PONTIFICIAE ACADEMIAE SCIENTIARVM SCRIPTA VARIA

23

MARIO ROSATI

LE FUNZIONI E LE VARIETÀ QUASI ABELIANE DALLA TEORIA DEL SEVERI AD OGGI

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MCMLXII

PONTIFICIAE ACADEMIAE SCIENTIARVM SCRIPTA VARIA

23

MARIO ROSATI

LE FUNZIONI E LE VARIETÀ QUASI ABELIANE DALLA TEORIA DEL SEVERI AD OGGI

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MCMLXII

LE FUNZIONI E LE VARIETÀ QUASI ABELIANE DALLA TEORIA DEL SEVERI AD OGGI

... Un'opera sulle funzioni quasi abeliane sarebbe certamente incompleta ove non tenesse conto dei contributi notevoli portati dagli altri Autori, quasi tutti della Scuola italiana, che dopo di me si sono occupati di questa teoria. Tra essi segnatamente ricordo il mio indimenticabile collega prof. FABIO CONFORTO, *che è da considerare l'iniziatore della « Teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane ».*

Ho pregato quindi il prof. ROSATI *di proseguire egli stesso il lavoro, assumendosi il non lieve onere di redigere l'ulteriore volume che, con il titolo « Le funzioni e le varietà quasi abeliane dalla teoria del Severi ad oggi », ho testè presentato per la inserzione nelle pubblicazioni della Pontificia Accademia delle Scienze. Questo secondo volume, che raccoglie e sistematicamente espone tutti i risultati degli altri Autori sulle funzioni e sulle varietà quasi abeliane, offrirà al lettore, insieme con il precedente, un quadro completo sullo stato attuale della teoria. E spero che il lavoro possa riescire utile a chi voglia proseguire le ricerche in un campo che apre prospettive così vaste e interessanti.*

Roma, 8 gennaio 1959

FRANCESCO SEVERI
Accademico Pontificio

Dal volume « Funzioni quasi abeliane » di FRANCESCO SEVERI - Scripta Varia n. 20.

INTRODUZIONE

Secondo quanto fu stabilito dall'Accademico FRANCESCO SEVERI, vengono esposti in questo volume gli sviluppi della teoria delle funzioni e delle varietà quasi abeliane, dovuti ai contributi degli Autori che dopo di lui si sono occupati dell'argomento. Esso appare quindi come proseguimento al precedente volume n. 20 degli *Scripta Varia* dell'Accademia, dedicato dal SEVERI a raccogliere tutti i risultati suoi sulle funzioni quasi abeliane.

Nell'esposizione della teoria ho cercato di uniformarmi il più possibile alla trattazione del SEVERI (con la quale naturalmente il lettore dovrà essere già familiarizzato), come pure ho cercato, per quanto una redazione unitaria lo consente, di conservare il carattere e l'impostazione delle ricerche originali dei diversi Autori.

I risultati esposti e gran parte delle dimostrazioni sono quelli dei singoli Autori, i cui lavori sono elencati nella Bibliografia e qui sotto partitamente menzionati. Naturalmente tutta la materia viene qui presentata attraverso una rielaborazione unitaria, e messa a confronto con la teoria classica delle funzioni abeliane, anche allo scopo di meglio inquadrare i problemi ancora aperti.

La prima parte del volume è dedicata allo studio dei campi neutri. In particolare nei nn. 1-6 vengono determinati i gruppi di trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro a sostegno razionale o ellittico o iperellittico, poggiando su un criterio generale, esposto nel n. 2, che vale per campi neutri qualunque.

L'analisi viene completata stabilendo delle limitazioni per il numero e il periodo delle nominate trasformazioni, che estendono alle curve di genere virtuale maggiore del genere effettivo alcuni risultati classici di HURWITZ sulle curve algebriche. Tutti i risultati si devono a M. BENEDICTY, e sono contenuti nei lavori [5], [6], [7] della Bibliografia.

Il n. 7 espone una interessante estensione della nozione classica di campo neutro e di equivalenza lineare neutra, dal caso di una curva costruita sul campo complesso al caso di una curva concepita astrattamente al modo di C. CHEVALLEY, cioè come campo di funzioni algebriche di una variabile sopra un campo base arbitrario (cfr. BENEDICTY [11], [16] e [17]).

La seconda parte del volume (n. 8-20), è invece dedicata alla *teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane,* che si ottiene trasportando — sono parole di F. CONFORTO — « al campo delle funzioni quasi abeliane, ..., quella parte della vasta teoria delle funzioni abeliane, che va sotto il nome di *teoria delle matrici di* RIEMANN o di *teoria aritmetica delle funzioni abeliane* ».

La nominata teoria deve la sua impostazione e i suoi primi lineamenti a un notevole complesso di lavori dello stesso CONFORTO, seguiti poi da altri della sua scuola. Nonostante gli importanti risultati già ottenuti, tuttavia le profonde differenze dal caso abeliano e le difficoltà nuove che si incontrano non consentono ancora di mettere su un piano di parità lo sviluppo della teoria aritmetica delle funzioni abeliane con quello della nuova teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane.

In quest'ordine di idee la prima importante questione (n. 8-9) è l'introduzione e lo studio, in sede puramente aritmetica, delle relazioni di HURWITZ-CONFORTO di una matrice quasi abeliana (cfr. [22]); queste si presentano come generalizzazione delle classiche relazioni di HURWITZ relative ad una matrice di RIEMANN. E ciò, come del resto nel caso abeliano, per preparare il terreno alla determinazione delle trasformazioni biunivoche e bianalitiche di una varietà quasi abeliana in sè rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie. Determinate in generale da CONFORTO (nn. 10-12, cfr. [19], [20], [27]) esse sono state successivamente studiate da M. T. BRENCI ([2]) e M. BENEDICTY ([3], [5]), in alcuni casi speciali (cfr. nn. 12-13).

Mentre però nel caso abeliano le nominate trasformazioni risultano sempre *birazionali* sulla varietà di PICARD corrispondente, nel caso quasi abeliano accade — e questo è certo un risultato tra i più inattesi della teoria di CONFORTO — che quelle trasformazioni, anzichè birazionali, possono essere *trascendenti* sulla varietà quasi abeliana.

Questa nuova sorprendente circostanza ha condotto in un secondo tempo il CONFORTO a rivedere in sede critica la nozione di varietà quasi abeliana e di trasformazione birazionale su di essa, come pure la nozione di equivalenza tra corpi di funzioni quasi abeliane (nn. 14, 15, che fanno capo ai lavori [21], [23], [24]).

Sull'importanza e sull'ufficio delle varietà quasi abeliane nella teoria generale delle varietà gruppali, vanno anche ricordati i contributi di L. ROTH e della sua scuola ([38], [39], [40]).

L'ultima parte (nn. 16-20) riguarda alcune proprietà aritmetiche delle matrici quasi abeliane, più in particolare legate alla relazione di *equivalenza* (già considerata dal SEVERI, cfr. [50]). Ad un primo teorema di CONFORTO (n. 16, cfr. [25]), segue una analisi approfondita di BENEDICTY sui caratteri aritmetici (interi caratteristici e divisori elementari) di matrici quasi abeliane equivalenti, che conduce alla determinazione dei valori possibili di quei caratteri in relazione ad una prefissata matrice quasi abeliana e a tutte le matrici ad essa equivalenti (nn. 17, 18, cfr. [8], [10], [15]).

Valendosi dei risultati ottenuti, BENEDICTY è riuscito a definire quello che egli stesso ha chiamato il *gruppo unimodulare ristretto* (in analogia con il gruppo modulare ristretto relativo alle funzioni abeliane) e a interpretarlo come gruppo di trasformazioni in un conveniente spazio rappresentativo delle matrici quasi abeliane (nn. 19, 20, cfr. [13], [14]), sopratutto in vista della ricerca di condizioni necessarie e sufficienti perchè una data matrice sia una matrice quasi abeliana. La ricerca di queste condizioni è ancora un problema aperto, mentre è ben noto che nel caso classico di una matrice di RIEMANN esse si riassumono nell'esistenza di una matrice principale.

Per una visione d'insieme, sopratutto sulle prospettive che offrono i problemi ancora insoluti della teoria delle funzioni quasi abeliane, rinviamo anche alle conferenze [47] e [48] di SEVERI (oppure all'*Appendice* nel volume [50]), e all'esposizione [12] di BENEDICTY.

Parte prima

TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI IN SE' DI UN CAMPO NEUTRO

1. Il teorema di Schwarz-Klein in un campo neutro

Si consideri un campo neutro di genere effettivo p e genere virtuale $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$, cioè una curva algebrica C di genere p, pensata invariantivamente, su cui siano fissate $\delta_1 + \delta_2$ coppie neutre delle quali δ_1 formate da punti distinti e δ_2 da punti coincidenti.

Cosa deve intendersi, anzitutto, per trasformazione birazionale del dato campo neutro in sè? Adottiamo, con Benedicty [5] la seguente definizione, del tutto aderente alla natura della questione: *per trasformazione birazionale in sè di un campo neutro si intende una trasformazione birazionale in sè della curva C, sostegno del campo, la quale muti coppie neutre in coppie neutre.*

Per la definizione stessa, coppie neutre di punti distinti [coincidenti], andranno in coppie neutre di punti distinti [coincidenti].

Lo studio delle trasformazioni sopra un campo neutro è così ricondotto allo studio di quelle trasformazioni sopra una curva che mutano in sè l'insieme delle coppie neutre; ed esse sono particolari trasformazioni sulla curva che mutano in sè un determinato insieme di punti fissato su di essa.

Esaminiamo i primi casi che si presentano, quando il genere effettivo è nullo. In questa ipotesi ($p=0$, δ_1, δ_2 arbitrari) come modello del campo neutro si potrà prendere una retta proiettiva r, su cui siano fissate le $\delta_1+\delta_2$ coppie neutre. Se $\pi=0$, c'è un gruppo continuo ∞^3 di trasformazioni del campo in sè: le proiettività sulla retta r. Se $\pi=1$, $\delta_1=1$, le trasformazioni formano un gruppo a due schiere ∞^1: le proiettività che mutano in sè la coppia neutra di punti distinti, o lasciando fissi i due punti, o scambiandoli tra loro. Se $\pi=1$, $\delta_2=1$, c'è un gruppo ∞^2: le proiettività che lasciano fisso il punto che dà l'unica coppia neutra a punti coincidenti.

Converrà considerare a sè anche il campo neutro χ di caratteri $p=\delta_1=0$, $\delta_2=2$, che ammette un gruppo di trasformazioni a due schiere ∞^1, che lasciano fisse oppure scambiano tra loro le due coppie neutre.

Venendo ora al caso generale di un campo di caratteri $p=0$, $\pi>1$, che sia diverso dal campo χ, è chiaro che il campo stesso, avendo almeno tre punti distinti appartenenti alle sue coppie neutre, *è mutato in sè da un numero finito di trasformazioni birazionali.*

La proprietà si estende immediatamente ad un campo neutro di genere effettivo p qualunque. Se $p>1$ essa è invero conseguenza del teorema classico di SCHWARZ-KLEIN (cfr. per es. il n. 55 del *Trattato di Geometria algebrica* di F. SEVERI, ed. Zanichelli, Bologna, 1926), perchè una trasformazione birazionale di un campo neutro, è anzitutto una trasformazione birazionale del relativo campo assoluto, e di queste ne esiste soltanto un numero finito. Se infine $p=1$, $\pi>2$, ovvero $p=1$, $\delta_1=1$, $\delta_2=0$, il numero dei punti distinti appartenenti alle coppie neutre è almeno 2, e il campo ammette in ogni caso un numero finito di trasformazioni in sè; se $p=1$, $\delta_1=0$, $\delta_2=1$ esiste ancora un numero finito di trasformazioni che mutano in sè la coppia, cioè un punto della curva. Si conclude con il

TEOREMA DI SCHWARZ-KLEIN IN UN CAMPO NEUTRO — *Un campo neutro di genere virtuale $\pi>1$, diverso dal campo χ di* *caratteri $p = \delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2$, ammette al più un numero finito di trasformazioni birazionali in sè.*

Il campo χ e i campi di genere virtuale $\pi \leq 1$ ammettono invece infinite trasformazioni birazionali in sè.

