est égal à r/R , où r est la distance de la source à l'instant de l'observation. Cf. G. LEMAÎTRE. Note on de Sitter's universe. *Journal of mathematics and physics*, vol. 4, n. 3, May 1925, ou *Publications du Laboratoire d'Astronomie et de Géodésie de l'Université de Louvain*, vol. 2., p. 37, 1925. Pour la discussion de la partition de de Sitter, voir P. DU VAL: Geometrical note on de Sitter's world. *Phil. Mag.* (6), vol. 47, p. 930, 1924. L'espace est formé d'hyperplans normaux à une droite temporelle décrite par le centre introduit, les trajectoires des nébuleuses sont les trajectoires orthogonales de ces plans, elles ne sont généralement plus des géodésiques et elles tendent à devenir des lignes de longueur nulle lorsqu'on s'approche de l'horizon du centre, c'est-à-dire de hyperplan polaire de l'axe central par rapport à l'absolu.

pectant l'homogénéité de l'univers, on trouve que le champ n'est plus statique, on obtient un univers de même forme que celui d'EINSTEIN, mais où le rayon de l'espace au lieu demeurer invariable varie avec le temps suivant une loi particulière (*).

Pour trouver une solution présentant simultanément les avantages de celle d'EINSTEIN et de celle de DE SITTER, nous sommes ainsi conduits à étudier un Univers d'EINSTEIN où le rayon de l'espace (ou de l'univers) varie d'une façon quelconque.

2. UNIVERS D'EINSTEIN A RAYON VARIABLE. ÉQUATIONS DU CHAMP DE GRAVITATION. CONSERVATION DE L'ÉNERGIE.

Tout comme pour la solution d'EINSTEIN, nous assimilons l'univers à un gaz très raréfié dont les nébuleuses extragalactiques forment les molécules; nous les supposons assez nombreuses pour qu'un volume petit par rapport à l'ensemble de l'univers contienne assez de nébuleuses pour que nous puissions parler de la densité de la matière. Nous ignorons l'influence possible de condensations locales. De plus, nous supposons que la répartition des nébuleuses est uniforme et donc que la densité est indépendante de la position.

Pour une variation arbitraire du rayon de l'univers la densité, uniforme dans l'espace, varie avec le temps. De plus,

(*) Si on se borne à deux dimensions, une d'espace et une de temps, la division d'espace et de temps utilisée par de Sitter peut être représentée sur une sphère: les lignes d'espace sont fournies par un système de grands cercles se coupant sur un même diamètre et les lignes temporelles sont les parallèles coupant normalement les lignes spatiales. Un de ces parallèles est un grand cercle et donc une géodésique, il correspond au centre de l'espace, le pôle de ce grand cercle est un point singulier correspondant à l'horizon du centre. La représentation doit naturellement être étendue à quatre dimensions et la coordonnée temporelle doit être supposée imaginaire, mais le défaut d'homogénéité résultant du choix des coordonnées subsiste. Les coordonnées respectant l'homogénéité reviennent à prendre pour lignes temporelles un système de méridiens et pour lignes spatiales les parallèles correspondants, alors le rayon de l'espace varie avec le temps.

la matière est, en général, soumise à des tensions qui, à cause de l'homogénéité, se réduisent à une simple pression uniforme dans l'espace et variable avec le temps. La pression est égale aux deux tiers de l'énergie cinétique des molécules, elle est négligeable vis-à-vis de l'énergie condensée dans la matière, il en est de même des pressions intérieures des nébuleuses ou des étoiles qu'elles contiennent; nous sommes donc conduits à poser $p=0$. Peut-être faudrait-il tenir compte de la pression de radiation de l'énergie rayonnante circulant dans l'espace; cette énergie est fort faible, mais elle est répartie dans tout l'espace et fournit peut-être une contribution importante à l'énergie moyenne. Nous garderons le terme p dans les équations générales en l'interprétant comme la pression de radiation moyenne de la lumière, mais nous poserons $p=0$, lorsque nous en viendrons à l'application aux phénomènes astronomiques.

Nous désignons par ρ la densité de l'énergie totale, la densité de l'énergie rayonnante sera $3p$ et la densité de l'énergie concentrée dans la matière est $\delta = \rho - 3p$.

Il faut identifier ρ et $-p$ avec les composantes T^4_4 et $T^1_1 = T^2_2 = T^3_3$ du tenseur d'énergie matérielle et δ avec T . Calculons les composantes du tenseur de RIEMANN contracté pour un univers d'intervalle

$$ds^2 = - R^2 d\sigma^2 + dt^2 \quad (1)$$

$d\sigma$ est l'élément de longueur d'un espace de rayon égal à un; le rayon R de l'espace est une fonction du temps. Les équations du champ de gravitation s'écrivent

$$3 \frac{R''}{R^2} + \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa \rho \quad (2)$$

et

$$2 \frac{R''}{R} + \frac{R'^2}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \lambda - \kappa p \quad (3)$$

Les accents désignent des dérivées par rapport à t ; λ est la constante cosmologique dont la valeur est inconnue et κ la constante d'Einstein égale à $1,87 \times 10^{-27}$ en unités C. G. S. (8π en unités naturelles).

Les quatre identités exprimant la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie se réduisent ici à

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3R'}{R}(\rho + p) = 0 \quad (4)$$

qui exprime la conservation de l'énergie. Cette équation peut donc remplacer (3). Elle est susceptible d'une interprétation intéressante. Introduisant le volume de l'espace $V = \pi^2 R^3$, elle peut s'écrire

$$d(V\rho) + p dV = 0 \quad (5)$$

et elle exprime que *la variation de l'énergie totale plus le travail effectué par la pression de radiation est égale à zéro.*

3. CAS OÙ LA MASSE TOTALE DE L'UNIVERS DEMEURE CONSTANTE.

Cherchons une solution pour laquelle la masse totale $M = V\delta$ demeure constante. Nous pourrions alors poser

$$\kappa\delta = \frac{\alpha}{R^3} \quad (6)$$

où α est une constante. Tenant compte de la relation

$$\rho = \delta + 3p$$

existant entre les diverses sortes d'énergie, le principe de conservation de l'énergie devient

$$3 d(pR^3) + 3p R^3 dR = 0 \quad (7)$$

dont l'intégration est immédiate; β désignant une constante d'intégration, nous avons

$$\kappa\rho = \frac{\beta}{R^4} \quad (8)$$

et donc

$$\kappa\rho = \frac{\alpha}{R^3} + \frac{3\beta}{R^4} \quad (9)$$

Substituant dans (2), nous avons à intégrer

$$\frac{R'^2}{R^2} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\kappa\rho}{3} = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{R^2} + \frac{\alpha}{3R^3} + \frac{\beta}{R^4} \quad (10)$$

ou

$$t = \int \frac{dR}{\sqrt{\frac{\lambda R^2}{3} - 1 + \frac{\alpha}{3R} + \frac{\beta}{R^2}}} \quad (11)$$

Pour α et β égaux à zéro, nous trouvons la solution de DE SITTER ⁽⁵⁾

$$R = \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \cosh \sqrt{\frac{\lambda}{3}} (t - t_0) \quad (12)$$

La solution d'EINSTEIN s'obtient en posant $\beta=0$ et R constant. Posant $R'=R''=0$ dans (2) et (3), il vient

$$\frac{1}{R^2} = \lambda \quad \frac{3}{R^2} = \lambda + \kappa\rho \quad \kappa\rho = \frac{2}{R^2}$$

donc

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad \kappa\delta = \frac{2}{R^2} \quad (13)$$

⁽⁵⁾ Cf. LANCZOS, *l. c.*

et d'après (6)

$$\alpha = \kappa \delta R^3 = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \quad (14)$$

La solution d'EINSTEIN ne résulte pas de la seule relation (14), il faut en outre que la valeur initiale de R' soit nulle. En effet, écrivant pour simplifier les écritures

$$\lambda = \frac{1}{R_o^2} \quad (15)$$

et posant dans (11) $\beta=0$ et $\alpha=2R_o$, il vient

$$t = R_o \sqrt{3} \int \frac{dR}{R - R_o} \sqrt{\frac{R}{R + 2R_o}} \quad (16)$$

Pour cette solution les deux équations (13) ne seront naturellement plus vérifiées. Si nous écrivons

$$\kappa \delta = \frac{2}{R_E^2} \quad (17)$$

nous aurons d'après (14) et (15)

$$R^3 = R_E^2 R_o \quad (18)$$

La valeur de R_E , rayon de l'univers déduit de la densité moyenne par la formule d'EINSTEIN (17), a été estimée par HUBBLE à

$$R_E = 8,5 \times 10^{28} \text{ cm.} = 2,7 \times 10^{10} \text{ parsecs} \quad (19)$$

Nous allons voir que la valeur de R_o peut se déduire de la vitesse radiale des nébuleuses; R pourra alors être calculé

par la formule (18). Nous montrerons ensuite qu'une solution introduisant une relation sensiblement différente de (14) conduirait à des conséquences difficilement admissibles.

4. EFFET DOPPLER DU A LA VARIATION DU RAYON DE L'UNIVERS.

D'après la forme (1) de l'intervalle d'univers, l'équation d'un rayon lumineux est

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R} \quad (20)$$

où σ_1 et σ_2 sont les valeurs d'une coordonnée caractérisant la position dans l'espace. Nous pouvons parler du point σ_2 où nous supposons localisé l'observateur et du point σ_1 où se trouve la source de lumière.

Un rayon émis un peu plus tard partira de σ_1 au temps $t_1 + \delta t_1$ et arrivera en σ_2 au temps $t_2 + \delta t_2$. Nous aurons donc

$$\frac{\delta t_2}{R_2} - \frac{\delta t_1}{R_1} = 0, \quad \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \quad (21)$$

où R_1 et R_2 désignent respectivement les valeurs de R aux temps t_1 et t_2 . t est le temps propre; si δt_1 est la période de la lumière émise, δt_2 est la période de la lumière reçue et δt_1 peut encore être considéré comme la période d'une lumière émise dans les mêmes conditions dans le voisinage de l'observateur. En effet, la période de la lumière émise dans des conditions physiques semblables doit être partout la même lorsqu'elle est exprimée en temps propre.

$$\frac{v}{c} = \frac{\delta t_2}{\delta t_1} - 1 = \frac{R_2}{R_1} - 1 \quad (22)$$

mesure donc l'effet Doppler apparent dû à la variation du rayon de l'univers. *Il est égal à l'excès sur l'unité du rapport des rayons de l'univers à l'instant où la lumière est reçue et à l'instant où elle est émise.* v est la vitesse de l'observateur qui produirait le même effet. Lorsque la source est suffisamment proche nous pouvons écrire approximativement

$$\frac{v}{c} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{dR}{R} = \frac{R'}{R} dt = \frac{R'}{R} r$$

où r est la distance de la source. Nous avons donc

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{cr} \quad (23)$$

Les vitesses radiales de 43 nébuleuses extra-galactiques sont données par STRÖMBERG ⁽⁶⁾.

La grandeur apparente m de ces nébuleuses se trouve dans le travail de HUBBLE. Il est possible d'en déduire leur distance, car HUBBLE a montré que les nébuleuses extra-galactiques sont de grandeurs absolues sensiblement égales (grandeur - 15,2 à 10 parsecs, les écarts individuels pouvant atteindre deux grandeurs en plus ou en moins), la distance r exprimée en parsecs est alors donnée par la formule $\log r = 0,2m + 4,04$.

On trouve une distance de l'ordre de 10^6 parsecs, variant de quelques dixièmes à 3,3 millions de parsecs. L'erreur probable résultant de la dispersion en grandeur absolue est d'ailleurs considérable. Pour une différence de grandeur absolue de deux grandeurs en plus ou en moins, la distance passe de 0,4 à 2,5 fois la distance calculée. De plus, l'erreur à craindre

⁽⁶⁾ Analysis of radial velocities of globular clusters and non galactic nebulae. *Ap. J.* Vol. 61, p. 353, 1925. *M^l Wilson Contr.* N. 292.

est proportionnelle à la distance. On peut admettre que pour une distance d'un million de parsecs, l'erreur résultant de la dispersion en grandeur est du même ordre que celle résultant de la dispersion en vitesse. En effet, une différence d'éclat d'une grandeur correspond à une vitesse propre de 300 Km. égale à la vitesse propre du soleil par rapport aux nébuleuses. On peut espérer éviter une erreur systématique en donnant

aux observations un poids proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, où r est la distance en millions de parsecs.

Utilisant les 42 nébuleuses figurant dans les listes de HUBBLE et de STRÖMBERG ⁽⁷⁾, et tenant compte de la vitesse propre du soleil (300 Km. dans la direction $\alpha=315^\circ$, $\delta=62^\circ$), on trouve une distance moyenne de 0,95 millions de parsecs et une vitesse radiale de 600 Km./sec., soit 625 Km./sec. à 10^6 parsecs ⁽⁸⁾.

Nous adopterons donc

$$\frac{R'}{R} = \frac{v}{rc} = \frac{625 \times 10^5}{10^6 \times 3,08 \times 10^{13} \times 3 \times 10^{10}} = 0,68 \times 10^{-27} \text{ cm}^{-1} \quad (24)$$

⁽⁷⁾ Il n'est pas tenu compte de N. G. C. 5194 qui est associé à N. G. C. 5195. L'introduction des nuées de Magellan serait sans influence sur le résultat.

⁽⁸⁾ En ne donnant pas de poids aux observations, on trouverait 670 Km./sec. à $1,16 \times 10^6$ parsecs, 575 Km./sec. à 10^6 parsecs. Certains auteurs ont cherché à mettre en évidence la relation entre v et r et n'ont obtenu qu'une très faible corrélation entre ces deux grandeurs. L'erreur dans la détermination des distances individuelles est du même ordre de grandeur que l'intervalle que couvrent les observations et la vitesse propre des nébuleuses (en toute direction) est grande (300 Km./sec. d'après Strömberg), il semble donc que ces résultats négatifs ne sont ni pour ni contre l'interprétation relativistique de l'effet Doppler. Tout ce que l'imprécision des observations permet de faire est de supposer v proportionnel à r et d'essayer d'éviter une erreur systématique dans la détermination du rapport v/r . Cf. LUNDMARK. The determination of the curvature of space time in de Sitter's world M. N., vol. 84, p. 747, 1924, et STRÖMBERG, *l. c.*

Cette relation nous permet de calculer R_o . Nous avons en effet par (16)

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{R_o \sqrt{3}} \sqrt{1 - 3y^2 + 2y^3} \quad (25)$$

où nous avons posé

$$y = \frac{R_o}{R} \quad (26)$$

D'autre part, d'après (18) et (26),

$$R_o^2 = R_E^2 y^3 \quad (27)$$

et donc

$$3 \left(\frac{R'}{R} \right)^2 R_E^2 = \frac{1 - 3y^2 + 2y^3}{y^3} \quad (28)$$

Introduisant les valeurs numériques de $\frac{R'}{R}$ (24) et de R_E

(19), il vient:

$$y = 0,0465.$$

On a alors:

$$R = R_E \sqrt{y} = 0,215 R_E = 1,83 \times 10^{28} \text{ cm.} = 6 \times 10^9 \text{ parsecs}$$

$$R_o = Ry = R_E y^{3/2} = 8,5 \times 10^{26} \text{ cm.} = 2,7 \times 10^8 \text{ parsecs}$$

$$= 9 \times 10^8 \text{ années de lumière.}$$

L'intégrale (16) se calcule facilement. Posant

$$x^2 = \frac{R}{R + 2R_o} \quad (29)$$

elle s'écrit

(30)

$$t = R_0 \sqrt{3} \int \frac{4x^2 dx}{(1-x^2)(3x^2-1)} = R_0 \sqrt{3} \log \frac{1+x}{1-x} + R_0 \log \frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1} + C$$

Si nous désignons par σ la fraction du rayon de l'univers parcourue par la lumière au temps t , nous avons aussi par (20):

$$\sigma = \int \frac{dt}{R} = \sqrt{3} \int \frac{2dx}{3x^2-1} = \log \frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1} + C'. \quad (31)$$

Nous donnons ci-dessous une table de σ et t en fonction de

$$\frac{R}{R_0}.$$

$\frac{R}{R_0}$	$\frac{t}{R_0}$	σ		$\frac{v}{c}$
		RADIANS	DEGRÉS	
1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	19
2	-4,31	-0,889	-51°	9
3	-3,42	-0,521	-30°	5 $\frac{1}{2}$
4	-2,86	-0,359	-21°	4
5	-2,45	-0,266	-15°	3
10	-1,21	-0,087	-5°	1
15	-0,50	-0,029	-1°7	$\frac{1}{2}$
20	0	0	0	0
25	0,39	0,017	1°	
∞	∞	0,087	5°	

Les constantes d'intégration sont choisies de telle sorte σ et t soient nuls pour $\frac{R}{R_0} = 20$ au lieu de 21,5. La dernière colonne donne l'effet Doppler calculé par la formule (22). D'après la formule approchée (23) $\frac{v}{c}$ serait proportionnel à r et donc à σ . L'erreur commise en adoptant cette équation n'est que de cinq millièmes pour $\frac{v}{c} = 1$. Elle peut donc être employée tant que le spectre reste visible.

5. SIGNIFICATION DE LA RELATION (14).

Nous avons introduit la relation (14) entre les constantes α et λ d'après la solution d'EINSTEIN. Cette relation est la condition pour que l'expression sous le radical au dénominateur de l'intégrale (11) admette une racine double R_0 donnant par intégration un terme logarithmique. Pour des racines simples, on obtiendrait par intégration une racine carrée et la valeur de R correspondante serait un minimum comme dans la solution (12) de DE SITTER. Ce minimum se produirait généralement é une époque de l'ordre de R_0 , soit 10^9 années, c'est-à-dire à une époque récente à l'échelle de l'évolution stellaire. Il semble donc que la relation existant entre les constantes α et λ doit être voisine de (14) pour laquelle ce minimum est rejeté à l'époque moins l'infini ⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ Si les racines positives devenaient imaginaires, le rayon varierait à partir de zéro, la variation étant ralentie au voisinage du module des racines imaginaires. Pour une relation sensiblement différente de (14), ce ralentissement serait faible et la durée de l'évolution à partir de $R = 0$ serait encore de l'ordre de R_0 .

6. CONCLUSION.

Nous avons obtenu une solution qui vérifie les conditions suivantes:

1. La masse de l'univers est constante et est liée à la constante cosmologique par la relation d'EINSTEIN

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2\pi^2}{\kappa M} = \frac{4}{R_0}$$

2. Le rayon de l'univers croît sans cesse depuis une valeur asymptotique R_0 pour $t = -\infty$.

3. L'éloignement des nébuleuses extra-galactiques est un effet cosmique dû à l'expansion de l'espace et permettant de calculer le rayon R_0 par les formules (24) et (25) ou approxi-

mativement par $R_0 = \frac{rc}{v\sqrt{3}}$.

4. Le rayon de l'univers est du même ordre de grandeur que le rayon R_E déduit de la densité par la formule d'EINSTEIN. On a

$$R = R_E \sqrt[3]{\frac{R_0}{R_E}} = \frac{1}{5} R_E$$

Cette solution concilie les avantages de celles de DE SITTER et d'EINSTEIN.

Remarquons que la plus grande partie de l'univers est à jamais hors de notre atteinte. La portée du grand télescope du Mont Wilson est estimée par HUBBLE à 5×10^7 parsecs soit

$\frac{1}{120} R$, l'effet Doppler correspondant est déjà de 3000 Km./sec. Pour une distance de $0,087R$, il est égal à un, toute la lu-

mière visible est rejetée dans l'infra-rouge. Il est impossible que se forment des images fantômes des nébuleuses ou des soleil parce que, si même aucune absorption ne se produisait, ces images seraient rejetées de plusieurs octaves dans l'infra-rouge et ne pourraient être observées.

Il resterait à se rendre compte de la cause de l'expansion de l'univers. Nous avons vu que la pression de radiation travaille lors de l'expansion. Ceci semble suggérer que cette expansion a été produite par la radiation elle-même. Dans un univers statique la lumière émise par la matière parcourt l'espace fermé, revient à son point de départ et s'accumule sans cesse. Il semble que là doit être cherchée l'origine de la vitesse d'expansion R'/R qu'EINSTEIN supposait nulle et qui dans notre interprétation est observée comme vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques.

SPACE AND ITS PROPERTIES

SIR ARTHUR STANLEY EDDINGTON

Dr. SILBERSTEIN's monograph ⁽¹⁾ is concerned with the hypothesis, now widely favoured, that space is not infinite, but is a closed domain analogous to the surface of a sphere. Besides giving a general account of this theory, it includes an exposition of certain views which have led him to an estimate of the "radius of space" much smaller than the estimates of other writers. Whatever reservations we may wish to make with regard to this controversial part of the work, the book as a whole can be cordially welcomed. It is written lucidly, vividly, and with keen flashes of insight. It can scarcely be read by a non-mathematical reader, but the mathematician is not delayed with details, and is guided quickly and racy to the interesting results. The style of expression brings to mind vividly its enthusiastic and impetuous author. The reader may not always agree, but he will enjoy disagreeing with so ingenious an advocate.

SILBERSTEIN rejects the spherical world of EINSTEIN and adopts that of DE SITTER. This is in accordance with general current opinion; and in any case DE SITTER's is the better working hypothesis, since it is the one which has interesting astronomical consequences. Whilst agreeing with his choice,

"Nature"; London, June 7th 1930.

(1) *The Size of Universe: Attempts at a Determination of the Curvature Radius of Spacetime*. London, Oxford University Press, 1930.

we cannot agree with the reason on which he lays most stress. He seems to regard it as a blemish of EINSTEIN's world that its equations do not admit of the insertion of a particle of matter (a masscentre), whereas DE SITTER's admits it. But, when examined, this superiority of DE SITTER's world is found to arise from the fact that it is entirely empty; the insertion of a gravitating particle does not upset its equilibrium because there is nothing to upset. When DE SITTER's idealised conception is modified into a practical astronomical universe, this supposed advantage is the first property to be discarded.

It is a feature of DE SITTER's world that every particle appears to be repelled from the observer with an acceleration proportional to the distance, so long as the distance is small compared with the radius of space. (The law of acceleration at large distances depends on the definition of distance adopted). In consequence of this, the symptom of world curvature that has been looked for by most authorities and used as the basis for estimating the size of the universe is a velocity of recession of distant objects increasing with the distance. This effect is shown markedly by the spiral nebulae, which are the most distant objects known. SILBERSTEIN differs from everyone else in taking the symptom to be an increase of average speed with distance, irrespective of whether the motion is receding or approaching; he uses for his material star clusters and even stars, which have no marked preponderance of receding velocities. In considering this divergence, it must be borne in mind that we know only the present velocities of celestial objects, and it is, of course, impossible to say that a particular instantaneous distribution of velocities is irreconcilable with any assumed field of force. The most we can do is to connect the field of force and the velocity distribution by some plausible theory of the origin and development of the present state of affairs. We have not space to describe SILBERSTEIN's claim to plausibility; it is ingenious but we do not find it convincing.

Some months ago Dr. SILBERSTEIN caused a mild sensation by announcing a radius of the universe so small that it left the astronomer scarcely room "to swing a cat in". This calculation is given by him in an appendix, it gives a mere 2,000,000 parsecs for the radius of space. (The nearest spiral nebula is distant about 300,000 parsecs). The result depends on stellar motions only. We naturally object that inasmuch as world curvature obviously does not explain the main features of stellar motions, it is unreasonable to suppose that it is the only effect to be considered in interpreting their minor correlations. In fact, the phenomenon attributed by SILBERSTEIN to space-time curvature appears to be one which is more usually ascribed to galactic rotation. His older value used in the main part of the book was eighteen times greater; and it demands considerable mental agility on the part of the reader who wishes to review the arguments in accordance with the reduced scale.

Three years ago a very substantial advance in this subject was made by Abbé G. LEMAÎTRE (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, April 25, 1927). Until recently, this paper seems to have been almost unknown, and we can scarcely blame Dr. SILBERSTEIN for being unaware of it; but it is unfortunate that the new point of view does not appear in his book. In particular it renders obsolete the contest between EINSTEIN's and DE SITTER's cosmogonies. We can now prove that EINSTEIN's universe is unstable. The equilibrium having been disturbed, the universe will progress through a continuous series of intermediate states towards the limit represented by DE SITTER's universe. By LEMAÎTRE's analysis the history of this progress can be studied; and the intermediate stages (one of which must represent the present state of the world) can be treated in detail.

L'UNIVERS EN EXPANSION

GEORGES LEMAITRE

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ.

Nous ne nous proposons pas dans ce travail de discuter les hypothèses sur lesquelles se fonde la théorie de l'expansion de l'Univers, ni la valeur des confirmations astronomiques qui l'étaient. Une telle discussion nous paraît actuellement prématurée et ne pourrait certes pas arriver à des conclusions définitives dans l'état actuel de la théorie et des observations.

La théorie peut être développée de deux façons: par l'étude de solutions exactes des équations de la gravitation, fournissant des modèles simplifiés, ou par le développement approché de la solution de problèmes plus complexes. Il nous paraît utile de ne pas mélanger ces deux méthodes, et dans ce travail nous ne nous occuperons que de solutions mathématiquement exactes. Lorsque nous voudrons les appliquer aux problèmes réels, nous aurons à faire appel à l'intuition physique pour réduire un problème trop complexe à un modèle simplifié, dont nous avons la solution. Plusieurs de nos résultats semblent pouvoir servir de points de départ à des méthodes de développement en série que nous espérons traiter dans un travail ultérieur.

Dans les deux premiers paragraphes, nous donnons en détail les calculs de tenseurs, dont nous aurons besoin, et que

nous résumons au § 3, en introduisant des notations qui mettent en évidence l'analogie des résultats relativistes avec les formules classiques.

Nous introduisons ensuite la notion de champ quasi-statique qui permet de généraliser immédiatement des solutions statiques connues en y permettant des variations adiabatiques. Nous donnons une solution probablement nouvelle pour le cas d'une sphère à pression radiale constante, et nous en servons pour mettre en évidence le paradoxe de SCHWARZSCHILD et montrer que la limitation plus sévère du rayon d'une masse donnée introduite par la solution du problème intérieur s'évanouit lorsqu'on n'impose pas à la matière la condition d'être à l'état fluide. Nous décrivons une mise en charge de l'Univers d'Einstein, supposé fluide où la masse propre de l'univers diminue sans que le volume varie, ni l'équilibre soit troublé.

Au § 6, nous résumons en les complétant des résultats obtenus dans notre thèse de doctorat (non publiée) présentée en 1927 au Massachusetts Institute of Technology et relatifs à une modification proposée par EDDINGTON au problème intérieur de SCHWARZSCHILD.

Le § 7 est relatif à l'influence de la formation de condensations locales sur la rupture de l'équilibre d'un Univers d'Einstein; nous retrouvons notre résultat (M. N. 91-1931-490) que la pression à la zone neutre est le facteur déterminant de la rupture d'équilibre en éliminant les complications techniques qui encombraient notre démonstration primitive.

Au § 8, nous étudions le développement de condensations sphériques dans l'univers en expansion, dans l'hypothèse où la pression est négligeable et retrouvons comme cas particulier l'Univers de Friedmann.

Nous intégrons ensuite, § 9, l'équation de FRIEDMANN par les fonctions elliptiques de WEIERSTRASS et mettons les équations sous une forme adaptée aux calculs numériques.

Au § 10, nous introduisons l'hypothèse que les amas de nébuleuses sont en équilibre. Cette hypothèse peut être vérifiée par l'observation, et le résultat est favorable. On obtient

comme masse moyenne des nébuleuses 7×10^8 fois la masse du soleil et comme coefficient d'expansion de l'univers 13.

Nous indiquons comment cette nouvelle hypothèse pourrait donner une signification cosmique à la fréquence relative des amas et des nébuleuses isolées et lever ainsi l'indétermination qui subsiste dans la loi de l'expansion. Nous calculons ensuite dans diverses hypothèses, la durée de l'expansion et le rayon de l'univers.

L'hypothèse de l'équilibre des nébuleuses semble exclure le cas critique pour lequel le rayon d'équilibre dépasserait de beaucoup le milliard d'années de lumière. Nous établissons le résultat que dans ce cas critique la distance à l'instant d'équilibre des points les plus éloignés qui peuvent échanger de la lumière au cours de l'expansion est encore de quelques milliards d'années de lumière.

Au § 11, nous écartons une contradiction apparente entre la théorie de Friedmann et la solution du problème extérieur de SCHWARZSCHILD. D'après cette dernière, une masse telle que celle de l'univers ne pourrait avoir un rayon inférieur à un milliard d'années de lumière. Nous montrons que la singularité du problème extérieur de SCHWARZSCHILD est une singularité apparente due au fait que l'on a imposé une solution statique et qu'elle peut être éliminée par un changement de coordonnées.

Au § 12, nous discutons la possibilité pour l'univers de passer le zéro théorique du rayon.

A l'aide d'un modèle anisotropique d'univers que nous a proposé EINSTEIN, nous montrons que l'anisotropie ne fait que précipiter la contraction. Analysant les diverses forces qui pourraient arrêter la contraction d'un univers où la valeur du rayon se précipiterait vers zéro, nous arrivons à la conclusion que seules les forces non-maxwelliennes qui défendent l'intercompénétration des particules ultimes de la matière, paraissent capables de mettre un terme à la contraction, lorsque la valeur du rayon de l'univers est réduite aux dimensions du système solaire.

Nous en concluons que l'origine de la terre est postérieure à un tel événement et cela nous force à écarter les solutions où le rayon de l'univers serait plus petit que le rayon d'équilibre et en particulier les solutions quasi-périodiques.

I. CALCUL DU TENSEUR DE RIEMANN.

Nous prenons comme point de départ l'étude des équations de la gravitation dans le cas très général d'une forme quadratique

$$(1.1) \quad ds^2 = a_1^2 dx_1^2 + a_2^2 dx_2^2 + a_3^2 dx_3^2 + a_4^2 dx_4^2 = a_\mu^2 dx_\mu^2,$$

où a_1, a_2, a_3, a_4 sont des fonctions des quatre coordonnées, et nous nous proposons d'écrire explicitement les équations de la gravitation

$$(1.2) \quad \kappa T_\mu^\nu + \lambda g_\mu^\nu = -R_\mu^\nu + \frac{1}{2} g_\mu^\nu R;$$

où

$$(1.3) \quad R_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} R_\nu^\sigma = -\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\alpha}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\nu\beta}^\alpha.$$

Les calculs se simplifient considérablement si on remarque que les a_μ , qui ne sont pas des tenseurs pour une transformation générale des coordonnées, sont pourtant des covariants du premier ordre pour des transformations spéciales de la forme

$$x'_\mu = c_\mu x_\mu,$$

où c_1, c_2, c_3, c_4 sont des constantes.

Pour ces transformations spéciales, les expressions

$$(1.4) \quad \alpha_{ik} = \frac{1}{a_i a_k} \frac{\partial a_i}{\partial x_k},$$

et

$$(1.5) \quad \alpha_{ikl} = \frac{1}{a_i a_k a_l} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_k \partial x_l}$$

sont des invariants. Nous devons donc nous attendre à ce que les dérivées ne figurent dans l'expression de R^i_i (sans sommation), que par les a_{ik} et a_{ikl} , puisque R^i_i est invariant pour les transformations spéciales.

Dans la suite, nous suspendrons la convention ordinaire de sommation pour des indices désignés par des lettres latines.

Les symboles de CHRISTOFFEL, qui ne sont pas identiquement nuls, sont ($i \neq k$)

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^i_{ii} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = a_i \alpha_{ii} \\ \Gamma^k_{ii} = -\frac{a_i}{a_k^2} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} = -\frac{a_i^2}{a_k} \alpha_{ik} \\ \Gamma^k_{ik} = \frac{1}{a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} = a_i \alpha_{ki} \end{array} \right.$$

Nous calculerons tout d'abord le tenseur de RIEMANN contracté R_{ii} $\mu=\nu=i$. Nous mettons en évidence dans les sommations les valeurs de l'indice sommatoire égale à i et celles k, l différentes de i et différentes l'une de l'autre, et remplaçons les symboles de CHRISTOFFEL par leurs valeurs (1.6).

Nous obtenons ainsi

$$R_i^i = \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{a_i}{a_k^2} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right] + \frac{1}{a_i^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right] \\
= \alpha_{ii} \alpha_{ii} - \alpha_{ii} \alpha_{ki} + \alpha_{ik} \alpha_{ik} + \alpha_{ik} \alpha_{kk} + \alpha_{il} \alpha_{kl} \\
+ \alpha_{ii} \alpha_{ii} - 2 \alpha_{ik} \alpha_{ik} + \alpha_{ki} \alpha_{ki}$$

Effectuant les dérivations et substituant par (1.4) et (1.5), il vient

$$(1.7) \quad R_i^i = \alpha_{ikk} + \alpha_{kii} - \alpha_{ii} \alpha_{ki} - \alpha_{ik} \alpha_{kk} + \alpha_{il} \alpha_{kl}$$

expression supposée sommée pour k et l différents de i et différents l'un de l'autre.

Cette expression peut s'écrire

$$(1.8) \quad R_i^i = \sum_k \beta_{ik}$$

où les β_{ik} sont supposés égaux à zéro pour $i=k$, et dont l'expression pour $i \neq k$ peut s'écrire d'après (1.4) et (1.5)

$$(1.9) \quad \beta_{ik} = \frac{1}{a_i a_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{a_k} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{a_i} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) + \sum_l \frac{\partial a_i}{\partial x_l} \frac{\partial a_k}{\partial x_l} \right]$$

la somme en l s'entendant pour les valeurs différentes de i et de k .

Le scalaire totalement contracté R s'obtiendra en faisant aussi la somme en i . Il contiendra deux fois chacun des β_{ik} et nous pourrons écrire

$$(I.10) \quad \frac{1}{2} R = \sum_{i < k} \beta_{ik}$$

Les équations de la gravitation (I.I) s'écrivent donc pour $\mu = \nu = i$

$$(I.11) \quad \kappa T_i^i + \lambda = \sum \beta_{kl}$$

où la sommation s'entend sans répétition ($k < l$) et pour les valeurs de k et l différentes de i , soit explicitement,

$$(I.12) \quad \begin{cases} \kappa T_1^1 + \lambda = \beta_{23} + \beta_{24} + \beta_{34} \\ \kappa T_2^2 + \lambda = \beta_{13} + \beta_{14} + \beta_{34} \\ \kappa T_3^3 + \lambda = \beta_{12} + \beta_{14} + \beta_{24} \\ \kappa T_4^4 + \lambda = \beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{23} \end{cases}$$

Il nous reste à calculer les composantes R_{ik} pour $i \neq k$. Employant la même méthode, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{R_{ik}}{a_i a_k} = & \frac{1}{a_i a_k} \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{a_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{a_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{a_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{a_l} \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \right) \right] \\ & - \alpha_{ik} \alpha_{ii} - \alpha_{ik} \alpha_{ki} - \alpha_{ik} \alpha_{li} \\ & - \alpha_{ki} \alpha_{kk} - \alpha_{ki} \alpha_{ik} - \alpha_{ki} \alpha_{lk} \\ & + \alpha_{ii} \alpha_{ik} + \alpha_{kk} \alpha_{ki} + 2\alpha_{ik} \alpha_{ki} + \alpha_{li} \alpha_{lk} \end{aligned}$$

soit, en effectuant les dérivations et substituant par (1.4) et (1.5),

$$\frac{R_{ik}}{a_i a_k} = \alpha_{lik} - \alpha_{li} \alpha_{ik} - \alpha_{lk} \alpha_{ki}$$

ou par (1.1)

$$(1.13) \quad -\kappa T_{ik} = \sum_l \frac{1}{a_l} \left[\frac{\partial^2 a_l}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{1}{a_k} \frac{\partial a_l}{\partial x_k} \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \right],$$

la sommation en l étant entendue pour les valeurs différentes de i et de k .

2. SYMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Par symétrie sphérique, nous entendons le cas où deux des coordonnées x_2 et x_3 ne figurent dans le ds^2 que par l'expression

$$(2.1) \quad dx_2^2 + \sin^2 x_2 dx_3^2$$

ou une expression équivalente.

Le ds^2 est alors invariant pour les transformations de x_2 et x_3 qui laissent invariante cette expression et qui forment le groupe des rotations d'une sphère de rayon un autour de son centre.