Si ha poi immediatamente il

COROLLARIO — *Le trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro di genere virtuale $\pi > 1$, diverso dal campo χ, costituiscono un gruppo di ordine finito; ciascuna di esse è pertanto una trasformazione ciclica.*

Nel n. 6 daremo delle limitazioni per il numero e il periodo delle trasformazioni in sè di un campo neutro.

2. CRITERIO PER LA COSTRUZIONE DEI CAMPI NEUTRI CHE AMMETTONO TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI IN SÈ

Prescindiamo dai campi neutri con infinite trasformazioni birazionali in sè (tutti determinati nel n. 1), e occupiamoci di quelli, che indicheremo d'ora in avanti con γ, aventi un *gruppo finito* di trasformazioni in sè, di ordine ν.

La determinazione dei campi γ si potrà fare, secondo un criterio di BENEDICTY [5], [7], scegliendo un qualunque gruppo finito G di ordine ν di trasformazioni birazionali della curva sostegno C, e considerando come coppie neutre di γ un sistema di coppie di punti che sia mutato in sè da G; ciascuna scelta essendo fatta in tutti i modi possibili.

Fissato il gruppo G di ordine ν, i sistemi possibili di coppie neutre per il costruendo campo γ saranno costituiti da uno o più sistemi del tipo seguente:

a) *ν coppie $(A_1, B_1), \ldots, (A_\nu, B_\nu)$, trasformate di una data coppia di punti generici distinti della curva, mediante le operazioni del gruppo G.* Le coppie sono distinte finchè non si verifica uno dei due seguenti casi *b*), *c*);

b) sia $A_i \equiv B_j$ $(i \neq j)$, e quindi necessariamente $A_j \equiv B_i$.

La (A_i, B_i) è allora *coppia involutaria per una trasformazione* ω^* *di* G, e A_i, B_i sono punti uniti per ω^{*2}. Se quest'ultima non è l'identità si cade nel caso *c*) seguente; diversamente si ottengono le coppie del tipo attuale *b*), che sono *coppie generiche delle involuzioni di G* (ove ne esistano). Ciascuna di queste coppie è mutata in sè da una sola involuzione ω^*, chè altrimenti i suoi punti sarebbero uniti nel prodotto di ω^* per l'eventuale altra involuzione; segue da ciò che ogni coppia è mutata in sè dalle sole trasformazioni ω^* e 1, ed ammette pertanto $\nu/2$ trasformate;

c) sia $A_i \equiv A_j$ $(i \neq j)$, e quindi necessariamente $B_i \equiv B_j$. La (A_i, B_i) è allora *coppia di punti uniti distinti per una medesima trasformazione del gruppo;* anzi B_i deve essere unito per tutte e sole le trasformazioni per cui è unito A_i. Se la coppia (A_i, B_i) è mutata in sè da μ trasformazioni del gruppo, μ è divisore di ν, ed esistono soltanto ν/μ coppie distinte trasformate di (A_i, B_i) mediante il gruppo G; precisamente se μ' è il numero delle trasformazioni di G aventi i punti uniti A_i, B_i, risulta $\mu = \mu'$ oppure $\mu = 2\mu'$ a seconda che esista o no una trasformazione di G che scambi A_i con B_i (se ne esiste una, ne esistono μ');

d) ν *coppie* $(A_1, A_1), \ldots, (A_\nu, A_\nu)$, *trasformate di una data coppia di punti coincidenti in un punto generico della curva*. Esse sono distinte finchè non si verifica il caso *e*);

e) *una delle coppie* (A_i, A_i) *coincide in un punto* A_i *unito per qualche trasformazione del gruppo;* se A_i è unito per μ trasformazioni, μ divide ν, e le coppie trasformate distinte sono ν/μ.

Si osservi che, nella scelta delle coppie di punti distinti, se (A', B') è una trasformata di (A, B) non può $A' \equiv B$ senza che $B' \equiv A$ (come potrebbe accadere per es. se, essendo

$A, A', \ldots, A^{(n-1)}$ un ciclo di una trasformazione, con $n \geq 3$, si prendesse (A, A') come coppia neutra). Inoltre la scelta di una coppia di tipo *a*) implica la scelta di due parametri arbitrari, purchè generici, e quella di una coppia di tipo *b*) o *d*) la scelta di un parametro; invece le coppie di tipo *c*) o *e*) sono determinate dal gruppo in un numero finito di modi. Il campo dipende quindi da un numero di invarianti birazionali ([50], n. 21) pari alla somma del numero dei moduli della curva sostegno, del numero delle coppie *b*), *d*) e del doppio del numero delle coppie *a*); se il sostegno è ellittico o razionale, quel numero va aumentato del numero delle coppie *e*) e del doppio del numero delle coppie *c*), diminuito di una o di tre unità rispettivamente.

Infine si osserverà che il gruppo G non sarà necessariamente il gruppo totale delle trasformazioni in sè del campo γ costruito, per quanto ciò accada senz'altro quando il numero delle coppie neutre è abbastanza elevato. Ciò peraltro non ha importanza agli effetti della costruzione di tutti i campi γ, poichè un medesimo campo γ si otterrà a partire da un qualunque gruppo di trasformazioni che lo muti in sè (in particolare a partire dal gruppo totale).

Nei nn. seguenti si applicherà il criterio sopra esposto alla determinazione dei campi neutri che ammettono trasformazioni birazionali in sè, nel caso che la curva sostegno del campo sia razionale ($p=0$), o ellittica ($p=1$), ovvero iperellittica.

3. Determinazione dei campi neutri di genere effettivo nullo, che ammettono trasformazioni birazionali in sè

Preso come modello di un campo neutro di genere effettivo nullo una retta proiettiva r (cfr. n. 1), si applicherà il criterio precedente (n. 2), partendo dalla considerazione dei gruppi finiti di proiettività sulla retta r. Questi sono, com'è ben noto:

il gruppo ciclico C_n, o gruppo della piramide;
il gruppo diedrale D_{2n}, o gruppo della doppia piramide;
il gruppo tetraedrale T_{12};
il gruppo ottaedrale O_{24};
il gruppo icosaedrale I_{60}.

Per comodità, il discorso farà spesso riferimento al poliedro a cui la trasformazione si riferisce; poliedro che potrà pensarsi inscritto nel piano-sfera, ovvero proiettato sulla sfera stessa dal centro di quest'ultima.

E poichè ogni gruppo del tipo D, T, O, I contiene sottogruppi del tipo C, si otterranno tutti i campi neutri γ con trasformazioni birazionali in sè a partire dai gruppi C_n.

Per quanto precede la totalità delle coppie neutre di un campo γ, nel caso attuale, sarà costituito da uno o più sistemi dei tipi più avanti indicati. Alcuni di questi tipi, indicati con $_*$, non possono presentarsi contemporaneamente. P, Q, R indicano interi non negativi arbitrari.

a) I P sistemi costituiti, ciascuno, dalle n coppie trasformate di una generica coppia di punti distinti;

b) (quando n è pari) i Q sistemi costituiti, ciascuno dalle $n/2$ coppie trasformate di una coppia di punti simmetrici rispetto all'asse della piramide (cioè coniugati nell'involuzione del gruppo);

c_*) la coppia costituita dal vertice della piramide e dal punto opposto (cioè dai punti uniti delle trasformazioni del gruppo);

d) gli R sistemi costituiti, ciascuno, dalle n coppie trasformate di una generica coppia di punti coincidenti;

e_*) la coppia, ovvero le due coppie, di punti coincidenti formata da uno, o dai due, punti uniti delle trasformazioni del gruppo.

Scegliendo ora il riferimento sulla retta r, com'è possibile, in modo che il gruppo C_n sia rappresentato dalle equazioni

$$x' = \varepsilon^s x \qquad (s = 0, 1, \ldots, n-1;\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}})$$

si potrà enunciare il:

TEOREMA I. — *Ogni campo neutro di genere effettivo nullo* ($p=0$), *che ammette trasformazioni birazionali in sè, si può rappresentare sopra una retta proiettiva r in modo che il sistema delle coppie neutre sia uno dei seguenti*:

(1)		Coppie neutre di punti distinti	Coppie neutre di punti coincidenti	δ_1	δ_2	π
	γ_1	$(\varepsilon^i\alpha_h,\ \varepsilon^i\beta_h)$ $(\varepsilon^j\alpha_k,\ -\varepsilon^j\alpha_k)$ $(0,\ \infty)$	$(\varepsilon^i\alpha_l,\ \varepsilon^i\alpha_l)$	$nP + \frac{n}{2}Q + 1$	nR	$\frac{n}{2}L + 1$
	γ_2	$(\varepsilon^i\alpha_h,\ \varepsilon^i\beta_h)$ $(\varepsilon^j\alpha_k,\ -\varepsilon^j\alpha_k)$	$(\varepsilon^i\alpha_l,\ \varepsilon^i\alpha_l)$ $(\infty,\ \infty)$	$nP + \frac{n}{2}Q$	$nR + 1$	$\frac{n}{2}L + 1$
	γ_3	$(\varepsilon^i\alpha_h,\ \varepsilon^i\beta_h)$ $(\varepsilon^j\alpha_k,\ -\varepsilon^j\alpha_k)$	$(\varepsilon^i\alpha_l,\ \varepsilon^i\alpha_l)$ $(\infty,\ \infty)$ $(0,\ 0)$	$nP + \frac{n}{2}Q$	$nR + 2$	$\frac{n}{2}L + 2$
	γ_4	$(\varepsilon^i\alpha_h,\ \varepsilon^i\beta_h)$ $(\varepsilon^j\alpha_k,\ -\varepsilon^j\alpha_k)$	$(\varepsilon^i\alpha_l,\ \varepsilon^i\alpha_l)$	$nP + \frac{n}{2}Q$	nR	$\frac{n}{2}L$

dove:

$i = 0, 1, \ldots, n-1$; $j = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1$ (solo se n è pari);

$h = 1, 2, \ldots, P$; $k = 1, 2, \ldots, Q$; $l = 1, 2, \ldots, R$;

$\alpha_h, \beta_h \neq 0, \infty$; $\alpha_h \neq -\beta_h$ se n è pari;

P, Q, R sono interi non negativi arbitrari; $Q = 0$ quando n è dispari. Si è posto inoltre $L = 2P + Q + 2R$.

Si osserverà che i campi quasi iperellittici, dotati di una g_2^1 neutra, rientrano tra quelli trovati in quanto posseggono la trasformazione ciclica data dalla g_2^1 neutra; essi si ottengono dalla tabella (I) per $n=2$, considerando coppie di tipo b) e):

TEOREMA II. — *Ogni campo neutro quasi iperellittico, di genere effettivo nullo, si può rappresentare su una retta proiettiva in modo che il sistema delle sue coppie neutre sia uno dei seguenti:*

$$(\mathrm{I}')\begin{cases}\gamma_5 & (\alpha_1, -\alpha_1), (\alpha_2 - \alpha_2), \ldots, (\alpha_P, -\alpha_P) & \delta_1 = P,\ \delta_2 = 0,\ \pi = P \\ \gamma_6 & (\alpha_1, -\alpha_1), (\alpha_2 - \alpha_2), \ldots, (\alpha_P, -\alpha_P), (\infty, \infty) & \delta_1 = P,\ \delta_2 = 1,\ \pi = P + \\ \gamma_7 & (\alpha_1, -\alpha_1), (\alpha_2 - \alpha_2), \ldots, (\alpha_P, -\alpha_P), (\infty, \infty), (0, 0) & \delta_1 = P,\ \delta_2 = 2,\ \pi = P + \end{cases}$$

* * *

Abbiamo finora determinato i campi neutri γ, di genere effettivo nullo, aventi un gruppo finito di trasformazioni birazionali in sè (tabella I). Ma per un dato campo γ può accadere che il gruppo di tutte le trasformazioni in sè sia più ampio del gruppo C_n, da cui abbiamo preso le mosse; e ciò per particolari valori di δ_1, δ_2 ovvero per particolari posizioni delle coppie di punti. Tali campi si otterranno in ogni caso, come si è già detto, esaminando gli insiemi di coppie mutati in sè dai gruppi D, T, O, I; le relative coppie neutre saranno date da uno o più sistemi dei tipi qui appresso indicati. Per ciascun gruppo, sistemi contrassegnati con lo stesso numero di asterischi, non possono coesistere. H, K, L indicano interi non negativi arbitrari.

Gruppo D_{2n}, con n pari

Coppie di punti distinti:

a) sistemi di $2\,n$ coppie trasformate di una coppia generica;

b_1) sistemi di n coppie trasformate di una coppia di punti simmetrici rispetto all'asse della doppia piramide;

b_2), b_3) sistemi di n coppie trasformate di una coppia di punti simmetrici rispetto alla congiungente due vertici opposti, ovvero punti medi di lati opposti della base;

c_*) le $n/2$ coppie di vertici opposti della base;

c_{**}) *le* $n/2$ coppie di punti medi di lati opposti della base;

c_{***}) la coppia dei vertici della piramide.

Coppie di punti coincidenti:

d) sistemi di $2n$ coppie trasformate di una coppia generica;

e_*) le n coppie date dai vertici della base;

e_{**}) le n coppie date dai punti medi dei lati della base;

e_{***}) le due coppie date dai vertici della piramide.

Caratteri del campo:

$$\delta_1 = \frac{n}{2} H \qquad \delta_2 = nK,\ nK+2$$

$$\delta_1 = \frac{n}{2} H + 1 \qquad \delta_2 = nK$$

$$\pi = \frac{n}{2} L,\ \frac{n}{2} L + 1,\ \frac{n}{2} L + 2 \text{ [1]} .$$

Gruppo D_{2n}, con n dispari

Coppie di punti distinti:

a) sistemi di $2n$ coppie trasformate di una coppia generica;

b) sistemi di n coppie trasformate di una coppia di punti

(1) Qui e nel seguito di questo n. l'ultima uguaglianza indica (L essendo un intero non negativo arbitario) i valori possibili del genere virtuale π considerato a sè, indipendentemente cioè da δ_1, δ_2. Una volta scelti δ_1 e δ_2, cioè H e K, il valore di π è semplicemente $\pi = \delta_1 + \delta_2$.

simmetrici rispetto alla congiungente un vertice della base col punto medio del lato opposto;

c_*) le n coppie costituite da un vertice della base e dal punto medio del lato opposto;

c_{**}) la coppia dei vertici della piramide.

Coppie di punti coincidenti:

d) sistemi di $2n$ coppie trasformate di una coppia generica;

e_*) le n (ovvero le $2n$) coppie date dai vertici della base (e dai loro opposti);

e_{**}) le due coppie date dai vertici della piramide.

Caratteri del campo:

$$\delta_1 = nH \qquad \delta_2 = nK,\ nK + 2$$
$$\delta_1 = nH + 1 \qquad \delta_2 = nK$$
$$\pi = n\,L,\ \ n\,L + 1,\ \ n\,L + 2.$$

Gruppo T_{12}

Coppie di punti distinti:

a) sistemi di 12 coppie trasformate di una coppia generica;

b) sistemi di 6 coppie trasformate di una coppia di una involuzione del gruppo;

c_*) le 4 coppie costituite, ciascuna, da un vertice e dal punto opposto;

c_{**}) le 3 coppie costituite, ciascuna dai punti medi di due spigoli opposti.

Coppie di punti coincidenti:

d) sistemi di 12 coppie trasformate di una coppia generica;

e_*) le 4 (8) coppie date dai vertici (e dai punti ad essi opposti);

e_{**}) le 6 coppie date dai punti medi degli spigoli.

Caratteri del campo:

$\delta_1 = 6\,H$ $\quad\quad \delta_2 = 12\,K, \ +4, \ +6, \ +8, \ +10, +14$

$6\,H+3 \quad\quad 12\,K, \ +4, \ +8$

$6\,H+4 \quad\quad 12\,K, \ +6$

$6\,H+7 \quad\quad 12\,K$

$\pi = 6\,L, \ +3, \ +4, \ +7, \ +8, \ +11.$

Gruppo O_{24}

Coppie di punti distinti:

a) sistemi di 24 coppie trasformate di una coppia generica;

b_1) sistemi di 12 coppie trasformate di una coppia di una delle involuzioni che mutano in sè due spigoli (opposti);

b_2) sistemi di 12 coppie trasformate di una coppia di una delle involuzioni che mutano in sè due vertici (opposti);

c_*) le 3 coppie di vertici opposti;

c_{**}) le 4 coppie di centri di facce opposte;

c_{***}) le 6 coppie di punti medi di spigoli opposti.

Coppie di punti coincidenti:

d) sistemi di 24 coppie trasformate di una coppia generica;

e_*) le 6 coppie date dai vertici;

e_{**}) le 8 coppie date dai centri delle facce;

e_{***}) le 12 coppie date dai punti medi degli spigoli.

Caratteri del campo:

$\delta_1 = 12\,H$ $\quad\quad \delta_2 = 24\,K, \ +6, \ +8, \ +12, \ +14, \ +18, \ +20, \ +26$

$12\,H+3 \quad\quad 24\,K, \ +8, \ +12, \ +20$

$12\,H+4 \quad\quad 24\,K, \ +6, \ +12, \ +18$

$12\,H+6 \quad\quad 24\,K, \ +6, \ +8, \ +14$

$12\,H+7 \quad\quad 24\,K, \ +12$

$12\,H+9 \quad\quad 24\,K, \ +8$

$$
\begin{array}{lll}
 & 12\,H+10 & 24\,K,\ \ +6 \\
 & 12\,H+13 & 24\,K \\
\pi = 12\,L, & +3,\ +4,\ +6,\ +7,\ +8,\ +9,\ +10,\ +11, & \\
 & \qquad +13,\ +14,\ +17. &
\end{array}
$$

Gruppo I_{60}

Coppie di punti distinti:

a) sistemi di 60 coppie trasformate di una coppia generica;

b) sistemi di 30 coppie trasformate di una coppia di una involuzione del gruppo;

c_*) le 6 coppie di vertici opposti;

c_{**}) le 10 coppie di centri di facce opposte;

c_{***}) le 15 coppie di punti medi di spigoli opposti.

Coppie di punti coincidenti:

d) sistemi di 60 coppie trasformate di una coppia generica;

e_*) le 12 coppie date dai vertici;

e_{**}) le 20 coppie date dai centri delle facce;

e_{***}) le 30 coppie date dai punti medi degli spigoli.

Caratteri del campo:

$$
\begin{array}{ll}
\delta_1 = 30\,H & \delta_2 = 60\,K,\ +12,\ +20,\ +30,\ +32,\ +42, \\
 & \qquad\qquad +50,\ +62 \\
30\,H+6 & 60\,K,\ +20,\ +30,\ +50 \\
30\,H+10 & 60\,K,\ +12,\ +30,\ +42 \\
30\,H+15 & 60\,K,\ +12,\ +20,\ +32 \\
30\,H+16 & 60\,K,\ +30 \\
30\,H+21 & 60\,K,\ +20 \\
30\,H+25 & 60\,K,\ +12 \\
30\,H+31 & 60\,K
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\pi = 30\,L,\ +6,\ +10,\ +12,\ +15,\ +16,\ +20,\ +21, \\
\qquad +22,\ +25,\ +26,\ +27,\ +31,\ +32, \\
\qquad +35,\ +37,\ +41,\ +47.
\end{array}
$$

4. Determinazione dei campi neutri a sostegno ellittico, che ammettono trasformazioni birazionali in sè

In modo analogo procederemo alla determinazione dei campi γ, che ammettono un gruppo finito di trasformazioni birazionali in sè, nell'ipotesi che la curva sostegno sia ellittica (campi di genere effettivo $p=1$).

Converrà dapprima richiamare la classificazione dei gruppi finiti di trasformazioni birazionali sopra una curva ellittica, quale consegue da risultati classici (1) e quale trovasi espressamente in [7]. Indicando ordinatamente con

- π una trasformazione di seconda specie: $u' \equiv u + c$ (mod. per.) (2);
- τ una trasformazione di prima specie: $u' \equiv -u + c$ (mod. per.);
- μ una trasformazione straordinaria, ciclica del 4° ordine, sulla curva armonica;
- ρ, σ una trasformazione straordinaria, ciclica del 3° ordine, risp. del 6° ordine, sulla curva equianarmonica;

la detta classificazione si riassume negli enunciati seguenti:

I. *Un gruppo finito di trasformazioni di seconda specie sopra una qualunque curva ellittica è sempre generabile con due sue opportune trasformazioni* π_1, π_2 *di periodi rispettivi* $n = h\,m$, m, *le quali, con opportuna scelta dei periodi fondamentali* ω, ω', *si possono scrivere:*

$$(2) \quad \begin{cases} \pi_1: & u' \equiv u + \omega/n \\ \pi_2: & u' \equiv u + \omega'/m \end{cases} \qquad (\text{mod. periodi, } n = h\,m)$$

essendo u *l'integrale abeliano di prima specie.*

(1) Cfr. ad es. l'opera [31], a pag. 94.

(2) Le denominazioni qui adottate di trasformazioni di prima e di seconda specie sono conformi all'uso corrente nella teoria delle funzioni abeliane e quasi abeliane in più variabili, e differiscono pertanto dall'uso nella teoria classica delle curve ellittiche.

I numeri naturali m, n, h $(n = h\, m)$ sono caratteri del gruppo G: n è il periodo proprio massimo delle trasformazioni di G, e $\nu = m\, n$ è l'ordine di G.

Tutte le trasformazioni di G sono allora date da

$$u' \equiv u + \varphi \qquad \text{(mod. periodi)} \tag{3}$$

con

$$\varphi = \frac{r\,\omega + h\, s\, \omega'}{n} \qquad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \ldots, n-1 \\ s = 0, 1, \ldots, m-1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

II. *Tutti e soli i gruppi finiti di trasformazioni ordinarie sopra una curva ellittica qualunque si possono generare con due trasformazioni di seconda specie* (2), *ed eventualmente una trasformazione di prima specie* τ_1, *che previa sostituzione di variabile si può supporre sia* $u' \equiv -u$ (*mod. periodi*).

Le trasformazioni di G sono date, tutte e ciascuna una volta sola, da:

$$\pi_1^{\,r}\ \pi_2^{\,s}\ \tau_1^{\,t} \qquad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \ldots, n-1 \\ s = 0, 1, \ldots, m-1 \\ t = 0, 1 \end{pmatrix}$$

e il gruppo G risulta di ordine $\nu = 2\, m\, n$.

III. *Sopra una curva ellittica armonica, tutti e soli i gruppi finiti di trasformazioni birazionali contenenti trasformazioni straordinarie si possono generare con due trasformazioni di seconda specie* (2) *e una trasformazione straordinaria* μ_1, *che si può supporre sia* $u' \equiv i\, u$ (*mod periodi*).

Se e solo se $|\omega|^2 \equiv 0$ (mod h) le trasformazioni del gruppo sono date, tutte e ciascuna una volta sola, da:

$$\pi_1^{\,r}\ \pi_2^{\,s}\ \mu_1^{\,t} \qquad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \ldots, n-1 \\ s = 0, 1, \ldots, m-1 \\ t = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{pmatrix}$$

e l'ordine del gruppo è $\nu = 4\, m\, n$.

IV. *Sopra una curva ellittica equianarmonica, tutti e soli i gruppi finiti di trasformazioni birazionali contenenti trasformazioni straordinarie cicliche del terzo ordine ma non del sesto, si possono generare con due trasformazioni di seconda specie* (2) *e con una trasformazione straordinaria* ρ_1, *che si può supporre sia* $u' \equiv \varepsilon u$ $\left(\text{mod. periodi; } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)$.