Dans ce cas a_1 , a_2 , a_4 ne sont fonctions que de x_1 et x_4 et

$$(2.2) \quad a_3 = a_2 \sin x_2.$$

Toutes les dérivées en x_3 sont donc nulles, ainsi que les dérivées en x_2 , sauf pour les dérivées premières,

$$(2.3) \quad \frac{\partial a_3}{\partial x_2} = a_2 \cos x_2.$$

Pour les dérivées secondes, on aura en particulier

$$(2.4) \quad \frac{1}{a_3 a_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{a_2} \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \right) = -\frac{1}{a_2^2}.$$

Les équations (1.9) deviendront donc

$$(2.5) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_{23} &= \frac{1}{a_2} \left[-1 + \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{a_4^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right)^2 \right] \\ \beta_{12} = \beta_{13} &= \frac{1}{a_1 a_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{a_4^2} \frac{\partial a_1}{\partial x_4} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right] \\ \beta_{24} = \beta_{34} &= \frac{1}{a_2 a_4} \left[\frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{1}{a_4} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right) + \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial a_4}{\partial x_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right] \\ \beta_{14} &= \frac{1}{a_1 a_4} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{a_1} \frac{\partial a_4}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_4} \left(\frac{1}{a_4} \frac{\partial a_1}{\partial x_4} \right) \right] \end{aligned} \right.$$

tandis que (1.13) donne

$$(2.6) \quad \begin{aligned} -\kappa T_{14} &= \frac{2}{a_2^2} \left[\frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_4} - \frac{1}{a_4} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \frac{\partial a_4}{\partial x_1} \right] \\ T_{12} &= T_{13} = T_{23} = T_{24} = T_{34} = 0 \end{aligned}$$

Les coordonnées x_1 et x_4 sont jusqu'à présent choisies d'une manière arbitraire.

Lorsque le tenseur matériel n'est pas nul, il y a une partition naturelle de l'espace et du temps imposée par la matière; on peut en effet déterminer des lignes d'univers, telles que si on choisit x_1 constant le long de ces lignes, on a $T_{14} = 0$. Les lignes x_4 constant sont alors les trajectoires orthogonales des lignes x_1 constant.

Dans la suite, nous nous attacherons à l'étude du champ lorsque les coordonnées ont été ainsi choisies.

Il importe de remarquer que cette façon de faire ne diminue en rien la généralité des résultats obtenus.

Dans certains cas, le choix des coordonnées peut être plus ou moins indéterminé. Il peut se faire aussi que l'introduction de ces coordonnées produise des singularités analytiques qui demanderont une étude spéciale.

Pour des coordonnées telles que $T_{14}=0$, il est commode de se servir du théorème de conservation

$$T_{\mu, \nu}^{\nu} = 0$$

qui donne les deux relations

$$(2.7) \quad \frac{\partial T_1^1}{\partial x_1} + \frac{2}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} (T_1^1 - T_2^2) + \frac{1}{a_4} \frac{\partial a_4}{\partial x_1} (T_1^1 - T_4^4) = 0$$

$$(2.8) \quad \frac{\partial T_4^4}{\partial x_4} + \frac{2}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} (T_4^4 - T_2^2) + \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_4} (T_4^4 - T_1^1) = 0,$$

exprimant le théorème de conservation de l'énergie et l'équation d'équilibre (quantité de mouvement égale à zéro).

Éliminant T_2^2 entre ces deux équations et groupant les termes en T_1^1 et en T_4^4 il vient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \frac{\partial T_1^1}{\partial x_1} + \frac{2}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} T_1^1 + \left(\frac{1}{a_4} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \frac{\partial a_4}{\partial x_1} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial a_4}{\partial x_4} \right) T_1^1 \\ &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial T_4^4}{\partial x_4} + \frac{2}{a_2} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} T_4^4 + \left(\frac{1}{a_4} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \frac{\partial a_4}{\partial x_1} + \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial a_4}{\partial x_4} \right) T_4^4 \end{aligned}$$

et utilisant (2.6) avec $T_{14}=0$, et multipliant par a_2^2 ,

$$(2.9) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left[T_1^1 a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right] = \frac{\partial}{\partial x_4} \left[T_4^4 a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right].$$

Ceci nous conduit à rechercher s'il n'existe pas une expression Φ des a et de leurs dérivées, telle que

$$(2.10) \quad T_1^1 a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_4} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_4}$$

$$(2.11) \quad T_4^4 a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}.$$

En raison de la symétrie qui subsiste dans nos formules entre les indices 1 et 4, il suffit de faire la démonstration pour un des deux cas, par exemple pour (2.11).

Nous avons, par (1.12) et (2.5),

$$\begin{aligned} (\kappa T_4^4 + \lambda) a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} &= (\beta_{21} + 2\beta_{12}) a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \\ &= -\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{2a_2}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right)^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{2a_2}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \frac{\partial a_1}{\partial x_4} \frac{\partial a_2}{\partial x_4}. \end{aligned}$$

Tenant compte de (2.6), ($T_{14}=0$), le dernier terme peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{2a_2}{a_1^2} \left[\frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \right] \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \\ &= \frac{2a_2}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right] = a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Il vient ainsi

$$(\kappa T_4^4 + \lambda) a_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ a_2 \left[-1 + \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right)^2 \right] \right\}$$

ce qui justifie le relation (2.11) avec

$$(2.12) \quad \Phi = \frac{a_2}{\kappa} \left[-1 + \frac{1}{a_1^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} \right)^2 + \frac{1}{a_4^2} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_4} \right)^2 - \frac{\lambda a_2^2}{3} \right]$$

3. SYMÉTRIE SPHÉRIQUE, RÉSUMÉ.

Avant de discuter les équations que nous venons d'obtenir et en montrer la signification et les analogies qu'elles présentent avec les formules de la mécanique classique, il nous faut reprendre ces résultats en employant des notations plus adaptées aux applications.

Considérons un ds^2 de la forme

$$(3.1) \quad ds^2 = -a^2 d\chi^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + c^2 dt^2;$$

— a^2 , — r^2 , c^2 sont les fonctions de $x_1 = \chi$ et $x_4 = t$ désignées précédemment par a_1^2 , a_2^2 , a_4^2 . Nous écrirons en outre

$$(3.2) \quad T_4^4 = \rho, \quad T_1^1 = -p, \quad T_2^2 = T_3^3 = -\tau.$$

La constante d'EINSTEIN est

$$\kappa = \frac{8\pi K}{c_0^2},$$

où K est la constante de la gravitation et c_0 la vitesse de la lumière. Au lieu de Φ , nous introduirons une fonction $m = -4\pi i \Phi$.

De cette manière, les équations (2.10) et (2.11) s'écrivent

$$(3.3) \quad 4 \pi \rho r^2 \frac{\partial r}{\partial \chi} = \frac{\partial m}{\partial \chi}$$

$$(3.4) \quad 4 \pi p r^2 \frac{\partial r}{\partial t} = - \frac{\partial m}{\partial t}$$

La première est l'équation classique entre la distance, la densité et la masse.

L'équation (2.12) peut s'écrire

$$(3.5) \quad \frac{c_o^2}{c^2} \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 = - c_o^2 \left[1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \chi} \right)^2 \right] + \frac{2 K m}{r} + \frac{\lambda c_o^2}{3} r^2.$$

Elle est analogue à l'équation classique de l'énergie sous l'action de diverses forces, parmi lesquelles on reconnaît la force newtonienne de gravitation.

L'équation (2.6), ($T_{14}=0$), peut s'écrire

$$(3.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a} \frac{\partial r}{\partial \chi} \right) = \frac{1}{ac} \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial c}{\partial \chi}.$$

En dérivant (3.5), en tenant compte de (3.4) et (3.6), on obtient, après simplification par $2 \frac{\delta r}{\delta t}$,

$$(3.7) \quad \frac{c_o}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c_o}{c} \frac{\partial r}{\partial t} \right) = \frac{c_o^2}{ca^2} \frac{\partial r}{\partial \chi} \frac{\partial c}{\partial \chi} - 4 \pi K p r - \frac{K m}{r^2} + \frac{\lambda c_o^2}{3} r.$$

Cette expression est particulièrement utile lorsque $\delta r / \delta t$ s'annule, auquel cas l'équation (3.4) devient illusoire. Il est aisé de montrer directement qu'elle s'applique encore dans ce cas.

Enfin, les théorèmes de conservation (2.7) (2.8) s'écrivent

$$(3.8) \quad \frac{\partial p}{\partial \chi} + \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial \chi} (p - \tau) + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \chi} (p + \rho) = 0,$$

$$(3.9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial t} (\rho + \tau) + \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial t} (p + \rho) = 0.$$

Sous cette forme, les équations deviennent remarquablement intuitives. La coordonnée χ est attachée à la matière et joue le rôle des valeurs initiales des coordonnées en hydrodynamique classique. r est analogue à la distance variable à l'origine; en fait, r est la distance qu'elle peut être estimée à partir de mesures normales au rayon vecteur. (3.5) et (3.7) sont alors les équations du mouvement de la matière, m correspondant à la masse intérieure à la sphère matérielle mobile de rayon χ .

L'équation (3.8) est analogue à l'équation d'équilibre, $\frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \chi}$ jouant le rôle de la force de gravitation résiduelle, décompte fait de la réaction d'entraînement.

4. CHAMPS QUASI-STATIQUES.

Considérons le cas où

$$\frac{\partial r}{\partial t} \equiv 0,$$

où donc la matière est en équilibre. Nous avons alors par (3.6)

$$\frac{\partial p}{\partial t} \equiv 0.$$

et par (3.4)

$$\frac{\partial m}{\partial t} \equiv 0,$$

et donc par (3.3) ou (3.9)

$$\frac{\partial a}{\partial t} \equiv 0,$$

Mais c n'est pas nécessairement indépendant du temps. C'est pour cette raison que nous désignons ce cas sous le nom de champ quasi-statique, par opposition aux champs statiques, où c est indépendant du temps ou peut en être rendu indépendant moyennant un changement de variable.

On a par (3.5)

$$(4.1) \quad a^2 d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2Km}{c_o^2 r} - \frac{\lambda}{3} r^2},$$

avec par (3.3)

$$(4.2) \quad 4\pi\rho r^2 = \frac{dm}{dr},$$

(3.7) devient

$$(4.3) \quad \frac{4\pi K}{c_o^2} p + \frac{Km}{c_o^2 r^3} - \frac{\lambda}{3} = \left(1 - \frac{2Km}{c^2 r} - \frac{\lambda}{3} r^2\right) \frac{1}{cr} \frac{\partial c}{\partial r},$$

tandis que (3.8) s'écrit

$$(4.4) \quad \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2}{r} (p - \tau) + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial r} (p + \rho) = 0.$$

Naturellement ces équations ne concernent que la partie mécanique du problème qui ne peut être déterminé que lorsque

nous avons quelque information sur le genre de matière à laquelle nous avons affaire. Nous disposons de quatre équations entre 6 variables a , ρ , p , τ , m et c ; il nous faut deux conditions supplémentaires. Par exemple, nous pourrions avoir affaire à un fluide

$$p = \tau$$

avec une répartition donnée de matière ρ en fonction de r .

5. DENSITÉ D'ÉNERGIE UNIFORME.

Considérons en particulier le cas où ρ est non seulement indépendant de t , mais aussi de χ . On peut alors, par un changement de variable, rendre a constant, et choisir la valeur de cette constante. Nous prendrons

$$(5.1) \quad \frac{1}{a^2} = \frac{8\pi K}{3c_o^2} \rho + \frac{\lambda}{3}$$

et obtenons par (4.1) et (3.3)

$$(5.2) \quad r = a \sin \chi$$

et (4.3) devient

$$(5.3) \quad \frac{4\pi K}{c_o^2} p + \frac{1}{2a^2} - \frac{\lambda}{2} = \frac{\cot \chi}{a^2 c} \frac{\partial c}{\partial \chi}.$$

Pour un fluide, (4.4) devient

$$(5.4) \quad \frac{\partial p}{\partial \chi} + \frac{1}{c} \frac{\partial c}{\partial \chi} (p + \rho) = 0,$$

d'où, puisque ρ est constant,

$$\frac{4\pi K}{c_0^2} (p + \rho) = \frac{f_1(t)}{c a^2}.$$

Substituons dans (5.3), en tenant compte de (5.1), et intégrons, il vient

$$(5.5) \quad c = f_1(t) - f_2(t) \cos \chi.$$

Nous obtenons donc

$$(5.6) \quad ds^2 = -a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] + [f_1(t) - f_2(t) \cos \chi]^2 dt^2$$

avec

$$(5.7) \quad 3\kappa\rho = \frac{3\kappa\rho f_2(t) \cos \chi - (\kappa\rho - 2\lambda) f_1(t)}{f_1(t) - f_2(t) \cos \chi}.$$

La pression peut être nulle pour

$$(5.8) \quad \cos \chi_1 = \frac{(\kappa\rho - 2\lambda) f_1(t)}{3\kappa\rho f_2(t)}$$

et infinie pour

$$(5.9) \quad \cos \chi_0 = \frac{f_1(t)}{f_2(t)}.$$

Lorsque les fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$, ou du moins leur rapport, se réduisent à une constante, on retrouve les résultats connus de SCHWARZSCHILD.

Pour $f_2(t) = 0$ et $\kappa\rho = 2\lambda$, nous obtenons l'univers d'Einstein. Si nous faisons varier $f_2(t)$, nous obtenons une mise en

charge progressive de l'univers, la pression variant suivant la loi

$$(5.10) \quad p = \frac{\rho f_2(t) \cos \chi}{f_1(t) - f_2(t) \cos \chi}.$$

On peut imaginer cette pression exercée à l'origine $\chi=0$, et se répartissant dans le fluide incompressible en maintenant l'équilibre. La pression diminue à partir du centre, pour

s'annuler au plan polaire $\chi = \frac{\pi}{2}$ de ce centre.

Les choses se passent différemment pour un univers d'Einstein de forme simplement elliptique, ou pour un univers avec points antipodaux distincts. Dans ce dernier cas, χ varie de 0 à π et la pression est différente de part et d'autre du plan

$\chi = \frac{\pi}{2}$; elle est négative dans l'autre moitié de l'espace,

et différente en valeur absolue en des points correspondants.

Ces résultats sont naturellement sans intérêt direct pour l'étude de l'univers réel qui ne peut en rien être assimilé à un fluide incompressible. Ils ont pourtant l'intérêt de montrer comment l'univers peut rester en équilibre, quoique sa masse propre varie.

Celle-ci se calcule aisément; on a

$$M(\chi) = \int_0^\chi 4\pi a^3 (\rho - 3p) \sin^2 \chi \, d\chi,$$

où p est donné par (5.10).

Posant

$$\sin \beta = \frac{f_2(t)}{f_1(t)},$$

on trouve

$$M(\chi) = 4\pi a^3 \rho \left\{ \left(2 - \frac{3}{\sin^2 \beta} \right) \chi - \sin 2\chi - \frac{3 \sin \chi}{\sin \beta} + 6 \frac{\cos \beta}{\sin^2 \beta} \arctan \left[\operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \right] \right\}$$

et pour la masse propre de l'univers à points antipodaux distincts

$$M(\pi) = 2\pi^2 a^3 \rho \left(1 - 3 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} \right).$$

Pour $f_1 = 0$, et $\rho = 0$, nous obtenons l'univers de de Sitter.

Une conséquence de la solution intérieure de SCHWARZSCHILD est, qu'elle semble imposer pour le rayon minimum d'une sphère de masse donnée, une limite plus sévère que celle imposée par le problème extérieur.

Cette limite s'obtient pour

$$f_1(l) = f_2(l),$$

auquel cas la pression est infinie au centre.

On a alors (pour $\lambda = 0$) par (5.8)

$$\cos \chi_1 = \frac{1}{3},$$

d'où, pour le rayon correspondant,

$$r = a \sin \chi_1 = a \sqrt{8/9},$$

tandis que le problème extérieur permettrait un rayon aussi voisin que l'on veut de a .

Cette limitation provient uniquement de ce que l'on a supposé la matière fluide.

Considérons, en effet, de la matière se soutenant comme le fait une voûte sous l'action de tensions transversales. La pression radiale p peut être nulle ou plus généralement constante.

Dans ce cas, l'équation (5.3) peut encore être intégrée et donne

$$c = f_3(t) [\cos \chi]^{-\frac{1}{2}(1 - \lambda a^2 + \kappa p a^2)},$$

tandis que l'équation d'équilibre (3.8) donne

$$\tau - p = \frac{\operatorname{tg} \chi}{2c} (p + \rho) \frac{\partial c}{\partial \chi},$$

soit

$$\tau - p = \frac{\operatorname{tg}^2 \chi}{4} (\rho + p) (1 - \lambda a^2 + \kappa p a^2).$$

En particulier pour $p=0$ et $\lambda=0$, on a

$$(5.11) \quad ds^2 = -a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] + f_3^2(t) \frac{dt^2}{\cos \chi}$$

avec

$$(5.12) \quad \tau = \frac{\rho}{4} \operatorname{tg}^2 \chi \quad \text{et} \quad \kappa \rho = \frac{3}{a^2}.$$

On peut donc construire une sphère soutenue par tensions transversales et qui remplit l'espace aussi complètement que l'on veut.

La limite inférieure du rayon pour une masse donnée est donc déterminée par le champ extérieur et non par la

solution du problème intérieur, si on n'impose pas à la matière l'état fluide. Les deux solutions peuvent être combinées. On peut imaginer un liquide, de l'eau par exemple, dont une partie est gelée et forme des sphères concentriques de glace se soutenant indépendamment les unes des autres par tensions normales. Ces sphères sont alors adiabatiquement fondues à partir du centre donnant le fluide de SCHWARZSCHILD. La solution de SCHWARZSCHILD peut à chaque instant être raccordée à la solution $p=0$ en choisissant convenablement les valeurs des fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. On peut ainsi augmenter progressivement le rayon de la région fondue jusqu'à ce que la pression centrale devienne infinie et le problème de SCHWARZSCHILD n'ait pas de solution. Ceci met clairement en évidence la nature vraiment paradoxale du résultat de SCHWARZSCHILD.

6. PROBLÈME D'EDDINGTON.

EDDINGTON a suggéré que l'on pouvait plus naturellement considérer pour le problème de la sphère fluide homogène, le cas où la densité de masse propre

$$(6.1) \quad \delta = T = T_4^4 + 3T_1^1 = \rho - 3p$$

et non ρ est considérée comme constante.

Les équations du problème sont, éliminant c entre (4.3) et (4.4)

$$(6.2) \quad \frac{4\pi K}{c_o^2} p + \frac{Km}{c_o^2 r^3} - \frac{\lambda}{3} = - \left(1 - \frac{2Km}{c_o^2 r} - \frac{\lambda}{3} r^2 \right) \frac{1}{\delta + 4p} \frac{\partial p}{r \partial r}$$

$$4\pi(\delta + 3p)r^2 = \frac{dm}{dr}$$

où les deux fonctions inconnues sont p et m .

Il est commode d'employer au lieu de m , la pression moyenne q définie par

$$q = \frac{3}{r^3} \int_0^r p r^2 dr.$$

On a alors

$$m = \frac{4\pi r^3}{3} (\delta + 3q).$$

Si nous posons

$$(6.3) \quad \frac{\kappa p - \lambda}{x} = \frac{\kappa q - \lambda}{y} = \frac{\kappa \delta + 4\lambda}{12} = \frac{u}{r^2},$$

les équations deviennent

$$(6.4) \quad \frac{dx}{du} + \frac{(x+y+4)(x+3)}{1-(y+4)u} = 0$$

$$(6.5) \quad \frac{dy}{du} + \frac{3}{2} \frac{y-x}{u} = 0.$$

Les solutions, $x=y=-2$, $x=y=-3$ correspondent respectivement aux Univers d'Einstein et de de Sitter.

Il est assez facile d'étudier l'allure des fonctions x et y pour de grandes valeurs de ces variables. On peut alors négliger les termes numériques à côté de x ou y .

Posant

$$(6.6) \quad x = \frac{X}{u}, \quad y = \frac{Y}{u}$$

on peut éliminer u et on trouve

$$(6.7) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{3X - Y}{1 - X - 2Y} \frac{1 - Y}{2X}$$

La solution de cette équation correspondant à des valeurs initiales finies de x et y est la solution particulière passant par l'origine. Il est facile de discuter l'allure de cette solution et de montrer que, partant de l'origine à une inclinaison de 45° , elle s'enroule en spirale dans le sens direct pour tendre asymptotiquement vers le point

$$X = \frac{1}{7}, \quad Y = \frac{3}{7}.$$

Il en résulte que X passe successivement par une maximum X_1 , un minimum X_2 , etc., et que les courbes x , sont successivement tangentes aux hyperboles

$$x = \frac{X_h}{u}.$$

Lorsque l'on fait varier les valeurs initiales, les points de contact se déplacent et les hyperboles forment autant d'enveloppes des courbes x .

On peut s'attendre à ce que ces caractères généraux subsistent pour l'allure des solutions même lorsque x et y ne sont plus petits.

En fait, il résulte de calculs numériques qui ont fait l'objet d'une thèse non publiée, présentée en 1927 au Massachusetts Institute of Technology, que la première enveloppe peut être représentée jusqu'à des valeurs de x voisines de -2 par la formule

$$x = \frac{0.220}{u} - 2.65,$$

tandis que la limite des asymptotes peut se développer en série

$$x = \frac{1}{7u} - 2.8571 + 0.168u + 0.22u^2 + \dots$$

Il en résulte que lorsque l'on fait croître la pression centrale, le rayon ($p=0$) augmente d'abord, passe par un maximum sur la première enveloppe, décroît ensuite jusqu'à la seconde enveloppe, puis croît à nouveau et tend en oscillant vers un point limite sur la limite des enveloppes.

Pour $\lambda=0$, le premier maximum a lieu pour

$$u = 0.083$$

et le point limite est à

$$u = 0.05.$$

On peut se rendre assez facilement compte du mécanisme de ce résultat apparemment paradoxal.

Lorsqu'on augmente la pression centrale, on tend naturellement à augmenter le rayon, mais en même temps on augmente l'énergie contenue dans la matière

$$\rho = \delta + 3p;$$

L'effet gravifique de cette énergie finit par compenser l'effet de la pression et les deux influences l'emportent tour à tour.

En d'autres termes, dans l'hypothèse d'EDDINGTON, il n'est plus question de variations adiabatiques, on ne peut augmenter la pression sans apporter de l'extérieur de l'énergie et l'effet gravifique de cette énergie supplémentaire finit par l'emporter.

Pour certaines valeurs du rayon, il existe plusieurs configurations d'équilibre; il est clair que, sauf celle d'énergie minimum, ces configurations sont instables.

7. INSTABILITÉ DE L'UNIVERS D'EINSTEIN.

Après avoir étudié les champs sphériques quasi-statiques, nous nous proposons d'examiner comment peut se produire la

rupture d'équilibre d'un champ quasi-statique et en particulier la rupture d'équilibre de l'Univers d'Einstein.

Nous imaginons que par un processus que nous tâcherons de conserver aussi général que possible, on modifie soit l'équation d'état de la matière, soit sa répartition. Nous supposons qu'au moment de la rupture d'équilibre on a encore

$$(7.1) \quad \frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

et par conséquent

$$(7.2) \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

comme pour les champs quasi-statiques; mais ces relations ne sont plus maintenant des identités. Nous reportant à l'équation (3.7) de l'accélération et tenant compte des relations (7.1), (7.2), nous voyons que la rupture de l'équilibre ne peut provenir que d'une modification de p ou de $\frac{\delta c}{\delta \chi}$.

Nous avons vu plus haut des exemples de telles modifications, mais alors ces modifications étaient ajustées de manière à ne pas troubler l'équilibre.

Il est clair que si p et $\frac{\delta c}{\delta \chi}$ ne varient pas, il est impossible de rompre l'équilibre, et cela même si p et $\frac{\delta c}{\delta \chi}$ varient autre

part qu'au point considéré. Si on met en mouvement une région intérieure par exemple, bien entendu en conservant la symétrie sphérique, cela n'aura aucune influence sur la région extérieure, pourvu que la pression et la force de gravitation

$\frac{\delta c}{\delta \chi}$ n'y soient pas modifiées.

La condition

$$\frac{\partial c}{\partial \chi} = 0$$

peut encore être considérée comme la condition pour que les lignes d'univers χ constant définies par la matière soient des géodésiques.

Pour étudier la rupture d'équilibre de l'Univers d'Einstein sous l'effet de la formation de condensations locales distribuées uniformément dans l'espace, nous imaginons un grand nombre de centres de condensation distribués plus ou moins uniformément. Il n'y a pas moyen de les supposer distribués d'une manière parfaitement homogène, car, dans l'espace elliptique, il n'y a pas l'équivalent des réseaux cubiques ou des piles de boulets de l'espace euclidien. Mais statistiquement la distribution peut être supposée uniforme.

Le processus de condensation est supposé se développer d'une manière semblable autour de chaque centre de condensation, et il existe naturellement un réseau de surfaces formant des cellules entourant les centres de condensation et qui sont le lieu des points qui ne sont pas davantage sous l'influence de l'une ou de l'autre des deux condensations qu'ils séparent. Ces cellules forment la zone neutre entre les champs de gravitation des condensations.

En vertu de l'homogénéité globale que nous avons supposée, il est clair que toutes les cellules se comportent de même; elles sont toutes en équilibre, ou elles se dilatent ou se contractent toutes ensemble. Il suffit donc d'étudier le mouvement d'une seule d'entre elles pour se rendre compte de l'équilibre ou du mouvement de l'ensemble de l'univers.

Fixant notre attention sur une cellule, zone neutre d'une condensation particulière, nous supposons que cette condensation jouit de la symétrie sphérique, et que nous pouvons tenir compte de l'influence des condensations voisines en les remplaçant par une distribution de matière de symétrie sphérique. La zone neutre est alors une sphère.

Les points de cette sphère jouissent de la propriété que leurs lignes d'univers sont des géodésiques, ou encore que la force de gravitation y est nulle, puisque ni la condensation

interne ni les condensations voisines ne peuvent y avoir une influence prépondérante. On doit donc avoir à la zone neutre

$$\frac{\partial c}{\partial \chi} = 0,$$

et, par conséquent, l'équilibre ne peut être rompu que si les modifications apportées à l'état de la matière ont fait varier p , la pression radiale à la zone neutre.

Si donc nous voulons comparer un univers globalement homogène mais comportant un grand nombre de condensations uniformément réparties avec un Univers d'Einstein parfaitement homogène, nous avons à considérer le réseau de cellules formé par les zones neutres séparant les condensations. L'univers homogène doit, pour ainsi dire, être tangent en ces points à l'univers présentant des condensations, et la pression normalement aux zones neutres, doit être la pression adoptée pour l'univers homogène. Alors l'équilibre, ou l'expansion de l'univers homogène tangent, nous fait connaître l'équilibre ou l'expansion du réseau de zones neutres.

Les deux univers peuvent avoir des masses différentes ou des volumes différents. On ne peut rien conclure de cela, le facteur déterminant est la pression à la zone neutre.

L'intérêt de ce résultat est qu'il est complètement indépendant du processus particulier suivant lequel se développent les condensations. Il donne le moyen pour tout processus particulier de prévoir l'effet de ce processus sur l'équilibre de l'univers.

En particulier, si la pression est nulle et reste nulle aux zones neutres, les condensations ne modifient pas l'équilibre. La pression radiale à la zone neutre est la densité d'énergie traversant cette zone, et mesure donc l'intensité des échanges entre les condensations. Nous avons appelé une diminution de ces échanges d'énergie, une « stagnation de l'univers ». Seul ce processus de stagnation peut déterminer la rupture de l'équilibre dans le sens de l'expansion.

8. CONDENSATIONS DANS L'UNIVERS EN EXPANSION.

Dans les applications à l'univers réel la pression est généralement négligeable vis-à-vis de la densité. Dans le cas de l'équilibre nous avons bien dû en tenir compte, puisque l'étude d'une rupture d'équilibre dépend naturellement de forces minimes, mais pour l'étude de l'expansion de l'univers et le développement de condensations au cours de l'expansion, nous pouvons la négliger.

Dans ce cas, l'équation (3.4) nous apprend que m n'est fonction que de χ , et l'équation (3.8), pour $p=\tau=0$, que c n'est fonction que de t .

Moyennant un changement de variable, nous pouvons donc supposer c constant et poser

$$c = c_0$$

Nous avons alors, par (3.6)

$$\frac{1}{a} \frac{\partial r}{\partial \chi} = f(\chi),$$

et (3.1) devient

$$(8.1) \quad ds^2 = - \left(\frac{\partial r}{\partial \chi} \right)^2 \frac{d\chi^2}{f^2(\chi)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + c^2 dt^2$$

où r est une fonction de χ et de t satisfaisant à (3.5)

$$(8.2) \quad \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 = -c^2 [1 - f^2(\chi)] + \frac{2Km}{r} + \frac{\lambda c^2}{3} r^2$$

où par (3.3)

$$(8.3) \quad 4\pi\rho r^2 \frac{\partial r}{\partial \chi} = \frac{dm}{d\chi}.$$

Enfin, l'équation (3.7) devient

$$(8.4) \quad \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{Km}{r^2} + \frac{\lambda c^2}{3} r.$$

L'élément de longueur à un instant t est d'après (8.1)

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{f^2(\chi)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Lorsque $f(\chi)=1$, la géométrie est donc euclidienne. Les équations ne diffèrent alors des équations de la mécanique classique que par l'introduction de la répulsion cosmique et, en outre, par le fait que la constante d'énergie dans (8.2) qui, au point de vue classique, pourrait avoir une valeur arbitraire, est maintenant nulle.

Dans le cas général, on peut encore considérer r comme la distance à l'origine, et la constante d'énergie en chaque point matériel, c'est-à-dire pour chaque valeur de χ , peut être choisie arbitrairement. Mais alors la géométrie n'est plus euclidienne. On peut en faire une carte dans un espace euclidien où les longueurs normales au rayon vecteur sont représentées en vraie grandeur. Les longueurs suivant le rayon vecteur sont alors représentées à une échelle

$$\frac{dr}{d\sigma} = f(\chi).$$

L'échelle des longueurs radiales ne dépend que de χ , c'est-à-dire reste la même pour chaque point matériel pendant tout son mouvement, et elle est liée à la constante d'énergie dans l'équation du mouvement de ce point d'après l'équation (8.2).

La coordonnée χ peut naturellement être choisie arbitraire-

ment. Lorsque $f(\chi)$ est inférieur ou égal à un, on pourra choisir la coordonnée χ de telle sorte que

$$f(\chi) = \cos \chi,$$

alors (8.2) s'écrira plus simplement

$$(8.2I) \quad \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 = -c^2 \sin^2 \chi + \frac{2Km}{r} + \frac{\lambda c^2}{3} r^2.$$

Ce choix des coordonnées convient lorsque l'espace est fermé. Pour un espace du type simplement elliptique, tout l'espace est décrit lorsque χ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Il importe de remarquer que m n'est pas la masse réelle intérieure à la sphère χ , mais bien la masse calculée à partir de la densité ρ sans tenir compte de la courbure de l'espace. La masse réelle est

$$(8.5) \quad M(\chi) = \int_0^\chi \frac{dm}{\cos \chi}$$

et, tout comme m , elle est indépendante du temps.

Dans le cas particulier où m est proportionnel à $\sin^3 \chi$, nous avons

$$(8.6) \quad m = \frac{4}{3\pi} M \sin^3 \chi$$

où $M = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est la masse totale de l'univers (simplement elliptique).

Dans ce cas, on peut écrire

$$(8.7) \quad r = R(t) \sin \chi$$

et on obtient l'Univers de Friedmann

$$(8.8) \quad ds^2 = -R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] + c^2 dt^2,$$

avec

$$(8.9) \quad \left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -c^2 + \frac{8\pi M}{3R} + \frac{\lambda c^2}{3} R^2.$$

Utilisant la même méthode qu'au § 7, nous pouvons étudier le développement d'une condensation dans l'univers en expansion. Nous supposons cette condensation de symétrie sphérique, et nous remplaçons les condensations extérieures par une distribution moyenne. Cela revient à supposer que m est proportionnel à $\sin^3 \chi$ en dehors de la condensation, mais suit une autre loi dans la région centrale.

Pour l'univers au large, les trajectoires des couches matérielles concentriques seront homothétiques (8.7). Dans la région centrale au contraire, elle pourront se rapprocher ou s'écarter davantage, marquant ainsi le progrès ou l'atténuation de la condensation.

Il pourrait arriver que les trajectoires correspondant à des valeurs différentes de χ arrivent à se couper. Dans ce cas, notre solution devient inadmissible, car χ est une coordonnée et ne peut donc avoir deux valeurs pour le même point. Physiquement cela veut dire que l'hypothèse que nous avons introduite que la pression est nulle devient inadmissible à partir d'une certaine valeur de χ .

En particulier, si des trajectoires retombent sur le centre, il ne sera plus permis de traiter le problème sans introduire la pression. Notre but est simplement d'étudier la tendance

des condensations à se développer, plutôt que de suivre leur ajustement final pour lequel nous ne pouvons évidemment plus supposer c (potentiel gravifique résiduel), constant, ni non plus négliger les effets de rotation exclus par notre hypothèse sur la symétrie sphérique.

Il est bien connu que les équations de FRIEDMANN admettent les types de solutions suivants:

1° expansion illimitée de 0 à l'∞, lorsque les racines du second membre de (8.21) sont imaginaires;

2° cas limite des racines positives confondues, r variant de zéro à la distance d'équilibre, ou de cette distance d'équilibre à l'infini;

3° cas des racines réelles:

a) branche élastique d'un minimum à l'infini, avec comme cas limite la solution de DE SITTER;

b) branche quasi-périodique de zéro à un maximum.
Ces différentes éventualités se présentent suivant que

$$\frac{3 K m \sqrt{\lambda}}{c^2 \sin^3 \chi}$$

est plus grand, égal ou plus petit que l'unité.

Si, par exemple, m est proportionnel à $\sin^4 \chi$, la région centrale sera du type quasi-périodique retombant finalement sur le centre, tandis que la région extérieure sera du type d'expansion illimitée. Un tel modèle nous permet donc, sous réserve des remarques faites plus haut, d'étudier la formation de condensations dans un univers du type d'expansion illimitée.

Il est tentant d'appliquer ce modèle à la formation des nébuleuses. Il paraît pourtant préférable d'attendre un développement ultérieur de la théorie qui nous affranchirait de l'hypothèse de la symétrie sphérique qui n'est manifestement pas réalisée pour les nébuleuses spirales. Ce développement

sort du cadre de cet article qui ne considère que des solutions exactes des équations de la gravitation.

Dans le paragraphe suivant, nous développons la solution de FRIEDMANN par les fonctions elliptiques de WEIERSTRASS. Le problème est le même pour l'univers à condensations et l'univers homogène. Nous considérons le premier cas, et le passage à l'univers homogène se fait par les équations (8.6) et

$$(8.7), \text{ ou plus simplement en posant } \chi = \frac{\pi}{2}, \quad r = R, \quad m = \frac{4M}{3\pi}.$$

Dans le cas de l'univers homogène, il y a une grandeur

$$(8.10) \quad U = \int \frac{cdt}{R}$$

qui a une importance particulière: c'est la distance angulaire parcourue par la lumière. Elle peut servir à mesurer le temps. Sa signification n'est plus si immédiate pour l'univers à condensations.

9. INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DE FRIEDMANN PAR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES DE WEIERSTRASS.

L'équation (8.21) peut s'écrire, lorsque nous ne considérons que la variation en t ,

$$(9.1) \quad \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{A^2}{r} (r + 2r_0) [r - r_0(1 - \eta)] [r - r_0(1 + \eta)],$$

où

$$(9.2) \quad \begin{cases} A^2 = \frac{\lambda c^2}{3} \\ A^2 r_0^2 (3 + \eta^2) = c^2 \sin^2 \chi \\ A^2 r_0^3 (1 - \eta^2) = Km. \end{cases}$$

Introduisons une fonction de WEIERSTRASS $p(u)$ ayant pour racines

$$(9.3) \quad e_1 = 6 - 2\eta^2, \quad e_2 = -3 + 6\eta + \eta^2, \quad e_3 = -3 - 6\eta + \eta^2,$$

et posons

$$(9.4) \quad p(u) = 3 + \eta^2 - 6(1 - \eta^2) \frac{r_0}{r},$$

(9.1) devient

$$(9.5) \quad 432(1 - \eta^2)^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = -A^2 [p(u) - 3 - \eta^2]^2.$$

Considérons une valeur v telle que

$$(9.6) \quad p(v) = 3 + \eta^2,$$

d'où

$$(9.7) \quad [p'(v)]^2 = -432(1 - \eta^2)^2,$$

il vient

$$(9.8) \quad \pm A \frac{dt}{du} = \frac{p'(v)}{p(u) - p(v)} = 2Z(v) - Z(u+v) + Z(u-v),$$

d'où, en intégrant

$$(9.9) \quad \pm At = C + 2u Z(v) + \log \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)}.$$

Les équations (9.4) et (9.9) fournissent une représentation paramétrique du mouvement.