Se e solo se $|\omega|^2 \equiv 0$ (mod h) le trasformazioni del gruppo sono date, tutte e ciascuna una volta sola, da

$$\pi_1{}^r \ \pi_2{}^s \ \rho_1{}^t \qquad \begin{pmatrix} r = 0, 1, \ldots, n-1 \\ s = 0, 1, \ldots, m-1 \\ t = 0, \ 1, \ 2 \end{pmatrix}$$

ed è $\nu = 3\, m\, n$.

Se il gruppo contiene trasformazioni straordinarie di periodo 6, vale l'enunciato precedente, purchè si ponga σ_1 *al posto di* ρ_1, $t = 0, 1, \ldots, 5$, *e* $\nu = 6\, m\, n$. *Si può anche supporre che* σ_1 *sia* $u' \equiv -\varepsilon u$ *(mod. periodi)*.

Per ciascun tipo di gruppo G, determiniamo i possibili campi neutri che lo ammettono come gruppo di trasformazioni birazionali in sè.

Gruppo di trasformazioni di seconda specie

Il gruppo G, di ordine $\nu = m\, n$, sia costituito dalle trasformazioni (3), tutte prive di punti uniti. Se n è dispari non esistono involuzioni in G; se n è pari esse sono:

per m dispari:

$$(5) \qquad u' \equiv u + \frac{\omega}{2} \qquad \text{(mod periodi)},$$

per m pari:

$$(6) \qquad u' \equiv u + \frac{\omega}{2}, \quad u' \equiv u + \frac{\omega'}{2}, \quad u' \equiv u + \frac{\omega + \omega'}{2} \quad \text{(mod periodi)}.$$

In base al criterio del n. 2 i possibili sistemi di coppie neutre per il costruendo campo neutro γ, sono:

a) sistemi di $m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti distinti;

b) (per n pari) sistemi di $\frac{m\,n}{2}$ coppie trasformate di una generica coppia di un'involuzione;

d) sistemi di $m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti coincidenti.

Indicando anche con λ il periodo di una generica trasformazione del gruppo, risulta:

$$\pi = 1 + k\,\frac{m\,n}{2}\,, \qquad \nu = m\,n, \qquad \lambda \leq n$$

Gruppo di trasformazioni di prima e di seconda specie

Il gruppo G sia costituito dalle $2\,m\,n$ trasformazioni

$$u' \equiv \pm u + \varphi \qquad \text{(mod periodi)}$$

con φ dato dalla (4). Sono involuzioni di G le $m\,n$ trasformazioni $u' \equiv -u + \varphi$ ed eventualmente, se n è pari le (5) o (6). Punti uniti ne ammettono sole le trasformazioni di prima specie; essi sono:

$$(7) \qquad \frac{\varphi}{2}, \quad \frac{\varphi+\omega}{2}, \quad \frac{\varphi+\omega'}{2}, \quad \frac{\varphi+\omega+\omega'}{2}$$

e ciascuno di essi, essendo unito per una sola trasformazione, ammette $m\,n$ trasformati; invece una coppia di punti uniti ha $\frac{m\,n}{2}$ oppure $m\,n$ trasformate a seconda che appartenga o no ad una involuzione (il primo caso è possibile solo per n pari).

I sistemi possibili di coppie neutre sono quindi:

a) sistemi di $2\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti distinti;

b) sistemi di $m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di una qualunque involuzione;

c_1), c_2) sistemi di $\frac{m\,n}{2}$ o $m\,n$ coppie trasformate di una coppia di punti uniti, appartenente o no ad una involuzione;

d) sistemi di $2\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti coincidenti;

e) sistemi di $m\,n$ coppie trasformate di una coppia di punti coincidenti in un punto unito per una trasformazione di prima specie.

Nel caso attuale risulta:

$$\pi = 1 + k\,\frac{m\,n}{2}\,, \qquad \nu = 2\,m\,n, \qquad \lambda \leq \max\,(2,\ n)$$

Gruppo con trasformazioni straordinarie (curva sostegno armonica)

Il gruppo sia costituito dalle $4\,m\,n$ trasformazioni

$$u' \equiv i^t\,u + \varphi \quad (\text{mod periodi}) \quad (t = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

con φ dato dalla (4). Per $t=0$, $t=2$, $t=1, 3$ si hanno rispettivamente trasformazioni di seconda, di prima specie e straordinarie.

In analogia con i casi precedenti, il lettore si convincerà, senza difficoltà sostanziali (cfr. [7]), che nel caso attuale le possibili coppie neutre sono:

a) sistemi di $4\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti distinti;

b) sistemi di $2\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di un'involuzione;

c_1) sistemi di $m\,n$ ovvero di $2\,m\,n$ coppie trasformate di una coppia di punti uniti per una trasformazione di prima specie, ma non per una straordinaria (tale coppia può essere o no involutoria per una trasformazione del gruppo);

c_2) sistemi di $\dfrac{m\,n}{2}$ ovvero di $m\,n$ coppie trasformate di una coppia di punti uniti per una trasformazione straordinaria (detta coppia può essere o no mutata in sè da una trasformazione involutoria);

d) sistemi di $4\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti coincidenti;

e) sistemi di $m\,n$ ovvero di $2\,m\,n$ coppie, trasformate di una coppia di punti coincidenti in un punto unito per una trasformazione straordinaria ovvero solo per una trasformazione di prima specie.

Si ha infine:

$$\pi = 1 + k\,\frac{m\,n}{2}, \qquad \nu = 4\,m\,n, \qquad \lambda \leq \max\,(4,\ n)$$

Gruppo con trasformazioni straordinarie di periodo 3 e non di periodo 6 (curva sostegno equianarmonica)

Il gruppo G sia costituito dalle $3\,m\,n$ trasformazioni:

$$u' \equiv \varepsilon^t u + \varphi \qquad (\text{mod periodi}) \qquad (t = 0,\ 1,\ 2)$$

ove $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, e φ è dato dalla (4). Le uniche involuzioni presenti in G sono le (6), e solo se n è pari. Hanno punti uniti soltanto le trasformazioni straordinarie; essi sono

$$\frac{2+\varepsilon}{3}\,\varphi\,, \qquad \frac{2+\varepsilon}{3}\,(\varphi+1)\,, \qquad \frac{2+\varepsilon}{3}\,(\varphi+2)\,,$$

sono uniti per tre trasformazioni (le potenze di una ρ), e non sono scambiati tra loro da alcuna involuzione.

Si presentano pertanto come possibili i seguenti sistemi di coppie neutre:

a) sistemi di $3\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti distinti;

b) sistemi di $\frac{3}{2}m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di un'involuzione di seconda specie (n pari);

c) sistemi di $m\,n$ coppie trasformate di una coppia di punti uniti per una trasformazione straordinaria, purchè la $u' \equiv u + \frac{2+\varepsilon}{3}$ non faccia parte del gruppo;

d) sistemi di $3\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti coincidenti;

e) sistemi di $m\,n$ coppie trasformate di una coppia di punti coincidenti in un punto unito per una trasformazione straordinaria.

In questo caso si ha:

$$\pi = 1 + k\,\frac{m\,n}{2} \quad (k \geq 2), \qquad \nu = 3\,m\,n, \qquad \lambda \leq \max\,(3,\ n)$$

Gruppo con trasformazioni straordinarie di periodo 6 (curva sostegno equianarmonica)

Il gruppo G sia costituito dalle $6\,m\,n$ trasformazioni:

$$u' \equiv (-\varepsilon)^t\, u + \varphi \qquad (\text{mod periodi}) \qquad (t = 0,\ 1,\ \ldots,\ 5)$$

con $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, e φ dato dalla (4). Per $t = 0$, $t = 3$, $t = 2,\ 4$, $t = 1,\ 5$ si hanno rispettivamente trasformazioni di seconda, di prima specie, straordinarie di periodo 3, di periodo 6. In analogia con gli altri casi trattati si perviene attualmente a determinare come possibili sistemi di coppie neutre i seguenti:

a) sistemi di $6\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti distinti;

b) sistemi di $3\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di un'involuzione di G;

c) sistemi di $m\,n$, ovvero di $\frac{3}{2}\,m\,n$, ovvero $2\,m\,n$, ovvero $3\,m\,n$ coppie trasformate di una coppia di punti distinti, uniti per una trasformazione di G;

d) sistemi di $6\,m\,n$ coppie trasformate di una generica coppia di punti coincidenti;

e) sistemi di $m\,n$, ovvero $2\,m\,n$, ovvero $3\,m\,n$ coppie trasformate di una coppia di punti coincidenti in un punto unito per una trasformazione del gruppo G.

Si ha infine:

$$\pi = 1 + k\,\frac{m\,n}{2}\ (k \geq 2), \qquad \nu = 6\,m\,n, \qquad \lambda \leq \max\,(6,\ n).$$

5. Gruppi di trasformazioni birazionali sopra una curva iperellittica, e relativi campi neutri

Una curva iperellittica C di genere p (≥ 2), di equazione canonica $y^2 = f\,(x)$, si può sempre rappresentare doppiamente sopra la retta complessa $\mathbf{X}$ (su cui è distesa la variabile complessa x) con i punti di diramazione $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots,\ \Delta_{2p+2}$ determinati su di essa come radici dell'equazione $f\,(x) = 0$.

Fissiamo ora su C un campo neutro γ con le δ_1 coppie di punti distinti $(A_i,\ B_i)$ e le δ_2 coppie di punti coincidenti $(A_l,\ A_l)$, e indichiamo con $\mathbf{A}_i,\ \mathbf{B}_i,\ \mathbf{A}_l$ i corrispondenti punti su $\mathbf{X}$.

Se il campo γ ammette un gruppo di trasformazioni birazionali in sè (necessariamente finito per il teorema di Schwarz-Klein, n. 1), G_ν, questo subordina sulla g_2^1, e quindi su $\mathbf{X}$, un gruppo finito di proiettività, $\mathbf{H}_\mu$, che muta in sè l'insieme dei punti di diramazione e l'insieme dei punti $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{A}_l$; anzi ogni coppia $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$ è mutata in una coppia analoga, e ogni punto $\mathbf{A}_l$ in un punto analogo. Non è escluso che sia $\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{B}_i$, ovvero che taluno dei punti considerati coincida con qualche punto di diramazione.

Viceversa, sia fissato comunque su una retta $\mathbf{X}$ un insieme di punti Δ_h (h pari ≥ 6), che venga mutato in sè da un gruppo finito $\mathbf{H}_\mu$ di proiettività; $\mathbf{H}_\mu$ induce allora un gruppo finito $G'_{\nu'}$, di trasformazioni birazionali sulla curva iperellittica C individuata dai punti di diramazione Δ_h. Dando su C un sistema di δ coppie neutre, che sia mutato in sè da $G'_{\nu'}$, o da un suo sottogruppo G_ν, si ottiene un campo neutro γ di genere virtuale $\pi = p + \delta$, con un gruppo G_ν di trasformazioni birazionali in sè.

L'insieme delle δ coppie neutre sarà naturalmente costituito da sistemi del tipo indicato nel n. 2. Ma andrà pure tenuto conto della presenza della g_2^1. Indichiamo con P, P^* la coppia della g_2^1 corrispondente al punto di $\mathbf{P}$ di $\mathbf{X}$, con Δ un punto di diramazione di $\mathbf{X}$ o anche il relativo punto di C, con $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, ... punti uniti per trasformazioni di $\mathbf{H}_\mu$, distinti dai punti Δ.