La variable u est proportionnelle à la quantité U introduite à la fin du paragraphe précédent; on a en effet

$$(9.9^1) \quad U^2 = -12(3 + \eta^2) u^2.$$

Le calcul de la période ω correspondant à e_1 se fait par les formules suivantes:

$$(9.10)$$

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{\sqrt[4]{(1 + \eta)(3 - \eta)} - \sqrt[4]{(1 - \eta)(3 + \eta)}}{\sqrt[4]{(1 + \eta)(3 - \eta)} + \sqrt[4]{(1 - \eta)(3 + \eta)}}$$

Lorsque η est imaginaire $= \bar{\eta}i$, on pose

$$(9.11) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2\bar{\eta}}{3 + \eta^2},$$

et on obtient

$$(9.12) \quad l = i \operatorname{tg} \frac{\psi}{4}.$$

On a ensuite

$$(9.13) \quad q = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + \dots$$

et

$$(9.14)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}} &= \frac{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3} \sqrt[4]{(1 + \eta)(3 - \eta)} + \sqrt[4]{(1 - \eta)(3 + \eta)}} \cdot \frac{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \dots}{1} \\ &= \frac{1 + 2q^4 + \dots}{2 \cos \frac{\psi}{4}} \sqrt[4]{\frac{\cos \psi}{3(3 + \eta^2)}}. \end{aligned}$$

Pour le calcul pratique, il nous faut remplacer p et σ par leur expression au moyen des fonctions θ .

Posant

$$(9.15) \quad u = \frac{2\omega}{\pi} \alpha \qquad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Nous avons

$$(9.16) \quad \begin{aligned} p(u) &= e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \left[\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} \right]^2 \\ &= e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} \left[\frac{\theta_1(\beta)}{\theta_2(\beta)} \right]^2 \end{aligned}$$

et

$$\sigma(u) = C^{\text{te}} e^{\frac{\pi^2}{2\eta\omega} \alpha^2} \theta_1(\alpha).$$

On a

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = 9(9 - \eta^2)(1 - \eta^2)$$

et

$$p(v) - e_1 = -3(1 - \eta^2).$$

Il vient donc par (9.4) et (9.6)

$$(9.17) \quad \begin{aligned} \frac{2x_0}{r} = \frac{p(v) - p(u)}{3(1 - \eta^2)} &= -1 - \sqrt{\frac{9 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \left[\frac{\theta_2(\alpha)}{\theta_1(\alpha)} \right]^2 \\ &= -1 - \sqrt{\frac{9 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \left[\frac{\theta_1(\beta)}{\theta_2(\beta)} \right]^2 \end{aligned}$$

Désignant par α_0 et β_0 les valeurs de α et β correspondant à $u=v$, vient pour t

$$\begin{aligned}
 \pm At &= C_1 + \log \frac{\theta_1(\alpha + \alpha_0)}{\theta_1(\alpha - \alpha_0)} - 2\alpha \frac{\theta_1'(\alpha_0)}{\theta_1(\alpha_0)} \\
 (9.18) \quad &= C_2 + \log \frac{\theta_2(\alpha - \beta_0)}{\theta_2(\alpha + \beta_0)} + 2\alpha \frac{\theta_2'(\beta_0)}{\theta_2(\beta_0)} \\
 &= C_3 + \log \frac{\theta_1(\beta + \beta_0)}{\theta_1(\beta - \beta_0)} - 2\beta \frac{\theta_1'(\beta_0)}{\theta_1(\beta_0)}.
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{q^{1/4}} \theta_1(\alpha) &= \sin \alpha - q^2 \sin 3\alpha + q^6 \sin 5\alpha \dots \\
 \frac{1}{q^{1/4}} \theta_2(\alpha) &= \cos \alpha + q^2 \cos 3\alpha + q^6 \cos 5\alpha \dots
 \end{aligned}$$

Naturellement α et β sont imaginaires.

Dans le cas de racines réelles on voit aisément que pour α imaginaire pur, r est réel et positif et part de zéro pour $\alpha=0$. Cela correspond à l'univers quasi-périodique. Pour β imaginaire pur r est infini pour $\beta=\beta_0$ et diminue lorsque β augmente en valeur absolue.

Il nous reste à transformer les lignes trigonométriques imaginaires.

Dans ce but nous posons

$$(9.19) \quad x = e^{\frac{\alpha}{i}}, \quad y = e^{\frac{\beta}{i}}.$$

Nous obtenons pour l'univers quasi-périodique

(9.20)

$$\frac{2r_0}{r} = -1 + \sqrt{\frac{9}{1-\eta^2} \left[\frac{x+x^{-1}+q^2(x^3+x^{-3})+q^6(x^5+x^{-5})+\dots}{x-x^{-1}-q^2(x^3-x^{-3})+q^6(x^5-x^{-5})+\dots} \right]^2}$$

et pour l'univers élastique

(9.21)

$$\frac{2r_0}{r} = -1 + \sqrt{\frac{9 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \left[\frac{y - y^{-1} - q^2(y^3 - y^{-3}) + q^6(y^5 - y^{-5}) + \dots}{y + y^{-1} + q^2(y^3 + y^{-3}) + q^6(y^5 + y^{-5}) + \dots} \right]^2,$$

qui donne pour $r = \infty$ la valeur de y_0 correspondant à β_0 .

Nous avons ensuite pour l'équation en t pour la branche quasi-périodique

(9.22)

$$\begin{aligned} \pm At - C_2 = \text{Log} \frac{xy_0^{-1} + x^{-1}y_0 + q^2(x^3y_0^{-3} + x^{-3}y_0^3) + q^6(x^5y_0^{-5} + x^{-5}y_0^5) + \dots}{xy_0 + x^{-1}y_0^{-1} + q^2(x^3y_0^3 + x^{-3}y_0^{-3}) + q^6(x^5y_0^5 + x^{-5}y_0^{-5}) + \dots} \\ + 2 \frac{y_0 - y_0^{-1} + 3q^2(y_0^3 - y_0^{-3}) + 5q^6(y_0^5 - y_0^{-5}) + \dots}{y_0 + y_0^{-1} + q^2(y_0^3 + y_0^{-3}) + q^6(y_0^5 + y_0^{-5}) + \dots} \text{Log } x \end{aligned}$$

et pour la branche élastique

(9.23)

$$\begin{aligned} \pm At - C_3 = \text{Log} \frac{yy_0 - y^{-1}y_0^{-1} - q^2(y^3y_0^3 - y^{-3}y_0^{-3}) + q^6(y^5y_0^5 - y^{-5}y_0^{-5}) + \dots}{yy_0^{-1} - y^{-1}y_0 - q^2(y^3y_0^{-3} - y^{-3}y_0^3) + q^6(y^5y_0^{-5} - y^{-5}y_0^5) + \dots} \\ - 2 \frac{y_0 - y_0^{-1} + 3q^2(y_0^3 - y_0^{-3}) + 5q^6(y_0^5 - y_0^{-5}) + \dots}{y_0 + y_0^{-1} + q^2(y_0^3 + y_0^{-3}) + q^6(y_0^5 + y_0^{-5}) + \dots} \text{Log } y. \end{aligned}$$

Ces formules s'appliquent tout aussi bien au cas où les racines sont imaginaires. Alors q est imaginaire pur, et puisqu'il n'intervient qu'au carré, il en résulte un simple changement de signe.

On peut d'ailleurs identifier les deux expressions en posant

$$(9.24) \quad y = \frac{i}{qx}.$$

Les doubles signes se correspondent et

$$(9.25)$$

$$C_3 - C_2 = -4 \operatorname{Log} y_0 + 2 \frac{y_0 - y_0^{-1} + 3q^2(y_0^3 + y_0^{-3}) + \dots}{y_0 + y_0^{-1} + q^2(y_0^3 + y_0^{-3}) + \dots} \operatorname{Log} \frac{i}{q}.$$

Il est avantageux d'employer les premières formules pour x compris entre 1 et $1/\sqrt{-qi}$, et les secondes pour les valeurs plus grandes de x .

Pour q réel, le maximum ou le minimum de r lieu pour x ou y égal $1/\sqrt{q}$.

Lorsqu'on se donne r , le calcul de x et y peut se faire par les formules ($l = l_1 i$)

$$(9.26) \quad \frac{\sqrt{1 + 2r_0/r} + \sqrt{(9 - \eta^2)/(1 - \eta^2)}}{\sqrt{1 + 2r_0/r} - \sqrt{(9 - \eta^2)/(1 - \eta^2)}} = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{l_1} = \frac{\sin 2\theta}{l},$$

où l'un des angles φ ou θ est réel. On a alors ($q = q_1 i$)

$$(9.27)$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{q_1} \left(1 + 4q_1^4 \frac{\operatorname{ctg} 2\varphi}{\sin 2\varphi} + \dots \right) = \frac{\operatorname{tg} \theta}{q} \left(1 - 4q^4 \frac{\operatorname{ctg} 2\theta}{\sin 2\theta} + \dots \right) \\ y^2 &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{q_1} \left(1 - 4q_1^4 \frac{\operatorname{ctg} 2\varphi}{\sin 2\varphi} + \dots \right) = -\frac{\operatorname{ctg} \theta}{q} \left(1 + 4q^4 \frac{\operatorname{ctg} 2\theta}{\sin 2\theta} + \dots \right). \end{aligned}$$

$$(9.28)$$

Pour q réel, la branche quasi-périodique correspond aux valeurs de θ comprises entre zéro et 45° , la branche élastique,

aux valeurs de θ comprises entre 135 et 90 degrés. Pour q imaginaire, l'angle φ doit être pris entre zéro et 90 degrés.

10. LES AMAS DE NÉBULEUSES.

Un des traits caractéristiques de l'univers tel qu'il nous est révélé par les observations astronomiques, est que, s'il existe des nébuleuses isolées, il y a aussi des agglomérations de nébuleuses dont la population varie depuis quelques dizaines jusqu'à des centaines de nébuleuses.

Nous nous proposons de discuter l'hypothèse suivant laquelle ces amas de nébuleuses seraient sensiblement en équilibre et formeraient comme un morceau d'un Univers d'Einstein. Nous montrerons ensuite quelles informations sur l'expansion de l'univers pourraient se déduire de cette hypothèse.

Si les amas sont en équilibre, le rayon actuel de l'univers est nettement plus grand que le rayon d'équilibre, de telle sorte que le rapport de HUBBLE

$$(10.1) \quad \frac{r}{v} = 1,8 \times 10^9 \text{ années}$$

de la distance des nébuleuses à leur vitesse spectroscopique d'éloignement est une mesure de la constante cosmologique. Adoptant

$$\lambda = 10^{-54},$$

nous pouvons calculer par la formule (8.4) à quelle distance r_e la répulsion cosmique et la force de gravitation due à une masse m se font équilibre; on a

$$(10.2) \quad r_e^3 = \frac{3 K m}{\lambda c^2},$$

ou

$$(10.3) \quad r_e = 80 \sqrt[3]{m},$$

les distances étant comptées en années de lumière, et la masse du soleil étant prise comme unité.

Si les amas de nébuleuses sont en équilibre, r_e doit être le rayon de la zone neutre correspondant à chaque nébuleuse. La distance moyenne entre les nébuleuses doit être $2r_e$.

S'il y a N nébuleuses réparties d'une façon plus ou moins sphérique, le volume de l'amas doit être

$$\frac{4\pi}{3} N r_e^3$$

et son diamètre

$$2 r_e \sqrt[3]{N} = 160 \sqrt[3]{Nm}.$$

Nous pouvons estimer la distance D et le diamètre angulaire d de l'amas, nous devons donc avoir comme condition d'équilibre

$$(10.4) \quad D d = 160 \sqrt[3]{Nm}.$$

Si d est exprimé en degrés et D en mégaparsecs, le diamètre en années de lumière est

$$\frac{Dd}{0,31 \times 57,3} \times 10^6 = 160 \sqrt[3]{Nm}$$

d'où

$$(10.5) \quad Nm 10^{-9} = 0,043 D^3 d^3.$$

Les estimations de HUBBLE (M^t Wilson Contr. n° 427). permettent de calculer la masse moyenne d'une nébuleuse

dans l'hypothèse de l'équilibre. Pour certains amas, les données de la table IX ne correspondent pas avec les indications données dans le texte; nous avons alors fait le calcul pour les deux valeurs.

AMAS	N	D	d	$m \cdot 10^9$
Virgo	(500)	1,8	12° 11°	0,9 0,7
Pegasus	100	7,3	1	0,2
Pisces	20	7	0,5 1	0,1 0,7
Cancer	150	9	1,5 1	0,7 0,2
Perseus	500	11	2,0	0,9
Coma	800	14	1,7	0,7
Urs. Maj.	300	22	0,7	0,5
Leo	400	32	0,6	0,8

Ces données sont évidemment de très inégale valeur. En particulier, pour l'amas de Virgo, SHAPLEY trouve une distance beaucoup plus grande et un nombre moindre de nébuleuses. Pour les amas A, B, C, D de Virgo, SHAPLEY trouve pourtant des diamètres et des nombres de nébuleuses du même ordre de grandeur.

Si on tient compte de l'incertitude dans les données sur lesquelles sont basés ces calculs, et en particulier de la forme irrégulière de la plupart des amas, on peut considérer le résultat comme favorable à l'hypothèse de l'équilibre des amas de nébuleuses.

La valeur numérique de la masse trouvée pour les nébuleuses, est de l'ordre de grandeur indiqué par les recherches de HUBBLE.

Les données relatives à l'amas de Coma paraissent les plus sûres, d'autant plus que cet amas semble avoir une forme

assez globulaire. Nous adopterons donc comme estimation de la masse moyenne des nébuleuses

$$0,7 \cdot 10^9 \odot,$$

et donc, comme distance moyenne entre les nébuleuses,

$$140.000 \text{ années de lumière.}$$

Comparant cette valeur à la distance moyenne des nébuleuses isolées, estimée par HUBBLE à

$$1.800.000 \text{ années de lumière,}$$

nous avons pour le coefficient d'expansion de l'univers

$$(10.6) \quad \frac{R}{R_e} = 13.$$

L'hypothèse de l'équilibre des amas semble donc fournir le moyen de préciser, en les confirmant, les estimations de HUBBLE.

Elle a encore l'intérêt de donner une signification cosmologique à la fréquence relative des amas et des nébuleuses isolées.

Sans que nous soyons déjà à même de développer une théorie bien précise, il est clair que si l'expansion ne s'est pas attardée quelque peu au voisinage de la position d'équilibre, il est à peu près impossible que des parties de cet univers aient pu en nombre considérable dévier du mouvement moyen au point d'être en équilibre, et peut-être pourra-t-on montrer que si l'expansion s'est attardée trop au voisinage de l'équilibre, les amas devraient être plus nombreux et plus importants qu'ils ne le sont réellement. Il y a là une nouvelle ligne d'attaque qui pourrait nous faire connaître la valeur de η^2 , ou au

moins exclure le voisinage des deux valeurs critiques $\eta^2 = -3$ et $\eta^2 = 0$.

Ceci suffirait à déterminer l'ordre de grandeur du rayon de l'univers et de la durée de l'expansion.

Nous avons, en effet, par (9.2) et (10.2)

$$(10.7) \quad R_o^3 (1 - \eta^2) = R_e^3$$

$$(10.8) \quad A^2 R_o^2 (3 + \eta^2) = c^2$$

soit

$$(10.9)$$

$$R_o = \frac{c}{A \sqrt{3 + \eta^2}} = \frac{10^{27} \text{ cm}}{\sqrt{1 + \eta^2/3}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta^2/3}} 10^9 \text{ années de lumière}$$

d'où

$$R = 13 R_o = 13 \frac{\sqrt[5]{1 - \eta^2}}{\sqrt{1 + \eta^2/3}} 10^9 \text{ années de lumière.}$$

Si η^2 n'est pas voisin de -3 , l'ordre de grandeur du rayon de l'univers est donc connu.

Il en est de même pour la durée de l'expansion.

Le cas limite $\eta^2 = -3$ donne la solution exacte

$$(10.10) \quad R = 2 R_o s t^{\frac{2}{3}} - \frac{3 A t}{2} = R_o \sqrt[5]{2} e^{A t}$$

avec

$$R_e = \sqrt[5]{4} R_o,$$

d'où

$$(10.11) \quad 2 A t = 2 \times 2,303 \log 13 \sqrt[5]{2} = 5,6.$$

Comme $2A \simeq 10^{-9}$ années, la durée de l'expansion est $5,6 \times 10^9$ années.

Pour $\eta^2 = -0,1$ on trouve par les formules du paragraphe précédent

$$(10.12) \quad 2At = 8,437.$$

Lorsque η^2 tend vers zéro, on peut aisément trouver une valeur asymptotique de la durée de l'expansion depuis $R = 0$ jusqu'à une valeur plus grande que R_0 . Posant

$$(10.13) \quad X^2 = \frac{R}{R + 2R_0},$$

on obtient

$$(10.14) \quad At = \text{Log} \frac{1+X}{1-X} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log} \frac{X\sqrt{3}-1}{X\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log} \frac{1}{q_1^2} - 2 \text{Log}(2+\sqrt{3}).$$

Cette équation montre comment la solution tend vers la solution limite (R_0, ∞) , lorsque q tend vers zéro.

On a

$$(10.15) \quad q_1^2 = \frac{-\eta^2}{144} + \dots$$

et

$$(10.16) \quad \frac{\kappa M \sqrt{\lambda}}{2\pi^2} = 1 - \frac{3}{2} \eta^2 + \dots = 1 + \mu$$

où μ représente l'approximation avec laquelle la masse est ajustée à la constante cosmique pour réaliser la position d'équilibre.

Pour le coefficient d'expansion $= 13$, on trouve

$$(10.17) \quad 2At = 5,93 + 2,66 \log_{10} \frac{1}{\mu}.$$

Pour l'univers élastique on aurait de même

(10.18)

$$At = \text{Log} \frac{1+X}{1-X} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log} \frac{X\sqrt{3}-1}{X\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Log} \frac{1}{q} - \text{Log}(2+\sqrt{3})$$

le temps étant compté à partir du minimum du rayon, soit

$$(10.19) \quad 2At = 5,46 + 1,33 \log_{10} \frac{1}{\mu}.$$

Lorsque η^2 tend vers -3 , le rayon tend vers l'infini, mais U , la distance angulaire que la lumière est capable de franchir durant l'expansion, tend vers zéro.

Il est intéressant de calculer $R_e U$, la distance au moment de l'équilibre des points les plus éloignés qui peuvent se transmettre de la lumière. On a par (9.9¹), (10.7) et (10.8)

$$(10.20) \quad R_e U = 2\sqrt{3} \frac{u}{i} \sqrt{1-\eta^2} \frac{c}{A}$$

et

$$\frac{u}{i} = \frac{\omega}{\pi} \log x^2$$

On trouve pour $\eta^2 = -3$,

$$(10.21) \quad R_e U = 4,46 \frac{c}{2A} = 4,46 \times 10^9 \text{ années de lumières.}$$

II. CHAMP EXTÉRIEUR DE SCHWARZSCHILD.

Les équations de l'Univers de Friedmann admettent pour une masse non nulle, des solutions où le rayon de l'univers

tend vers zéro. Ceci est en opposition avec le résultat généralement admis qu'une masse donnée ne peut avoir un rayon plus petit que

$$\frac{2Km}{c^2}$$

ou $2m$ en unités naturelles ($K=c=1$).

Ce résultat se déduit de la solution du problème extérieur de SCHWARZSCHILD,

(II.1)

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2\right)d\tau^2$$

Nous nous proposons de montrer que la singularité du champ n'est pas réelle et provient simplement de ce qu'on voulu employer des coordonnées pour lesquelles le champ est statique.

Dans le vide, m est une constante. Considérons le cas euclidien $f(x)=1$ et posons

$$(II.2) \quad r_o^3 = \frac{Km}{4A^2}, \quad A^2 = \frac{\lambda c^2}{3}$$

(8.2) devient

$$(II.3) \quad r \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)^2 = A^2 (r^3 + 8r_o^3)$$

d'où

$$(II.4) \quad r = 2r_o \operatorname{Sh} \frac{2}{3} \frac{3A}{2} (t - \chi).$$

Nous pourrions écrire $F(\chi)$ au lieu de χ , mais cela n'introduirait aucune généralisation.

Comme

$$\frac{\partial r}{\partial \chi} = - \frac{\partial r}{\partial t}$$

nous avons alors

$$(II.5) \quad ds^2 = -A^2(r^3 + 8r_o^3) \frac{d\chi^2}{r} - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + c^2 dt$$

qui est une solution du champ dans le vide.

A chaque instant l'espace est euclidien, et il n'y a pas de singularité sauf pour $r=0$.

Si nous prenons r comme coordonnée, il doit y avoir moyen de définir une coordonnée τ de manière à mettre le champ sous la forme de SCHWARZSCHILD.

On a alors

$$dr^2 = \frac{A^2}{r} (r^3 + 8r_o^3) (dt - d\chi)^2$$

d'où

$$\frac{A^2}{r} (r^3 + 8r_o^3) d\chi^2 = dr^2 - \frac{A^2}{r} (r^3 + 8r_o^3) (dt^2 - 2d\chi dt)$$

et

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \left[c^2 + \frac{A^2}{r} (r^3 + 8r_o^3) \right] dt^2 \\ + \frac{2A^2}{r} (r^3 + 8r_o^3) d\chi dt$$

et éliminant χ ,

$$ds^2 = -dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \left[c^2 - \frac{A^2}{r} (r^3 + 8r_o^3) \right] dt^2 \\ + 2A \sqrt{\frac{r^3 + 8r_o^3}{r}} dr dt.$$

Posant

$$(II.6) \quad d\tau = dt + \frac{A \sqrt{\frac{r^3 + 8r_o^3}{r}}}{c^2 - \frac{A^2}{r} (r^3 + 8r_o^3)} dr,$$

il vient

$$(II.7) \quad ds^2 = - \frac{dr^2}{1 - \frac{8A^2 r_o^3}{c^2 r} - \frac{A^2 r^2}{c^2}} - r^2 (d\theta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) \\ + c^2 \left(1 - \frac{8A^2 r_o^3}{c^2 r} - \frac{A^2 r^2}{c^2} \right) d\tau^2,$$

ce qui est la forme de SCHWARZSCHILD (II.1) du champ d'une masse ponctuelle.

La singularité s'introduit parce que l'expression qui figure au dénominateur dans l'expression de $d\tau$ (II.6) s'annule pour des valeurs suffisamment petites de r .

τ dépend d'une intégrale elliptique. Dans le cas particulier où λ tend vers zéro, l'intégration peut être effectuée. Pour simplifier, prenons des coordonnées pour lesquelles K et c sont égaux à un.

On a à la limite pour A tendant vers zéro

$$(II.8) \quad 8A^2 r_o^3 = 2m,$$

d'où

$$(II.9) \quad d\tau = dt + \frac{\sqrt{\frac{2m}{r}}}{1 - \frac{2m}{r}} dr,$$

et, en intégrant,

$$(II.10) \quad \tau = t + 2\sqrt{2mr} + 2m \operatorname{Log} \frac{\sqrt{r} - \sqrt{2m}}{\sqrt{r} + \sqrt{2m}},$$

transformation inadmissible pour des valeurs de r inférieures à $2m$. L'équation (II.4) devient de même

$$(II.11) \quad \chi = t + \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{\sqrt{2m}},$$

et la nouvelle forme du champ s'écrit sans singularité

$$(II.12) \quad ds^2 = -2m \frac{d\chi^2}{r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + dt^2,$$

où

$$(II.13) \quad r = \left[\frac{3}{2} \sqrt{2m} (t - \chi) \right]^{\frac{2}{3}}.$$

La singularité du champ de SCHWARZSCHILD est donc une singularité fictive, analogue à celle qui se présentait à l'horizon du centre dans la forme originale de l'univers de de Sitter.

12. L'ÉVANOUISSEMENT DE L'ESPACE.

Le rayon de l'espace peut passer par la valeur zéro. Nous nous proposons de discuter ce passage, et d'examiner en particulier s'il y a moyen d'interpréter physiquement cette valeur zéro du rayon comme représentant simplement une quantité petite et, dans ce cas, d'en fixer l'ordre de grandeur.

Pour l'étude du point zéro, nous pouvons négliger la constante cosmologique; posant

$$(12.1) \quad \frac{Km}{c^2} = a,$$

nous avons alors

$$(12.2) \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = -1 + \frac{2a}{R}.$$

Introduisant la distance angulaire U parcourue par la lumière pendant le temps t ,

$$(12.3) \quad dU = \frac{cdt}{R},$$

nous trouvons aisément l'Univers cycloïdal d'Einstein

$$(12.4) \quad \begin{cases} R = a(1 - \cos U), \\ ct = a(U - \sin U). \end{cases}$$

Lorsque U varie de 0 à π , R revient à sa valeur initiale zéro, et la lumière a eu juste le temps de faire le tour de l'espace simplement elliptique.

La question est de savoir s'il y a moyen d'émousser la pointe de la cycloïde.

On peut se demander tout d'abord, si on n'obtiendrait pas ce résultat en tenant compte de l'effet de la pression qui ne doit plus être nécessairement négligeable. Il est facile de voir, en se reportant à l'équation (3.7), que la pression ne fait que renforcer l'action de la gravitation. La question a d'ailleurs été traitée en détail par TOLMAN.

Il est plus important d'examiner l'effet d'un manque d'isotropie dans la répartition des tensions.

Nous nous proposons d'examiner, suivant une idée que nous a communiquée EINSTEIN, un univers défini par

$$(12.5) \quad ds^2 = -b_1^2 dx_1^2 - b_2^2 dx_2^2 - b_3^2 dx_3^2 + dx_4^2,$$

où b_1 , b_2 , b_3 sont des fonctions de $x_4 = t$.

Un tel univers serait naturellement inadmissible à beaucoup de points de vue, mais il a l'intérêt d'introduire une anisotropie marquée et laissée largement arbitraire.

Nous pouvons aisément calculer le tenseur matériel par les formules du paragraphe 1.

Nous avons, pour h et i différents de 4, par (1.9), les accents désignant les dérivées par rapport à t ,

$$(12.6) \quad \beta_{ik} = \frac{b'_i b'_k}{b_i b_k}$$

et

$$(12.7) \quad \beta_{i4} = \frac{b''_i}{b_i}.$$

Les composantes $T_{\mu\nu}$ ($\mu \neq \nu$) s'annulent.

$$(12.8) \quad \sqrt{-g} = b_1 b_2 b_3 = R^3$$

mesure le volume occupé par une portion déterminée de matière. R n'est plus ici le rayon de l'univers, puisque l'espace est euclidien, mais le volume de l'espace vers zéro si R tend vers zéro.

Nous avons

$$\frac{3R'}{R} = \frac{b'_1}{b_1} + \frac{b'_2}{b_2} + \frac{b'_3}{b_3}$$

et

$$3 \left(\frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} \right) = \frac{b''_1}{b_1} + \frac{b''_2}{b_2} + \frac{b''_3}{b_3} - \frac{b_1'^2}{b_1^2} - \frac{b_2'^2}{b_2^2} - \frac{b_3'^2}{b_3^2}$$

Posant

$$(12.9) \quad I^2 = \left(\frac{b'_1}{b_1} - \frac{b'_2}{b_2} \right)^2 + \left(\frac{b'_2}{b_2} - \frac{b'_3}{b_3} \right)^2 + \left(\frac{b'_3}{b_3} - \frac{b'_1}{b_1} \right)^2$$

nous obtenons

$$3 \frac{R''}{R} = \frac{b_1''}{b_1} + \frac{b_2''}{b_2} + \frac{b_3''}{b_3} - \frac{1}{3} I^2$$

ou par (1.12)

$$(12.10) \quad 3 \frac{R''}{R} = \frac{\kappa}{2} (T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - T_4^4) - \frac{1}{3} I^2.$$

Dans toute application raisonnable, T_1^1 , T_2^2 , T_3^3 seront négatifs, en tout cas inférieurs en valeur absolue à $T_4^4 = \rho$. R'' sera donc essentiellement négatif. Si donc à un certain moment R' est négatif, il faut que R atteigne la valeur zéro et donc que le volume s'annule.

On voit que pas plus l'anisotropie que la pression n'empêche l'évanouissement de l'espace.

Ce qui précède n'est pas une preuve formelle de l'impossibilité d'éviter le volume zéro par l'anisotropie, puisque (12.5) n'est pas la forme la plus générale concevable, mais elle indique tout de même dans un cas déjà fort général que l'anisotropie agit dans le sens opposé.

Il faut pourtant bien que la matière trouve un moyen d'éviter l'évanouissement de son volume.

Tant que la matière est formée d'étoiles, ceci est manifestement impossible.

Lorsqu'elle est condensée en une seule masse, il est clair qu'elle doit avoir acquis une grande température bien supérieure à la température critique des liquides et que rien ne l'empêche d'atteindre un degré de concentration comparable à l'intérieur du compagnon de Sirius.

Même pour un gaz dégénéré il semble que rien ne puisse s'opposer à la concentration, puisque l'énergie disponible M/R est indéfinie.

Lorsque les distances entre les noyaux d'atomes et les électrons deviennent de l'ordre de 10^{-12} cm, les forces non-

maxwelliennes qui empêchent la pénétration réciproque des particules ultimes, doivent devenir prédominantes et sont sans doute capables d'arrêter la contraction. L'univers serait alors comparable à un noyau atomique colossal. Si la contraction est arrêtée, le processus doit reprendre un sens inverse.

Adoptant, suivant EDDINGTON, 10^{78} comme nombre des protons existants, nous avons comme ordre de grandeur du rayon de l'univers réduit à l'état atomique

$$10^{\frac{78}{3} - 12} = 10^{14} \text{ cm},$$

soit une dizaine de fois la distance du soleil.

Nous concluons donc, que seules les forces subatomiques nucléaires semblent capables d'arrêter la contraction de l'univers, lorsque le rayon de l'espace est réduit aux dimensions du système solaire.

Du point de vue cosmologique, le zéro de l'espace doit donc être traité comme un commencement, en ce sens que toute structure astronomique d'une existence antérieure y aurait été complètement détruite.

L'époque de ce commencement, ou si on veut de ce recommencement, date certainement d'avant la formation de l'écorce terrestre et l'organisation du système solaire, soit au strict minimum d'après l'étude des roches radioactives

$$1.6 \times 10^9 \text{ années.}$$

Comparant cette valeur au rapport de HUBBLE,

$$\frac{r}{v} = 1.8 \times 19^9 \text{ années,}$$

nous concluons que toute solution où la vitesse d'expansion a toujours été plus grande qu'elle ne l'est maintenant, est exclue.

En particulier, pour l'Univers cycloïdal d'Einstein (12.4) ou la solution (10.10) pour R/R_0 petit, on aurait

$$t = \frac{2}{3} \frac{r}{v} = 1.2 \times 10^9 \text{ années.}$$

Nous devons donc exclure les solutions où la valeur du rayon est inférieure au rayon d'équilibre et, en particulier, les solutions quasi-périodiques.

D'un point de vue purement esthétique, on peut peut-être le regretter. Ces solutions où l'univers se dilatait et se contractait successivement en se réduisant périodiquement à une masse atomique des dimensions du système solaire, avaient un charme poétique incontestable et faisaient penser au phénix de la légende.

L'HYPOTHESE DE L'ATOME PRIMITIF

GEORGES LEMAITRE

Un des portraits qui nous est parvenu, du philosophe et mathématicien RENÉ DESCARTES est accompagné d'une devise qu'il paraît convenable de rappeler au début de cet exposé: *Mundus est fabula*. Le monde est une belle histoire que chaque génération s'efforce d'améliorer. Les tourbillons de DESCARTES n'ont pas survécu aux progrès des sciences; peut-être pourtant reste-il quelque chose de l'attitude mentale qui faisait dire à DESCARTES *Mundus est fabula* dans ce que POINCARÉ appelait plus tard les hypothèses cosmogoniques par lesquelles l'homme ne peut s'empêcher d'essayer de se raconter l'histoire de l'univers et de reconstituer son évolution passée.

Le problème cosmogonique a commencé à se poser d'une manière précise, lorsque, à la suite des recherches de GALILÉE puis de NEWTON, les lois de la mécanique ont été découvertes. L'existence de ces lois a enlevé, dans une certaine mesure, l'arbitraire qui avait jusque là régné dans les conceptions cosmogoniques. Pour la mécanique, l'évolution d'un système matériel est entièrement déterminée, et peut se calculer, lorsqu'on connaît ce que les mathématiciens appellent les conditions initiales et le but de la cosmogonie est de trouver

Pontificiae Academiae Scientiarum Acta, vol. XII, n. 6, pag. 25-40 (1948).

des conditions initiales présentant quelque caractère de simplicité et telles que l'univers actuel a pu en résulter par le jeu des lois connues.

Assurément on peut se demander si les lois, qui sont valables à l'endroit où nous sommes et à l'époque où nous vivons, sont encore valables au loin, là où nous ne pouvons penser en entreprendre la vérification et si elles ont eu cours dans le lointain passé. Le problème cosmogonique peut être abordé dans des dispositions d'esprit les plus diverses. Ceux dont la disposition d'esprit est surtout de ne jamais rien admettre qui ne soit absolument certain, feront sans doute mieux d'y renoncer. Aborder le problème cosmogonique comporte nécessairement un certain risque. Ce n'est pas seulement le risque de perdre son temps à essayer de résoudre un problème qui pourrait être insoluble, c'est aussi le danger de s'égarer. Mais ce risque n'est-il pas compensé par l'espoir d'arriver à une solution, à une conception du monde dans toute son étendue actuelle et dans toute la durée de son évolution passée, conception dont la validité pourrait s'étayer sur quelque confirmation expérimentale?

En essayant de vous expliquer l'hypothèse de l'atome primitif, je chercherai à vous faire comprendre en quoi elle consiste, plutôt que de discuter la portée exacte des arguments qui l'étaient. Je pense d'ailleurs qu'une conclusion définitive ne peut être apportée à l'heure actuelle et qu'une telle conclusion dépendra du résultat de calculs difficiles qui n'ont pas encore pu être effectués et dont dépend la confrontation de l'hypothèse avec les faits expérimentaux. Ceux-ci la confirmeront peut-être, ou peut-être aussi lui feront-ils partager le sort des tourbillons de DESCARTES et de beaucoup d'autres hypothèses oubliées.

Après la mécanique, c'est naturellement l'astronomie qui apporte à notre problème la contribution la plus essentielle en nous décrivant quel est l'état présent du monde autour de nous.

De même que COPERNIC, lançant la terre dans l'espace, nous avait appris que le lieu de l'intelligence n'était qu'un gros caillou tournant avec quelques autres autour de l'astre incomparable, au centre de notre système, le soleil; d'une façon semblable les progrès ultérieurs nous ont appris que le soleil, n'est qu'une étoile parmi beaucoup d'autres. C'est même une étoile classée parmi les naines une dizaine de fois moins massive et des milliers de fois moins brillante que certaines autres étoiles, dites géantes.

L'étoile la plus proche est située à quatre années de lumière, distance bien grande si on pense que la lumière ne met que huit minutes, pour parcourir les cent cinquante millions de kilomètres qui nous séparent du soleil.

Le nombre d'étoiles qui peuvent être aperçues dans les grands télescopes est d'un milliard environ et leur répartition entre les diverses magnitudes par lesquelles on mesure leur éclat permet d'estimer leur nombre total à près de cent milliards avec une masse totale de cent milliards de fois celle du soleil.

Ces étoiles forment avec des nébuleuses qui leur sont associées ce qu'on appelle la galaxie et ces nébuleuses sont dites des nébuleuses galactiques, c'est à dire faisant partie de la galaxie.

La galaxie est un système aplati et la voie lactée, d'où lui vient son nom, est formée des régions les plus lointaines vues de l'intérieur, suivant le plan de symétrie du système. Il s'y présente une grande accumulation d'étoiles et de nébuleuses galactiques qui fait tout le tour du ciel.

La galaxie est animée d'un mouvement de rotation autour d'un centre situé à trente mille années environ. La vitesse d'usoleil autour de ce centre est de trois cent kilomètres par seconde, vitesse grande, au point de vue astronomique, puisqu'elle est dix fois celle de la terre autour du soleil ou quinze fois celle du soleil par rapport aux étoiles qui l'entourent.

En dehors de la galaxie, il existe des galaxies. Le mot

galaxie est donc employé comme un nom propre pour désigner le systèmes d'étoiles dont nous venons de parler, il est employé comme nom commun pour désigner des systèmes semblables à celui-ci mais situé en dehors de lui. On comprend ainsi comment ces galaxies sont aussi appelées des nébuleuses extra-galactiques; de même que l'on peut dire que les étoiles sont des soleils situés en dehors du système solaire.

Les plus proches des nébuleuses extra-galactiques sont les nuées de Magellan, puis la grande nébuleuse d'Andromède, elles forment avec quelques autres ce qu'on appelle l'amas local et notre galaxie en fait partie.

Plus loin, on observe d'autres nébuleuses, réductions en petit et en moins brillant de ces grandes nébuleuses. Ce sont, en fait, des objets semblables mais situés plus loin. On en observe jusqu'à une distance estimée à près d'un milliard d'années. Ces nébuleuses sont situées à des distances mutuelles de un million et demi d'années leur distribution présente de grandes fluctuations de densité, mais sans aucune tendance à une diminution de densité dans les régions extérieures, de telle façon qu'il n'y a aucune indication que nous soyons parvenus à la limite du système des nébuleuses comme nous sommes parvenus à observer la région extérieure de la galaxie, là où les étoiles commencent à se raréfier.