Ciascuna trasformazione $\mathbf{T}$ di $\mathbf{H}_\mu$, $x' = \varphi\,(x)$ dà origine su C a due trasformazioni T, T^*: $x' = \varphi\,(x)$, $y' = \pm\psi\,(x, y)$, delle quali può appartenere al gruppo G_ν una sola ($\nu = \mu$), oppure entrambe ($\nu = 2\,\mu$). È pressochè immediato che i punti uniti di T, T^* sono da ricercarsi solo nei punti di C appartenenti alle coppie della g_2^1 unite nella trasformazione $\mathbf{T}$; se una di tali coppie dà un punto di diramazione, questo è unito per T, T^*; altrimenti i due puuti della coppia sono uniti per una e una sola delle T, T^*.

Il gruppo $\mathbf{H}_\mu$ subordina nell'insieme dei punti di diramazione Δ_h un gruppo di sostituzioni, suddividendolo in sistemi di intransitività e ciascuno di questi in sistemi di imprimitività. Analogamente per l'insieme dei punti uniti $\mathbf{V}$ distinti dai Δ_h.

Da quanto precede e dal n. 2 discende allora che l'insieme delle coppie neutre del campo γ relativo al gruppo G_ν sarà costituito da uno o più sistemi del tipo seguente:

a) sistemi di ν coppie trasformate di una generica coppia di punti distinti;

b') sistemi di $\nu/2$ coppie trasformate di una generica coppia di un'involuzione di G_ν, distinta dalla g^1_2;

*b**) sistemi di $\nu/2$ o ν coppie trasformate di una generica coppia della g^1_2 (a seconda che questa appartenga o no a G_ν);

c') sistemi di ν/η coppie trasformate di una coppia di punti uniti per una medesima trasformazione di G_ν, e non coniugati nella g^1_2 (η è il numero delle trasformazioni che mutano in sè la coppia);

*c**) sistemi di ν/η coppie trasformate di una coppia della g^1_2, i cui punti siano uniti per una medesima trasformazione di G_ν;

c^Δ) sistemi delle trasformate di una coppia costituita da due punti di diramazione distinti. Questi possono essere uniti per una medesima trasformazione di $\mathbf{H}_\mu$ e quindi per una o due trasformazioni di G_ν, ovvero costituire una coppia di una involuzione di G_ν; in entrambi i casi il sistema dei loro trasformati è costituito da ν/η coppie di imprimitività; ovvero nessuna trasformazione di $\mathbf{H}_\mu$ e quindi di G_ν muta un punto nell'altro, nel qual caso i sistemi dei trasformati dei due punti, in $\mathbf{H}_\mu$ o in G_ν, sono due sistemi isomorfi e distinti;

d) sistemi di ν coppie trasformate di una generica coppia di punti coincidenti;

e') sistemi di ν/η coppie trasformate di una coppia di punti coincidenti in un punto unito per η trasformazioni di G_ν, e distinto dai punti di diramazione;

e^*) sistemi di ν/η coppie trasformate di una coppia di punti coincidenti in un punto di diramazione.

Giunti a questo punto non ci soffermeremo sulla costruzione esplicita dei campi neutri γ a sostegno iperellittico aventi un gruppo di trasformazioni birazionali in sè, come si potrebbe fare in analogia ai due casi precedenti di campi a sostegno razionale o ellittico (n. 3, 4).

Cercheremo invece, nel prossimo numero, di stabilire delle relazioni tra il genere virtuale π di un campo neutro γ che ammette un gruppo G_ν di trasformazioni birazionali in sè, e il numero ν e il periodo λ di queste, onde pervenire a delle limitazioni per ν e λ.

6. Limitazioni per il numero e per il periodo delle trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro

Un classico teorema di Hurwitz afferma che una curva algebrica di genere p (>1) possiede al più $84\ (p-1)$ trasformazioni birazionali in sè ([1]). Una tale proprietà si può estendere ai campi neutri, assegnando un limite superiore per il numero delle trasformazioni in sè del campo in funzione del genere virtuale π del campo stesso.

Esamineremo la questione, dandone una soluzione in certo senso non migliorabile, nel caso che la curva sostegno del campo sia razionale, o ellittica o iperellittica.

A) *Campi a curva sostegno razionale.*

Cominciamo dai campi di genere effettivo nullo ($p=0$) dimostrando i seguenti:

Teorema I. — *Un campo neutro di genere effettivo nullo e genere virtuale* $\pi>1$, *diverso dal campo* χ *di caratteri*

([1]) Cfr. la memoria [33].

$\pi = \delta_2 = 2$, $p = \delta_1 = 0$, *possiede al più* $12\,(\pi - 1)$ *trasformazioni birazionali in sè.*

TEOREMA II. — *Un campo neutro di genere effettivo nullo e genere virtuale* $\pi > 1$, *diverso dal campo* χ *di cui al teorema I, possiede al più* $4\,\pi$ *trasformazioni birazionali in sè, ad eccezione dei campi* $\chi_1, \ldots, \chi_5$, *realizzabili sulla sfera, riemanniana della retta complessa, mediante le seguenti coppie neutre:*

χ_1: coppie di vertici opposti di un ottaedro
χ_2: coppie di centri di facce opposte di un ottaedro
χ_3: coppie di vertici opposti di un icosaedro
χ_4: coppie di centri di facce opposte di un icosaedro
χ_5: coppie di punti coincidenti date dai vertici di un icosaedro.

Detti campi hanno i seguenti caratteri:

χ_1:	$\pi = \delta_1 = 3$,	$p = \delta_2 = 0$,	24	trasformazioni
χ_2:	4,	0,	24	»
χ_3:	6,	0,	60	»
χ_4:	10,	0,	60	»
χ_5:	$\pi = \delta_2 = 12$,	$p = \delta_1 = 0$,	60	»

Aggiungiamo poi che la limitazione data dal teorema II non può essere ulteriormente migliorata, se non escludendo infiniti tipi di campi neutri.

Per convincersi della validità dei teoremi I e II basterà passare in rassegna tutti i tipi di gruppi di trasformazioni che possono presentarsi quando il campo neutro ha genere effettivo nullo (determinati nel n. 3), e per ciascuno di essi determinare il genere minimo dei relativi campi neutri, trascurando, ove questi compaiano, i campi di genere virtuale $\pi \leq 1$ e il campo χ.

Indicando con ν il numero delle trasformazioni del campo in sè, si ha per ciascun tipo di gruppo, tenendo presenti i risultati del n. 3:

Gruppo C_n. Il genere minimo per n pari [dispari] è realizzato dal caso γ_4 della (1) per $P=R=0$, $Q=1$ [$P=Q=0$, $R=1$ ovvero $Q=R=0$, $P=1$] e vale:

$$(8) \qquad \pi=\frac{n}{2} \quad \text{con} \quad \nu=n \qquad [\pi=n \quad \text{con} \quad \nu=n] \quad .$$

Gruppo D_{2n}. Il genere minimo per n pari [dispari], dato dai sistemi c_*) o c_{**}) [b) o c_*) o e_*)], vale:

$$(9) \qquad \pi=\frac{n}{2} \quad \text{con} \quad \nu=2\,n \qquad [\pi=n \quad \text{con} \quad \nu=2\,n] \quad .$$

Gruppo T_{12}. Il genere minimo è dato da c_{**}):

$$(10) \qquad \pi=3 \qquad \text{con} \quad \nu=12 \quad .$$

Gruppo O_{24}. Il genere minimo è dato dal campo χ_1:

$$(11) \qquad \pi=3 \qquad \text{con} \quad \nu=24;$$

i due valori immediatamente successivi per il genere π sono dati risp. dal campo χ_2:

$$(12) \qquad \pi=4 \qquad \text{con} \quad \nu=24$$

e da c_{***}) o e_*):

$$(13) \qquad \pi=6 \qquad \text{con} \quad \nu=24.$$

Gruppo I_{60}. Il genere minimo, dato dal campo χ_3, vale:

$$(14) \qquad \pi=6 \qquad \text{con} \quad \nu=60;$$

i valori successivi, dati risp. dai campi χ_4, χ_5 e dal sistema c_{***}) sono:

$$(15) \qquad \pi = 10 \qquad \text{con } \nu = 60$$

$$(16) \qquad \pi = 12 \qquad \text{con } \nu = 60$$

$$(17) \qquad \pi = 15 \qquad \text{con } \nu = 60.$$

La limitazione del teorema I è verificata dai valori di ν e π dati dalle (8), ..., (17), e quindi a maggior ragione dai valori relativi ai campi non presi in considerazione; la limitazione del teorema II è verificata dai campi dati da (8), (9), (10), (13), (17) e, a maggior ragione, da tutti quelli relativi al teorema II.

È ora immediato che la limitazione $\nu \leq 4\,\pi$ del teorema II è la più stretta possibile; essa è infatti verificata col segno di uguaglianza da un campo del tipo seguente, in cui π è arbitrariamente prefissato: $\delta_1 = \pi$, $\delta_2 = 0$, $n = 2\,\pi$ ove si scelga un sistema di coppie c_*) o c_{**}) del gruppo D_{2n} (n pari); il numero delle trasformazioni in sè del campo è $2\,n = 4\,\pi$.

Il campo ora costruito è quasi iperellittico ed è anzi l'unico a verificare l'uguaglianza $\nu = 4\,\pi$, ad eccezione di un numero finito di valori di π. Valgono infatti i seguenti enunciati, di immediata verifica sulla base dei risultati precedenti:

TEOREMA III. — *I campi neutri di genere effettivo nullo e genere virtuale* $\pi > 3$, *diverso da* 6 *e* 15, *i quali ammettono* $4\,\pi$ *trasformazioni birazionali in sè* (identità inclusa) *sono necessariamente quasi iperellittici.*

TEOREMA IV. — *I campi neutri di genere effettivo nullo e genere virtuale* $\pi > 4$, *diverso da* 6, 10, 12, 15, *i quali ammettono almeno* $4\,\pi$ *trasformazioni birazionali in sè, sono necessariamente quasi iperellittici.*

Prima di procedere all'esame dei campi neutri di genere effettivo $p = 1$, soffermiamoci a considerare il grado di generalità dei campi di genere effettivo $p=0$, aventi trasformazioni birazionali in sè, entro la totalità dei campi di genere $p=0$.

Osserviamo preliminarmente che: *comunque si fissino gli interi* δ_1, δ_2, *esiste un campo neutro di caratteri* $p=0$, δ_1, δ_2 *che possiede trasformazioni birazionali in sè.* Basta porre $n=2$ nella (1) e disporre opportunamente degli interi P, Q. Inoltre: *appena sia* $\delta_1+\delta_2>2$, *si può richiedere, in più, che il campo neutro non sia quasi iperellittico.* Basta anche qui porre $n=2$ nella (1) e considerare i campi seguenti:

se $\delta_1 \geqslant 2$		γ_2 o γ_4	con $P \geqslant 1$;
se $\delta_1 = 0, 1$	$(\delta_2 \geqslant 3, 2)$	γ_2 o γ_4	con $R \geqslant 1$.

Si verifica che le coppie neutre dei campi così costruiti non appartengono ad alcuna involuzione, quando siano scelte genericamente.

A noi importa ora sottolineare che i campi che ammettono trasformazioni in sè sono in un certo senso, e di regola, particolari.

A questo scopo chiameremo, con SEVERI ([50], n. 21), *moduli* di un campo neutro di genere effettivo nullo i $2\delta_1+\delta_2-3$ parametri da cui dipende, a meno del riferimento proiettivo, la scelta dei punti che costituiscono le coppie neutre del campo (tali moduli, che sono invarianti proiettivi, risultano nel caso attuale $p=0$ anche invarianti birazionali del campo; e ciò ne giustifica la denominazione). Si badi però a non confonderli con i moduli di un corpo di funzioni quasi abeliane, i quali, per $p=0$, mancano completamente ([50], n. 55).

Ciò premesso ha senso parlare, per valori fissati di δ_1 e δ_2, di campi neutri di caratteri $p=0$, δ_1, δ_2 a *moduli generali.*

Siccome non esistono proiettività che mutano in sè un gruppo generico di più di quattro punti di una retta, quei campi neutri per i quali $2\,\delta_1 + \delta_2 > 4$, aventi trasformazioni birazionali in sè sono certo a moduli particolari.