En outre des simples fluctuations dans la distribution des nébuleuses extra-galactiques, il existe de véritables amas de nébuleuses où plusieurs centaines de nébuleuses sont rassemblées à des distances une dizaine de fois moins grande que leur distance normale.

Ces amas ont, d'un point de vue technique, joué un rôle essentiel pour l'étude des nébuleuses, puisqu'ils nous présentent plusieurs centaines d'objets situés à la même distance de nous. Ils ont, entre autres, montré qu'il est très rare d'observer une nébuleuses dix fois plus brillante ou dix fois moins brillante que la moyenne, tandis que cela est cou-

rant pour des étoiles. La détermination des distances relatives des nébuleuses, et surtout des amas de nébuleuses, est donc comparativement un problème facile.

A en juger par la position des raies de leur spectre, les nébuleuses sont animées de vitesses extrêmement grandes. Dans l'amas le plus proche, celui de Virgo, les vitesses observées s'échelonnent de zéro jusque trois mille kilomètres par seconde. En outre de cette grande dispersion des vitesses dans un même amas, il y a un mouvement moyen d'éloignement qui est d'autant plus grand que la distance de l'amas est plus grande.

Un phénomène semblable s'observe pour les nébuleuses isolées. La vitesse d'éloignement est telle qu'elle suffirait pour parcourir la distance qui nous sépare de la nébuleuses en question en deux milliards d'années.

C'est en cela que consiste l'expansion du système des nébuleuses ou expansion de l'univers.

Si l'astronomie et la mécanique céleste ont une part essentielle pour poser le problème cosmogonique, il est une troisième science qui lui apporte une contribution importante, c'est la physique.

La matière est radioactive. La radioactivité est un phénomène de grande importance au point de vue cosmogonique, parce que c'est un phénomène qui s'épuise et donc un phénomène qui a du être plus important jadis.

Le radium disparaît de moitié en seize cent ans. Si nous pouvons encore trouver du radium sur notre vieille terre, c'est parce que il existe un corps radioactif de vie plus longue, l'ancêtre du radium, l'uranium. Celui-ci s'épuise de moitié en 4,4 milliard d'années, en donnant lieu à toute une série de produits parmi lesquels se trouve le radium.

Laissant de côtés les détails de ces transformations, on peut dire que finalement l'uranium s'est brisé en un atome de plomb et huit atomes d'hélium. Ces derniers sont éjectés avec de grandes vitesses et constituent les rayons alpha.

S'il existait un minerais d'uranium vieux de quatre milliards d'années, il devrait contenir autant de plomb que d'uranium. Un tel minerais n'existe pas. On conçoit que l'observation de la teneur en plomb des minerais d'uranium trouvés dans les diverses couches géologiques puisse fixer la durée de celles-ci; on trouve ainsi qu'il y a des roches vieilles de deux milliards d'années.

Mais l'uranium lui-même d'où vient-il? A-t-il lui-même un parent disparu? Existe-il depuis beaucoup plus que quatre milliards d'années? Mais alors qu'est devenu le plomb produit? Il n'y a pas beaucoup plus de plomb que d'uranium.

Plus récemment il est apparu que la radioactivité, loin d'être un phénomène spécial à quelques familles de corps était un phénomène tout à fait général.

Il n'y a pas que le plomb qui soit un élément stable produit par la désintégration d'un corps radioactif. A côté de la radioactivité naturelle existe la radioactivité artificielle qui montre que tous les corps stables ont pu être le produit de la désintégration de corps radioactifs qu'il est possible de produire artificiellement. Ces corps n'existent plus, sans doute parcequ'il n'y a pas dans leur ascendance un ancêtre tel que l'uranium ayant une vie moyenne suffisante, mais on peut artificiellement leur faire reparcourir, en sens inverse, les derniers stades que parcourent encore les éléments des familles radioactives naturelles.

L'hypothèse suivant laquelle tous les corps actuels résultent de transformations radioactives a donc trouvé récemment une certaine base expérimentale.

Cette hypothèse a pourtant été proposée, alors que ces faits expérimentaux n'étaient pas encore connus, en partant de considérations d'une autre nature.

On sait que, si l'énergie se conserve en quantité totale, elle a pourtant une tendance à se dégrader, c'est à dire à se modifier d'une façon unilatérale de telle façon qu'une certaine quantité "l'entropie" augmente dans tout système fermé.

Le cas le plus simple et le plus fondamental est celui où on applique ces notions à des radiations de corps noirs accompagnés du minimum de matière nécessaire pour réaliser les équilibres thermo-dynamiques.

On trouve dans ce cas, que l'entropie de la radiation noire est mesurée par le nombre de photons qui la constitue et que lors des mélanges irréversibles l'énergie dont le montant total est demeuré le même s'est répartie en un nombre plus grand de paquets élémentaires, de quanta, de photons distincts.

Au point de vue quantique, le principe de dégradation de l'énergie apparaît donc comme un principe de pulvérisation de l'énergie.

Les transformations radioactives fournissent un autre exemple de transformations irréversibles où un noyau atomique se brise en neuf fragments, pulvérisation de l'énergie primitivement condensée.

Ces deux exemples extrêmes permettent d'affirmer que la transposition en langage quantique du principe de la dégradation de l'énergie, c'est que la matière existe par paquets d'énergie ou quanta distincts et que dans le jeu naturel des transformations, l'énergie totale toujours la même se trouve finalement répartie en un nombre toujours croissant de fragments.

Envisageant une origine photonique de la matière, JEANS a suggéré ainsi comme un commencement possible, de la radiation électromagnétique de très courte longueur d'onde, cela présenterait sans doute, dit-il, les possibilités nécessaires. Mais qui dit très courte longueur d'onde dit grande fréquence, et puisque l'énergie individuelle des photons est proportionnelle à leur fréquence, photons de grande énergie individuelle et donc un petits nombre.

Ces considération conduisent à envisager comme condition initiale d'où l'univers actuel à pu évoluer par le jeu

des lois physiques et mécaniques connues ce que j'ai appelé l'hypothèse de l'atome primitif.

D'après cette hypothèse, l'univers aurait commencé dans un état où l'énergie totale était concentré en un seul quantum en un seul paquet d'énergie qui ne peut guère se représenter autrement que comme un noyau atomique.

La tendance de la matière à se pulvériser ne serait ici autre chose que l'instabilité radioactive de l'atome primitif; les fragments eux-mêmes radioactifs se désintégreraient à leur tour comme le font les membres successifs des familles naturelles de corps radioactifs. La fragmentation s'est arrêté lorsqu'on en est arrivé aux éléments stables, ou à des corps de longue vie moyenne comme l'uranium.

L'atome primitif ne doit pas être considéré comme un trans-uranien. Ce peut être un isotope de masse extrêmement grande des corps actuels et même, plus probablement, du neutron.

Il existe actuellement une tendance à conférer aux noyaux atomiques une certaine structure et une certaine complexité. La physique du noyau est encore dans l'enfance et il ne semble pas établi que le noyau soit réellement un complexe de particules élémentaires. Pourtant si cette tendance devait prévaloir, il suffirait de considérer l'atome primitif comme réalisant un maximum de concentration et minimum d'entropie. On serait sans doute amené à lui donner un rayon qui ne serait pas tout à fait nul, mais qui aurait quelques minutes de lumière et donc astronomiquement parlant serait tout à fait négligeable en face des dimensions actuelles de l'univers.

Une hypothèse comme celle de l'atome primitif se heurte à des objections, qui, à première vue, paraissent devoir lui être fatales.

Tout d'abord, où était-il, cet atome, lors de sa désintégration et comment comprendre qu'ayant à l'origine un phénomène aussi strictement localisé, on puisse obtenir un univers

que les observations astronomiques montrent être globalement homogène?

Une seconde difficulté est causé par le rayonnement dont sont accompagnés les transformations radioactives, rayonnement qui ne peut manquer de s'être produit et sans doute avec une énergie bien plus grande encore pour ces transformations anciennes, qui ont du mettre en jeu des masses atomiques fort considérables. Qu'est devenu ce rayonnement, ne devrait-on pas l'observer?

Enfin, troisième difficulté, comment concevoir, que partant de la désintégration primitive, on obtienne, en un temps qui ne soit pas beaucoup plus grand que celui de la vie moyenne de l'uranium, l'univers actuel formé d'étoiles organisées en galaxies?

Nous allons essayer d'expliquer comment ces trois difficultés se résolvent.

La première s'explique par les conceptions géométriques introduites en 1854 par RIEMANN. RIEMANN a fait la remarque très simple qu'il n'existe aucune connexion logique entre les deux notions suivantes: celle d'un volume de mesure finie et celle d'une étendue limitée par une frontière qui la sépare d'une étendue extérieure. La connexion que le "bon sens" établi entre ces deux notions, logiquement indépendantes, est due uniquement à l'intuition géométrique que nous acquérons dans les expériences géométriques sur lesquelles se fonde notre bon sens. En d'autres termes nous rejetons la possibilité d'un espace sans borne qui ait pourtant un volume fini, non pas parceque ce serait absurde mais parceque nous n'avons jamais rien vu de semblable.

Comme nous n'avons aucune intuitions directe d'un espace de millions ou de milliards d'années de lumière et comme les propriétés géométriques peuvent très bien dépendre de leurs dimensions, de telle façon que la similitude géométrique ne serait qu'une approximation pour des figures très petites, les seules que nous connaissons directement, il se pourrait

très bien que l'espace réel soit de volume fini et n'ait pas de frontière.

Nous pourrions ainsi concevoir, qu'en portant dans toutes directions une longueur, mettons de dix milliards d'années de lumière, nous aurions rencontré sur l'un ou l'autre de ces rayons menés en toutes directions toutes les nébuleuses qui existent. En dehors de l'espace ainsi délimité, il n'y a rien. Mais alors me direz-vous qu'arriverait-il si nous voulons prolonger un de ces rayons de dix milliards d'années-lumière. La solution des géomètres est la suivante ce rayon butte par son extrémité contre l'extrémité du rayon semblable mené dans la direction opposée. Il est impossible de s'imaginer cela avec une imagination qui n'a pu s'entraîner que dans des volumes minuscules à l'échelle humaine. Mais il n'y a aucune difficulté à concevoir que deux émissaires parcourant dix milliards d'années lumière dans les deux directions opposées se trouvent finalement nez à nez. Si nous représentons en petit à l'échelle humaine ce que nous venons d'affirmer pour l'espace total, nous sommes conduits à représenter tout l'espace à l'intérieur d'une petite sphère, cette sphère a une frontière, mais sur cette frontière les points réels sont représentés deux fois, comme sur un planisphère les points du cent quatre-vingtième méridien sont représentés deux fois aux deux bords de la carte.

Notre carte sphérique de l'espace est limitée par une frontière, bord de la carte. Quand nous atteignons ce bord et semblons forcés de sortir de la carte si nous voulons continuer à avancer, il suffit de nous rappeler que ce point du bord que nous atteignons est aussi représenté au point opposé de la sphère, nous pouvons donc en passant à cette autre représentation du même point, continuer le voyage en cheminant vers l'intérieur.

La ligne droite formée des deux rayons opposés de dix milliards d'années lumière est donc cousue en une seule ligne fermée, ayant comme longueur totale, ou "tour de la droite"

vingt milliards d'années lumière. Pour des raisons techniques on désigne sous le nom de rayon de l'espace le tiers du tour de la droite.

Il est concevable que le tour de la droite, ou ce qui revient au même le rayon de l'espace, varie avec le temps. On obtient alors ce qu'on appelle un espace de rayon variable. Supposons que le rayon augmente avec le temps. Les nébuleuses qui sont réparties dans l'espace et le remplissent uniformément vont donc se séparer les unes des autres. Si par exemple, sur le tour d'une droite, sont alignées vingt mille nébuleuses qui divisent cette droite en parties égales, alors, lorsque la longueur de la droite augmente, il faut bien que la distance des nébuleuses individuelles augmente dans le même rapport. Nous retrouvons le phénomène astronomique de la dilatation du système des nébuleuses et nous l'interprétons maintenant comme une indication de ce que le rayon fini de l'espace est en train d'augmenter.

Jadis, le rayon de l'espace a été plus petit. Rien ne nous empêche de supposer qu'au moment où l'atome primitif s'est désintégré, le rayon de l'espace était extrêmement petit de telle façon que cet atome, que nous nous sommes représenté comme n'ayant qu'une dizaine de minutes de lumière de rayon remplissait tout l'espace, le rayon de celui-ci n'étant pas plus grand. Astronomiquement parlant, nous dirons que le rayon de l'espace part de zéro, au moment où l'atome commence à se désagréger. Les fragments résultant de cette désintégration peuvent donc remplir uniformément l'espace de rayon croissant et lorsque la désintégration progresse et que le rayon s'accroît la matière continue à remplir uniformément tout l'espace. On conçoit donc comment, de la désintégration de l'atome primitif, peut résulter un univers globalement homogène.

Telle est l'explication de la première difficulté.

La deuxième difficulté est relative à ce que est advenu du rayonnement émis lors des désintégrations successives.

Tout d'abord, on peut montrer que l'intensité de ce rayon-

nement est réduite, dans un rapport égal à celui du rayon de l'espace à l'instant d'émission au rayon à l'instant de l'observation.

Les tout premiers rayons sont donc perdus pour l'observation; les rayons qui nous parviennent correspondent à un compromis entre l'énergie d'émission qui a sans doute diminué à fur à mesure que s'avavançait la fragmentation et le facteur de réduction qui augmentait au fur et à mesure qu'augmentait le rayon de l'espace.

Il semble que ce rayonnement puisse être identifié avec les rayons cosmiques. Ceci est en accord avec la qualité des rayons cosmiques dont une partie au moins à une intensité individuelle qui dépasse tout phénomène, même nucléaire, actuellement existant. Ceci semble indiquer qu'il correspond à des phénomènes actuellement épuisés.

Au point de vue quantitatif, on doit comparer l'intensité totale des rayons cosmiques à celle de toutes la matière, puisque c'est toute la matière qui est actuellement organisée en étoiles qui leur a donné naissance jadis.

EINSTEIN a montré que l'énergie est équivalente à la matière et a donné une formule simple qui permet de dire combien de grammes pèse l'unité d'énergie un erg. On peut donc transformer en gramme par centimètre cube les chiffres donnés par les physiciens pour l'intensité du rayonnement cosmique en ergs par centimètres carrés, (il faut diviser par c^3). On trouve 10^{-34} gramme par cm^3 . D'autre part on trouve 10^{-30} gr. cm^3 pour la matière des nébuleuses supposée répartie uniformément dans tout l'espace. Pour un facteur de réduction dû à la variation du rayon de cent ou mille, on trouve que les rayons sont un ou dix pour cent de l'énergie matérielle. C'est ce qu'il faut attendre pour le rayonnement de transformations analogues aux transformation radioactives actuelles.

La densité 10^{-30} gr./ cm^3 a été obtenue en se basant sur la distance moyenne des nébuleuses et sur l'observation spec-

troscopique de la rotation autour de leur centre de quelques-unes des plus brillantes parmi elles. La masse est alors estimée en supposant que l'attraction gravifique qu'elle exerce sur un point du bord est suffisante pour compenser la force centrifuge due à la rotation qui tendrait à la faire s'échapper dans l'espace.

Pour éclaircir le troisième point, il nous faut parler de la théorie de la relativité.

EINSTEIN a montré que la théorie de la gravitation de NEWTON est une approximation d'une théorie plus profonde, où la matière apparaît comme une manifestation du caractère non-euclidien de l'espace ou plutôt de l'espace-temps.

Cette théorie est confirmée par l'observation de petits écarts à la loi de NEWTON que prévoit la théorie et dont la plus célèbre est une petite perturbation de la planète Mercure pour laquelle LEVERRIER s'était hasardé jadis à prédire l'existence d'une planète, dont il avait calculé les éléments, et à laquelle il avait donné le nom de Vulcain mais qui ne s'est pas montrée fidèle au rendez-vous mathématique. Cette perturbation est une conséquence de la nouvelle théorie.

La théorie de la relativité fait prévoir, que, même à l'approximation newtonienne, une autre force pourrait être présente, à côté de l'attraction en raison inverse du carré de la distance; cette autre force, contrairement à la première, augmenterait avec la distance. Elle pourrait être totalement insensible dans l'observation des planètes et ne se manifester que lorsque les distances deviennent fort grandes c'est à dire à l'échelle cosmique. Cette force dépend d'une constante à laquelle on a donné le nom de constante cosmologique. La théorie n'indique ni sa grandeur ni son signe (elles n'indiquait d'ailleurs pas non plus celui de la constante d'attraction universelle). Le cas intéressant est celui où la nouvelle force serait une répulsion, car alors elle peut contrebalancer l'attraction newtonienne et conduire à un équilibre entre les deux forces.

Il est possible de calculer la constante cosmologique,

si on connaît la densité de la matière. Pour la valeur 10^{-30} gr./cm³ indiquée plus haut, et pour la valeur de l'expansion en deux milliards d'années, on trouve que la répulsion cosmique l'emporte actuellement sur l'attraction gravifique et que ces deux forces se sont fait équilibre, lorsque le rayon de l'espace était une dizaine de fois plus petit qu'il ne l'est maintenant. Ces calculs donnent pour le rayon actuel la valeur d'environ dix milliards années lumière dont nous avons fait usage plus haut.

Comme dans les amas de nébuleuses, la distance des nébuleuses est environ dix fois plus petite que pour les nébuleuses isolées on est conduit à interpréter ces amas comme des régions qui sont encore partiellement en équilibre. Il y a pourtant une difficulté provenant des grandes vitesses des nébuleuses de ces amas, vitesses qui sembleraient devoir faire se disperser le système. Mais, par ailleurs, l'amas constitue un centre d'attraction pour les nébuleuses extérieures et celles-ci peuvent, dans une certaine mesure, remplacer les nébuleuses qui s'échappent.

Nous sommes ainsi conduits à admettre que le rayon de l'espace, parti pratiquement de zéro, a augmenté avec une vitesse de moins en moins grande et a atteint, et dépassé lentement, la valeur du milliard d'années où attraction et répulsions se faisaient équilibre, l'expansion a repris ensuite à un rythme accéléré.

C'est ce passage lent à travers l'équilibre qui va nous donner la solution de notre troisième difficulté. En effet cet équilibre est instable. Il suffit de petits écarts locaux des densités et des vitesses, aux conditions moyennes qui assurent cet équilibre, pour que, localement, l'expansion ralentisse, au lieu d'être suivie d'une reprise d'expansion, soit suivie par une contraction. Localement la matière retombe vers un centre accidentel de condensation, tandis que dans son ensemble le système reprend son expansion. Les condensations locales

se séparent donc les unes des autres comme le font les nébuleuses extra-galactiques.

Le développement ultérieur de la théorie dépend de l'idée que l'on peut se faire de l'état de la matière au moment où se produisent ces condensations locales qui doivent s'interpréter comme des nébuleuses extra-galactiques.

Il faut trouver pour cet état intermédiaire des conditions qui puissent résulter de la désintégration initiale et dont puisse résulter le monde actuel.

Je crois qu'on doit se représenter, dans cet état intermédiaire, la matière comme formée de nuées gazeuses animées les unes par rapport aux autres de fort grandes vitesses.

Ces nuées auraient la densité d'équilibre et n'auraient guère de tendance à se contracter. Si, au contraire, deux de ces nuées venaient à se rencontrer, elles s'aplatiraient l'une sur l'autre tandis que l'énergie cinétique se dissiperait en rayonnement; une fois la contraction amorcée, l'attraction gravifique dominant la répulsion cosmique transformerait le système en une étoile, ou, si le moment angulaire est suffisant, en un système d'étoiles et de satellites.

Ces rencontres entre nuées se feront surtout dans les régions de condensation où les nuées se précipitent les unes sur les autres. Ce ci aura deux conséquences. Tout d'abord une partie notable des nuées se transformera en étoiles. En second lieu, par suite de la dissipation d'énergie lors de chocs entre nuées le système pourra acquérir un haut degré de condensation centrale.

La supposition que les nuées sont animées de grandes vitesses relatives est nécessaire pour expliquer que, dans les amas de nébuleuses, les nébuleuses individuelles soient animées de grandes vitesses.

On doit en effet concevoir, qu'une nuée anormalement dense puisse servir de noyau de condensation autour duquel va se former une nébuleuse. Ce noyau ne pourra retenir, parmi les nuées qui passent près d'elle, que celles qui ont presque

la même vitesse qu'elle, les autres échapperont à son attraction. La vitesses des nébuleuses est donc une manifestation de la vitesses des nuées à partir desquelles elles se sont formées.

Les idées que nous venons d'indiquer sont susceptibles d'une étude quantitative. On doit pouvoir en déduire les conditions initiales de formation d'une nébuleuse, un noyau central retenant toutes les nuées jusqu'à la vitesse d'échapement. Ce problème est facile et il est résolu. Mais il faudrait encore suivre l'effet des chocs entre nuées sur leur répartition et le degré de concentration de la nébuleuses qu'elles forment.

Cet aspect du problème est beaucoup plus difficile et la solution en est loin d'être achevée.

Si ce calcul pouvait être effectué, il fournirait une distribution théorique des densités dans une nébuleuse. Comme la distribution réelle est connue par l'observation photométrique des nébuleuses extra-galactiques, la comparaison des deux résultats, astronomique d'une part, théorique d'autre part, pourrait fournir une confrontation décisive de la théorie avec les faits.

Maintenant que nous nous sommes rendu compte que l'état intermédiaire de la matière ou état pré-stellaire consistait en des nuées gazeuses animées de grandes vitesses, il nous faut examiner, si nous pouvons nous rendre compte de l'origine de ces nuées dans le cadre de notre théorie.

La question consiste à comprendre comment peut se former un gaz, en partant des produits de désintégrations successives de l'atome primitif et de ses fragments. Au début, on doit avoir des noyaux atomiques animés d'énormes vitesses comme dans les rayons alpha qui sont des noyaux d'hélium.

Mêmes les noyaux plus massifs, doivent, comme des rayons canaux, posséder de grandes vitesses de recul. Assurément ces particules doivent parfois se rencontrer; mais les chocs trop violents ne peuvent être, comme dans les gaz, des chocs élastiques, ces chocs destructeurs doivent simplement provoquer de nouvelles transformation nucléaires. Comment

cette radiation a-t-elle pu se séparer en une partie qui reste de la radiation et s'observe comme rayons cosmiques, et une partie qui a formé les nuées gazeuses d'où sont nées les étoiles et les nébuleuses?

Il est un phénomène lié à l'expansion de l'espace qui fournit un élément de solution à ce problème. Ce phénomène est très analogue à l'atténuation des rayonnements par suite de l'expansion, que nous avons mentionné à plusieurs reprises dans notre exposé.

Pour nous en rendre compte reprenons notre image de points également répartis sur des droites issues d'un même centre et de longueur égale à la moitié du tour de la droite.

Tous ces points s'éloignent du centre de la représentation avec des vitesses d'autant plus grandes qu'il en sont plus éloignés.

Ils représentent la vitesse normale dans l'univers en expansion.

Supposons maintenant qu'un atome ait une vitesse anormale. Supposons, par exemple, qu'il soit au centre, où, dans notre représentation la vitesse normale est nulle, et qu'au contraire, il soit animée d'une grande vitesse. Alors, il s'éloignera du centre suivant un des rayons, il atteindra des régions de plus en plus éloignées, où la vitesse normale n'est plus nulle, la grande vitesse avec laquelle il se déplace deviendra donc de moins en moins anormale. Pourtant, il ne sortira pas de la représentation. S'il en atteint le bord, il reviendra par la direction opposée. S'il revient au centre, il y reviendra avec une vitesse bien inférieure à celle qu'il possédait au départ.

Sa vitesse propre sera, en fait, réduite dans le rapport de l'expansion, c'est à dire le rapport des valeurs du rayon de l'espace au départ et à l'arrivée.

Dans les premiers stades de l'expansion, ce phénomène a dû réduire considérablement les vitesses propres, c'est à dire la différence entre la vitesse individuelle et la vitesse normale à l'endroit où passe la particule.

On peut donc comprendre que, par suite de cette atténuation des dispersions des vitesses, des atomes aient quelque chance de se rencontrer parfois, avec des vitesses relatives assez faibles pour que le choc soit élastique et si cela se renouvelle assez souvent et intéresse un nombre suffisant d'atomes, pour qu'il se forme localement une nuée gazeuse.

On comprend qu'il ne se forme que des nuées gazeuses, car le phénomène que nous invoquons est trop peu probable pour s'être produit partout à la fois.

On comprend aussi que ces nuées soient animées de grandes vitesses les unes par rapport aux autres, puisqu'elles proviennent de particules rapides, voyageant presque avec la même vitesse, mais pouvant avoir une grande vitesse commune.

Voilà quel est l'état présent de l'hypothèse de l'atome primitif, peut-être vous paraîtra-t-elle digne d'être prise en considération et d'être mise en oeuvre d'un point de vue technique. Sans doute aussi, jugerez-vous prudent de suspendre votre jugement en attendant qu'une confrontation cruciale puisse être faite avec les faits.

Nous ne pouvons terminer cet exposé, sans considérer un moment l'origine même que notre théorie donne à l'univers : l'instant initial, la fragmentation initiale ; l'instant où naissait l'espace avec un rayon partant de zéro, l'instant où naissait la multiplicité dans la matière.

Cette origine nous apparaît, dans l'espace temps comme un fond qui défie notre imagination et notre raison en leur opposant une barrière qu'elles ne peuvent franchir. L'espace-temps nous apparaît, semblable à une coupe conique. On progresse vers le futur en suivant les génératrices du cône vers le bord extérieur du verre. On fait le tour de l'espace en parcourant un cercle normalement aux génératrices. Lorsqu'on remonte par la pensée le cours du temps, on s'approche du fond de la coupe, on s'approche de cette instant unique, qui n'avait pas d'hier parce qu'hier, il n'y avait pas d'espace.

Commencement naturel du monde, origine pour laquelle la pensée ne peut concevoir une pré-existence, puisque c'est l'espace même qui commence et que nous ne pouvons rien concevoir sans espace. Le temps semble pouvoir être prolongé à volonté vers le passé comme vers l'avenir. Mais l'espace peut commencer, et le temps ne peut exister sans espace, on pourrait donc dire, que l'espace étrangle le temps, et empêche de l'étendre au delà du fond de l'espace-temps.

Mais scette origine est aussi le commencement de la multiplicité. C'est un instant où la matière est un seul atome, un instant où les notions statistiques qui supposent la multiplicité ne trouvent pas d'emploi. On peut se demander si dans ces conditions la notion même d'espace ne s'évanouit pas à la limite et n'acquière que progressivement un sens à fur à mesure que la fragmentation s'achève que les êtres se multiplient.

Devons-nous nous plaindre que nos notions les plus familières s'évanouissent lorsqu'elles s'approchent du terme ultime qu'elles ne doivent pas dépasser? Je ne le pense pas.

En terminant je ne puis mieux faire que de rappeler le mot de RENÉ DESCARTES par lequel je commençais et qui s'applique sans doute aussi à l'atome primitif *Mundus est fabula*.

QUATERNIONS ET ESPACE ELLIPTIQUE

GEORGES LEMAITRE

I. INTRODUCTION.

Les quaternions ont été inventés en 1843 par Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON. Il est difficile d'imaginer avec quel enthousiasme, mais aussi avec quelle confusion, cette idée géniale a été développée par son auteur.

Dans une "Introduction to quaternions" publiée à Londres (Mac Millan 1873) par P. KELLAND et P. G. TAIT, le premier des auteurs déclare: "The first work of Sir Wm HAMILTON *Lectures on Quaternions* (1852), was very dimly and imperfectly understood by me and I dare say by others". Il ajoute que les *Elements of Quaternions* (1865) et même l'exposé plus clair de son co-auteur P. G. TAIT: *An elementary Treatise on Quaternions* ne peuvent être considérés comme élémentaires.

Le livre lui-même dont ces remarques sont tirées a certainement un caractère élémentaire, il exagère même dans ce sens, en présentant des démonstrations de théorèmes trop connus pour lesquels l'emploi d'un nouveau type de calcul ne semble pas se justifier.

Pourtant l'influence de la découverte d'HAMILTON a été

très grande. Non seulement, c'est d'elle que s'est dégagé le calcul vectoriel, avec ses notions si fécondes de produit scalaire et de produit vectoriel, mais aussi le développement de la géométrie elliptique par CAYLEY, CLIFFORD etc. semble avoir été fortement influencée par le nouveau calcul, ainsi qu'en témoigne le titre d'un ces travaux: "Preliminary sketch on bi-quaternions" (1873).

Je ne me propose pas de débrouiller l'histoire touffue de ces découvertes, mais, en étudiant l'espace elliptique ou sphérique, il m'est apparu que les quaternions fournissent des notations extrêmement simples et élégantes d'où les propriétés de cet espace découlent immédiatement.

Comme l'espace elliptique joue dans les théories cosmogoniques un rôle de plus en plus grand, j'ai pensé qu'un exposé qui ne suppose chez le lecteur que des connaissances élémentaires de géométrie analytique pourrait présenter quelque utilité même si les spécialistes de l'algèbre, de la géométrie et de l'histoire de la science du siècle dernier, doivent porter le jugement qu'il ne contient rien de vraiment neuf.

Pour l'historique de la question, le lecteur pourra se rapporter aux traités de géométrie et particulièrement à l'ouvrage de W. BLASCHKE *Nicht Euklidische Geometrie und Mechanik* (Teubner 1942) qui présente plus d'un point commun avec le présent exposé mais s'adresse à une tout autre catégorie de lecteurs.

2. VECTEURS.

Un vecteur peut être envisagé au point de vue géométrique et au point de vue algébrique.

Au point de vue algébrique, le vecteur s'obtient en partant du corps des nombres réels, appelés *scalaires*, en leur adjoignant des symboles nouveaux non contenus dans le corps des nombres réels, et désignés ordinairement par les lettres i, j, k .

Sauf pour ces trois lettres, dont l'emploi est consacré par l'usage, nous supposerons que toute lettre latine désigne un scalaire, c'est à dire un nombre réel.

Un vecteur sera donc représenté par

$$x i + y j + z k .$$

L'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire s'obtiendra en appliquant les règles ordinaires du calcul comme si i, j, k étaient des nombres. Le résultat de ces opérations sera encore un vecteur.

Géométriquement, les symboles i, j, k représentent une *base* c'est à dire trois vecteurs de longueur unité et non situés dans un même plan. Nous supposerons que cette base est orthogonale, c'est à dire que les trois vecteurs i, j, k sont deux à deux perpendiculaires.

Alors, les trois scalaires x, y, z sont les *composantes*, ou projections orthogonales du vecteur, sur les trois vecteurs de la base.

Les composantes de la somme de deux vecteurs sont les sommes des composantes de ces vecteurs.

3. DIRECTIONS.

Il est usuel de désigner les vecteurs par des lettres grecques. Nous nous écarterons pourtant quelque peu de cette notation traditionnelle en réservant les lettres grecques aux seuls vecteurs unitaires, c'est à dire aux vecteurs pour lesquels la somme des carrés des composantes est égal à un.

Il nous a paru nécessaire d'introduire une désignation plus brève pour l'expression "vecteur unitaire". Le terme "direction" nous a paru approprié. En effet, puisqu'un vecteur est une grandeur dirigée, le vecteur unitaire, dont la grandeur est fixée une fois pour toute, ne fait plus qu'indiquer la direction et le terme direction lui convient bien.

4. QUATERNIONS.

L'idée maîtresse d'HAMILTON a été de définir la loi de multiplication des symboles i, j, k et cela de telle façon que toutes les règles du calcul algébrique restent valides à l'exception d'une seule: la propriété commutative de la multiplication. Il fonda ainsi l'algèbre non-commutative.

Dans cette algèbre, la valeur d'un produit peut dépendre de l'ordre des facteurs.

Partant de la table de multiplication de deux des symboles i et j , soit

$$i^2 = -1 \quad j^2 = -1 \quad ij = -ji = k$$

on déduit aisément de ces formules (par l'application des règles ordinaires du calcul, en prenant soin de respecter l'ordre dans lequel se présentent les facteurs) que les formules analogues obtenues en permutant circulairement les lettres i, j, k , soit

$$k^2 = -1 \quad jk = -kj = i \quad ki = -ik = j$$

sont valables.

Appliquant ces règles de calcul au produit d'une direction de composantes x, y, z , par une autre direction α' de composant x', y', z' on obtient

$$\begin{aligned} \alpha\alpha' = & -(xx' + yy' + zz') \\ & + (yz' - zy')i \\ & + (zx' - xz')j \\ & + (xy' - yx')k \end{aligned}$$

Cette expression est formée d'une partie scalaire et d'une partie vectorielle.

L'usage a prévalu d'appeler produit scalaire la partie scalaire changée de signe, tandis que la partie vectorielle est encore ce que nous appelons le produit vectoriel des deux vecteurs.

Cet agrégat d'un scalaire et d'un vecteur est ce qu'on appelle un quaternion.

5. QUATERNIONS CONJUGUÉS.

On peut remplacer les trois vecteurs de base i, j, k par une autre base de chiralité opposée, c'est à dire présentant avec la première les même rapports que la main droite avec la main gauche.

Un telle base est

$$i' = -i \quad j' = -j \quad k' = -k .$$

Il existe entre les i', j', k' des relations analogues à celles qui existent entre i, j, k . Mais les facteurs y sont transposés c'est à dire écrits dans l'ordre inverse.

Par exemple de

$$k = i j = -j i$$

on déduit

$$k' = i' j' = -j' i'$$

Supprimant les accents comme inutiles, on dira que le quaternion conjugué est le même quaternion mais rapporté à la base de chiralité opposée. On obtiendra donc le quaternion conjugué en conservant la partie scalaire et en changeant le signe de la partie vectorielle ou, si le quaternion est écrit comme un produit de quaternions, en multipliant les conjuguées des facteurs écrits dans l'ordre inverse.

6. VERSEURS

Le produit d'un quaternion par le quaternion conjugué est un scalaire, qu'on appelle la norme du quaternion.

La norme du produit de deux quaternions Q et Q' est la produit $Q Q' Q' Q$. Mais $Q' Q'$ produit de Q' par le quaternion conjugué Q' est la norme N' de Q' , de même $N = Q Q$ est la norme de Q . La norme du produit est donc le produit des $N N'$ normes des facteurs.

Un quaternion dont la norme est égale à un s'appelle un verseur. Le produit de deux verseurs est un verseur.

Une direction peut être considérée comme un quaternion. C'est un quaternion dont la partie scalaire est nulle.

En outre c'est un verseur. En effet, si dans la formule du produit de deux directions, nous faisons d'abord $\alpha' = \alpha$, ce produit est égal à moins un, de telle façon que les directions peuvent être considérées comme des racines de moins un.

Le conjugué du vecteur est ce vecteur changé de signe, la norme, produit du vecteur par le vecteur conjugué, est donc le carré changé de signe, c'est à dire plus un. Une direction est donc un verseur.

Si u est le scalaire et $v \gamma$ de grandeur v et de direction γ le vecteur d'un verseur V , on aura

$$V = u + v \gamma$$

avec

$$u^2 + v^2 = 1$$

Nous pourrions donc écrire

$$u = \cos c, \quad v = \sin c$$

et donc

$$V = \cos c + \gamma \sin c$$

Si

$$V = \alpha \alpha'$$

$\cos c$ est le produit scalaire des deux directions α et α' tandis que le produit vectoriel est un vecteur de grandeur $\sin c$ et de direction γ .

On pourra donc interpréter géométriquement γ et c en disant que γ est une direction perpendiculaire au plan des deux directions α et α' et que c est le supplément de l'angle formé par ces directions, c'est à dire l'angle extérieur de ces deux directions.

Réciproquement, tout verseur est le produit de deux directions situées dans un plan perpendiculaire au vecteur du verseur et formant un angle, dans le sens convenable, égal à $\pi - c$.

Les formules de la géométrie analytique fournissent un équivalent algébrique de ces notions géométriques. Elles permettent d'établir le résultat que nous venons d'obtenir même si on se place à un point de vue purement algébrique.

Le produit de deux directions n'est une direction que lorsque le produit scalaire est nul, c'est à dire lorsque les deux directions sont perpendiculaires.

Si donc α et β sont perpendiculaires, c'est à dire si

$$\alpha \beta = -\beta \alpha$$

alors ce produit est égal à une direction γ qui est perpendiculaire à α et à β .

7. NOTATION EXPONENTIELLE.

Il est très utile de représenter un verseur en employant la notation

$$V = e^{c\gamma}$$

que nous allons expliquer.