Quelli invece per cui $2\,\delta_1 + \delta_2 \leqslant 4$ (e $\delta_1 + \delta_2 \geqslant 2$) sono:

χ	$\delta_1 = 0$	$\delta_2 = 2$
ψ_1	1	1
ψ_2	0	3
ψ_3	2	0
ψ_4	1	2
ψ_5	0	4

ed hanno sempre almeno le seguenti trasformazioni in sè: χ, ψ_1, ψ_3 quella generata dalla g^1_2 neutra; ψ_2 le proiettività che permutano le 3 coppie; ψ_4 l'involuzione che scambia i punti della coppia di punti distinti e che permuta le altre due coppie; ψ_5 le involuzioni che scambiano le coppie a due a due.

Concludendo si ha il:

TEOREMA V. — *Campi neutri di genere effettivo nullo e a moduli generali, aventi trasformazioni birazionali in sè, sono soltanto quelli di caratteri*:

$$\pi = 0,\ 1,\ 2$$
$$\pi = 3 \quad , \quad \delta_1 = 0 \quad , \quad \delta_2 = 3$$
$$\pi = 3 \quad , \quad \delta_1 = 1 \quad , \quad \delta_2 = 2$$
$$\pi = 4 \quad , \quad \delta_1 = 0 \quad , \quad \delta_2 = 4$$

Si riconosce pure senza difficoltà che valgono i seguenti

TEOREMA VI. — *Tutti i campi quasi iperellittici di genere effettivo nullo e genere virtuale maggiore di 2 sono a moduli particolari.*

TEOREMA VII. — *Tra i campi di genere effettivo nullo aventi trasformazioni birazionali in sè, solo un numero finito di tipi non dipende da moduli.*

B) *Campi a curva sostegno ellittica.*

Continuando a indicare con ν il numero delle trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro di genere virtuale π, a curva sostegno ellittica, per i risultati del n. 4 sono soddisfatte le seguenti limitazioni:

sostegno a modulo generale	:	$\nu \leq 4\,(\pi - 1)$
sostegno armonico	:	$\nu \leq 8\,(\pi - 1)$
sostegno equianarmonico	:	$\nu \leq 6\,(\pi - 1)$

Nel caso attuale l'analogo del teorema di HURWITZ è il:

TEOREMA VIII. — *Un campo neutro di genere effettivo $p = 1$ e genere virtuale $\pi > 1$ può avere al più $8\,(\pi - 1)$ trasformazioni birazionali in sè.*

Oppure:

TEOREMA IX. — *Un campo neutro di genere effettivo $p = 1$ e genere virtuale $\pi > 1$ costruito sopra una curva sostegno a modulo generale, o armonico, o equianarmonico, può avere al più $4\,(\pi - 1)$, $8\,(\pi - 1)$, $6\,(\pi - 1)$ trasformazioni birazionali in sè rispettivamente.*

Osserviamo che *le limitazioni fornite dai due teoremi precedenti sono raggiunte per infiniti valori di π, come provano i seguenti esempi.*

Nel caso di una curva sostegno a modulo generale, con le notazioni del n. 4, il gruppo G, sia costituito dalle $2\,n^2$ trasformazioni $u' \equiv \pm u + \dfrac{r\,\omega + s\,\omega'}{n}$ $(r, s = 0, 1, \ldots, n - 1;\ n$ pari); le coppie neutre siano $(0, \frac{\omega + \omega'}{2})$ e le sue $\frac{n^2}{2}$ trasformate $(\frac{r'\omega + s\omega'}{n}, \frac{r'\omega + s\omega'}{n} + \frac{\omega + \omega'}{2})$ $(r' = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2} - 1;$ $s = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Risulta $\pi = 1 + \frac{n^2}{2}$, $\nu = 2n^2$ e quindi $\nu = 4(\pi - 1)$.

Nel caso di una curva sostegno armonica, G sia costituito dalle trasformazioni $u' \equiv i^t u + \frac{r\omega + s\omega'}{n}$ $(r, s = 0, 1, \ldots, n - 1;\ t = 0, 1, 2, 3;\ n$ pari); le coppie neutre siano le stesse dell'esempio precedente. Risulta $\pi = 1 + \frac{n^2}{2}$, $\nu = 4n^2 = 8(\pi - 1)$.

Se infine la curva sostegno è equianarmonica, G sia costituito dalle trasformazioni $u' \equiv (-\varepsilon)^t u + \frac{r\omega + s\omega'}{n}$ $(r, s = 0, 1, \ldots, n - 1;\ t = 0, 1, \ldots, 5;\ n$ arbitrario); le n^2 coppie neutre siano $(0, 0)$ e le sue trasformate $\frac{r\omega + s\omega'}{n}$ $(r, s = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Risulta $\pi = 1 + n^2$, $\nu = 6n^2 = 6(\pi - 1)$.

C) *Campi a curva sostegno iperellittica.*

In questo caso la ricerca di una relazione tra ν e π è meno semplice. Si tratta comunque di determinare una funzione $f(\pi)$ in modo che il numero ν delle trasformazioni birazionali in sè di un campo γ a sostegno iperellittico di genere virtuale π soddisfi in ogni caso la limitazione $\nu \leqslant f(\pi)$. Supporremo anzitutto la $f(\pi)$ non decrescente. Se lo fosse in un intervallo (π_1, π_2), basterebbe considerare il minimo valore $\pi_3 > \pi_2$ per cui $f(\pi_3) \geqslant f(\pi_1)$ (si vedrà che un tale valore esiste sempre), e sostituire $f(\pi)$ con $g(\pi)$ così definita: $g(\pi) = f(\pi)$ per $\pi \leqslant \pi_1$, $g(\pi) = f(\pi_1)$ per $\pi_1 \leqslant \pi < \pi_3$, $g(\pi) = f(\pi)$ per $\pi \geqslant \pi_3$.

Ripetendo l'alterazione della $f(\pi)$ in ogni eventuale intervallo di decrescenza, si ottiene alla fine una $g(\pi)$ non decrescente. Il procedimento non altera sostanzìalmente la natura della questione, perchè come si vedrà, l'alterazione riguarda solo i valori bassi di π ($\pi \leqslant 16$) o i valori aventi una certa parità.

Ricerchiamo dunque una limitazione del tipo $\nu \leqslant f(\pi)$, con $f(\pi)$ funzione incognita non decrescente. La determinazione della $f(\pi)$ si farà fissando il gruppo G_ν e alterando il campo γ in un campo γ' di genere $\pi' \leqslant \pi$, più basso possibile, ma curando che il nnovo campo γ' abbia ancora G_ν come gruppo di trasformazioni in sè. Il che non esclude che γ' ammetta nn gruppo $G'_{\nu'}$, più ampio di G_ν; ma ciò non compromette il risultato perchè il campo γ' verrà automaticamente preso in considerazione a partire da G_ν. Se ora per il campo γ' vale la $\nu \leqslant f(\pi')$, facilmente costruibile per la particolarità di γ', dovrà a maggior ragione valere la $\nu \leqslant f(\pi)$.

Nell'alterazione del campo, naturalmente, il genere effettivo p non dovrà scendere al di sotto di 2, e, se si vogliono campi neutri in senso stretto, il nnmero δ delle coppie neutre dovrà essere almeno 1.

Passiamo ora ad applicare il procedimento indicato, avvertendo che continueremo ad usare il simbolismo e le notazioni del n. 5.

Supponiamo in primo luogo che il gruppo G_ν contenga la trasformazione generata dalla g_2^1 esistente sulla curva sostegno. In tal caso il campo γ possiede, con ogni coppia neutra, anche la sua coniugata nella g_2^1.

Passiamo allora da γ a un campo γ' di genere effettivo uguale e genere virtnale non maggiore di quelli di γ, eseguendo, per ciascun tipo di coppie, le seguenti sostituzioni (beninteso quando esistano coppie neutre del rispettivo tipo):

a) alle *due* coppie (A, B), (A^*, B^*) si sostituiscano le *due* coppie (A, A^*), (B, B^*) del tipo b^*);

b') alle *due* coppie (A, A'), (A^*, A'^*) le *due* coppie (A, A^*), (A', A'^*) del tipo b^*);

c') alle *due* coppie (V, W), (V^*, W^*) le *due* coppie (V, V^*), (W, W^*) del tipo c^*);

d) alle *due* coppie (A, A) (A^*, A^*) l'*unica* coppia (A, A^*) del tipo b^*);

e') alle *due* coppie (V, V), (V^*, V^*) l'*unica* coppia (V, V^*) del tipo c^*).

Il campo γ' ammette solo coppie dei tipi b^*, c^*, c^Δ, e^*.

Passiamo da γ' a γ'', di genere effettivo uguale e genere virtuale non maggiore, conservando soltanto una coppia neutra e le sue trasformate in G_ν, e sopprimendo tutte le altre; dato il tipo delle coppie, vuol dire che i corrispondenti punti sulla retta complessa $\mathbf{X}$ costituiscono un solo sistema di intransitività, o al più, soltanto per il tipo c^Δ, due sistemi isomorfi tra loro.

Il campo γ'' contiene coppie di uno solo dei tipi b^*, c^*, c^Δ, e^*.

Passiamo da γ'' a γ''', di genere effettivo uguale e genere virtuale non maggiore, eseguendo, per ciascun tipo di coppie, le operazioni qui sotto indicate, eventualmente l'una di seguito all'altra:

b^*) far tendere $\mathbf{A}$ ad un punto di diramazione Δ o ad un punto unito $\mathbf{V}$; la coppia (A, A^*) diviene del tipo e^*) o c^*);

c^*), e^*) sostituire il sistema delle coppie, ove ciò sia possibile, con quello generato dalla coppia della g^1_2 corrispondente ad un punto di $\mathbf{X}$ unito per il massimo numero di operazioni del gruppo $\mathbf{H}_\mu$; le nuove coppie sono del tipo c^* o e^*, in numero non maggiore di prima;

e^*) se il sistema dei punti di diramazione Δ appartenenti alle coppie neutre si divide in coppie di imprimitività (Δ, Δ'), sostituire le *due* coppie (Δ, Δ), (Δ', Δ') con l'*unica* coppia (Δ, Δ'), del tipo c^Δ).

Il campo γ''' così costruito ha come coppie neutre le trasformate nel gruppo G di *una* coppia di *uno* dei seguenti tipi:

c^{Δ}) (Δ_h, Δ_k), (cfr. n. 5);

c^*) (V, V^*), ove $\mathbf{V}$ è uno dei punti di $\mathbf{X}$ unito per il massimo numero di operazioni di $\mathbf{H}$;

e^*) (Δ, Δ) ove Δ è uno dei punti di $\mathbf{X}$ unito per il massimo numero di operazioni di $\mathbf{H}$, e il sistema da esso generato *non* si divide in coppie di imprimitività.

Passiamo da γ''' a γ^{IV}, di genere effettivo uguale e genere virtuale non maggiore, con una delle seguenti operazioni:

c^{Δ}) siccome il numero dei Δ che fanno parte delle coppie neutre è pari, si sopprimano gli altri Δ; se i primi sono in numero minore di 6 si aggiungano come punti di diramazione uno o più punti di $\mathbf{X}$, insieme con i loro trasformati in $\mathbf{H}$, in modo da ottenere, insieme con i precedenti, il minimo numero pari non inferiore a 6;

c^*), e^*) in luogo dei Δ si assumano come punti di diramazione quelli costituenti uno o più sistemi pari e una o più coppie di sistemi dispari, in modo che il numero totale sia minimo e non inferiore a 6; le coppie possono mutar tipo, ma rimangono sempre di uno dei due tipi c^*), e^*).

In definitiva il campo neutro γ^{IV} è costituito in uno dei due modi seguenti:

1) i punti Δ formano un sistema, mutato in sè dal gruppo $\mathbf{H}_\mu$, contenente un numero pari di punti, minimo e non inferiore a 6; le coppie, di uno dei tipi c^*), e^*), sono le coppie della g_2^1 costituenti in $\mathbf{X}$ un sistema minimo; il sistema delle e^*) non si divide in coppie di imprimitività;

2) i punti Δ sono così divisi: n coppie (Δ_h, Δ'_h) $(h=1, \ldots, n;\ n \geq 1)$ costituenti un sistema pari di cui esse sono coppie di imprimitività, ovvero due sistemi dispari, isomorfi; se $n<3$ altri $2n'$ punti Δ_k $(k=2n+1, \ldots, 2n+2n')$ in modo che $n+n' \geqslant 3$, costituenti sistemi pari e coppie di si-

stemi dispari, il tutto in modo che $2n+2n'$ sia minimo. Le coppie neutre c^{Δ}) sono le (Δ_h, Δ'_h).

Ciò premesso, occorre passare all'esame delle circostanze che si presentano per ogni tipo di gruppo. A questo scopo, fissato il gruppo $\mathbf{H}_\mu$, con riferimento al poliedro che esso muta in sè, indicheremo con:

$\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$ il vertice della piramide e il punto opposto, ovvero i vertici della doppia piramide, risp. per il gruppo ciclico o per quello diedrale;

$\mathbf{V}_i$ i vertici del poliedro regolare o quelli della base della doppia piramide, per i gruppi non ciclici;

$\mathbf{W}_i$ i centri delle facce del poliedro regolare;

$\mathbf{Y}_i$ i punti medi degli spigoli del poliedro regolare ovvero della base della doppia piramide;

$\mathbf{P}_i$, $\mathbf{Q}_i$ punti generici.

Per ciascun gruppo finito ecco allora qui di seguito i possibili sistemi di intransitività (quelli contrassegnati con * si dividono in coppie di imprimitività):

C_n (n dispari):	sistemi	dispari:	$\mathbf{U}_1$; $\mathbf{U}_2$; $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$
C_n (n pari):	»	dispari:	$\mathbf{U}_1$; $\mathbf{U}_2$
	»	pari:	*$\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$
D_{2n} (n dispari):	»	dispari:	$\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$; $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n$
	»	pari:	*$\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$; *$\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{2n}$
D_{2n} (n pari):	»	pari:	*$\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$; *$\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_n$; *$\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n$; *$\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{2n}$
T_{12} :	»	pari:	$\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_4$; $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_4$; *$\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_6$; *$\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{12}$
O_{24} :	»	pari:	*$\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_6$; *$\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_8$; *$\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{12}$; *$\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{24}$
I_{60} :	»	pari:	*$\mathbf{V}_1, \ldots, \mathbf{V}_{12}$; *$\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_{20}$; *$\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_{30}$; *$\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{60}$.

A norma delle precedenti considerazioni di questo n. assegnamo allora per ogni gruppo possibile, i campi γ^{IV}, del tipo 1) e 2), in modo da poter concludere infine con la effettiva determinazione della funzione $f(\pi)$. [Quando le condizioni richieste sono soddisfatte da più campi di ugual genere virtuale, ne viene indicato uno solo; è segnato con ** uno dei campi che, per ogni $\mathbf{H}$ dà il valore minimo di π].

C_3

1) Δ: $\mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{P}_3\ \mathbf{Q}_1\ \mathbf{Q}_2\ \mathbf{Q}_3$; c^*: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1{}^*)$
$**p=2,\ \delta=1,\ \pi=3,\ \nu=6$

2) Δ: $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{P}_3\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_3$; c^Δ: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2)$
$p=3;\ \delta=1;\ \pi=4;\ \nu=6$

C_n $\left(\begin{smallmatrix} n\geqslant 5 \\ \text{dispari}\end{smallmatrix}\right)$

1) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_n$; c^*: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1{}^*)$
$**p=(n-1)/2;\ \delta=1;\ \pi=1+(n-1)/2;\ \nu=2n$

2) Δ: $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2\mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_n\mathbf{Q}_1\ldots\mathbf{Q}_n$; c^Δ: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2)$
$p=n;\ \delta=1;\ \pi=n+1;\ \nu=2n$

C_2

1) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{Q}_1\ \mathbf{Q}_2$; c^*: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1{}^*)$
$**p=2;\ \delta=1;\ \pi=3;\ \nu=4$

2) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \mathbf{P}_1\ \mathbf{P}_2\ \mathbf{Q}_1\ \mathbf{Q}_2$; c^Δ: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2)$
$p=2;\ \delta=1;\ \pi=3;\ \nu=4$

C_4

1) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_4$; c^*: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1{}^*)$
$**p=2;\ \delta=1;\ \pi=3;\ \nu=8$

2) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \mathbf{P}_1\ldots\mathbf{P}_4$; c^Δ: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2)$
$p=2;\ \delta=1;\ \pi=3;\ \nu=8$

C_n $\left(\begin{smallmatrix} n\geqslant 6 \\ \text{pari}\end{smallmatrix}\right)$

1) Δ: $\mathbf{P}_1\ \ldots\ \mathbf{P}_n$; c^*: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_1{}^*)$
$**p=(n/2)-1;\ \delta=1;\ \pi=n/2;\ \nu=2n$

2) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \mathbf{P}_1\ \ldots\ \mathbf{P}_n$; c^Δ: $(\mathbf{U}_1,\ \mathbf{U}_2)$
$p=n/2;\ \delta=1;\ \pi=(n/2)+1;\ \nu=2n$

D_{2n} $\binom{n \geqslant 3}{\text{dispari}}$ 1) $\Delta : \mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{2n}$; c^*: $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1^*)$, $(\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_2^*)$
$^{**}p = n - 1$; $\delta = 2$; $\pi = n + 1$; $\nu = 4n$

2) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \mathbf{P}_1 \ldots \mathbf{P}_{2n}$; c^Δ: $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$
$p = n$; $\delta = 1$; $\pi = n + 1$; $\nu = 4n$

$D_{2.2}$ 2) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \mathbf{V}_1\ \mathbf{V}_2\ \mathbf{Y}_1\ \mathbf{Y}_2$; c^Δ: $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$
$^{**}p = 2$; $\delta = 1$; $\pi = 3$; $\nu = 8$

$D_{2.4}$ 2) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \mathbf{V}_1 \ldots \mathbf{V}_4$; c^Δ: $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$
$^{**}p = 2$; $\delta = 1$; $\pi = 3$; $\nu = 16$

D_{2n} $\binom{n \geqslant 6}{\text{pari}}$ 1) Δ: $\mathbf{V}_1 \ldots \mathbf{V}_n$; c^*: $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1^*)$, $(\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_2^*)$
$p = (n/2) - 1$; $\delta = 2$; $\pi = (n/2) + 1$; $\nu = 4n$

2) Δ: $\mathbf{U}_1\ \mathbf{U}_2\ \mathbf{V}_1 \ldots \mathbf{V}_n$; c^Δ: $(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)$
$^{**}p = n/2$; $\delta = 1$; $\pi = (n/2) + 1$; $\nu = 4n$

T_{12} 1) Δ: $\mathbf{Y}_1 \ldots \mathbf{Y}_6$; c^*: $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_1^*)$, $\ldots$, $(\mathbf{V}_4, \mathbf{V}_4^*)$
$p = 2$; $\delta = 4$; $\pi = 6$; $\nu = 24$

2) Δ: $\mathbf{Y}_1 \ldots \mathbf{Y}_6$; c^Δ: $(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_4)$, $(\mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_5)$, $(\mathbf{Y}_3, \mathbf{Y}_6)$
$^{**}p = 2$; $\delta = 3$; $\pi = 5$; $\nu = 24$

O_{24} 2) Δ: $\mathbf{V}_1 \ldots \mathbf{V}_6$; c^Δ: $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_4)$, $(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_5)$, $(\mathbf{V}_3, \mathbf{V}_6)$
$^{**}p = 2$; $\delta = 3$; $\pi = 5$; $\nu = 48$

I_{60} 2) Δ: $\mathbf{V}_1 \ldots \mathbf{V}_{12}$; c^Δ: $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_7), (\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_8), \ldots, (\mathbf{V}_6, \mathbf{V}_{12})$
$^{**}p = 5$; $\delta = 6$; $\pi = 11$; $\nu = 120$.

Quanto detto finora vale nell'ipotesi fatta che il gruppo G_ν di trasformazioni che muta in sè il campo neutro γ contenga la g_2^1: ebbene l'altra ipotesi si riconduce facilmente alla prima.

Supposto infatti che G_ν non contenga la g_2^1, il gruppo generato sulla curva sostegno da G_ν e dalla g_2^1 è un $\bar{G}_{\bar{\nu}}$, con

$\bar{\nu}=2\nu$, che subordina sulla retta **X** lo stesso gruppo **H**. A noi basterà dimostrare che esiste un campo $\bar{\gamma}$, di genere $\bar{\pi}\leq\pi$, che ammette $\overline{G}_{\bar{\nu}}$ come gruppo totale di trasformazioni in sè; si avrà infatti, essendo $f(\pi)$ non decrescente:

$$\nu=\bar{\nu}/2\leqslant\bar{\nu}\leqslant f(\bar{\pi})\leqslant f(\pi).$$

Lo scopo si raggiunge al modo seguente: nel campo γ di partenza si consideri una coppia neutra e le sue trasformate in G_ν, e si sopprimano le altre; si ottiene un campo γ' di genere $\pi'\leqslant\pi$; ν non aumenta ovvero, se G_ν si amplia, o vale l'osservazione fatta all'inizio di *C*) in questo n., o $\gamma'=\bar{\gamma}$. Altrimenti a partire da γ' si ottiene $\bar{\gamma}$ con le seguenti operazioni:

a) nella coppia (A, B) si faccia tendere B ad A^*, ottenendo così una coppia b^*);

b') si faccia tendere **A** ad uno, **V**, dei punti uniti dell'involuzione subordinata su **X** da quella a cui appartiene la coppia (A, A'); si ottiene una coppia c^*) o e^*);

c') in luogo della coppia (V, W) si prenda la coppia (V, V^*) del tipo c^*); ciò non aumenta π, perchè la seconda coppia è unita per lo stesso numero di trasformazioni che la prima;

d) la (A, A) si faccia tendere ad una coppia (V, V) o (Δ, Δ) dei tipi e'), e^*);

e') la (V, V) si sostituisca con (V, V^*), del tipo c^*), che ha lo stesso numero di trasformate.

Dopo ciò, il campo $\bar{\gamma}$ contiene solo coppie b^*), c^*), c^Δ), e^*) e la g_2^1 lo muta in sè.

Siamo infine in grado di concludere con il seguente teorema, con riguardo a quanto detto in precedenza e ricordando che i campi contrassegnati con ** nella precedente tabella sod-

P. I, n. 6

disfano la limitazione $\nu \leq f(\pi)$, ove la funzione $f(\pi)$ è appunto quella qui appresso definita.

TEOREMA X. — *Un campo neutro in senso stretto* ($\delta > 0$), *costruito sopra una curva iperellittica, possiede al più* $\mathrm{f}(\pi)$ *trasformazioni birazionali in sè, ove la funzione* $\mathrm{f}(\pi)$ *è così definita*:

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} \pi = & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & \geqslant 16 \\ f(\pi) = & 16, & 24, & 48, & 48, & 48, & 56, & 64, & 72, & 120, & 120, & 120, & 120, & 120, & 8(\pi-1). \end{array}$$

Osserviamo che *la limitazione fornita dal teorema è la più stretta possibile, almeno per* $\pi \geqslant 16$, *compatibilmente con il tipo di espressione analitica*; esistono infatti infiniti valori di π per cui essa è raggiunta: si osservi il caso D_{2n}, 2), con n pari $\geqslant 30$, nella precedente tabella.