L'exponentielle se définit par son développement en série de puissances

$$e^{c\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \gamma^n$$

qui peut se décomposer en

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{2m}}{(2m)!} \gamma^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{2m+1}}{(2m+1)!} \gamma^{2m+1}$$

Comme

$$\gamma^{2m} = (-1)^m$$

et

$$\gamma^{2m+1} = (-1)^m \gamma$$

et que les développements du cosinus et du sinus sont respectivement

$$\cos c = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m c^{2m}}{(2m)!}$$

et

$$\sin c = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m c^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

on obtient bien

$$e^{c\gamma} = \cos c + \gamma \sin c$$

Il est clair que, tant qu'on n'a affaire qu'à des exponentielles qui contiennent la même direction, c'est à dire la même racine de moins un, on peut utiliser les règles du calcul des exponentielles et en particulier la loi

$$e^{c\gamma} e^{c'\gamma} = e^{(c+c')\gamma}$$

Remarquons encore que si α est perpendiculaire à γ on a

$$\alpha e^{c\gamma} = e^{-c\gamma} \alpha$$

en effet, le premier membre est

$$\begin{aligned} \alpha \cos c + \alpha \gamma \sin c &= \alpha \cos c - \gamma \alpha \sin c = \\ &= (\cos c - \gamma \sin c) \alpha \end{aligned}$$

8. LE PROGRAMME D'ERLANGEN.

Dans notre exposé de la géométrie sphérique et elliptique, nous allons adopter le point de vue proposé par KLEIN dans le programme d'ERLANGEN.

La géométrie est alors spécifiée lorsqu'on se donne, pour tout couple de points, une certaine expression appelée l'invariant de distance. Deux couples de points pour lesquels l'invariant de distance a mêmes valeurs sont alors considérés comme congruents ou superposables.

Une transformation qui transforme tout couple de points en un couple de points ayant même invariant de distance

s'appelle un déplacement et l'étude des groupes de déplacements se réduit à l'étude des groupes de transformations qui laissent invariant l'invariant de distance.

La distance elle-même doit être une fonction de l'invariant de distance, telle que la longueur d'un segment de droite divisé en deux segments partiels soit la somme des longueurs de ces segments.

La longueur du segment est définie comme étant la distance de ses extrémités.

Quant à la droite, nous la considérerons comme un axe de rotation c'est à dire comme un lieu de points laissés invariants par un déplacement.

9. L'INVARIANT DE DISTANCE.

Nous supposerons que chaque point de l'espace sphérique est spécifié par un verseur V .

Si V et V' sont les verseurs représentatifs de deux points nous définirons l'invariant de distance de ce couple de points par le scalaire

$$I = \frac{1}{2} (V V' + V' V)$$

dans cette expression V et V' désignent le conjugués de V et V' .

Ces définitions suffisent pour définir la géométrie au sens du programme d'ERLANGEN.

Quoique cela ne soit pas nécessaire pour la suite de l'exposé nous intercalons ici quelques remarques qui n'ont d'autre but que de montrer comment nous avons été amenés à choisir ce point de départ.

Si u est le scalaire et x, y, z les composantes du vecteur du verseur V , on a

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$$

qui peut être considéré comme une hyper-sphère de rayon un ou espace sphérique. Ceci montre comment un verseur peut caractériser un point de l'espace sphérique.

De même, si les lettres accentuées désignent les quantités analogues pour le verseur V' , l'invariant de distance est

$$I = xx' + yy' + zz' + uu'$$

expression qui généralise à quatre dimensions l'expression du cosinus d'un angle en fonction des cosinus directeurs des directions de ses côtes.

Nous pouvons donc prévoir que l'invariant de distance sera le cosinus de la distance.

10. PARATAXIES.

Un premier groupe de déplacements s'obtient en multipliant le verseur représentatif des divers points de l'espace par un verseur fixe. Nous appellerons ces déplacements des parataxies, parataxies à gauche si la multiplication est faite à gauche, parataxies à droite si elle est faite à droite.

Désignons par

$$e^{a\alpha}, \quad e^{a'\alpha'}$$

deux points quelconques de l'espace, Soit $e^{c\gamma}$ le verseur fixe et $e^{b\beta}$ et $e^{b'\beta'}$ les deux points en lesquels les points $e^{a\alpha}$ et $e^{a'\alpha'}$ sont transformés par une parataxie à gauche, nous aurons

$$e^{b\beta} = e^{c\gamma} e^{a\alpha} \quad e^{b'\beta'} = e^{c\gamma} e^{a'\alpha'}$$

Si I' désigne l'invariant de distance après transformation nous avons à vérifier que $I' = I$. Il vient

$$2I = e^{b\beta} e^{-b'\beta'} + e^{b'\beta'} e^{-b\beta}$$

On a pour les conjugués

$$e^{-b\beta} = e^{-a\alpha} e^{-c\gamma}$$

et

$$e^{-b'\beta'} = e^{-a'\alpha'} e^{-c\gamma}$$

obtenu en prenant le produit des conjugués dans l'ordre inverse il vient ainsi

$$I' = e^{c\gamma} I e^{-c\gamma}$$

qui se réduit à I puisque I est un scalaire qui peut tout aussi bien être inscrit en tête du produit.

De ce que le produit de deux verseurs est un verseur résulte que les parataxies à gauche forment un groupe.

Pour les parataxies à droite, nous aurons de même

$$\begin{aligned} e^{b\beta} &= e^{a\alpha} e^{c\gamma} \\ e^{b'\beta'} &= e^{a'\alpha'} e^{c\gamma} \end{aligned}$$

et donc

$$2I' = e^{a\alpha} e^{c\gamma} e^{-c\gamma} e^{-a'\alpha'} + e^{a'\alpha'} e^{c\gamma} e^{-c\gamma} e^{-a\alpha} = 2I$$

Les parataxies à droites sont donc aussi des déplacements et forment un groupe de déplacements.

II. HOMOGÉNÉITÉ DE L'ESPACE.

Un verseur dont le vecteur est nul se réduit au scalaire un. Nous appellerons le point correspondant l'origine.

Tout point peut être transformé en l'origine par une parataxie à droite ou à gauche. Il suffit de prendre pour symbole de la parataxie le verseur conjugué au symbole du point à transporter à l'origine. Pour $e^{c\gamma} = e^{-a\alpha}$ on a en effet $e^{b\beta} = 1$.

Il résulte de ceci que l'espace considéré est homogène puisqu'il existe des déplacements qui transportent tout point à l'origine.

12. ROTATION.

Si on effectue successivement une parataxie à gauche et une parataxie à droite ayant comme symbole le verseur co-

njugué à celui de la parataxie à gauche, on obtient évidemment un déplacement, c'est à dire une transformation qui conserve l'invariant de distance. Cette transformation transforme un point quelconque $e^{a\alpha}$ en un point $e^{b\beta}$ par la formule

$$e^{b\beta} = e^{c\gamma} e^{a\alpha} e^{-c\gamma}$$

Si $e^{a\alpha}$ est l'origine $e^{b\beta}$ sera aussi l'origine. La transformation conserve donc l'origine, nous dirons que c'est une rotation autour de l'origine.

13. DROITES.

Ceci nous permet de définir une droite comme une axe de rotation.

Les points qui sont conservés par la rotation sont compris dans l'expression

$$e^{c'\gamma}$$

où c' peut prendre une valeur arbitraire.

Cette expression pour c' variable est dont l'équation d'une droite passant par l'origine.

En déplaçant l'origine par une parataxie, on obtiendra l'équation d'une droite passant par le point dans lequel la parataxie a transformé l'origine.

14. DROITES PARATACTIQUES.

Les parataxies de même espèce (c'est à dire toutes à droites ou toutes à gauche) de direction fixe γ , mais de paramètre c quelconque forment un groupe, sous-groupe du groupe de parataxie ceci résulte de ce que

$$e^{c\gamma} e^{c'\gamma} = e^{(c+c')\gamma}$$

de telle façon que les deux parataxies de paramètre c et c'

effectuées successivement dans un ordre quelconque sont équivalentes à une parataxie unique de paramètre

$$c'' = c + c'$$

Ce groupe particulier conserve la droite $e^{c\gamma}$ (c variable) c'est à dire transforme les points de cette droite en des points de la même droite.

Ce groupe conservera (même s'il s'agit de parataxies à gauche), toutes les droites

$$e^{c\gamma} e^{x\xi}$$

(c variable, γ, x, ξ fixes).

Pour diverses valeurs de x et ξ mais même valeur de γ , ces droites sont dites paratactiques entres elles (à gauche).

De même les droites

$$e^{x\xi} e^{c\gamma}$$

(c seul variable) sont conservées par les parataxies à droite et se sont des paratactiques à droite.

15. DISTANCES.

Considérons encore deux parataxies à gauche de direction γ et de paramètres c et c' , effectuées successivement.

La première transforme l'origine en le point $e^{c\gamma}$. La seconde transforme ce point en $e^{(c+c')\gamma}$.

Lorsque nous avons trois points en ligne droite, la longueur du segment total doit être la somme des longueurs des segments partiels. La longueur d'un segment est la distance des extrémités, c'est à dire une fonction de l'invariant de distance pour ces deux points. L'invariant est $\cos c$ et $\cos c'$ pour les segments partiels et $\cos c''$ pour le segment total.

c, c', c'' sont donc des fonctions des invariants de distance et puisque

$$c'' = c + c'$$

ce sont des fonctions additives.

Pour un choix convenable de l'unité de longueur, c , c' et c'' sont donc les distances elles-mêmes.

16. DROITES PERPENDICULAIRES.

Considérons deux droites passant par l'origine, soit

$$e^{x\xi}$$

pour x variable et

$$e^{y\eta}$$

pour y *variable*.

Supposons en outre que les directions ξ et η sont perpendiculaires entre elles; nous nous proposons de montrer que les deux droites sont perpendiculaires.

Ceci peut paraître évident, mais en réalité cela doit être démontré. En effet les directions ont été introduites sans référence à l'espace sphérique et à son invariant de distance.

Nous définirons l'angle droit, comme dans Euclide, par la condition que l'angle est égal à l'angle adjacent obtenu en prolongeant un des côtés. Autrement dit, il doit exister un déplacement (une rotation) qui transforme la première droite en la seconde et la seconde en la droite opposée à la première.

Le calcul est fort élémentaire, mais nous le donnons en détail à titre d'exemple de ce type de calcul.

Puisque les directions ξ et η sont perpendiculaires, il existe une direction ζ telle que

$$\zeta = \xi \eta = -\eta \xi$$

Considérons alors la rotation

$$e^{b\beta} = e^{\frac{\pi}{4}\xi} e^{a\alpha} e^{-\frac{\pi}{4}\xi}$$

qui transforme un point quelconque $e^{a\alpha}$ en $e^{b\beta}$. Nous devons montrer que si nous posons $e^{a\alpha} = e^{x\xi}$, nous obtenons $e^{b\beta} = e^{x\eta}$ et que si nous posons $e^{a\alpha} = e^{y\eta}$, nous obtenons $e^{b\beta} = e^{-y\xi}$.

Dans le premier cas, nous avons

$$e^{b\beta} = \frac{1}{2} (1 + \zeta) e^{x\xi} (1 - \zeta) = \frac{1}{2} (1 + \zeta) (1 - \zeta) \cos x + \frac{1}{2} (1 + \zeta) \xi (1 - \zeta) \sin x$$

Mais

$$(1 + \zeta) (1 - \zeta) = 2$$

et

$$(1 + \zeta) \xi (1 - \zeta) = (1 + \zeta)^2 \xi = 2 \zeta \xi = 2 \eta$$

il vient donc

$$e^{b\beta} = \cos x + \eta \sin x = e^{x\eta}$$

Dans le second cas

$$e^{b\beta} = \frac{1}{2} (1 + \zeta) e^{y\eta} (1 - \zeta) = e^{-x\xi}$$

la calcul est le même, γ remplaçant ξ , mais

$$\zeta \eta = -\xi$$

17. RECTANGLES GAUCHES.

Soit $e^{c\gamma}$ un point fixe; alors pour x et y variables et ξ perpendiculaire à η

$$e^{c\gamma} e^{x\xi}$$

et

$$e^{c\gamma} e^{y\eta}$$

représentent deux droites perpendiculaires entre elles.

En particulier si $\eta = \gamma$, la seconde

$$e^{(c+y)\gamma}$$

est une droite qui passe par l'origine, c'est la droite joignant l'origine au point $e^{c\gamma}$. La première droite est la paratactique

à gauche à la droite $e^{x\xi}$ passant par le point fixe $e^{c\gamma}$.

Comme la droite $e^{x\xi}$ est aussi perpendiculaire à la droite $e^{(c+\gamma)\gamma}$ nous voyons que les deux paratactiques $e^{x\xi}$ et $e^{c\gamma} e^{x\xi}$ admettent une perpendiculaire commune.

Effectuons une parataxie à droite de symbole $e^{x\xi}$ (x' fixe) les deux droites $e^{x\xi}$ et $e^{c\gamma} e^{x\xi}$, paratactiques à gauche, se transforment chacune en elles mêmes et la perpendiculaire commune se déplace en conservant la même longueur.

La figure formée par les deux paratactiques et les deux perpendiculaires communes est donc un rectangle, en ce sens que c'est un quadrilatère dont les angles sont droits et les côtés opposés égaux chacun à chacun. Mais ce n'est pas une figure plane, c'est un rectangle gauche (au sens de l'anglais "skew").

18. SURFACE DE CLIFFORD.

On appelle surface de CLIFFORD, le lieu des droites paratactiques à une même droite, dite axe de la surface, et telles que la perpendiculaire commune avec l'axe ait une même longueur dite rayon de la surface.

Considérons d'abord des paratactiques à gauche; les points la surface de CLIFFORD d'axe

$$\begin{aligned} & e^{x\xi} \\ (\alpha \text{ variable}) \text{ sont} & \\ & e^{c\gamma} e^{x\xi} \end{aligned}$$

où c est le rayon de la surface et où x est variable ainsi que la direction γ qui peut représenter toute direction perpendiculaire à ξ .

Pour des paratactiques à droite, on aurait de même

$$e^{x'\xi} e^{c\gamma'}$$

Les deux expressions sont égales, si on pose

$$x' = x \quad e^{c\gamma'} = e^{-x\xi} e^{c\gamma} e^{x\xi}$$

c'est à dire

$$\gamma' = e^{-x\xi} \gamma e^{x\xi}$$

Ceci montre que le lieu des paratactiques à droite est le même que celui des paratactiques à gauche.

La surface de CLIFFORD est le lieu des points à distance constante c de l'axe de la surface. C'est une surface réglée qui admet deux systèmes de génératrices, les paratactiques à gauche et à droite à l'axe de la surface.

Si on effectue des déplacements paratactiques qui conservent l'axe, la surface de CLIFFORD se transforme en elle-même, les génératrices d'un système se transforment en elles-mêmes et les génératrices de l'autre système se permutent.

Deux couples de génératrices de chacun des deux systèmes forment donc des parallélogrammes, les angles sont égaux ou supplémentaires et les côtés opposés sont égaux.

L'angle de ces parallélogrammes se calcule aisément; en effet les deux génératrices passant par le point $e^{c\gamma}$ sont

$$\begin{array}{l} e^{c\gamma} e^{x\xi} \\ (x \text{ variable}) \text{ et} \\ e^{x'\xi} e^{c\gamma} \end{array}$$

(x' variable). Une parataxie à gauche de symbole $e^{-c\gamma}$ amène le sommet de l'angle à l'origine, les droites se transforment en

$$\begin{array}{l} e^{x\xi} \\ \text{et} \\ e^{-c\gamma} e^{x'\xi} e^{c\gamma} \end{array}$$

qui se transforment l'une dans l'autre par une rotation d'angle $2c$.

Peut-être ce dernier point n'est-il pas parfaitement éclairci, nous y reviendrons dans un instant après avoir étudié le plan.

19. DROITES CONJUGUÉES.

Dans le cas particulier où $c = \frac{\pi}{2}$ on a

$$e^{c\gamma} = \gamma$$

et donc, puisque γ et ξ sont supposés perpendiculaires

$$e^{x'\xi} \gamma = \gamma e^{-x'\xi}$$

les deux paratactiques, celle à droite et celle à gauche sont donc identiques. Leurs points correspondent pour

$$x' = -x$$

Considérons un point quelconque sur la droite

$$V' = e^{x'\xi} \gamma$$

(c'est à dire une valeur particulière de la variable x') et un point quelconque sur la droite

$$V = e^{x\xi}$$

Ces deux droites sont paratactiques à droite pour le cas exceptionnel $c = \frac{\pi}{2}$.

Nous allons montrer que ces deux points quelconques sont à la même distance $\frac{\pi}{2}$ c'est à dire que leur invariant de distance est nul. On a en effet

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} (VV' + V'V) = \frac{1}{2} e^{x\xi} (-\gamma) e^{-x'\xi} + \frac{1}{2} e^{-x'\xi} \gamma e^{-x\xi} = \\ &= \frac{1}{2} [-e^{(x+x')\xi} \gamma + e^{(x'+x)\xi} \gamma] = 0 \end{aligned}$$

On montrerait facilement que la droite joignant V et V'

c'est à dire tout droite coupant les deux droites v et v' (pour x et x' variables) est perpendiculaire commune à ces deux droites. Mais sans doute avons-nous donné assez d'exemples de ces calculs.

Les droites paratactiques pour $c = \frac{\pi}{2}$ sont dites conjuguées ou polaires absolues.

20. PLAN.

Le plan peut être défini comme le lieu des droites perpendiculaires à une même droite

$$e^{c\gamma} e^{x\xi}$$

(x variable)

Les points du plan sont donc représentés par les verseurs

$$V = e^{c\gamma} e^{y\eta}$$

y est arbitraire et η aussi mais perpendiculaire à ξ .

Nous allons montrer que le plan est le lieu des points situés à la distance $\frac{\pi}{2}$ d'un point

$$V' = e^{c\gamma} \xi$$

appelé centre du plan.

Il nous faut vérifier que l'invariant de distance des deux points V et V' est nul. Nous avons

$$I = \frac{1}{2}(VV' + V'V) = \frac{1}{2} e^{c\gamma} e^{y\eta} (-\xi) e^{-c\gamma} + \frac{1}{2} e^{c\gamma} \xi e^{-y\eta} e^{-c\gamma}$$

qui est bien nulle, puisque pour $\xi \eta = -\eta \xi$ on a

$$\xi e^{-y\eta} = e^{y\eta} \xi$$

On peut mettre en évidence dans l'équation du plan, le verseur V' représentant le centre

Posant

$$\zeta = \xi \eta$$

on a

$$V = V' (-\xi) e^{\gamma\eta} = V' (-\xi \cos \gamma - \zeta \sin \gamma) = V' \chi$$

Il est facile de ce rendre compte que χ est une direction et une direction arbitraire. En effet c'est la direction dont les projections orthogonales sur les directions $-\xi$ et $-\zeta$ sont respectivement $\cos \gamma$ et $\sin \gamma$. χ est donc dans le plan de ξ et ζ et fait un angle γ avec $-\xi$. Mais η est une direction arbitraire perpendiculaire à ξ et γ est arbitraire donc χ est arbitraire.

En particulier si le centre est à l'origine, nous voyons que les directions représentent les points d'un plan, c'est à dire d'une sphère de rayon $\frac{\pi}{2}$ centrée sur l'origine.

Comme les théorèmes familiers qui montrent que les angles au centre sont mesurés par l'arc intercepté sur la sphère s'appliquent sans modification, il s'en suit que l'angle de deux droites issues du centre $e^{\alpha\xi}$ et $e^{\gamma\eta}$ est la distance des deux directions ξ et η .

Lorsque les verseurs se réduisent à des directions, l'invariant de distance se réduit au produit scalaire des deux directions. L'angle des deux droites est donc l'angle des directions de ces droites.

En particulier, dans une rotation

$$e^{b\beta} = e^{c\gamma} e^{a\alpha} e^{-c\gamma}$$

on a pour $a = b = \frac{\pi}{2}$

$$\beta = e^{c\gamma} \alpha e^{-c\gamma}$$

et si α est perpendiculaire à γ

$$\beta = e^{2c\gamma} \alpha = \alpha \cos 2c + \gamma \alpha \sin 2c$$

β a donc tourné d'un angle $2c$ dans le plan perpendiculaire à γ .
Ceci achève de justifier la fin du paragraphe 18.

21. POINTS ANTIPODES.

Lorsque x varie de zéro à 2π , l'expression

$$e^{x\xi}$$

représente successivement les divers points d'une droite en partant de l'origine et en y revenant pour parcourir ensuite dans le même ordre les points déjà parcourus. On a en effet

$$e^{(x+2\pi)\xi} = e^{x\xi}$$

La droite est donc une ligne fermée dont la longueur est égale à 2π .

Si nous considérons toutes les droites passant par l'origine c'est à dire lorsque nous considérons différentes valeurs de la direction ξ , nous voyons que pour $x = \pi$ toutes ces droites passent par le point — 1.

Ce point est dit le point antipode de l'origine.

Si nous considérons de même des droites passant par un point $e^{c\gamma}$ nous verrions que toutes ces droites passent par le point — $e^{c\gamma}$ point antipode de $e^{c\gamma}$.

Les points antipodes sont donc représentés par des verseurs de signes opposés, toute droite passant par un point passe aussi par le point antipode de ce point.

22. ESPACE ELLIPTIQUE.

Si, au lieu de l'invariant de distance I, nous avons pris comme invariante distance I^2 ou la valeur absolue de I, alors

deux verseurs V et $V' = -V$ auraient comme invariant de distance plus un. Au lieu de les considérer comme représentant des points distincts de l'espace, les points antipodes, on devrait les considérer comme deux représentations d'un seul et même point de l'espace.

A part cette circonstance relative à la disparition des points antipodes, toutes les formules établies pour l'espace sphérique demeurent valables pour le nouvel espace.

Celui-ci est appelé l'espace *elliptique*.

Certains auteurs l'appelle pourtant espace simplement elliptique de façon à laisser au terme "espace elliptique" un sens générique qui s'applique à l'un et l'autre des deux espaces considérés comme des "formes" diverses de l'espace elliptique.

23. REPRÉSENTATION EUCLIDIENNE DE L'ESPACE ELLIPTIQUE.

Remarquons tout d'abord, que des figures infiniment petites de l'espace elliptique peuvent, à la limite, être considérés comme des figures euclidiennes.

Ceci apparaît déjà dans le fait que l'angle de gauchissement du rectangle gauche est égal au côté; il tend donc vers zéro si ce côté est infiniment petit et alors le rectangle devient plan et la géométrie euclidienne.

On peut aussi montrer que lorsque x, y, z et x', y', z' sont infiniment petits, l'invariant de distance I , devient en négligeant les quantités d'ordre supérieur au second

$$I = 1 - \frac{1}{2} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2] + \dots$$

comme I est le cosinus de la distance r , celle-ci est à la même approximation égale à la valeur euclidienne

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Nous pouvons utiliser cette remarque, pour représenter la totalité de l'espace elliptique, dans une sphère de rayon infiniment petit ε . Notons que, par exception nous employons cette lettre grecque, dans son sens traditionnel d'un scalaire infiniment petit.

Un point

$$e^{x\xi}$$

pourra être représenté à l'intérieur de la sphère par le point

$$e^{x'\xi} = e^{\varepsilon x\xi}$$

soit, en négligeant les termes en ε^2 par le point

$$1 + \varepsilon x\xi$$

Comme la géométrie peut être considéré comme euclidienne dans la sphère, nous aurons, en prenant ε comme unités des longueurs euclidiennes, qu'un point de l'espace elliptique $e^{x\xi}$ est représenté par un vecteur euclidien de direction ξ et de longueur x .

Nous obtenons tous les points de la droite en considérant toutes les valeurs de x de moins $\frac{\pi}{2}$ à plus $\frac{\pi}{2}$. Les points extrêmes représentés sur la sphère de rayon $\frac{\pi}{2} \varepsilon$ sont les points antipodes de cette sphère et représenteraient les points antipodes de l'espace si nous considérons l'espace sphérique. Comme nous considérons l'espace elliptique ces deux points son deux représentations d'une même point de l'espace elliptique.

Tous les points de cet espace sont donc représentés à l'intérieur de notre sphère euclidienne et les points situés sur la frontière de la représentation y sont représentés deux fois.

On n'a donc jamais de difficulté à suivre sur la repré-

sensation un contour qui en atteint le bord, puisque tous les points du bord ont deux représentations de telle façon que, au lieu de sortir de la sphère, on peut toujours passer à l'autre représentation du même point et continuer à cheminer vers l'intérieur de la sphère.

24. REPRÉSENTATION DE L'ESPACE SPHÉRIQUE.

On peut utiliser une représentation analogue pour l'espace sphérique. On suppose maintenant qu'à l'intérieur de la sphère, il y a deux sortes de points. Nous dirons les points bleus et les points roses. Les points de la frontière ne sont pas plus d'une espèce que de l'autre. Nous dirons que ce sont des points mauves.

Nous supposerons qu'on ne peut passer d'un point rose à un point bleu que par l'intermédiaire d'un point mauve.

En d'autres termes, il y a, à l'intérieur de la sphère, deux espaces distincts, l'espace bleu et l'espace rose et ces deux espaces sont raccordés par la frontière mauve, surface de la sphère.

Cette représentation peut être modifiée de diverses façons qui en respectent la topologie en la faisant ressembler aux projections de la sphère, telle que la projection stéréographique ou la projection orthogonale. Mais ces développements nous entraîneraient en dehors de notre sujet.

INSTABILITY IN THE EXPANDING UNIVERSE AND ITS ASTRONOMICAL IMPLICATIONS

GEORGES LEMAITRE

1. *Introduction.*

The Universe is formed of nebulae which fill an elliptical space of radius R .

This radius is a solution of FRIEDMANN's equation

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = -1 + \frac{2\mathfrak{M}}{R} + \frac{R^2}{T^2}$$

and depends on the values of the two constants of this equation: $\mathfrak{M} = \frac{4\pi}{3} G \rho R^3$, approximately constant, is the mass of the universe, and T is related to the cosmological constant λ by $1/T^2 = \lambda/3$.

We consider a solution which starts from $R = 0$ with a diminishing velocity until the radius reaches, with a minimum velocity, a value R_E , called the equilibrium radius. Then the velocity increases up to the present value. The constant T is not very different from the inverse of HUBBLE's Constant,

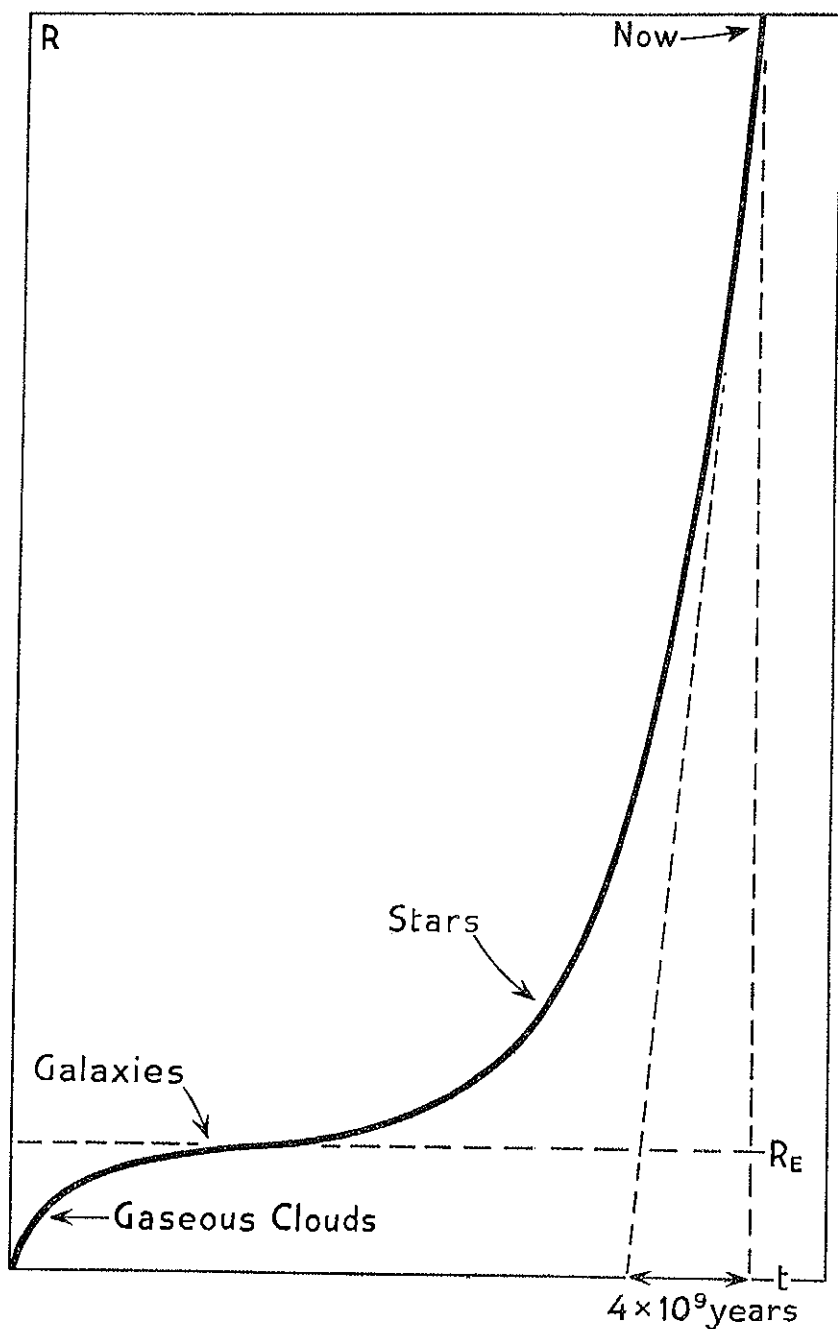


FIG. 1 — Change in Radius of Universe with Time. The actual radius is assumed to be ten times the equilibrium radius R_E . The time scale is given by HUBBLE's constant (subtangent of the curve). The main evolutionary processes are indicated.

4×10^9 years; from a geometrical view point, it is the sub-tangent to the curve (t, R) .

The equilibrium $R = R_E$ is unstable. It is some aspect of this instability and its cosmological consequences which we propose to examine in this paper.

2. *Physical Aspects.*

We have first to make clear the physical aspect of the theory, in order to understand the state of the matter when the radius of space reaches the equilibrium value R_E .

It is an obvious feature of the cosmological problem, that it must be considered under all its aspects and that it becomes meaningless when mutilated.

The physical beginning which fits the solution of FRIEDMANN's equation starting from $R = 0$ is provided by the Primaeval Atom Hypothesis.

Here the word "Atom" should be understood in the primitive Greek sense of the word. It is intended to mean absolute simplicity, excluding any multiplicity. The Atom is so simple that nothing can be said about it and no question raised. It provides a beginning which is entirely inaccessible.

It is only when it has split up into a large number of fragments by filling up a space of small, but not strictly zero, radius, that physical notions begin to acquire some meaning.

The first physical question which has to be considered is whether the resulting assembly of particles has to be described as a gas.

If one gives an affirmative answer to this question, one has to face the difficulty of understanding how such a gas, which presumably filled up an expanding space, has to be able, later on, to divide itself into separate nebulae.

To be more precise, we must make clear what has to be considered as characterizing a gas. It is not enough to have an assembly of a large number of particles. In order to be

called a gas, such an assembly must have velocities with a distribution that is strongly concentrated around a mean velocity, the velocity of the gas, and distributed around this velocity according to a law not too different from the Maxwellian distribution which is realised in ordinary gases.

On the other hand, a mere assembly of particles with velocities spreading in every direction with speeds of the same order of magnitude could not be considered as a gas. It should be described as an assembly of corpuscular rays, as corpuscular radiation.

It is true that, by collisions, such radiation would finally reach a state of statistical equilibrium and become a gas. But in the extreme condition of expansion, starting (theoretically) with infinite velocity, it is not likely that such a statistical equilibrium would have had time to establish itself.

From that point of view, the problem which cosmology has to face is to understand how gas would finally arise from the primaeval radiation and then organise itself into nebulae and secondly to understand what would arise from the part of this primaeval radiation which would have escaped condensation into gases.

The second point gives an interpretation of the observed cosmic radiation, which may, of course, be only a partial one. In discussing this aspect of the theory, one must take into account for the rays the reduction of intensity due to the expansion. This phenomenon, quite analogous to the red shift of light, reduces the intensity of the rays in proportion to $1/R$. The total intensity of the cosmic rays is about $1/10,000$ of the total energy of matter condensed in the stars. This means that cosmic rays and matter would have been of the same order of magnitude when the radius was only one ten-thousandth of its present value.

In the second place, one might have to take into account some absorption of the rays by the intergalactic gases, if any, and surely by the gas when they go through the galaxy. If

one take as an estimate of the density of the intergalactic gases the density 10^{-30} of matter observed as stars, one finds an absorption which is quite negligible.

Nevertheless, it might provide qualitative changes in the composition of the rays. It may be that a part of the hydrogen and helium which is observed in the cosmic radiation is due to secondary phenomena owing to interaction with intergalactic gas.

In any case, it is significant that, even if such correction is not made, the observed cosmic radiation contains less hydrogen and helium in comparison with heavy elements than is the case for stellar matter.

One may think that hydrogen was not present, at least in such abundance, in the *primaeval* radiation of which cosmic radiation provides a sample, and to inquire what is the origin of this hydrogen [1] [2].

Coming to the question of the formation of gas from the *primaeval* radiation, one might expect that the radiation was formed of charged particles (as in the cosmic rays). Then these rays would act as electric currents and accordingly produce magnetic fields.

It might occur that, occasionally, such magnetic fields might have some stability and form magnetic regions moving with some definite velocity without too large change of the field.

Incoming particles which reach such regions with moderate relative velocities would not be able to escape. They would be kept together long enough for elastic collisions to be able to realize some approach to a Maxwellian distribution of velocities.

In this way, it seems possible to understand the formation of local gaseous clouds from the *primaeval* radiation.

When such a region of some extent has been formed it would easily increase by capture of the incoming radiation, even if this radiation reaches it, as the cosmic rays at the top of the atmosphere, with large velocities.

It is conceivable that, in this process of capture, the large kinetic energy of the incoming rays would be materialised, not only into electrons and mesons, but even into hydrogen and helium nuclei [1] [2].

One could understand, in this way, that the matter of the gaseous clouds, that will eventually form the stars, should be richer in hydrogen than the primaeval radiation, and therefore than the observed cosmic rays.

When comparing the intensity of the rays to the density of matter, one would have to take into account the metallic part of the stars, which is of the order of only one percent of the whole.

The relative velocity of the gaseous clouds must therefore be very great even if one takes into account that it is reduced as a consequence of the expansion. It is a well-known fact, so cleverly utilised by MILNE, that objects moving with abnormal velocities in the expanding space have a tendency to sort themselves and reach regions where their velocities are not so abnormal. This kinematic effect reduces the peculiar velocities in the proportion of $1/R$.

But, even so, one must expect that, when the radius of space reaches the equilibrium value R , the gaseous clouds will have large relative velocities.

3. *The Formation of Nebulae.*

We must now consider the effect of the instability of the equilibrium on the assembly of rapid gaseous clouds.

In order to do that, we may restrict ourselves to the Newtonian approximation which is known to be valid for regions not too large in which Euclidean geometry and Newtonian mechanics are good approximations.

The only essential modification which has to be introduced in classical mechanics is that POISSON's equation must be

modified by the introduction of a constant ρ_0 related to the cosmical constant λ or T .

One must write

$$\Delta V = 4 \pi G (\rho - \rho_0)$$

and the equilibrium consists in the fact that the real density ρ is nearly equal to the supplementary constant ρ_0 , the so called cosmical density.

Detailed computations are not necessary to understand what will be the effect of such dynamical circumstances on our assembly of gaseous clouds.

There will occur occasionally permanent attractive regions moving with some velocity. Every gaseous cloud reaching one of these regions with small relative velocity will not be able to escape and would contribute to increase the incipient condensation.

The condensation will sort the clouds according to their velocities and the instability of the general field will result in the formation of an assembly of clouds which can be considered as the origin of the present nebulae.

4. *Initial Distribution.*

It is easy to compute a model [3] for such an assembly of gaseous clouds and this may provide a natural starting point for a discussion of the further evolution of the system.

One assumes spherical symmetry and a static distribution which fills up uniformly the phase-space, that is the product of ordinary space by the velocity space. This uniform distribution is abruptly limited by the representative points of particles which are just able to escape from the condensation.

Some simple condition may be set up which is sufficient (but not necessary) to prevent such an escape.

Using this condition, one can compute a first approximation of the model. This approximation can be refined by perturbation if we wish to take account of the clouds which do not satisfy the condition introduced above and are otherwise prevented from escaping.

One finds a model in which particles with great angular momentum are in great number. It is well known that this is the condition which would lead to the occurrence of a disc in the nebula. These particles with great angular momentum are not able to take part in some primary process of collapse towards the center of the system and it is left to them to coalesce by some kind of z collisions.

5. *Radial Models.*

It is also possible to work out simplified models [4] which may illustrate the main process of central collapse.

The simplest conceivable model is formed of gaseous clouds which move along the radii, and such that each cloud oscillates with the same amplitude to and from along a radius. Phases have to be adjusted in order to make the system stationary.

There is a singularity at the center which provides a kind of dynamical nucleus. There is also a rather unsatisfactory singularity at the edge where the clouds have instantaneous rest and infinite congestion. This last singularity does not occur in another model where the velocity distribution at each point extends uniformly between two limits. In that case the velocity distribution is a line extending from one to the other of two opposite radial velocities, the one towards, the other away from the center.

In these radial models, the cosmological density has been neglected.

Both models provide distributions very similar to the distribution found by HUBBLE for the elliptical nebulae.

This result has been independently confirmed by the investigation of BELZER, GAMOW and KELLER [5]. Their treatment of the question is in some way more realistic than ours. They start from the observed distribution. Our model is over-simplified, but it is perfectly clear from the mathematical standpoint.

6. *Clusters of Nebulae.*

Besides the effect of selection due to the instability that we have described already and which sorts the clouds with the required velocity in order to form an assembly of gaseous clouds from which the nebulae might have evolved, there are also other occurring on a larger scale which help us to understand the clustering tendency and generally the departures from homogeneity in the distribution of the nebulae.

In order to study these effects, it is convenient to consider, in place of the slowly expanding universe passing through equilibrium, a universe staying in equilibrium like EINSTEIN's original universe [6].

Nevertheless, we have to take into account the fact that matter is endowed with large internal velocities.

We may suppose that the distribution of the velocities is such that the phase-space distribution would be uniform. According to LIOUVILLE's theorem, this situation will remain permanently without any interaction between the moving material (identified with the gaseous clouds, and later on with the nebulae which have evolved from them).

The problem will be to compute the motion of maximum velocity in every direction under the action of the gravitational field. This gravitational field is due to a density measured by the volume obtained by plotting in each direction the corresponding maximum velocity. The Newtonian approximation can still be applied with due allowance to the cosmical density ρ_0 .

When spherical symmetry is accepted as a simplification, the angular momentum h will remain constant for each moving particle and the distribution shall be defined by the radial component of the velocity in both directions as a function of the distance r from the center, the time t , and the angular momentum h .

Partial differential equations, involving an integral evaluating the velocity-volume, can then be written up.

In the statical case, precise solutions can be obtained. They depend on two functions, the first of r the other of h ; both are connected by a rather simple integral equation.

The most interesting case is when the function of h vanishes. In the case the distribution of velocities at each point is isotropic.

It is found that statical concentrations do occur, with central velocity up to about 2.3 times the velocity for uniformity.

They are kinds of stationary waves where the congestion remains permanent while the individual components pass through.

The size of the condensation is related to the velocity considered. In fact it is convenient to measure the radius r using as unit the length travelled during the cosmic time $T/\sqrt{3}$ with the maximum velocity postulated for the case of uniform distribution.

When one takes velocities of the order of the standard deviation in large clusters, say 600 km/sec, one finds radii of 4 to 5 million light years, corresponding to the theoretical values of the radius from 1.8 to 1.5.

These are comparable (though rather too large) to the size of the clusters of nebulae.

This raises the question whether the clusters of nebulae are not evolved from such standing waves formed during equilibrium.

It would be very important to be able to compute the evolution of such condensations during the general expansion.

Unfortunately the equations to be solved are somewhat complicated. It would be necessary to introduce convenient boundary conditions [8]. Some progress has been obtained for distributions infinitely near Einstein equilibrium by finding solutions separating the time in an exponential factor $e^{\theta t}$ which can be described by Taylor developments in r and k [7].

It has been found that the distribution compatible with the boundary conditions strongly departs from isotropy and that some simplified assumptions which had been introduced under the name of quasi-isotropy are not admissible.

7. General Clustering.

Nevertheless some results found under this condition seem to have at least a qualitative value in the general case.

It has been shown that the ϑ factor in $e^{\theta t}$ increases with the size of the condensation. It is of course equal to 0 for the static case and goes up by definition to 1 for the uniform expansion of the universe.

This gives some understanding of the fact that instability in a universe in equilibrium (approximate or exact), which could break down just as well towards contraction as towards expansion, does not contract in some part of space and expand in another.

Some clue to this arises in the present investigation, which is of course restricted to spherical symmetry. The distribution can be analysed in elementary solutions with time exponential factors. The greater this factor, the greater is the size of the fluctuation; thus, it is the larger one which must finally prevail even if locally the conditions had been in the reverse direction.

Thus a universe which will begin to collapse in the central region, while at a larger scale it expands, will eventually expand as a whole.

Nevertheless it must be expected that some trace of the

initial collapsing region will remain in the final distribution and that would be observed as a cluster of nebulae.

Of course these conclusions depend essentially on the postulated large velocities of the constituent of the universe.

It implies that the clusters of nebulae would be of the nature of more or less stationary waves and that constituent nebulae would escape from the clusters and be replaced by field nebulae. The density would have to be proportional to the cube of the peculiar velocity.

Another consequence is that one would have to expect large scale fluctuations in the distribution of the densities and of the velocities of the nebulae.

In fact the larger a fluctuation due to the instability of the equilibrium through which the universe is supposed to have passed, the more permanent it is.

This may be important in the interpretation of astronomical observations which are generally discussed under the hypothesis of a strict uniformity in the distribution of densities and velocities. Such a perfect homogeneity does not seem very probable.

It may be emphasized that the present discussion depends entirely on the sign and value assumed for the cosmical constant; this itself depends on the essential correctness of the estimates of the mass of the nebulae.

This may be questioned, on the theoretical side as well as on the astronomical side.

Conversely, the great possibilities afforded by these considerations which are based on the instability and essentially depend on the cosmological term of EINSTEIN's equations, may induce cosmologists not to reject it too lightly, even if its theoretical significance remains somewhat of an enigma.

REFERENCES

- [1] G. LEMAÎTRE, *L'Enigme de l'Hydrogène*. Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 35, 1158-1163, 1949.
- [2] — *Cosmological Applications of Relativity*. Reviews of Modern Physics, 21, 351-366, 1949.
- [3] — *Un modèle de Nébuleuses*. Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 60, 103-114, 1946.
- [4] G. LEMAÎTRE et R. VAN DER BORGHT, *Modèles de Nébuleuses à vitesses radiales*. Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 31, 955-965, 1948.
- [5] J. BELZER, G. GAMOW and G. KELLER, *On the stellar dynamics of spherical galaxies*. Astrophysical Journal, 113, 166-180, 1951.
- [6] G. LEMAÎTRE, *Modèles mécaniques d'Amas de Nébuleuses*. Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 34, 551-565, 1948.
- [7] — *Id.*, 37, 291-306, 1951.
- [8] — *The Clusters of Nebulae in the Expanding Universe*. South African Journal of Science, 449, 80-86, 1952.

DEUX CONFERENCES
DE
GEORGES LEMAITRE
A ROME

LES RAYONS COSMIQUES ET L'UNIVERS

GEORGES LEMAITRE

Les rayons cosmiques ont été découverts en 1911 par le physicien viennois V. F. HESS. A vrai dire celui-ci ne leur avait pas encore donné ce nom de rayon ou radiation cosmique qui n'a été introduit qu'en 1925 par R. A. MILLIKAN. Hess et après lui KOHLHÖRSTER qui avait confirmé la découverte de HESS disaient qu'ils avaient mis en évidence que les rayons très pénétrants qui provoquent la décharge des électromètres les mieux isolés étaient d'origine cosmique.

Ils voulaient dire par là qu'ils nous parvenaient du "Cosmos", qu'ils atteignaient, de l'extérieur, les régions les plus hautes de l'atmosphère et ils en donnaient comme preuve que, lorsqu'ils emportaient en ballon leurs appareils, la rapidité avec laquelle se déchargeaient les électromètres augmentait rapidement jusqu'aux hauteurs de quelque cinq mille mètres auxquelles ils s'étaient élevés.

Il venait donc du Cosmos quelque chose d'analogue à ces étoiles filantes qui viennent brûler dans la haute atmosphère et s'observent sous forme de poussières "cosmiques" qu'on peut recueillir sur la neige vierge des montagnes ou retrouver dans la boue qui s'accumule au fond des océans. On estime qu'il nous en parvient quatre à cinq mille tonnes par an.

En tenant compte de la surface de la terra cinq dix exposant 18 centimètres et due nombre de secondes en un an, trois dis exposant 7, on peut évaluer ce qui nous arrive ainsi, en unités C.G.S., c'est-à-dire, ici, par centimètre carré et par seconde. Peut-être est-il plus intéressant d'estimer la densité avec laquelle les poussières cosmiques sont répandues dans l'espace inter-planétaire. Il faut pour cela tenir compte de leur vitesse: une trentaine de kilomètres par seconde, et diviser par les trois dix exposant 6 centimètres qu'elles parcourent par seconde. On trouve ainsi dix exposant moins 21 (gramme par centimètre cube).

Nous verrons que les rayons cosmiques ont une densité insignifiante à côté de celle de ces poussières cosmiques.

C'est estimations, en unités C.G.S., quelque commodes qu'elles puissent être, disent peu de chose à l'imagination. Si on veut une représentation plus intuitive, on peut, par exemple, se rappeler qu'un atome d'hydrogène pèse environ dix exposant moins vingt gramme (en fait 1,673), et que la densité des étoiles filantes est donc l'équivalent en hydrogène de mille atomes par centimètre cube.

Après MILLIKAN, on a donné le nom de rayons cosmiques, non seulement aux rayons mystérieux qui nous viennent du Cosmos, mais encore à l'ensemble des phénomènes extrêmement variés que ces rayons déclenchent dans l'atmosphère.

Ces phénomènes sont un merveilleux champ d'étude et c'est en l'exploitant qu'ont été réalisées plusieurs des découvertes les plus sensationnelles de la physique moderne: en 1933, l'électron positif par ANDERSON, en 1948, le méson mu et un peu plus tard le méson pi et bien vite ensuite des mésons plus étranges encore puis les particules V ou hypérons.

Les rayons cosmiques sont une source naturelle de phénomènes atomiques d'une puissance inégalable que les accélérateurs s'efforcent, bien sûr, de remplacer avec tout l'avantage que possède l'expérimentation contrôlée sur la simple observation des phénomènes naturels, mais sans qu'il soit possible de concevoir que les machines humaines pourront

jamais remplacer complètement les mystérieux rayons et reproduire les plus grandioses déploiements de catastrophes atomiques qu'ils déclanchent dans notre atmosphère.

On sait depuis longtemps que les rayons cosmiques se composent d'une radiation dure, due à la propagation de mésons mu et à l'absorption de ceux-ci, et en outre d'une radiation plus molle dont le mécanisme de propagation est assez complexe.

On l'interprète par la théorie dite des cascades. La production, ou, comme on dit, la création de paires d'électrons de signes opposés au dépens d'un photon ou rayon gamma de grande énergie alterne avec l'absorption des électrons produits et l'émission de nouveaux rayons gamma qui recommencent le processus initial. Cette alternance se reproduit des centaines de fois.

Une des informations les plus précieuses que nous fournisse l'observation de ces deux composantes de la radiation, observation faite partout où cela a été possible, en promenant des électromètres ultra sensibles dans les plus hautes régions de l'atmosphère à des trentaines de kilomètres de hauteur ou dans les profondeurs de la terre à un millier de mètres de profondeur, a été de nous fournir l'ordre de grandeur de l'énergie cosmique. Cela se fait en estimant l'énergie nécessaire à l'ionisation totale observée qui constitue l'effet, au moins le principal effet, final, des multiples phénomènes déclanchés par les rayons incidents.

Le résultat, dû originellement à MILLIKAN dès 1925, et confirmé en 1938 par JOHNSON et d'autres, donne à de hautes latitudes, c'est à dire là où le champ magnétique terrestre n'a pu les réduire d'une façon appréciable, une énergie totale de quatre millièmes d'erg par centimètre carré et par seconde.

Quelqu'importantes que soient ces observations, elles laissent encore bien incertaine la nature des rayons primaires qui nous arrivent du Cosmos et la manière dont ceux-ci produisent les mésons ou déclanchent les cascades.

Ce n'est que depuis une douzaine d'années que les rayons

primaires ont pu être observés. Ceci est particulièrement l'oeuvre d'un groupe de chercheurs de l'université américaine de Rochester.

Ces physiciens ont employé une des techniques les plus simples et à la fois les plus puissantes dont dispose la physique moderne. Elle consiste à se servir de simples plaques photographiques étudiées spécialement pour y supprimer tout effet de grain.

Les grains de ces émulsions sont en effet tellement petits que les images qui s'y forment peuvent être regardées en se servant de puissants microscopes.

Il n'y a pas d'appareil photographique; c'est la radiation elle-même qui traverse la gélatine et y laisse sa trace par un noircissement caractéristique dont l'analyse permet de déterminer la masse et la charge des particules qui la composent et d'en suivre les déviations lors des chocs avec d'autres particules, visibles ou invisibles.

Deux châssis de cuivre contenant une vingtaine de plaques superposées ont été ainsi promenés en ballon sonde et sont redescendues après être restées pendant six heures à une altitude de trente kilomètres.

Il y a eu deux vols effectués à des latitudes différentes, l'un au Minnesota par 55° degrés de latitude géomagnétique, l'autre à 41° degrés au nouveau Mexique.

Ceci est important, car les rayons chargés positivement qui ont été découverts ont, à des latitudes différentes, été influencés diversement par le champ magnétique terrestre et, nous le verrons, d'importantes conséquences ont pu être déduites de la comparaison des résultats des deux vols.

Pour expliquer les modalités de cette découverte, il nous faut, tout d'abord, décrire certains résultats obtenus au moyen des accélérateurs de particules.

Il est possible d'accélérer des particules alpha, c'est-à-dire des noyaux d'hélium, ou, de simples protons, et d'observer ce qui arrive lorsque ces projectiles rencontrent un atome lourd

et le fait voler en éclats. Cela se présente lorsque l'énergie incidente est de l'ordre du milliard d'électron volt.

On observe alors diverses traces dans les plaques photographiques où se passe le phénomène.

Il y a des traces légères dues à l'émission de mésons pi et pour un quart environ de protons.

Il y a des traces, dites grises, qui sont formées de protons d'énergie de vingt à deux cent millions d'électron volt.

Ces deux catégories de traces sont émises dans des directions qui dépendent de celle de la particule incidente et sont plus ou moins fortement groupées autour de celle-ci.

Mais il y a encore des traces dites d'évaporation qui sont distribuées d'une façon isotrope, indépendante de la direction d'impact. C'est comme si le projectile avait été finalement arrêté dans la cible et la faisait exploser en toutes directions. Les éclats sont projetés en tous sens, sans relation avec l'incidence du choc.

Ces particules d'évaporation sont formées de rayons alpha et aussi de rayons "super-alpha", c'est-à-dire de noyaux atomiques de masse supérieure à celle de l'hélium qui constitue les rayons alpha.

Il y a enfin une particule rejetée dans la direction opposée à celle de la particule incidente et qui consiste en cette particule elle-même rebondissant avec ce qui lui reste encore d'énergie.

Ce que PETERS, et les autres physiciens de Rochester ont observé, c'est le phénomène inverse.

Ce n'est plus une particule légère, proton ou rayon alpha, qui frappe un noyau lourd, mais c'est un noyau lourd venant du Cosmos qui vient frapper une particule légère dans l'émulsion photographique.

Le nouveau phénomène n'est pas essentiellement différent du premier, seul le point de vue diffère et il est facile de déduire de l'observation de l'un de ces deux phénomènes ce qui doit se passer pour l'autre.

En particulier, l'émission isotrope des traces d'évaporation n'est isotrope que par rapport à l'atome lourd qui est

maintenant le projectile. Les traces observées dans la plaque participeront donc à l'entraînement du projectile et seront groupées d'une façon plus ou moins prononcée autour de la direction d'impact, et cela suivant le rapport, plus ou moins grand, entre l'énergie connue avec laquelle les particules d'évaporation sont éjectées et l'énergie inconnue du projectile.

La mesure des angles de divergence des particules alpha observées permet donc de mesurer l'énergie incidente.

C'est de cette manière qu'ont été identifiés les rayons primaires. Ce sont des rayons "super-alpha", ils sont formés de noyaux atomiques plus lourds que celui de l'hélium et l'énergie avec laquelle ils atteignent la terre a pu être mesurée.

Cette mesure a pu être faite pour soixante quinze particules environ dans chaque vol. Combinant ces observations avec l'effet géo-magnétique correspondant aux deux latitudes où ces vols ont eu lieu, il a été possible d'en déduire le spectre d'énergie de la radiation: c'est-à-dire le nombre de rayons nous parvenant, par mètre carré et par seconde, dans un angle solide unité, et dont l'énergie est supérieure à une valeur variable qui est exprimée en milliard d'électron volt par unité de masse atomique, c'est-à-dire par nucléon.

Etant donné le nombre assez modéré d'observations, il n'a pas été possible de faire cette détermination pour chaque espèce chimique. Les observations ont été divisées en deux groupes: l'un contenant le carbone, l'azote et l'oxygène, l'autres les atomes plus lourds: fer, calcium, silicium et magnésium.

Il y a donc dans la radiation cosmique des atomes, mettons de fer, entièrement ionisés c'est-à-dire dépouillés de leurs électrons périphériques et qui sont animés d'énergies qui se chiffrent par des milliers de milliards d'électron volt, pour lesquels l'énergie cinétique à une masse équivalente bien plus grande, cinquante ou cent fois plus grande que la masse propre.

Le fait que les noyaux sont entièrement ou presque entièrement débarrassés de leurs électrons a pu être établi grâce à l'effet de latitude.

Le résultat des observations est exprimé au moyen de

deux nombres, le premier désigné par K , est le nombre de particules de toutes énergies nous arrivant par mètre carré seconde et unité d'angle solide. Le second que nous appellerons γ permet de déterminer l'énergie moyenne de ces particules. En fait le spectre est représenté par la formule $K/(1 + \varepsilon) \gamma$ et on peut en déduire que l'énergie moyenne, exprimée, comme ε , en milliard d'électron volt par nucléon est $1/(1 - \gamma)$. Pour la valeur observée $\gamma = 1,35$ l'énergie est donc égale à 3.

Cela veut dire que l'énergie cinétique des super-alpha est environ trois fois plus grande que sa masse. Le milliard d'électron volt est en effet sensiblement l'énergie correspondant à la masse du proton ou du neutron.

Il convient d'exprimer le résultat des observations en unités C.G.S. en donnant en gramme par centimètre cube la densité avec laquelle les rayons cosmiques primaires sont répartis dans l'espace.

Pour un nombre total $K = 10.000$, la masse qui traverse par seconde un centimètre carré est 1,7 dix exposant moins 24 la masse du nucléon. Comme elle se répartit sur 3 dix exposant dix centimètre, vitesse c de la lumière, il faut diviser par cette longueur et enfin multiplier par 4π pour obtenir l'intensité des rayons de toutes directions. On trouve ainsi 7 dix exposant moins 34.

Ce nombre peut être comparé à l'énergie dépensée dans l'ionisation des rayons secondaires déclenchée par les super-alpha et observée dans toute l'épaisseur de l'atmosphère ou les profondeurs de la terre. Cette énergie est, nous l'avons vu, de quatre millième d'erg par centimètre carré et par seconde.

Cette fois il faut diviser trois fois par $c = 3$ dix exposant dix. Deux fois pour convertir les ergs en leur équivalent en gramme et encore une fois pour passer des centimètres carrés par seconde aux centimètres cubes. Il faut sans doute encore multiplier par deux puisque nous n'observons que les rayons qui viennent d'en haut.

Le résultat est 3 dix exposant moins 34.

Ceci est l'énergie cinétique. Nous avons vu que la valeur observée de l'exposant γ indiquait que celle-ci est trois fois plus grande que la masse propre. Il faut donc réduire de 3 à 1.

Comparant à $7 N = 10.000$, nous obtenons comme nombre de nucléons correspondant à la densité d'énergie observée environ 1400 nucléons.

Le résultats obtenus à Rochester sont $K = 20$ particules pour le groupe de l'azote, ce qui fait 300 nucléons. Le groupe lourd avec 8 particules donne aussi 300 nucléons. Cela fait 600 pour les rayons super-alpha.

Pour les rayons alpha proprement dit, on trouve $K = 400$ hélium, c'est-à-dire 1600 nucléons.

Les auteurs donnent en outre $K = 4.000$ pour les protons ou noyaux d'hydrogène.

Cela donnerait en tout environ 6.000 contre 1.400.

Il semble bien que ce désaccord soit réel et qu'il pose un problème.

Il faut pourtant remarquer que les protons, cause de la grande part du désaccord, ne sont pas observés directement. Il ne résultent pas des mêmes observations que les autres. Ils sont obtenus par différence à partir des données des compteurs de rayons qui enregistrent les rayons incidents sans déterminer leur nature.

Il est d'ailleurs troublant que l'exposant γ obtenu pour l'hydrogène est très différent (1,07 au lieu de 1,35) et conduirait à une énergie moyenne bien plus grande que trois fois la masse.

Ces incertitudes sont signalées par PETERS et ses collaborateurs qui signalent en outre qu'il est impossible de distinguer les protons vraiment primaires de ceux qui résultent de la désintégration de noyaux lourds et que ceci est d'autant plus grave qu'il semble que ces protons peuvent être renvoyés vers l'extérieur de la terre où ils forment une sorte de couronne ou zone de van Allen où ils s'accumulent et reviennent vers la terre.

Il paraît assez difficile de décider si le désaccord doit se résoudre en admettant que l'ionisation ne représente qu'un cinquième de l'énergie absorbée et chercher une autre destination finale au reste de l'énergie ou si plutôt une large part de l'hydrogène, et peut-être aussi de l'hélium, ne serait pas déjà des secondaires qui n'interviendraient pas de façon appréciable dans la production des mésons ou des rayons γ qui produisent les composantes, dure et molle, de la radiation et dissipent finalement leur énergie par l'ionisation observée.

En tous cas la valeur estimée du rapport Z exprimant la proportion en poids des atomes autres que l'hydrogène et l'hélium, estimation qui est de dix pour cent, doit être considérée comme un minimum.

Ceci est très remarquable si on compare cette valeur aux informations qu'apporte à ce sujet l'astrophysique.

La proportion Z entre des atomes lourds et l'hydrogène et l'hélium a en effet attiré fortement l'attention des chercheurs. Elle constitue, en effet, une des données essentielles des théories qui parviennent à retracer l'évolution d'une étoile, à partir de sa condensation au dépens d'une masse gazeuse.

Le facteur décisif dans une telle théorie, est, en effet, le pourcentage des lourds dans la masse gazeuse originelle.

Ce facteur varie largement, suivant la classe d'objets célestes envisagés, et, comme il a été clairement mis en évidence, particulièrement par SCHWARZSCHILD, lors de la semaine d'étude organisée en 1958 par l'Académie Pontificale des Sciences, sur les Populations Stellaires, cette composition originelle est intimement liée à l'âge présumé des étoiles en question.

Les étoiles de la population I, qui se forment encore actuellement ou se sont formées assez récemment, mettons il y a un milliard d'années, se forment à partir de matière qui contient jusqu'à 4 pour cent d'atomes lourds (c'est à dire autres que l'hydrogène et l'hélium).

Dans la population II, au contraire, et en particulier dans le cas extrême des amas globulaires dont l'âge est estimé à six

miliards d'années, la composition originelle n'atteint qu'une valeur de Z de trois pour mille.

A la suite de la communication de SCHWARZSCHILD dont je viens de parler, SPITZER a fait remarquer que Z égal dix pour cent place les rayons cosmiques dans le prolongement de la table dressée par SCHWARZSCHILD et bien en dehors de celle-ci et que cela peut fournir une information sur l'état de la matière au moment de la formation de ces rayons. Il avait en vue l'éjection de matière par les supernovae.

Il n'y a pas actuellement d'explications qui s'imposent au sujet de l'origine des rayons cosmiques.

Les théories qui ont été proposées se divisent en deux groupes. Un premier groupe recherche un processus qui aurait accéléré des atomes provenant des étoiles, particulièrement des supernovae.

L'alternative consiste à voir dans les rayons cosmiques des rayons "fossiles", c'est à dire un reste de l'état primitif de la matière à partir duquel se sont formés les gaz qui se sont constitués en nébuleuses et en étoiles. En particulier l'hypothèse de l'Atome Primitif que j'ai proposée il y a presque trente ans faisait prévoir dès lors la présence dans ces rayons de rayons super-alpha: "de masse et de charge plus grande que celle des particules alpha".

En outre des faits que nous avons décrits plus haut il y a lieu de mentionner certaines circonstances qui restreignent les possibilités des théories envisagées.

Dans les rayons cosmiques, les atomes, mettons de fer, sont complètement ionisés. Si, suivant le premier groupe de théories, ils proviennent du fer des étoiles, il faut que celui-ci ait pu être ionisé et ceci ne semble pouvoir être obtenu que par suite des rencontres avec la matière traversée.

Il a été possible d'interer que l'atome de fer a dû traverser 12 micro gramme par centimètre carré de matière ionisée et davantage si la matière est neutre.

Ceci est 200 fois plus que ce qu'il rencontreraient en nous venant directement du soleil.

Il existe aussi une limite supérieure pour la matière traversée.

Comme l'a remarqué PETERS, si la masse traversée était trop grande, les noyaux du groupe du fer seraient détruits par les collisions et en outre on devrait trouver des noyaux relativement légers: lithium, bérillium, bore qui proviennent de cette destruction. On peut conclure de ceci que la masse traversée ne dépasse pas un gramme par centimètre carré.

La théorie des rayons fossiles semble être trop facile, puisqu'elle suppose que ces rayons sont primitifs, et n'a donc pas à en expliquer l'origine (sauf en termes généraux comme produits de désintégration de l'atome primitif).

Néanmoins elle présente, comme nous allons le voir, des exigences très sévères qui la mettent en contact avec les faits et que nous allons maintenant discuter.

Celles-ci résultent d'un principe tout à fait général, auquel il semble bien difficile d'échapper, et qui consiste en ce que un mécanisme évolutif admissible ne peut avoir ni un rendement parfait, ni un rendement insignifiant.

Si les étoiles se condensent à partir d'un gaz, il est invraisemblable que tout le gaz primitif ait disparu ou que la densité de gaz subsistant soit énormément plus grande que celle des étoiles qui se sont formées.

Dans ce cas le principe se vérifie directement, la densité de gaz ou de poussières est le tiers environ de celle des étoiles.

Mais le même principe doit s'appliquer à la formation des nébuleuses extra-galactiques. On doit s'attendre à la présence de gaz ou de poussières entre les galaxies et qu'elles soient réparties avec une densité sensiblement égale à celle de la matière qui s'est condensée dans les galaxies.

Si encore le rayonnement cosmique est un reste de la matière primitive, il faut que la densité des rayons soit égale ou peu différente à celle de la matière stellaire qui compose les galaxies.

Voilà, du point de vue de la théorie de l'atome primitif,

la grande importance de la détermination qui a été faite de la densité de la radiation cosmique.

Jadis on ne connaissait que la densité d'énergie cinétique, par l'observation de l'ionisation produite par les secondaires.

Ceci n'était pas si important. En effet cette énergie a été considérablement modifiée par suite de l'expansion de l'espace. Le phénomène est analogue à la dégradation de la lumière dont le spectre est déplacé vers le rouge par l'expansion. Ce n'est essentiellement rien d'autre que le refroidissement dû à un détente adiabatique, tel qu'il se passe dans les machines frigorifiques.

D'une manière précise, l'énergie est réduite en proportion de l'expansion, c'est à dire suivant le rapport entre le rayon de l'espace au départ des rayons et à leur arrivée.

Comme le rayon de l'espace a été au moins dix fois plus petit et peut-être bien davantage, lorsque se sont formés les gaz, on disposait d'une large marge de sécurité.

La situation est très différente maintenant qu'on connaît la masse propre des rayons, car celle-ci n'est pas affectée par l'expansion.

Il importe donc de la comparer à la densité de la matière stellaire contenue dans les nébuleuses extra-galactiques.

Cette question a fait l'objet d'une mise au point par l'astronome hollandais J. H. OORT, lors du congrès Solvay de 1959.

OORT arrive à une estimation de trois dix exposant moins 31 grammes par centimètre cube.

Cette valeur est assez incertaine. Elle dépend en particulier du carré du coefficient d'expansion et adopte la dernière révision de SANDAGE. Celui-ci a souligné le caractère très provisoire de cette détermination.

Quoique, pour des raisons théoriques, assez contestables, Oort semble plutôt incliné à considérer son estimation de la densité comme un minimum, il me semble que l'incertitude pourrait aussi bien jouer dans un sens que dans l'autre.

Quoiqu'il en soit, il s'agit d'une densité nettement plus grande que celle des rayons cosmiques.

Rapellons que nous avons trouvé dix exposant moins 34 à partir de l'énergie des secondaires ou du compte des noyaux lourds (avec une partie des hélium) et que cette valeur pourrait être multipliée par 5 en tenant compte de l'hydrogène.

Même dans ce cas, les rayons cosmiques n'ont guère qu'un millième de l'énergie matérielle.

Dans l'hypothèse des rayons fossiles, cela voudrait dire que le processus de condensation n'a laissé échapper qu'un ou deux pour mille des rayons primitifs. Cela paraît peu probable.

On pourrait peut-être remarquer que le processus d'expansion de l'espace ne s'applique pas aux galaxies ou au gaz proto-galactique qui lui a plutôt tendance à se concentrer. Il en résulte qu'il y a eu jadis relativement moins d'espace libre entre les rayons ont eu moins facile à les éviter et s'y laisser capter.

Néanmoins cette explication ne semble pas suffisante, car même dans les amas de nébuleuses, les galaxies semblent encore fort bien séparées et laissent largement la place au passage des rayons cosmiques.

J'ai indiqué, il y a quelque temps, une autre éventualité qui est peut être plus vraisemblable. Elle est en rapport avec l'extrême abondance de l'hydrogène dans la matière stellaire ou pré-stellaire, surtout dans la matière pré-stellaire la plus ancienne d'il y a quelque six milliards d'années.

En tout état de cause, ceci présente pour la théorie des rayons fossiles une difficulté qu'il n'est pas possible d'éluder, puisque la matière pré-stellaire est beaucoup plus riche en hydrogène que les rayons primaires.

L'explication proposée se base sur l'énorme énergie, au moins dix fois plus grande qu'actuellement que devaient posséder les rayons au moment de la formation du gaz pré-stellaire.

Elle consiste à envisager, dans ces conditions extrêmes, une matérialisation de cette énergie.

Quoiqu'il ne soit pas possible actuellement de deviner par quel processus précis cette matérialisation a pu se produire, sans qu'elle ne devienne illusoire du fait d'une production concomitante d'anti-matière, il n'est peut être pas absurde de penser que la grande variété de particules lourdes qu'on commerce à découvrir ne se prête à quelque mécanisme de matérialisation qui pourrait avoir comme résultat final la "création" de l'hydrogène à partir de l'énergie cinétique des rayons.

En comparant les densités des rayons fossiles à celle de leur produit stellaire, on ne devrait plus tenir compte de l'hydrogène.

La densité de la matière pré-stellaire autre que l'hydrogène et l'hélium est ainsi réduite aux trois centièmes soit dix exposant moins 33 à comparer à dix exposant moins 34 des rayons. Cela fait dix pour cent.

Peut-être est-ce admissible tel quel. Cela le deviendrait aisément par une revision raisonnable des masses stellaires dans la marge considérable laissée par l'incertitude des estimations actuelles.

La condition que les rayons n'aient parcouru que moins d'un gramme par centimètre carré est aisément satisfaite.

Dans la galaxie, où la densité est dix exposant moins 24, cette condition correspond à une durée de parcours de moins d'un million d'années. Comme les galaxies ont des dimensions d'une centaine d'années de lumière, il n'y a pas de difficulté à ce que les rayons nous parviennent de l'extérieur.

Entre les galaxies la densité dix exposant moins 31 est un million de fois plus petite et les durée admissibles se chiffrent par milliers de milliard d'années. Cela pourrait être quelque peu modifié si on tient compte de l'expansion mais la marge de sécurité est si grande qu'il n'y a pas à craindre qu'une théorie détaillée réserve des surprises.

Remarquons enfin qu'il n'y a pas de raison de penser que les rayons cosmiques aient une source unique.

Il se pourrait très bien que les explosions de super-novae ou même des phénomènes solaires interviennent dans le rayonnement cosmique, sans en être nécessairement la cause principale.

Le contraire semble exclu, en ce sens que l'hypothèse de l'atome primitif ne peut être considérée comme une explication secondaire puisqu'elle prévoit une énergie des rayons au moins égale à ce qui est observé, et qu'elle ne permet même de se contenter de la densité observée qu'en faisant appel à la matérialisation de l'hydrogène.

En terminant je voudrais évoquer un mot du philosophe et mathématicien RENÉ DESCARTES qui figure sur un des portraits qui nous sont restés de lui: "Mundus est fabula".

Sans doute trouverez-vous avec moi que l'Univers fabuleux n'a pas de plus bel ornement que les rayons cosmiques et que nous pouvons les admirer, même si nous ne distinguons pas bien la morale de la fable et ne sommes pas sûrs d'avoir compris la nature, ou découvert l'origine, des rayons merveilleux.

L'ETRANGETE DE L'UNIVERS

GEORGES LEMAITRE

L'étrangeté est la dernière nouveauté de la Physique nucléaire.

Celle-ci connaît un nombre croissant de particules nouvelles, dont elle s'efforce de découvrir les propriétés. Elle détermine la masse, la charge électrique de ces particules, leur état de spin ou de co-spin et fait apparaître des principes de conservation ou des règles qui définissent, parmi toutes les transformations possibles, celles qui se réalisent en fait, ou, comme on dit, sont des transformations permises.

L'étrangeté est le nom qui a été donné à une de ces propriétés. A chaque particule est attaché un degré d'étrangeté et le nouveau principe affirme que, comme la masse ou la charge, dans certaines conditions, l'étrangeté se conserve: la somme des nombres d'étrangeté est la même avant et après la transformation.

Je ne me propose pas de vous exposer ces découvertes récentes. J'ai pensé pourtant que l'emploi que les physiciens viennent de faire de ce vocable de l'étrangeté décrit bien une impression générale qui se dégage des progrès récents de la Physique.

Conférence donnée au « Circolo di Roma », le 8-1-1960 à 9^h,30 du soir.

Je me propose donc d'examiner avec vous ce qu'est l'étrangeté et ce que nous savons de l'étrangeté de l'univers.

Ouvrons le dictionnaire: étrangeté, caractère de ce qui est étrange; étrange: contraire à l'usage, à l'ordre, au bon sens. Extraordinaire, bizarre.

Le monde que nous révèle la Science s'oppose-t-il au bon sens? S'oppose-t-il à ces idées, à cette conception du monde, qui se forme spontanément en nous au contact du monde qui nous entoure?

Un des plus anciens chocs qu'éprouva le bon sens remonte au début de l'époque moderne, lorsque l'humanité prit conscience de la forme de la terre et en arriva à se poser le problème des antipodes.

Sous nos pieds, à quelques douzaines de milliers de kilomètres, nous devons nous imaginer les semelles des Australiens sous lesquelles ceux-ci pendent étrangement la tête en bas.

Plus récemment, et sans doute dans un cercle plus restreint, il y eut le choc des géométries non-euclidiennes et particulièrement de la géométrie de RIEMANN. La ligne droite qui s'éloigne indéfiniment, sans dévier ni à droite ni à gauche, finit, d'après RIEMANN, par nous revenir par la direction opposée.

Il ne s'agit plus, comme dans la géométrie de LOBATCHEVSKY, d'envisager des corrections plus ou moins grandes aux lois géométriques, une somme des angles des triangles plus ou moins différente de deux droits, il s'agit d'une structure d'espace radicalement différente de celle que l'intuition courante, que le bon sens nous suggère, il s'agit, suivant le mot technique, d'une nouvelle topologie.

Plus récemment ce fut le choc de la Relativité. Nous fûmes invités à étendre les propriétés géométriques à plus de trois dimensions en alliant le temps aux trois dimensions de l'espace pour former l'espace-temps.

Tout cela est contraire au bon sens.

Et pourtant cela ne présente au fond aucune difficulté.

Tout homme cultivé n'a aucune peine à dissiper la paradoxes des antipodes; à se rendre compte que les verticales du fil à plomb ne sont parallèles qu'approximativement et, en fait, s'inclinent progressivement lorsqu'on s'éloigne sur la surface convexe de la terre, pour finir par se renverser aux antipodes.

Les difficultés soulevées par la géométrie de RIEMANN ou la Relativité ne peuvent être résolues, et peut-être même être bien comprises, que moyennant une culture plus spécialisée. Mais, pour tout étudiant ayant une certaine formation mathématique, elles ne présentent, au fond, pas plus de difficultés que le problème des antipodes.

Le mathématicien n'a aucune peine à se convaincre qu'un espace qui a, dans un domaine suffisamment petit, tel que celui que nos sens peuvent atteindre directement, des propriétés tout à fait conformes au bon sens, voit ses propriétés s'altérer progressivement pour des figures plus grandes, un peu comme les verticales qui s'infléchissent sur la surface de la terre, et qu'enfin, pour l'espace global il se produise un fait radicalement nouveau: les deux droites opposées se soudent quelque part et se prolongent, un peu comme deux voyageurs partis en se tournant le dos en arrivent à se rencontrer aux antipodes.

La comparaison est bien sûr boiteuse, il serait illusoire de tâcher de l'améliorer si on ne peut faire appel à quelques considérations plus techniques.

L'étrangeté de l'espace de RIEMANN avec sa droite fermée, avec son espace compact, c'est à dire recouvrable en son entier par un nombre fini de régions emboîtées, sans pourtant être enfermé par aucune frontière, cette étrangeté n'est pas réellement plus étonnante pour un mathématicien que celle des antipodes.

On peut dire la même chose du problème de l'espace-temps.

Depuis DESCARTES et la géométrie analytique, les propriétés géométriques trouvent aisément une expression algébrique. Plus récemment, avec KLEIN, elles s'expriment par la structure du groupe des déplacements qui laissent invariantes les propriétés géométriques. Celle-ci sont ainsi totalement dégagées de leur origine intuitive, des processus psychologiques qui les ont extraites de l'expérience de chaque jour.

Sous leur forme épurée, mathématisée, ces propriétés s'étendent d'elles-mêmes à un nombre quelconque de dimensions. Dans une autre direction, et sans doute d'une façon moins attendue, elles conduisent aussi à l'éventualité que la distance de deux points puisse être nulle sans que ces points soient confondus.

Les lignes isotropes, lieu de points distincts à distance nulle, semblent être la quintessence de l'abstraction et ce n'est pas une des moindres curiosités de la physique moderne qu'elles aient trouvé comme application concrète ce qui est le plus essentiellement intuitif: la lumière elle-même.

Il s'agit là d'étrangeté dont le caractère paradoxal s'évanouit dès qu'il est possible d'en suivre la mathématique sous-jacente.

Néanmoins, s'il est possible de réduire ce qu'il y a d'irritant et d'apparemment irrationnel dans les étrangetés dont nous venons de parler, il ne faudrait pas conclure de cela que l'analyse mathématique les vident de leur signification et de leur contenu.

Il n'est pas indifférent de savoir que la terre est ronde; il n'est pas indifférent de savoir qu'il y a une limitation essentielle à la vitesse et qu'il en résulte une indétermination dans la notion de simultanéité, notion essentiellement imprécise qui ne peut acquérir une consistance utilisable que par l'effet d'une libre convention. Il n'est pas indifférent surtout de savoir que l'espace n'est pas nécessairement infini.

Ce ne sont pas seulement des faits intéressants en eux-mêmes, ce sont des faits d'une portée plus générale; ils nous

avertissent, en effet, du danger que peuvent présenter certaines formes d'idéalisme cartésien.

Je voudrais illustrer ce point en vous lisant une curieuse page de LAPLACE dans l'Exposition du Système du Monde:

"L'idée d'une étendue limitée, par exemple du cercle, ne contient rien qui dépende de sa grandeur absolue. Mais, si nous diminuons par la pensée son rayon, nous sommes portés invinciblement à diminuer dans le même rapport sa circonférence et les côtés des figures inscrites. Cette proportionnalité me paraît être un postulatum bien plus naturel que celui d'Euclide".

Sans doute pourrait-on dire la même chose de la vitesse. L'idée d'une vitesse ne contient rien qui dépende de sa grandeur absolue.

Que l'espace ait une grandeur déterminée par le tour de la droite ou qu'une vitesse ne puisse croître au delà de la vitesse de la lumière sont des faits qui ne s'opposent pas seulement au bon sens, ils s'opposent aussi à une sorte d'idéalisme simplificateur qui croît trouver dans la seule simplicité d'une idée une raison suffisante pour affirmer l'existence de sa réalisation.

Toute idée vient du réel en quelque façon, suivant l'adage: "Nihil est in intellectu nisi prius fuerit in sensu". Assurément, l'idée issue du fait doit le dépasser et suivre l'élan naturel de la pensée, l'activité foncière de l'intellect. Pourtant c'est peut-être une des leçons les plus précieuses que nous apporte l'étrangeté de la physique: cet élan doit être contrôlé, il ne doit pas perdre contact avec les faits, il doit se laisser conditionner par eux. Il faut trouver ici, comme dans tant d'autres domaines, un juste milieu entre un idéalisme rêveur qui s'égare et un positivisme étroit qui demeure stérile. Il faut savoir concevoir des vitesses plus grandes que celles dont on a eu l'expérience directe, sans pour cela inférer à la légère qu'il soit légitime de parler de vitesses infinies.

Peut-être commençons-nous à trouver que l'étrangeté du

monde est une chose sympathique. Si le monde de la science était exactement ce que nous attendions, nous apprendrait-il quelque chose?

Ce que nous avons dit de la théorie de la relativité restreinte, il nous faudra le redire avec quelques variantes de la relativité générale ou théorie de la gravitation.

L'attraction gravifique est une manifestation de la courbure de l'espace-temps. L'élaboration algébrique des notions géométriques a été encore étendue et a conduit à la notion d'espaces non homogènes. L'espace à connexion euclidienne est formé de morceaux presque-euclidiens qui sont raccordés entre eux de proche en proche. Le mode suivant lequel s'effectuent ces raccordements peut être des plus divers et varier de place en place. L'espace à connexion métrique ainsi obtenu n'a plus la monotone homogénéité de l'espace d'Euclide. Il est doué d'une structure variée appelée courbure de l'espace-temps et c'est elle qui décrit les propriétés gravifiques de la matière et du champ graphique qui l'entoure.

Les frontières artificielles par lesquelles notre esprit cherche à cloisonner le réel, s'estompent et disparaissent; la géométrie déjà réduite à l'algèbre en vient à envahir la physique. On conçoit mieux qu'il ne suffise plus, avec DESCARTES ou LAPLACE, d'avoir une idée claire de l'étendue pour en inférer les propriétés. Certes l'idée de l'espace ne dépend pas de sa grandeur absolue et il ne paraît pas y avoir de raison suffisante qui permette a priori d'assigner une valeur plutôt qu'une autre à une telle grandeur; mais l'espace n'existe pas indépendamment de ce qui s'y trouve et sa grandeur, le tour de la droite ou le rayon de l'espace, est déterminée par la matière qui le remplit suivant les lois dues au génie d'EINSTEIN.

C'est ici qu'une nouvelle surprise attendait le chercheur. La théorie géométrique de la gravitation ne conduit pas seulement à la loi d'attraction de Newton en y rattachant d'ailleurs de merveilleux raffinements: le déplacement vers le rouge de

la lumière émise dans un champ de gravitation intense sur le soleil ou sur le compagnon de l'étoile Sirius, ou la pesanteur de la lumière observée durant les éclipses et enfin l'avance séculaire du périhélie des planètes; elle conduit aussi à une conséquence plus inattendue et sur laquelle une opinion unanime n'a pu encore s'établir entre experts.

Comme EINSTEIN l'a indiqué lui-même et comme le grand mathématicien français ELIE CARTAN l'a démontré en toute rigueur, la logique de la théorie conduit à des équations dont la loi d'attraction de Newton n'exprime qu'un aspect particulier. A côté du terme newtonien, caractérisé par la constante de la gravitation, figure un autre terme dépendant d'une autre constante dite constante cosmologique. A côté de la loi d'attraction universelle, et de sa force variant en raison inverse du carré des distances, il y aurait une autre force, tout aussi universelle, attraction ou répulsion, qui varie comme la distance. On comprend comment cette force indiquée par la théorie aurait échappé à l'observation. Contrairement à l'attraction newtonienne elle est d'autant plus faible que les distances sont plus petites; elle peut être insignifiante à la distance du soleil ou des planètes et pourtant se révéler dominante aux grandes distances, à l'échelle du Cosmos. Aussi lui donne-t-on le nom de répulsion cosmique, dépendant de la valeur de la constante cosmologique.

Ici encore la tendance cartésienne s'est sentie heurtée. Einstein lui-même a exprimé l'opinion qu'il serait plus simple de supprimer la constante cosmologique et qu'il n'y avait pas de raisons suffisantes de la maintenir. L'autorité prestigieuse d'Einstein a naturellement trouvé plus d'un écho.

Mais supprimer des équations le terme cosmologique est-ce vraiment une solution à la difficulté? N'est-ce pas suivre plutôt la politique de l'autruche? N'est-ce pas donner arbitrairement à la constante cosmologique une valeur particulière: zéro? N'est-ce pas risquer d'écarter à la légère les possibilités offertes par la théorie pour rencontrer et interpréter les faits astronomiques.

N'est-il pas plus sage, avec EDDINGTON, de voir dans le terme cosmologique une indication que nous avons encore une fois cédé à la tendance instinctive de cloisonner la réalité? La constante cosmologique est, certes, superflue pour expliquer la gravitation; mais la gravitation n'est pas toute la physique. D'un point de vue purement géométrique le rayon de l'espace de Riemann était aussi une constante de trop; c'était une indication que la géométrie ne devait pas se suffire à elle-même, mais devait se fondre dans une synthèse plus vaste, précisément dans la théorie géométrique de la gravitation. La constante cosmologique qui apparaît dans cette dernière théorie n'est-elle pas une indication d'un élargissement ultérieur de la théorie, dans le sens de ce qu'EDDINGTON a appelé une théorie fondamentale, une théorie qui parviendrait à unir et synthétiser le point de vue de la théorie de la relativité et celui de la mécanique quantique où figure aussi une constante caractéristique, la constante de Planck, qui n'est peut-être pas sans rapport avec la constante cosmologique.

Lorsque s'élève une nouvelle bâtisse, on voit parfois sortir du béton des tiges de fer aux formes bizarres. S'il s'agit d'une construction définitive destinée à demeurer isolée ces tiges tordues sont insupportables. Mais si le bâtiment actuellement construit attend quelque nouvelle extension, ces mêmes tiges peuvent devenir précieuses, puisqu'elles pourraient être utilisées pour assurer la cohésion de l'ensemble.

Telle nous paraît être la constante cosmologique. Tout en comprenant les considérations esthétique qui ont amené EINSTEIN à la renier et à essayer de la faire oublier, en l'égalant à zéro, je préfère pour ma part en tirer parti dans les applications, sans attendre que sa signification profonde ait été élucidée. EINSTEIN, sans se rallier à cette attitude, a d'ailleurs reconnu qu'elle était légitime.

La constante cosmologique avait permis à EINSTEIN, avant qu'il ne songe à la répudier, de construire le modèle d'Univers en équilibre qui a été le point de départ de toutes les recherches dans ce domaine. Force d'attraction et répulsion cosmique s'y

font exactement équilibre. Le rayon de l'espace dépend de la densité de la matière ambiante suivant une formule simple. Cette densité est fournie par l'astronomie: une galaxie de quelques milliards de soleils tous les deux ou trois millions d'années de lumière, soit 10^{-30} gramme par centimètre cube.

Cet équilibre de l'univers d'Einstein est instable et la rupture de cet équilibre peut expliquer l'expansion de l'Univers, cette dilatation uniforme du système des galaxies ou, ce qui revient au même la variation du rayon de l'espace de Riemann qu'elles occupent.

Mais ceci n'est qu'une solution parmi beaucoup d'autres d'une équation générale trouvée par A. FRIEDMAN à Moscou et qui décrit d'une façon générale comment se comporte le rayon de l'espace, suivant la valeur de sa masse et de la constante cosmologique.

C'est parce que certaines solutions de l'équation de Friedman, impliquant une valeur nulle de la constante cosmologique, ont semblé admissibles du point de vue astronomique, qu'Einstein s'est décidé à condamner cette constante.

Je m'écarterais sans doute trop du sujet de cette conférence si j'expliquais ici pourquoi je préfère d'autres solutions de l'équation de Friedman. J'ai eu l'occasion de m'expliquer en détail ici même à Rome lors de la Semaine sur les Populations Stellaires qui s'est tenue sous les auspices de l'Académie Pontificale des Sciences et dont les compte-rendus ont été publiés par le Révérend Père O'Connel, directeur de l'Observatoire papale de Castel Gandolfo. Plus récemment j'ai eu l'occasion de revenir sur le sujet lors de la réunion du Congrès Solvay à Bruxelles.

Je suis conduit à me rallier à une solution de l'équation de Friedman où le rayon de l'espace part de zéro avec une vitesse infinie, ralentit et passe par l'équilibre instable de l'univers d'Einstein avant de reprendre l'expansion à un rythme accéléré. C'est cette période de ralentissement qui me

paraît avoir joué un rôle des plus importants dans la formation des galaxies et des étoiles. Elle est évidemment essentiellement liée à la constante cosmologique.

Mais il est temps de quitter l'étrangeté telle qu'elle se manifeste dans le très grand, pour nous tourner vers les propriétés non moins étranges du très petit.

La matière est formée de grains inimaginablement petits. Sur la largeur d'un ongle sont alignés cent millions de molécules. Dans ces molécules, il y a des électrons, cent mille fois plus petits encore que l'Ångström, ou distance qui sépare les molécules. Il y a aussi le noyau, sans doute pas plus grand qu'un électron, où toute la réalité physique semble s'être condensée et qui apparaît comme le siège de phénomènes des plus variés, signes d'une structure complexe et diversifiée manifestée par l'émission de ces particules élémentaires, mésons ou hyperons, auxquelles on a attribué divers degrés d'étrangeté.

Jadis, disait-on, la nature avait horreur du vide; aujourd'hui le monde physique en est plein; il n'y a plus guère que du vide, avec, de-ci de-là, des singularités inimaginablement réduites où toute la réalité semble s'être réfugiée.

Je ne dis pas ceci avec une intention d'instituer le procès de la physique d'aujourd'hui. Je veux simplement, avec les physiciens, souligner l'étrangeté de l'image du monde qu'ils nous présentent. Cette étrangeté apparaît évidemment à l'extrême lorsque, comme nous venons de le faire, on cherche à vulgariser, à l'exprimer, dans les termes non techniques du langage courant, le résultat de leurs recherches. Il ne faut pas sans doute s'étonner que ce soient les aspects les plus faibles, les plus provisoires, de ces théories qui soient le plus aisément vulgarisés et que l'image sommaire, ainsi isolée de son contexte technique, perd sa valeur véritable qui consiste essentiellement dans le lien qu'elle établit avec des expériences précises.

Il n'en est pas moins vrai que la notion commune de distance, obtenue par superposition de règles étalons, ne peut plus s'appliquer que d'une manière bien indirecte et analogique lorsqu'on parle de dimensions des milliers de fois plus petites que les grains dont se compose toute règle matérielle.

D'ailleurs l'étrangeté que fait apparaître une description superficielle du vide physique, apparaît d'une façon plus technique dans la structure même de la théorie quantique.

Si on prend au sérieux la notion d'êtres localisés, tels que les citoyens d'un état, il y a une science appelée la statistique qui apprend à les dénombrer et les étudier collectivement et il y a une manière normale, apparemment inévitable, de faire ces statistiques.

Lorsque le physicien introduit des statistiques nouvelles, telles que celle de BOSE par exemple, où plusieurs particules semblables ne comptent que pour une, il est clair qu'il s'écarte du sens commun et cette étrangeté revient à renoncer à donner aux particules dont il parle un degré d'individualité et de réalité comparable à celle des divers citoyens d'un état.

Cela a amené la théorie quantique à renoncer à une conception trop déterminée du monde en alliant corpuscules et ondes dans une description à la fois puissante et décevante.

Puissante, puisqu'elle rend compte des forces qui contrôlent la chimie des molécules ainsi que la régularité des raies et des bandes de l'analyse spectrale; décevante, puisqu'elle ne laisse aucun support à l'imagination, inquiétante même, puisqu'elle prête le flanc à la critique qu'en a fait Einstein.

Même si on accepte les réfutations qui ont été faites de cette critique et qu'on ne soit pas prêt à le suivre dans l'opinion que la théorie des quanta ne peut fournir une description complète de la réalité physique, ce n'est, suivant l'expression de Niels Bohr, qu'au prix d'une renonciation finale à l'idéal classique de la causalité et à une révision radicale de notre attitude en face du problème de la réalité physique.

Cette revue de l'étrangeté de la physique moderne est sans doute bien incomplète et bien superficielle. Il ne semble pourtant pas utile de la poursuivre plus avant; sans doute vaut-il mieux essayer d'en dégager la signification.

Nous avons déjà vu comment la découverte de l'étrangeté du monde s'oppose à une certaine forme d'idéalisme simpliste qui me paraît se rattacher à la pensée de DESCARTES. Je voudrais vous montrer comment elle peut influencer notre attitude vis-à-vis de la position d'autres penseurs, je pense au PASCAL des Pensées et au KANT des antinomies.

Dans cette discussion, je ne me demanderai pas jusqu'à quel point les vues nouvelles sont véritablement établies, je les considérerai seulement comme de nouvelles possibilités, plus ou moins plausibles, qui transforment l'état de la question en enlevant leur caractère apparemment inéluctable à certaines positions et peuvent même nous libérer radicalement de faux problèmes.

PASCAL a posé l'homme entre deux infinis.

Nous avons déjà vu comment la géométrie de Riemann nous a libérés de l'infiniment grand et la physique quantique de l'infiniment petit. Il importe peu que les physiciens nous amènent à concevoir des degrés de petitesse que PASCAL n'aurait pu concevoir et que l'astronomie nous parle de milliards d'années de lumière. Quelque grandes ou petites que soient ces quantités, elles sont finies, donc en opposition radicale avec la pensée pascalienne.

Mais sans doute convient-il d'abord de relire PASCAL. Voilà ce qu'il dit de l'infiniment petit, il considère un animalcule qu'il appelle un ciron.

"Je veux lui faire voir là dedans l'extrême petitesse de la nature un abîme nouveau. Je lui veux peindre non seulement l'univers visible, mais l'immensité qu'on peut concevoir de la nature, dans l'enceinte de ce raccourci d'atome. Qu'il y voie une infinité d'univers, dont chacun a son firmament, ses planètes, sa terre, en la même, proportion que le monde

visible: dans cette terre, des animaux et enfin des cirons, dans lesquels il retrouvera ce que les premiers ont donné; et trouvant encore dans les autres la même chose sans fin et sans repos, qu'il se perde dans ces merveilles, aussi étonnantes dans leur petitesse que les autres dans leur étendue; car qui n'admira que notre corps qui tantôt n'était pas perceptible dans l'univers, imperceptible lui-même dans le sein du tout, soit à présent un colosse, un monde, ou plutôt un tout à l'égard du néant où l'on ne pourrait arriver?"

La physique d'aujourd'hui nous a définitivement libérés de considérations de ce genre.

Et ceci est important car voyez quelles conséquences en découlent, je cite encore PASCAL:

"Manque d'avoir contemplé ces infinis, les hommes se sont portés témérairement à la recherche de la nature, comme s'ils avaient quelque proportion avec elle. C'est une chose étrange qu'ils ont voulu comprendre les principes des choses, et de là arriver jusqu'à connaître tout par une présomption aussi infinie que leur objet. Car il est sans doute qu'on ne peut former ce dessein sans une présomption ou sans une capacité infinie, comme la nature".

Nous devons retourner ces propositions: l'homme est proportionné à la nature. S'il veut connaître le tout, il est peut-être présomptueux, mais sa présomption, son audace n'est pas infinie, elle n'est pas condamnable ou absurde, elle est l'ambition normale de l'humanité.

La libération du spectre de l'infini écarte en fait une des antinomies de KANT: l'espace peut être homogène et sans frontière et pourtant compact, mesurable, fini.

Nous allons voir que certains des concepts étranges apportés par la physique peuvent aussi nous libérer de l'antinomie du temps, ceci du moins dans le cadre de l'hypothèse de l'atome primitif.

Lorsqu'on envisage un commencement éventuel du monde on devrait, semble-t-il, pouvoir concevoir un état antérieur

d'où l'état considéré comme initial aurait pu procéder par évolution naturelle et on ne peut s'empêcher de se demander comment le monde n'a pas commencé un peu plus tôt, dans cet état antérieur qui semble exclu violemment, d'une manière qu'on ne peut que trouver peu naturelle.

Un commencement naturel ne peut être qu'étrange, c'est-à-dire basé sur l'éventualité de circonstances radicalement différentes de celles qui régissent actuellement le monde qui nous entoure.

Le rayon de l'espace de Riemann est fini, et dans l'expansion de l'univers il augmente sans cesse et, nous l'avons vu, pour certaines solutions de l'équation de Friedman il a pu partir de zéro. Si, au commencement, le rayon de l'espace part de zéro, on se trouve dans les conditions d'étrangeté qui excluent un précommencement, un état antérieur concevable, puisque le rayon de l'espace ne peut avoir été plus petit que zéro.

Par ailleurs, la nature est formée d'un nombre assurément très grand, mais d'un nombre fini de quanta ou paquets quantiques. L'énergie totale se conserve lorsque ces paquets se scindent ou se réunissent à nouveau. Néanmoins le nombre de ces paquets dans lesquels se distribue l'énergie, augmente constamment. C'est en cela que consiste la dégradation de l'énergie. Un photon violet est deux fois plus intense qu'un photon rouge et l'on peut attendre plus d'une quantité d'énergie formée de photons violets que de la même quantité d'énergie formée d'un nombre double de photons rouges. La dégradation de l'énergie c'est l'éparpillement, la pulvérisation, de l'énergie.

Dans les premiers âges du monde, l'énergie subsistait donc en un nombre moindre de paquets plus énergiques. Les rayons cosmiques sont sans doute un témoin de cette activité primordiale, de ce feu d'artifice des premiers jours du monde. Au commencement il n'y avait qu'un petit nombre de paquets individuels, peut-être un seul: l'atome primitif.

Nous obtenons ainsi un commencement naturel, le commencement de la multiplicité. On ne peut remonter dans la

série des nombres au delà de un. Le premier quantum unique n'a pu provenir d'une pulvérisation, d'une éparpillement.

Je ne veux pas développer davantage en ce moment l'hypothèse de l'atome primitif. Mon sujet est l'étrangeté du monde. Je veux me borner à montrer comment l'étrangeté de l'atome primitif aide à comprendre comment l'univers a pu commencer d'une façon naturelle.

Je préfère pour ma part ce commencement naturel à la chiquenaude initiale dont parlait déjà PASCAL avant LAPLACE et par laquelle Dieu serait intervenu dans le domaine des causes secondes pour mettre le monde en mouvement.

Je préfère pense au Dieu caché d'Isaï: "Deus absconditus, salvator", au Dieu suprême et inaccessible: "Personne n'a connu Dieu", dit Saint Jean, au Dieu caché même dans le commencement du monde.

Où s'arrêtera la physique dans sa découverte de l'étrangeté? Sans doute est-il vain de faire des pronostics, mais comment pourrait-on s'en empêcher?

L'évolution des idées géométriques ne fait sans doute que commencer.

En 1913, ELIE CARTAN a découvert ce qu'on appelle maintenant les spineurs. Il a découvert qu'à l'espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions est associé un espace d'une nature différente: l'espace de spin.

Pour des espaces d'un petit nombre de dimensions, l'espace de spin a aussi une dimension petite. En fait, dans l'espace à quatre dimensions, l'espace physique et l'espace de spin ont un même nombre de dimensions.

Mais, is on est amené à envisager des espaces d'un plus grand nombre de dimensions, l'espace de spin correspondant acquiert un nombre énorme de dimensions.

Pour un espace à cent dimensions, c'est par milliers de milliards que se comptent les dimensions de l'espace de spin.

Quelques années après la découverte de CARTAN, DIRAC a retrouvé et donné son nom aux spineurs de l'espace à quatre dimensions dans sa célèbre théorie de l'électron relativiste.

Il a montré que les ondes de DE BROGLIE n'étaient pas, comme on le pensait, des scalaires, mais qu'elles étaient des vecteurs de l'espace de spin: des spineurs.

C'est l'équation de Dirac qui a été le point de départ des recherches d'EDDINGTON. EDDINGTON était convaincu que l'équation de Dirac n'était qu'un commencement. Il a entrepris l'étude des spineurs de l'espace à huit dimensions. Le nombre qu'il a proposé comme étant le nombre total des protons existant dans l'univers est essentiellement le nombre de dimensions de l'espace à 512 dimensions.

L'étrangeté de la description actuelle du monde atomique ne provient-elle pas de ce que nous nous efforçons de loger dans l'espace étrié de notre intuition sensible un univers d'un nombre notablement plus grande de dimensions?

L'univers n'est-il pas un spineur d'un espace à quelques centaines de dimensions?

Chi lo sa?

Qui peut dire jusqu'où nous conduira la Science dans la découverte de l'étrangeté du monde?

LES
NOUVEAUX CHIFFRES
DE LEMAITRE

UN NOUVEAU SYSTEME DE CHIFFRES

GEORGES LEMAITRE

Lorsqu'on se sert habituellement de machines à calculer et que parfois on se trouve obligé à calculer « comme tout le monde », sans disposer d'autres adjuvants qu'un crayon (peut-être une gomme) et une feuille de papier, on ne peut manquer de remarquer la différence profonde qui existe entre les exigences de ces deux genres de calcul.

Je ne parle pas ici de la différence d'efficiencia et de rapidité entre le calcul à la main et celui à la machine; et en parlant de machines, je parle de machines courantes, sans exclure les machines mues par l'électricité, ni même des machines imprimantes plus ou moins automatiques, mais je n'ai pas en vue les machines de haute virtuosité, tout à fait cybernétiques, où l'opérateur n'a plus à intervenir dans le fonctionnement, mais seulement dans la préparation, ou « -coding » des opérations que la machine fait ensuite toute seule.

Dans l'utilisation des machines modestes, l'intervention de l'opérateur prolonge en quelque sorte l'opération de la machine et a un caractère qu'on peut à juste titre qualifier de machinal. Il consiste en l'exécution de consignes simples, de gestes répétés, susceptibles d'un apprentissage qui les rend

entièrement automatiques et n'exige de l'opérateur aucune participation active, rien d'autre qu'un état de concentration attentive, une absence de distraction vers des objets étrangers.

Lorsqu'on en revient alors à utiliser les procédés dont on avait appris à se servir dès l'école primaire, on ne peut manquer d'éprouver une véritable gêne, une fatigue dont l'équivalent n'existe pas dans le calcul à la machine.

Cette impression ne paraît pas due uniquement à ce que l'emploi de moyens plus efficaces a pu laisser s'atrophier, faute d'exercice, les facultés développées par le laborieux dressage de l'école. Sans doute un comptable qui les mettrait en pratique à longueur de journées pourrait-il avoir une impression différente; néanmoins cette sensation de gêne et de fatigue qui accompagne le retour occasionnel aux techniques de l'école primaire semble bien avoir sa cause dans une différence de nature qui existe entre les exigences de l'une et l'autre technique.

Il y a assurément des points communs. Qu'on calcule au crayon ou à la machine, on a à faire des opérations semblables, il n'y a pas de différence essentielle à ce qu'on recopie un nombre enfraissant des touches ou en écrivant à la plume ou au crayon, et bien des prescriptions du calcul primaire sont tout aussi machinales que les consignes observées dans l'usage d'une machine. Mais s'il y a des points analogues, il semble bien pourtant que le calcul primaire a des exigences dont l'équivalent a disparu du calcul mécanique; et c'est justement le retour occasionnel à ces exigences qui est la raison de cette sensation de gêne dont je parlais à l'instant.

Le calcul primaire fait appel à des ressources qui ont été gravées dans la mémoire par un exercice prolongé. Lorsque l'opérateur a devant lui deux chiffres, 7 et 8 par exemple, il faut que de son cerveau sorte le nombre 15 ou le nombre 56 suivant qu'il s'agit d'une addition ou d'une multiplication. L'opérateur doit posséder en lui la table d'addition et la table de multiplication, il doit la savoir « par coeur ». Il y a encore un autre genre d'activité qui est mis en oeuvre dans le calcul

primaire et qui n'a pas d'équivalent dans le travail à la machine: l'opérateur pose des nombres et doit en retenir d'autres. Il lui faut exercer pour cela un autre genre de mémoire, non plus une mémoire définitive à longue échéance comme celle des tables fondamentales, mais une mémoire temporaire qu'on pourrait peut-être comparer à celle de l'étudiant à la veille d'un examen; il lui faut, au moins pendant quelques secondes, conserver le souvenir d'une somme partielle, jusqu'à ce que, faisant appel à l'autre mémoire, il l'ait additionnée au chiffre présent devant lui et ait écrit, « posé », la somme finale. Je sais bien que ces particularités du calcul ont leurs avantages et que l'existence psychologique d'un double tableau, un formé des nombres présents mentalement et l'autre de ceux qui sont simplement écrits est une circonstance dont il est possible de tirer profit. En particulier, on peut veiller à garder soigneusement séparés les deux tableaux en inhibant la tendance vicieuse qu'on peut éprouver à prononcer, au moins mentalement, les chiffres du tableau matériel, au lieu de les lire seulement des yeux. Il faut pouvoir ajouter directement ce chiffre que je prononce mentalement à cet autre chiffre que je vois mais ne prononce pas. Ce n'est pas sur ces détails techniques que je veux insister en ce moment, mais sur la différence essentielle qui existe, en vertu de ces particularités, entre les opérations du calcul mécanique, opérations machinales pouvant être rendues automatiques et exemptes de tout effort mental par un apprentissage convenable et certains aspects du calcul primaire qui peuvent sans doute être facilités par l'exercice et une technique appropriée, mais où subsiste essentiellement une « fatigue » mentale irréductible qui me paraît être la raison de l'impression de gêne que je cherche à expliquer.

Y a-t-il quelque remède à cette situation? Les machines ont-elles sur le calcul à la main, outre leur avantage d'efficacité et de rapidité, un avantage plus essentiel encore, l'absence de cette fatigue spéciale qui semble inhérent au calcul enseigné dès l'école primaire?

Si on veut réfléchir à cet empêchement d'éliminer le « par coeur » du calcul élémentaire, il n'est pas difficile de se rendre compte que l'obstacle consiste avant tout dans l'emploi, imposé par l'usage de chiffres, les chiffres arabes, qui n'ont aucune structure interne sur laquelle on puisse se baser pour remplacer le « par coeur » par des prescriptions machinales.

On est ainsi conduit à inventer de nouveaux chiffres qui n'aient pas cet inconvénient. On pourra naturellement conserver les anciens chiffres pour les usages courants, pour garnir les cadrans d'horloge, les indicateurs de chemin de fer ou les feuilles de contributions, mais on leur substituerait les nouveaux chiffres lorsqu'on veut calculer sans fatigue.

C'est encore les machines qui nous indiquent de quelle structure nous devons équiper nos chiffres. Les machines, en effet, n'utilisent pas, comme nous, le système de numération décimal; elles font appel au système de numération binaire. C'est donc dans la numération binaire que nous chercherons les éléments structurels de nos chiffres.

Partons d'un simple jambage

└

qui représentera l'unité, le chiffre 1.

Un boucle inférieure

σ

sera 2.

En combinant ces deux éléments nous pourrions former

└σ

réunion de 1 et 2 c'est à dire 3.

Alors qu'aucune relation n'existe entre le symbole 3 et les chiffres 1 et 2, notre notation fait voir dans └σ les éléments composants └ et σ. C'est cela que nous voulons exprimer en disant que nos chiffres ont une structure interne. Ils sont

formés d'éléments, que nous appellerons des "digites" combinées entre elles suivant le système de numération binaire.

Pour 4, nous introduirons une boucle supérieure

$$\neg$$

et nous avons, par définition, que $2 + 2 = 4$

$$\sigma + \sigma = \neg$$

et d'ailleurs encore, par simple composition

$$\begin{array}{ll} \swarrow + \neg = \omega & 1 + 4 = 5 \\ \sigma + \neg = \sigma & 2 + 4 = 6 \\ \swarrow + \sigma = \sigma & 1 + 6 = 7 \end{array}$$

Les règles du calcul ne résultent plus d'une table d'addition qu'il est nécessaire de mémoriser. Elles s'obtiennent par l'application d'un mécanisme simple qui n'est autre que le principe d'associativité et de distributivité des digites binaires.

Considérons

$$\swarrow + \sigma$$

Puisque

$$\swarrow + \swarrow = \sigma$$

nous obtenons deux fois σ ou $\neg$ puisque

$$\sigma + \sigma = \neg$$

De même

$$\begin{array}{r} \omega \\ + \swarrow \\ \hline \sigma \end{array}$$

puisque

$$\leftarrow + \leftarrow = \sigma \quad \text{donc} \quad 5 + 1 = 6$$

Encore

$$\begin{array}{r} \leftarrow \\ + \sigma \\ \hline \leftarrow \end{array} \quad \text{soit} \quad 3 + 2 = 5$$

Il n'y a rien à retenir "par coeur".

Pour 8, nous introduisons un jambage vers le bas

$\neg$

et nous avons $\neg + \neg = \neg$
9 sera naturellement

$$\leftarrow + \neg = \neg \quad 1 + 8 = 9$$

Il pourrait être tentant de continuer dans cette voie et d'introduire une nouvelle unité ou digite binaire valant 16.

Certaines machines procèdent ainsi. Elles s'écartent profondément de l'usage socialement établi dans notre civilisation qui est basée sur le système décimal. Nous n'envisageons pas d'essayer de les suivre en ce moment et d'expliquer ce qu'on pourrait appeler le système binaire intégral.

Nous allons plutôt, comme le font bon nombre de machines, adopter un compromis entre l'usage social et la simplicité mathématique, que l'on désigne sous le nom de binaire décimal.

Après avoir structuré nos chiffres suivant le système binaire, nous adopterons le système décimal, lorsqu'il s'agira de les composer en dizaines, centaines, etc.

Pourtant, comme dans l'intérieur des chiffres, nous avons

été amenés à disposer les chiffres binaires d'ordre croissant $\leftarrow$, σ , $\rightarrow$ et $\rightarrow$, en procédant de gauche à droite, nous nous écarterons de l'usage courant, en écrivant nos nouveaux chiffres aussi de gauche à droite, mettant les dizaines après les unités et les centaines après les dizaines. Nous devons lire

$$\sigma \leftarrow$$

12 et non 21.

Pour ajouter σ et $\rightarrow$, nous serions tentés d'écrire la somme

$$\sigma \rightarrow$$

et nous devons, en fait l'écrire

$$\leftarrow \leftarrow$$

le symbole $\leftarrow$, barre non garnie de chiffres, désignant le zéro: ce personnage si important, qui ne représente rien et que n'est là que pour tenir de la place.

Nous aurions de même

$$\begin{array}{r} \sigma \\ + \rightarrow \\ \hline \sigma \rightarrow = \leftarrow \leftarrow \end{array} \qquad 6 + 5 = 11$$

Nous sommes ainsi amenés à considérer, à titre d'intermédiaire utile, des formes numériques provisoires qu'il nous faudra apprendre à réduire à la forme normale.

Le principe est évidemment que σ vaut $\leftarrow \leftarrow$.

Pourtant ceci peut n'être pas suffisant.

Soit, par exemple

$$\begin{array}{r} \rightarrow \\ + \rightarrow \\ \hline \rightarrow \end{array}$$

Pour réduire ce nombre provisoire, il faut tenir compte que σ vaut deux σ . Nous pouvons donc écrire

$$\frac{\sigma}{2}$$

le chiffre 2, sous le σ indique que ce σ doit intervenir deux fois.

On aura donc

$$\frac{\sigma}{2} = \sigma + \sigma = \sigma \sigma$$

Nous sommes ainsi à même d'additionner, tant que la somme ne dépasse pas $\sigma\sigma$ ou 15.

Considérons par exemple

$$\begin{array}{r} \sigma\sigma \\ + \sigma\sigma \\ \hline \sigma\sigma = \sigma\sigma + \sigma\sigma = \sigma\sigma\sigma\sigma \end{array}$$

Nous pouvons pour expliquer ceci, écrire tout d'abord le chiffre intermédiaire

$$\frac{\sigma\sigma}{2}$$

où chaque digite doit être doublée.

Mais $\frac{\sigma\sigma}{2}$ est σ ; il vient donc

$$\frac{\sigma\sigma}{3}$$

mais $\frac{\sigma\sigma}{3}$ est σ on a donc σ^3 et enfin, puisque $\frac{\sigma\sigma}{2}$ est finalement σ .

On peut encore, plus simplement, expliquer l'addition

en question en disant que la première fois qu'on rencontre une digite doublée, ici $\leftarrow$, on ne l'inscrit pas mais qu'on la "reporte". On peut utilement indiquer l'entrée du report par un signe approprié, le signe $\dashv$ convient très bien. Le report ainsi introduit dure tant qu'on ne rencontre pas une digite absente des deux nombres qu'on ajoute; ici ce sera le $\rightarrow$. On posera alors le report en inscrivant dans la somme cette digite absente. On pourra indiquer la fin du report par un signe $+$. Durant la propagation du report, c'est à dire ici pour les digites $\leftarrow$ et $\rightarrow$, on n'inscrit qu'une seule digite au lieu des deux présentes, l'autre est sensée reportée.

On écrirait ainsi

$$\begin{array}{r} 6^{\circ} \\ - \quad + \\ 6^{\circ} \\ \hline 0^{\circ} \end{array}$$

Si durant la propagation du report une des digites rencontrées ne figurait qu'une seule fois, elle serait reportée et il n'y aurait pas lieu à inscription dans la somme.

Par exemple:

$$\begin{array}{r} 6^{\circ} \\ - \quad + \\ 6^{\circ} \\ \hline 0^{\circ} \end{array}$$

Voyons maintenant comment procéder, lorsque la somme dépasse 6° . Soit par exemple

$$\begin{array}{r} \rightarrow \\ + \rightarrow \\ \hline 2 \end{array}$$

Nous pouvons remarquer que $\rightarrow$ est $\underline{2}$ et écrire

$$\underline{2}$$

En outre σ est σ_2 d'où finalemente

$$\sigma_2 = \sigma + \sigma = \sigma \leftarrow \quad 8 + 8 = 16$$

Nous aurons encore

$$\begin{array}{r} \leftarrow \\ + \leftarrow \\ \hline \sigma_2 = \rightarrow + \sigma = \rightarrow \leftarrow \quad 9 + 9 = 18 \end{array}$$

Nous avons ainsi obtenu la table de multiplication par deux. C'est la seule qu'il ne parait pas possible d'éviter de savoir "par coeur". Les petits calculs que nous venons de faire fournissent bien des moyens mnémoniques, leur choix dépend naturellement des idiosyncrasies individuelles. Nous allons voir que le reste de la table de Pythagore est inutile.

nombre	double
$\leftarrow$	σ
σ	$\rightarrow$
$\leftarrow$	σ
$\rightarrow$	$\rightarrow$
$\rightarrow$	$\leftarrow$
σ	$\sigma \leftarrow$
σ	$\rightarrow \leftarrow$
$\rightarrow$	$\sigma \leftarrow$
$\leftarrow$	$\rightarrow \leftarrow$

On peut en effet, par répétition de la multiplication par deux obtenir les produits partiels par chacune des digits qui composent le multiplicateur et qui sont évidentes dans la structure de ces chiffres.

Soit par exemple à calculer 7 fois 6 soit 7 fois 6 on devra ajouter
à

6	produit par	7
42	produit par	6
42		

On devra donc réduire, soit

6	
+	6
12	ou 42

Soit encore à multiplier 27 par 81.

Les produits partiels sont:

72	par	8
144	par	1
216	par	0
1728	par	1

On aura donc à ajouter

72	pour	8
144	pour	1
1728	total	1728

c'est à dire 2.187.

Reprenons la même multiplication, en changeant l'ordre des facteurs. Les produits partiels de $\leftarrow \rightarrow = 81$ sont

$\leftarrow \rightarrow$	par	$\leftarrow$
$\sigma \sigma \leftarrow$	par	σ
$\sigma \sigma \leftarrow$	par	σ
$\rightarrow \rightarrow \sigma$	par	$\rightarrow$

Nous avons donc à ajouter

$\leftarrow \rightarrow$	pour	$\leftarrow$
$\sigma \sigma \leftarrow$	pour	σ
$\sigma \sigma \leftarrow$	pour	σ
$\rightarrow \rightarrow \sigma$	pour	$\rightarrow$
$\rightarrow \rightarrow \sigma$	pour	$\rightarrow$
$\sigma \sigma \sigma \leftarrow$	total	$\sigma \sigma$

La réduction de cette somme est un peu compliquée. Pour l'expliquer, nous allons introduire un procédé qui s'applique aux cas les plus complexes. Nous écrirons pour chaque chiffre, et cela en utilisant des chiffres arabes, le nombre de fois que chaque digite binaire intervient au rang décimal considéré, et cela dans les divers chiffres de ce rang, de toutes les nombres à additionner. Ces nombres, écrits dans la première colonne d'un tableau, sont successivement réduits par des opérations écrites sur la ligne correspondante, en un chiffre et éventuellement un report décimal

$$1110 = \sigma$$

$$0311 = 0120 = 0102 = \rightarrow, \text{ report } 1$$

$$2210 + 1 = 3210 = 1310 = 1120 = 1101 = \leftarrow, \text{ report } 1$$

$$1000 + 1 = 2000 = \sigma.$$

Les groupes de quatre chiffres arabes ne sont pas des nombres décimaux, mais l'écriture de chiffres binaires pro-

visoires. Par exemple

$\frac{3}{3}$ est 0311

Ils sont réduits en appliquant la règle que deux chiffres d'un rang quelconque valent une chiffre du rang immédiatement suivant (supérieur, c'est à dire droite) et d'autre part que

0101 implique un report décimal de 1

0202 un report de 2.

Pour illustrer l'emploi de la méthode voici deux exemples plus importants, d'abord un produit de deux nombres décimaux de trois chiffres 727 fois 357.

Les produits partiels de 727 sont

$\sigma \sigma \sigma$	par	$\angle$
$\sigma \sigma \sigma \angle$	par	σ
$\sigma \sigma \sigma \sigma$	par	σ
$\sigma \sigma \sigma \sigma$	par	σ

Il faut donc additionner

$\sigma \sigma \sigma$	pour	$\angle$
$\sigma \sigma \sigma \sigma$	pour	$\sigma \angle$
$\sigma \sigma \sigma \sigma \sigma$	pour	$\sigma \sigma \angle$
$\sigma \sigma \sigma \sigma \sigma$	pour	$\sigma \sigma$
$\sigma \sigma \sigma \sigma \sigma \sigma$	pour	$\sigma \sigma \sigma$
$\sigma \sigma \sigma \sigma \sigma$	pour	$\sigma \sigma$
$\sigma \sigma \sigma \sigma \sigma$	pour	$\sigma \sigma$
	total	$\sigma \sigma \sigma \sigma$

Le tableau des nombres de chiffres a été directement inscrit dans la première colonne du tableau suivant dont les diverses lignes indiquent les opérations de réduction

$1121 = 1102 = \epsilon_7$, report 1
 $2221 + 1 = 3221 = 1302 = \epsilon_7$, report 2
 $3341 + 2 = 5341 = 1503 = 1313 = \omega$, report 3
 $4321 + 3 = 7321 = 1602 = 1203 = \epsilon_7$, report 2
 $1220 + 2 = 3220 = 1301 = 1110 = \omega$, report 1
 $1000 + 1 = 2000 = 0100 = \sigma$.

On obtient donc

$$\epsilon_7 \epsilon_7 \omega \epsilon_7 \omega \sigma$$

soit 259 539.

Pour terminer voici un exemple de multiplication six chiffres par six chiffres: 367 721 par 880 121.

Les produits partiels sont

$\epsilon \sigma \epsilon \epsilon \sigma \omega$	pour	ϵ
$\sigma \omega \omega \omega \epsilon \epsilon$	pour	σ
$\omega \gamma \gamma \gamma \epsilon \sigma \sigma$	pour	ω
$\gamma \sigma \epsilon \epsilon \omega \omega \omega$	pour	γ

Il faut donc ajouter

$\epsilon \sigma \epsilon \epsilon \sigma \omega$	pour	ϵ
$\sigma \omega \omega \omega \epsilon \epsilon$	pour	σ
$\omega \gamma \gamma \gamma \epsilon \sigma \sigma$	pour	ω
$\gamma \sigma \epsilon \epsilon \omega \omega \omega$	pour	γ
$\gamma \sigma \epsilon \epsilon \omega \omega \omega$	pour	γ
	total	$\epsilon \sigma \epsilon \gamma \gamma$

Voici le compte des diverses digites présentes dans chaque colonne des nombres à ajouter et le calcul de leur réduction

$1000 = \swarrow$
 $0200 = 0010 = \searrow$
 $2120 = 0201 = \sigma$, report 1
 $1220 + 1 = 2220 = 0301 = 0111 = \searrow$, report 1
 $2231 + 1 = 3231 = 1312 = \varnothing$, report 2
 $3331 + 2 = 5331 = 1512 = 1322 = 1303 = \swarrow$, report 3
 $2330 + 3 = 5330 = 1511 = 1321 = 1302 = \swarrow$, report 2
 $4120 + 2 = 6120 = 0401 = 0211 = \varnothing$, report 1
 $1010 + 1 = 2010 = 0110 = \varnothing$
 $1020 = 1001 = \swarrow$
 $1020 = 1001 = \swarrow$
 $0010 = 0010 = \searrow$

Il vient donc

$\swarrow \searrow \sigma \searrow \varnothing \swarrow \swarrow \varnothing \varnothing \swarrow \swarrow \sigma$

ou

299.663.174.241

Cet exemple n'est pas tout à fait typique. Il y aurait eu sensiblement plus de produits partiels si on avait inversé l'ordre des deux facteurs.

Je crois que même dans ce cas, le lecteur qui aura eu la patience de suivre jusqu'au bout nos explications et s'exercer tant soit peu à les mettre en pratique n'aura pas de difficulté à se convaincre que la technique binaire que nous avons essayé de vulgariser est bien moins fatigante que les procédés ordinaires, même pour ceux qui ont eu le "bonheur" d'être initié à l'usage de la table de multiplication et peuvent la mettre en pratique sans aucune hésitation.

J'ai borné cet exposé à l'essentiel. Il faudrait sans doute lui donner certains compléments d'ordre pédagogique, variables suivant la catégorie des lecteurs. Je n'ai pas parlé de l'adaptation assez évidente à la soustraction et à la division. Bien des variantes peuvent être envisagés et certaines peuvent

être trouvées dans mes tentatives antérieures dont la liste se trouve à la fin de cet article.

Je voudrais pourtant exprimer l'espoir que les auteurs qui, je l'espère, apporteront leur contribution personnelle aux divers développements qu'appelle cette technique nouvelle ne s'écarteront pas sans raisons des notations que j'ai introduites. Il serait vraiment dommage que dans une dizaine d'années il soit nécessaire de convoquer un congrès dans le but d'unifier les divers systèmes de notations qu'il serait trop facile d'inventer.

En tous cas les caractères que j'emploie sont à la disposition de tous. Ils peuvent être fournis au prix du plomb par l'imprimerie Ceuterick à Louvain chez qui les matrices sont en dépôt.

D'ailleurs la société Monotype qui a réalisé ces matrices s'est réservé tout droit de les reproduire.

Plutôt que de voir inventer de nouveaux symboles, j'espère trouver une collaboration utile en ceux qui comprendront qu'il y a ici bien plus qu'un jeu mathématique et que s'il était possible d'ébranler l'immense masse de routine et de préjugés hérités de PYTAGORE, on pourrait non seulement épargner aux enfants des efforts ou des fatigues stériles mais aussi écarter du seuil de la civilisation des obstacles redoutables et totalement inutiles.

Je sais bien que certains répondront que l'étude de la table de multiplication est un excellent exercice qui forme la mémoire. Mais il y a tant de moyens d'obtenir ce résultat ne fut-ce qu'en apprenant par coeur les dynasties des Pharaons.

BIBLIOGRAPHIE

- G. LEMAÎTRE, *Comment calculer?*, Bull. Ac. Royale de Belgique (classes des sciences), pp. 683-691, 1954.
- *Calculons sans fatigue (offset)*, E. Nauwelaerts, Louvain, 1955.
- *Pourquoi de nouveaux chiffres?*, Revues des Questions scientifiques de Bruxelles, pp. 379-398, 1955.
- *Le calcul élémentaire*, Bull. Ac. Royale de Belgique (classes des sciences), pp. 1140-1145, 1956.
- G. DE WITTE, *Zal de Mens het van Automaten leren?*, Technisch Wetenschappelijk Tijdschrift, 1956 n. 2.

DEUX COMMEMORATIONS
DONNEES PAR LEMAITRE
A ROME

LORD ERNEST RUTHERFORD OF NELSON

GEORGES LEMAITRE

Très Saint Père,

C'est pour moi un grand honneur et une lourde charge d'avoir à rendre hommage, au nom de notre Académie à la mémoire d'un de ses Membres les plus illustres: LORD RUTHERFORD of NELSON.

Il est de ces personnalités qui dominent leur époque et dont l'oeuvre a laissé une empreinte si profonde qu'ils ont cultivée, qu'ils ont renouée et, pour ainsi dire créé de toutes pièces.

Retracer l'oeuvre de RUTHERFORD ce serait raconter le développement de l'atomistique. Ce serait expliquer comment la science a pu être amenée à cette description si inattendue de la constitution de la matière où tout le mystère de l'activité physique semble s'être réfugié dans les grains minuscules: ces noyaux des atomes que RUTHERFORD a découverts, dont il a expliqués les transformations spontanées qui constituent

Pontificiae Academiae Scientiarum Acta, vol. XIII, n. 9, pag. 93-96 (1939). Commémoration tenue à la présence du Souverain Pontife Pie XII le 3-12-1939 lors de l'inauguration de la IV Année Académique.

le phénomène de la radioactivité et dont il a pu le premier provoquer artificiellement la désintégration.

RUTHERFORD est né en Nouvelle Zelande le 30 août 1871 à Nelson et obtint à l'Université de son pays natal ses grades de Master of Arts et de docteur en sciences.

En 1895, il est boursier à Cambridge. Il venait d'inventer le détecteur magnétique pour ondes hertziennes; l'habileté et le sens de l'organisation qu'il montra en essayant et en perfectionnant son détecteur attira immédiatement sur lui l'attention de son Maître J. J. THOMSON.

Dès cette époque RUTHERFORD commença à attaquer le grand problème qui sous une forme ou sous une autre devait l'occuper pendant plus de vingt ans: l'élucidation des phénomènes de radioactivité qui venaient d'être découverts par HENRI BECQUEREL.

Après un séjour de trois ans à Cambridge, RUTHERFORD fut nommé professeur au Canada, à l'Université Mc GILL de Montréal. Il en revint en 1907 pour occuper la chaire de physique à l'Université de Manchester. En 1919 il revint à Cambridge comme titulaire de la chaire Cavendish et directeur du laboratoire du même nom. Il mourut en pleine activité, des suites d'une opération le 10 octobre 1937.

C'est à Mc Gill que RUTHERFORD trouva les lois suivant lesquelles les corps radioactifs se désintègrent en émettant rayons alfa, beta et gamma. Il découvrit les émanations: ces corps gazeux radioactifs qui conservent leurs propriétés pendant quelque temps puis deviennent inertes en laissant des dépôts actifs sur les objets solides.

Dès cette époque apparaissent les qualités maîtresses du grand expérimentateur: l'extrême audace de l'imagination, la vision de l'idée simple à laquelle personne ne pense et qui va tout clarifier, et par ailleurs, la défiance de toute spéculation vide qui planerait loin des faits sans contact évident avec la réalité.

Il savait apercevoir toute la portée d'une anomalie expérimentale et pousser son idée jusqu'à ses conséquences extrêmes.

La manière dont il découvrit l'existence des noyaux atomiques ou la façon dont il décela la transformation de l'azote en oxygène par une discussion irréfutable d'anomalies dans les nombres enregistrés par des compteurs restent pour tout étudiant de la physique un sujet d'admiration et presque de stupeur.

Dès son retour en Angleterre à Manchester d'abord, à Cambridge ensuite, le laboratoire de RUTHERFORD devint un centre international où les physiciens de tous pays vinrent collaborer avec le maître ou se laisser pénétrer de son empreinte.

Il serait difficile de citer le nom d'un savant qui ait eu une influence comparable à la sienne; et tous ceux qui l'ont approché même de loin, qui ont assisté à ses leçons ou entendu ses rapports se sont laissés gagner par le dynamisme de cette personnalité puissante où l'on découvrait de la bonté.

Le modèle de l'atome qui sert de base aux recherches actuelles est généralement désigné sous le nom d'atome de RUTHERFORD, puisque c'est au cours d'une féconde collaboration à Manchester que le physicien danois a distribué les électrons en orbites elliptiques autour du noyau découvert par RUTHERFORDG telles des planètes tournant autour d'un soleil.

Sous l'impulsion de RUTHERFORD, le Cavendish Laboratory, était devenu un centre remarquable de recherches nucléaires où l'on s'efforçait de briser le noyau atomique en le bombardant par les particules électriques lancées par des champs intenses. Après avoir délimité le mystère et posé le problème du noyau atomique, RUTHERFORD et ses collaborateurs ont commencés à accumuler les données qui en préparèrent la solution.

En annonçant la mort de Lord RUTHERFORD un journal scientifique a pu dire de lui que ses recherches expérimentales et son génie scientifique forment la partie principale de l'émpressionnante structure de la physique moderne.

Je ne puis mieux faire que de terminer par ces paroles ce modeste hommage à la mémoire de Lord RUTHERFORD of Nelson.

CHARLES JEAN DE LA VALLEE POUSSIN

GEORGES LEMAITRE

Le baron CHARLES JEAN DE LA VALLÉE POUSSIN est né à Louvain le 14 août 1866; il fut, toute sa vie, professeur à l'Université Catholique de Louvain, où il commença son enseignement en 1891.

Il se destinait alors à l'art de l'ingénieur, mais il fut très heureusement orienté vers les mathématiques par PHILIPPE tard, il parvint à améliorer cette estimation en substituant le suppléer dans son enseignement à l'âge de 25 ans.

Il fu élève de JORDAN, POINCARÉ et PICARD à Paris puis de SCHWARZ, FROBENIUS et FUCHS à Berlin.

Dès 1896, il s'acquit une renommée mondiale en obtenant une démonstration d'une conjecture faite jadis par LEGENDRE sur l'estimation du nombre des nombres premiers inférieurs à un nombre donné. Il faisait ainsi aboutir la longue série d'efforts des RIEMANN, TCHEBICHEFF et HADAMARD. Deux ans plus tard, il parvint à améliorer cette estimation en substituant le logarithme intégral au rapport de Legendre du nombre à son logarithme.

En 1902, HENRI LEBESGUE avait introduit dans sa thèse une notion d'intégrale qui devait changer l'aspect de toute

Pontificiae Academiae Scientiarum Commentarii, vol. I, n. 8, pag. 1-4 (1962).

une foule de problèmes dépendant de l'intégration. La route conduisant aux résultats était encore bien ardue. DE LA VALLÉE POUSSIN fut un des premiers à s'efforcer d'arriver au même but par des routes commodes, en remplaçant la définition primitive par d'autre, de façon, suivant son expression, à faire entrer si possible la nouvelle théorie dans l'enseignement classique.

L'édition de 1914 de son Cours d'analyse et l'ouvrage qu'il publia en 1916 sur les intégrales de Lebesgue ont été une étape décisive dans ce vaste mouvement auquel les plus grands mathématiciens se sont attachés et qui a placé l'idée géniale de LEBESGUE à la base de l'enseignement des mathématiques modernes.

Je ne puis penser à détailler ici les contributions de premier plan apportées par DE LA VALLÉE POUSSIN dans les domaines variés des mathématiques. L'intérêt qui se porte actuellement sur les méthodes de Calcul numériques ont remis en lumière les contributions fondamentales qu'il apporta en 1919 à l'"Approximation des fonctions d'une variable réelle" et je ne puis passer sous silence la contribution qu'il présenta, ici même sur ce sujet à la Semaine Académique tenue par notre ancêtre la Pontificia Academia Romana dei Nuovi Lincei en Avril 1923.

Je ne puis pas ne pas mentionner ses travaux sur les fonctions quasi-analytiques (1924) et surtout l'extension qu'il trouve de la méthode du balayage de Poincaré et son application au problème de Dirichlet.

DE LA VALLÉE POUSSIN a reçu tous les honneurs.

Lorsque fut constituée l'Union Internationale des Mathématiciens, c'est lui qui en fut le premier président et il en est demeuré président d'honneur.

Notre académie se l'était attaché dès sa fondation et ce fut lui qui fut chargé de prendre la parole à la séance inaugurale au nom des académiciens nouvellement élus.

On trouve dans le discours qu'il prononça en cette oc-

casion cette fierté enthousiaste qu'il aimait à exprimer pour la Science pure, au-dessus de toute application possible.

J'aimerais en citer quelques mots :

"A toutes les époques de l'histoire, la Papauté, consciente de leur importance pour le bien du monde, s'est révélée la protectrice et la gardienne vigilante des Sciences et des Arts et la nouvelle académie baigne en naissant dans tout le rayonnement de l'histoire"

et plus loin :

"Non, le savant catholique ne craint pas la vérité ; il la cherche pour le bonheur de la connaître et la joie de la contempler. Pour lui comme pour nous tous, la science pure recherche la vérité pour elle-même et la recherche librement. La liberté est sa condition et cette liberté- là, c'est Dieu lui-même qui la protège".

DE LA VALLÉ POUSSIN était d'une santé étonnamment robuste et il semble qu'il ne connut pas la maladie.

Il y a onze ans, à l'âge de 85 ans, il occupa encore la tribune de la Société Scientifique de Bruxelles dont il avait été depuis toujours le secrétaire. Je garde le souvenir inoubliable de l'enthousiasme, de la joie presque enfantine avec laquelle il saisissait la craie et traçait au tableau figures et formules avec, me semble-t-il, la même verdeur qu'au temps lointain ou, comme étudiant, je recevais de lui la première initiation aux mathématiques.

Notre inquiétude de le voir trébucher se mêlait à notre admiration et à la leçon que nous recevions de lui de cette prodigieuse énergie dans la poursuite de la vérité scientifique.

Lorsque, l'an dernier, je lui en ai demandé s'il ne trouverait pas la force d'assister à notre vingt-cinquième anniversaire et d'y prendre une nouvelle fois la parole, il ne refusa pas catégoriquement.

Mais, s'il ne connut pas la maladie, la nature eut raison de lui par l'excès même de ses qualités.

L'intrépidité aventureuse de ses démarches lui fit faire coup sur coup des chutes, où il se brisa le bras d'abord, l'épaule ensuite. Lors de cette dernière chute, il confia à un ami: le Prof. FERNAND SIMONART: "Cela m'a vielli de dix ans". Il ne savait pas que c'était la fin.

Je suis heureux d'avoir pu, au nom de notre Académie Pontificale, apporter en ce jour, mon humble hommage au maître vénéré de toujours, au collègue de Louvain, au confrère de notre Académie Pontificale des Sciences dont il était sans doute le doyen et certainement un des membres les plus illustres et les plus estimés.

ESSAI D'UNE BIBLIOGRAPHIE

ESSAI D'UNE BIBLIOGRAPHIE DE GEORGES LEMAITRE

- [1] *Sur une propriété des hamiltoniens d'un multiplicateur*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 1923, p. 380-388.
- [2] *The motion of a rigid solid according to the relativity principle*, Philosophical Magazine, 48, 1924, p. 164-176.
- [3] *Note on De Sitter's universe*, Journal of Mathematics and Physics, 4, 1925, p. 37-41.
- [4] *Note on the theory of pulsating stars*, Harvard College Observatory, Circular, 282, 1925, p. 1-6.
- [5] *La théorie de la Relativité et l'Espérance*, Rev. des Quest. Scient., avril 1926.
- [6] *A propos d'une note du P. Schaffers sur la relativité*, Ann. Soc. Scient. Brux., 47, 1927, p. 15-21.
- [7] *Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de l'avitesse radiale des nébuleuses extragalactiques*, Ann. Soc. Scient. Brux., 47A, 1927, p. 49-59. Reproduit dans Mathesis 1927.
- [8] *Le mouvement varié d'un solide, d'après la théorie de la relativité*, Ann. Soc. Scient. Brux., 47A, 1927, p. 103-109.
- [9] *La grandeur de l'espace*, Rev. des Quest. Scient., 1929, p. 189-216.
- [10] *On the random motion of a material particle in the expanding universe, Explanation of a paradox*, Bull. of the Astronomical Institutes of Netherlands, 5, 1930, p. 273-274.
- [11] *L'hypothèse de Milikan-Cameron dans un univers de rayon variable*, Congrès national des Sciences, 1930, p. 1-3.
- [12] *L'indétermination de la loi de Coulomb*, Ann. Soc. Scient. Brux., 51B, 1931, p. 12-16.
- [13] *Brit. Assoc. Discussion Sept. '31*, Nature, 24 oct. 1931, p. 704.
- [14] *Sur l'interprétation d'Eddington de l'équation de Dirac*, Ann. Soc. Scient. Brux., 51B, 1931, p. 88-99.

- [15] *Beginning of the World from the point of view of quantum*, Nature, London, 127, 1931, p. 106.
- [16] *The expanding Universe*, Monthly Notices, 91, 1931, p. 490-501.
- [17] *L'expansion de l'espace*, Rev. des Quest. Scient., 1931, p. 391-410.
- [18] *On Compton's latitude effect of cosmic radiation*, Physical Review, 43, 1933, p. 87.
- [19] *L'univers en expansion*, Ann. Soc. Scient. Brux., 53A, 1933, p. 51-85.
- [20] *Condensations sphériques des Univers en expansion*, C. R. Acad. Sc. Paris, 24 mars '33.
- [21] *Formation des Nébuleuses des Univers en expansion*, C. R. Acad. Sc. Paris, 10 avril '33.
- [22] *The uncertainty of the electromagnetic field of a particle*, Physical Review, 43, 1933, p. 87-91.
- [23] *L'univers en expansion*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 1934, p. 1-19; Rev. des Quest. Scient., 1935, p. 357-375.
- [24] *Evolution of the expanding universe*, Proc. National Acad. of Sciences, 20, 1934, p. 12-17.
- [25] *L'expansion de l'univers*, Société Astronomique de France, 1935, p. 153-168.
- [26] *Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques*: I. Trajectoires infiniment voisines de l'équateur. II. Trajectoires voisines de l'équateur. III. Trajectoires périodiques (avec L. Bouckaert), Ann. Soc. Sc. Brux., 54A, p. 162-207.
- [27] *On the North-South asymmetry of cosmic radiation* (avec Ms. Vallarta et L. Bouckaert), Physical Review, 47, 1935, p. 434-436.
- [28] *On the geomagnetic analysis of cosmic radiation* (avec Ms. Vallarta), Physical Review, 49, 1936, p. 719-726.
- [29] *On the allowed cone of cosmic radiation* (avec Ms. Vallarta), Physical Review, 50, 1936, p. 493-504.
- [30] *Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques*: IV. Calcul d'une famille d'orbites asymptotiques (avec Ms. Vallarta), Ann. Soc. Sc. Brux., 56A, 1936, p. 102-130.
- [31] *Les rayons cosmiques et le champ magnétique terrestre*, Actualités scientifiques et industrielles, 1937, p. 165-172.
- [32] *Longitude effect and asymmetry of cosmic radiation*, Nature, 140, 1937, p. 23-24.
- [33] *Calcul fréquences et modes vibration molécule monodeutero éthylène* (en collaboration), Ann. Soc. Scient. Brux., 57, Vol. I, 1937, p. 120.
- [34] *Sur l'interprétation d'Eddington de l'équation de Dirac*, Ann. Soc. Sc. Brux., 57, 1937, p. 165-172.

-
- [35] *Généralisation de la méthode de Hill* (avec O. Godart), Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 1938, p. 19-23.
- [36] *Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques: V. Détermination des exposant caractéristiques des trajectoires périodiques* (avec O. Godart), Ann. Soc. Sc. Brux., 58, 1938, p. 27-41.
- [37] *Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques: VI. Cônes des rayons cosmiques infiniment voisins de l'équateur. VII. Trajectoires voisines de l'équateur* (avec Tchang Yong-Li), Ann. Soc. Sc. Brux., 59, 1939, p. 285-345.
- [38] *L'itération rationnelle*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 28, 1942, p. 347-354.
- [39] *Intégration d'une équation différentielle par itération rationnelle*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 28, 1942, p. 815-825.
- [40] *Champ magnétique et rayons cosmiques*, Ciel et Terre, 59, 1943, p. 1-16.
- [41] *Hypothèses cosmogoniques*, Ciel et Terre, 61, 1945.
- [42] *Sir A. S. Eddington (1882-1944)*, Ciel et Terre, 61, 1945.
- [43] *A propos de la théorie de Milne-Haldane*, Ciel et Terre, 61, 1945.
- [44] *Les variables canoniques dans le mouvement héliénien*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 31, 1945, p. 365-371.
- [45] *Sur un cas limite du problème de Stormer* (avec L. Bossy), Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 31, 1945, p. 357-364.
- [46] *L'hypothèse de l'atome primitif*, Actes de la Soc. Helvétique des Sc. Naturelles, 1945, p. 77-96.
- [47] *Un modèle de nébuleuse*, Ann. Soc. Sc. Brux., 60, 1946, p. 103-114.
- [48] *Calcul des intégrales elliptiques*, Ann. Soc. Sc. Brux., 33, 1947, p. 200-211.
- [49] *Interpolation dans la méthode de Runge-Kutta*, Ann. Soc. Sc. Brux., 61, 1947, p. 106-111.
- [50] *L'hypothèse de l'atome primitif*, Université de Paris, Conf. du Palais de la Découverte, 1945, p. 5-15.
- [51] *Quaternions et espace elliptique*, Pont. Acad. Scient. Acta, 12, 1948, p. 57-78.
- [52] *L'hypothèse de l'atome primitif*, Rev. des Quest. Scient., 1948, p. 321-339.
- [53] *Modèles mécaniques d'amas de nébuleuses*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 34, 1948, p. 551-565.
- [54] *Modèles de nébuleuses à vitesse radiales* (avec R. Vander Borgh), Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 34, 1948, p. 955-965.

- [55] *L'hypothèse de l'atome primitif*, Pont. Acad. Scient. Acta, 12, 1948, p. 25-40.
- [56] *Rayonnement cosmique et cosmologie*, Lab. d'Astronomie et de Géo-désie de l'U.C.L., 113, 1949, p. 1-14.
- [57] *Cosmological application of relativity*, Review of modern Physics, 21, 1949, p. 357-366.
- [58] *L'énigme de l'hydrogène*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 35, 1949, p. 1158-1163.
- [59] *Applications des méthodes de la mécanique céleste au problème de Stormer*, Ann. Soc. Sc. Brux., 63, 1949, p. 83-97.
- [60] *The cosmological constant*, Albert Einstein: philosopher-scientist, ed. by Paul Arthur Schilpp, 1949, p. 439-456.
- [61] *Laplace et la mécanique céleste*, Société Astronomique de France, 1950, p. 1-6.
- [62] *Applications des méthodes de la mécanique céleste au problème de Stormer*, Ann. Soc. Sc. Brux., 64, 1950, p. 76-82.
- [63] *Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques* (avec R. De Vogelaere), Ann. Soc. Sc. Brux., 64, 1950, p. 83-92.
- [64] *Modèles mécaniques d'amas de nébuleuses*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 37, 1951, p. 291-306.
- [65] *L'univers*, Nauwelaerts, 1952, p. 5-72.
- [66] *Coordonnées symétriques dans le problème des trois corps*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 38, 1952, p. 582-592.
- [67] *Coordonnées symétriques dans le problème des trois corps* (suite), Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 38, 1952, p. 1218-1234.
- [68] *The clusters of nebulae in the expanding universe*, South-African Journal of Science, 449, 1952, p. 80-86.
- [69] *Régularisation dans le problème des trois corps*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 40, 1954, p. 759-767.
- [70] *Calculons sans fatigue*, Nauwelaerts, 1954, p. 3-40.
- [71] *Comment calculer?*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 40, 1954, p. 683-691.
- [72] *Pourquoi de nouveaux chiffres?*, Rev. des Quest. Scient., 1955, p. 379-398.
- [73] *L'oeuvre scientifique d'Albert Einstein*, Rev. des Quest. Scient., 1955, p. 475-487.
- [74] *Regularization of the three body problem*, Vistas in Astronomy, 1, 1955, p. 207-215.

- [75] *Intégration par analyse harmonique*, Ann. Soc. Sc. Brux., 70, 1955, p. 117-123.
- [76] *Le calcul élémentaire*, Bull. Cl. Sc. Acad. Royale Belgique, 1956, p. 1140-1145.
- [77] *The primaeval atom hypothesis and the problem of the clusters of galaxies*, Institut International de Physique Solvay-Extrait des rapports et discussions, 1958, p. 1-31.
- [78] *Rencontres avec Albert Einstein*, Rev. des Quest. Scient., 1958, p. 129-132.
- [79] *Contributions au problème des amas de galaxies* (avec A. Bartholomé), Ann. Soc. Sc. Brux., 72, 1958, p. 97-102.
- [80] *Instability in the expanding universe and its astronomical implications*, Pont. Acad. Scient. Scripta Varia, 1958, p. 475-486.
- [81] *L'étrangeté de l'Univers*, Extrait de la Revue Générale Belge, juin 1960, p. 1-14. La Scuola in Azione, estratto dal Notiziario n. 15, 1960, p. 3-22.
- [82] *Remarques sur certaines méthodes d'intégration des systèmes d'ignations différentielles*, Colloque sur l'Analyse Numérique, Centre Belge de Recherches Mathématiques, mars 1961, p. 9-23.
- [83] *Un nouveau système de chiffres et autres essais*, Scuola di Studi Superiori sugli Idrocarburi dell'E.N.I., Quaderno n. 10, 1961, p. 59.
- [84] *Exchange of Galaxies between Clusters and fields*, Astron. Journal, Vol. 66, déc. 1961.
- [85] *Charles Jean de la Vallée Poussin*, Commentarii Pontificiae Academiae Scientiarum, Vol. 1, n. 8, 1962, p. 1-4.
- [86] *L'expansion de l'Univers*, Conférences Radio Canada 15 avril 1966, Rev. Quest. Scient., avril 1967, p. 153.
- [87] *The three body problem*, Techn. Report on Ns G 243-62 and Ns G 122-61, Series 4, Issue 49, Space Sciences Laboratory, Univ. of California, Berkeley.
- [88] *Le Principe de continuité d'après Jean-Victor Poncelet*, Rev. Quest. Scient., 1967, p. 381.

OUVRAGES PUBLIÉS SÉPARÉMENT :

L'Hypothèse de l'Atome Primitif, Essai de Cosmogonie, Neuchatel Griffon 1946. Contient: préface par F. Gouseth, ex liste n. 8, 14, 18, 35, 39; appendice p. 179-201.

Primaeval Atom, Van Nostrand, New York, 1950.

Mc VITTIE, *Georges Lemaître*, Mont. Not. Roy. Astr. Soc.

Mc DREA, *Cosmology today*, Rev. Quest. Scient., avril 1970.

— *Cosmology*, Reports on Progress in Physics, 16, 1953, p. 321-363.

Florilège des Sciences en Belgique - Georges Lemaître (par Manneback et Briën), Acad. Royale Belgique, 1968, pendant le XIX et le début del XX, p. 97-113. Contient rapport Franqui et Prix décennal.

MANNEBACK, *Hommage à la mémoire de Monsieur Georges Lemaître*, Bull. Acad. Roy. Sc., 52, 30 juillet 1966; Rev. Quest. Scient., oct. 1966.

O. GODART, *Monsieur Lemaître et son oeuvre*, Ciel et Terre, mars-avril '67.

INDEX

	PAG.
P. SALVIUCCI, <i>Présentation</i>	5

COMMEMORATIONS SCIENTIFIQUES

C. MANNEBACK, <i>Georges Lemaître, le savant et l'homme</i>	13
O. GODART, <i>Monseigneur Lemaître et son oeuvre</i> . .	27
P. A. M. DIRAC, <i>The scientific work of Georges Lemaître</i>	67

L'UNIVERS EN EXPANSION

G. LEMAÎTRE, <i>Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques</i> . . .	87
A. S. EDDINGTON, <i>Space and its properties</i> . . .	103
G. LEMAÎTRE, <i>L'univers en expansion</i>	107
G. LEMAÎTRE, <i>L'hypothèse de l'atome primitif</i> . .	163
G. LEMAÎTRE, <i>Quaternions et espace elliptique</i> . .	183
G. LEMAÎTRE, <i>Instability in the expanding universe and its astronomical implications</i>	207

DEUX CONFERENCES DE LEMAITRE A ROME

- G. LEMAÎTRE, *Les rayons cosmiques et l'univers* . . . 223
- G. LEMAÎTRE, *L'étrangeté de l'univers* 239

LES NOUVEAUX CHIFFRES DE LEMAITRE

- G. LEMAÎTRE, *Un nouveau systeme de chiffres* . . . 257

DEUX COMMEMORATIONS
DONNEES PAR LEMAITRE A ROME

- G. LEMAÎTRE, *Lord Ernest Rutherford of Nelson* . . . 277
- G. LEMAÎTRE, *Charles Jean de La Vallée Poussin* . . 281

BIBLIOGRAPHIE

- Essai d'une bibliographie de Georges Lemaître* . . . 287