Riunendo i risultati di tutto il presente n. possiamo anche enunciare il:

TEOREMA XI. — *Un campo neutro in senso stretto* ($\delta > 0$), *costruito sopra una curva razionale, o ellittica, o iperellittica, avente genere virtuale* $\pi > 1$ *e diverso dal campo* χ *di caratteri* $p = \delta_1 = 0$, $\pi = \delta_2 = 2$, *possiede al più* $f_1(\pi)$ *trasformazioni birazionali in sè, ove* $\mathrm{f}_1(\pi)$ *è così definita*:

$$\begin{array}{rccccccccccccccc} \pi = & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & 12, & 13, & 14, & 15, & \geqslant 16 \\ f_1(\pi) = & 8, & 24, & 24, & 48, & 60, & 48, & 56, & 64, & 72, & 120, & 120, & 120, & 120, & 120, & 8(\pi-1) \end{array}$$

ed esistono infiniti valori di π *per i quali la limitazione è raggiunta.*

* * *

Dobbiamo ora occuparci della relazione intercedente tra il periodo delle trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro γ e il genere virtuale π di γ, per estendere ai campi neutri un altro classico teorema di HURWITZ ([1]) secondo il quale il periodo di una trasformazione in sè di una curva di genere $p(>1)$ non supera $10\ (p-1)$.

Si comprende che, volendo procedere in analogia con quanto fatto finora, si incontreranno difficoltà del tutto analoghe a quelle incontrate studiando la limitazione per il numero delle trasformazioni, anzichè per il loro periodo; e i mezzi per superarle saranno gli stessi, anzi le tabelle sopra costruite sono già quelle che servono a percorrere l'analogo cammino.

Per questo non ci attardiamo nelle dimostrazioni, che il lettore potrà, ove occorra, ricostruire o trovare nei lavori già citati [5] e [7] di BENEDICTY. Enunciamo quindi senz'altro i risultati:

TEOREMA XII. — *Il periodo di una trasformazione birazionale in sè di un campo neutro di genere effettivo nullo e genere virtuale* $\pi>1$, *diverso dal campo* χ *di caratteri* $p=\delta_1=0$, $\pi=\delta_2=2$, *non supera* 2π.

TEOREMA XIII. — *Sopra un campo neutro di genere effettivo* 1 *e genere virtuale* $\pi>1$ *una trasformazione birazionale ha periodo non superiore al massimo tra* 6 *e* $2\,(\pi-1)$*; se il sostegno è armonico o generale il periodo non è superiore al massimo tra* 4 *e* $2\,(\pi-1)$, *o rispettivamente a* $2\,(\pi-1)$. *Esistono infiniti valori di* π *per i quali le limitazioni sono raggiunte.*

TEOREMA XIV. — *Sopra un campo neutro di genere virtuale* π *a sostegno iperellittico, il periodo di una trasformazione birazionale non supera* $4\,\pi-2$, *ed esistono infiniti valori di* π *per i quali la limitazione è raggiunta.*

E infine:

TEOREMA XV. — *Il periodo di una trasformazione birazionale in sè di un campo neutro di genere virtuale* $\pi>1$, *costruito*

([1]) Cfr. la memoria [32].

sopra una curva razionale, o ellittica, o iperellittica, e diverso dal campo χ, *non supera* $4\pi - 2$.

7. Un'estensione della nozione di campo neutro

In questo n. prendiamo in esame un problema della teoria dei campi neutri che non è direttamente collegato con le questioni precedentemente trattate. Mentre queste infatti, come tutta la teoria delle serie lineari neutre di Severi, si svolgono nell'ambito di campi neutri relativi a curve algebriche definite sul campo complesso, acceniamo qui alla possibilità di estendere le definizioni ed alcune proprietà dei campi neutri e delle relative serie lineari neutre al caso di curve algebriche costruite sopra un campo base arbitrario.

L'estensione, dovuta a M. Benedicty (cfr. [11], [16]), viene fatta introducendo una conveniente nozione di *equivalenza* nell'ambito della geometria sopra una curva relativa a un campo base arbitrario, secondo l'indirizzo di C. Chevalley. Essa da un canto si presenta come una generalizzazione della nozione di equivalenza secondo Chevalley, e d'altro canto, quando il campo base si riduce al campo complesso, si riduce alla nozione di equivalenza lineare neutra di Severi (1).

Ricordiamo che la costruzione della geometria sopra una curva nell'indirizzo di Chevalley ha come punto di partenza non una curva algebrica immersa in uno spazio proiettivo, ma invece il campo delle funzioni algebriche in una indeterminata associato alla curva stessa; e lo sviluppo della teoria avviene anzichè considerando la curva invariantivamente, cioè a meno di trasformazioni birazionali, considerando invece il campo di funzioni algebriche a meno di isomorfismi e, naturalmente, procedendo con mezzi puramente algebrici.

---

(1) Per l'esatta comprensione di questo n. il lettore tenga presenti i lineamenti fondamentali della teoria di Chevalley, che si trovano, per es., nei primi due capitoli del suo volume [18].

Cominciamo col richiamare alcune nozioni fondamentali e con l'introdurre le relative notazioni.

Sia K un campo arbitrariamente prefissato, che assumiamo come *campo base*, e sia R un *campo di funzioni algebriche in una indeterminata sopra* K. Per definizione, R è un sopracampo di K soddisfacente le due condizioni seguenti:

a) esiste in R un elemento y trascendente sopra K;

b) R è un ampliamento algebrico di grado finito di $K(y)$.

In particolare R ha grado di trascendenza 1 sopra K. Gli elementi di R si chiamano le *funzioni algebriche*; quei particolari elementi di R che sono algebrici sopra K si dicono le *costanti*, e formano un campo K', il quale non è altro che la chiusura algebrica di K in R. Si ha ovviamente:

$$K \subseteq K' \subset R$$

Indichiamo con:

R_p l'anello di valutazione relativo al posto $\mathfrak{p}$;

$\mathfrak{p}$ il posto (= ideale delle non unità di R_p);

$\nu_p(x)$ la valutazione determinata dal posto $\mathfrak{p}$ (per un dato posto $\mathfrak{p}$, $\nu_p(x)$ è una funzione dell'elemento x variabile in R, avente valori interi se $x \neq 0$, e $\nu_p(0) = \infty$. $\nu_p(x)$ si dice anche l'*ordine* di x nel posto $\mathfrak{p}$).

Se si suppone nota la valutazione $\nu_p(x)$, risulta:

$$R_p = \{ x \in R \mid \nu_p(x) \geq 0 \}$$
$$\mathfrak{p} = \{ x \in R \mid \nu_p(x) > 0 \} .$$

Sia inoltre:

$\mathfrak{A} = \Pi_p\, \mathfrak{p}^{\nu_p(\mathfrak{a})}$ un divisore di R (per un dato divisore, $\nu_p(\mathfrak{A})$ è una funzione del posto $\mathfrak{p}$ avente valori interi, e diversi da zero soltanto per un numero finito di posti);

$\mathfrak{D}(x) = \Pi_p\, \mathfrak{p}^{\nu_p(x)}$ il divisore di x (essendo x una qualunque funzione $\neq 0$ di R);

$d(\mathfrak{p})$ il grado del posto $\mathfrak{p}$ (il campo residuo del posto $\mathfrak{p}$, cioè $R_p/\mathfrak{p}$, è un ampliamento algebrico di grado finito del campo delle costanti; questo grado si assume come grado $d(\mathfrak{p})$ del posto);

$d(\mathfrak{A}) = \Sigma_p d(\mathfrak{p})\ \nu_p(\mathfrak{A})$ il grado del divisore $\mathfrak{A}$.

Ciò premesso consideriamo un sottoanello $\mathfrak{o}$ del campo R, contenente il campo base K, ma non contenuto nel campo delle costanti K'; supponiamo inoltre che il campo quoziente H di $\mathfrak{o}$ coincida con R. Quest'ultima ipotesi non è sostanzialmente restrittiva perchè, se H fosse propriamente contenuto in R, dal fatto che $\mathfrak{o}$ non è contenuto in K' seguirebbe che H è un campo di funzioni algebriche sopra K, ed R sarebbe un ampliamento di H. Si potrebbe allora riferire ad H le considerazioni seguenti, ed applicare successivamente la teoria dell'ampliamento di un campo di funzioni (cfr. [18], [37]). Supponiamo dunque senz'altro:

$$K \subset \mathfrak{o} \subseteq R \quad , \quad \mathfrak{o} \not\subseteq K'$$

Fissato l'anello $\mathfrak{o}$, qualunque sia il divisore $\mathfrak{A}$, poniamo:

$$\mathfrak{L}_o(\mathfrak{A}) = \{ x \in \mathfrak{o} \mid \nu_p(x) \geqslant -\nu_p(\mathfrak{A}) \} \quad ,$$

L'insieme $\mathfrak{L}_o(\mathfrak{A})$ così definito è uno spazio vettoriale sul campo K. Se $\mathfrak{o}'$ è un altro anello soddisfacente alle stesse condizioni di $\mathfrak{o}$, e se inoltre $\mathfrak{o} \subseteq \mathfrak{o}'$ risulta:

$$\mathfrak{L}_o(\mathfrak{A}) = \mathfrak{o} \cap \mathfrak{L}_{o'}(\mathfrak{A}) \quad \subseteq \mathfrak{L}_{o'}(\mathfrak{A}) \quad .$$

La dimensione $r_o(\mathfrak{A})$ dello spazio $\mathfrak{L}_o(\mathfrak{A})$ è poi finita perchè è finita la dimensione $r_R(\mathfrak{A})$ dello spazio $\mathfrak{L}_R(\mathfrak{A})$.

Relativamente al prefissato anello $\mathfrak{o}$ introduciamo ora una relazione binaria (relazione di equivalenza generalizzata) tra le coppie di divisori del campo R, dicendo che per due divisori $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ sussiste la detta relazione, e scriveremo:

$$\mathfrak{A} \xrightarrow{o} \mathfrak{B}$$

se e soltanto se esiste un elemento x di o tale che:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{D}(x)$$

La relazione $\xrightarrow{o}$ è riflessiva e transitiva; è inoltre simmetrisa se $o = R$.

Si riconosce facilmente che la relazione introdotta soddisfa le proprietà seguenti:

se $\mathfrak{A} \xrightarrow{o} \mathfrak{B}$, allora $\mathfrak{A} \xrightarrow{R} \mathfrak{B}$, $r_o(\mathfrak{A}) \geqslant r_o(\mathfrak{B})$;
se $\mathfrak{A} \xrightarrow{R} \mathfrak{B}$, allora $d(\mathfrak{A}) = d(\mathfrak{B})$, $r_R(\mathfrak{A}) = r_R(\mathfrak{B})$;
inoltre $r_o(\mathfrak{A}) \leqslant r_R(\mathfrak{A})$.

Osserviamo ora che la relazione di equivalenza introdotta tra i divisori si presenta come una generalizzazione di altre precedentemente note, che riportiamo qui di seguito, tra le quali ci interessa in modo particolare la seconda.

1) Se K è il campo complesso, sia C la curva irriducibile, pensata invariantivamente, della quale R è il campo delle funzioni razionali. Se si assume $o = R$, la relazione introdotta si riduce a quella classica di equivalenza lineare tra gruppi di punti sopra la curva C.

2) Se K è il campo complesso, sia C la curva irriducibile definita come sopra. Fissiamo sulla curva C δ_1 coppie di punti distinti (A_i, B_i) $(i = 1, \ldots, \delta_1)$ e δ_2 coppie di punti coincidenti (A_j, A_j) $(j = \delta_1 + 1, \ldots, \delta_1 + \delta_2 = \delta)$, in modo che i punti A_i, B_i, A_j siano tutti distinti tra loro. Consideriamo, entro il

campo delle funzioni razionali sulla curva C, l'anello delle funzioni ciascuna delle quali:

a) non ha poli nei punti A_i, B_i, A_j;

b) assume valori uguali in A_i e B_i;

c) togliendo ad essa il valore che assume in A_j si ottiene una funzione che ha uno zero almeno del secondo ordine in A_j.

L'anello costruito soddisfa alle condizioni richieste in generale per l'anello $\mathfrak{o}$, e la equivalenza costruita a partire da esso dà luogo alla *equivalenza lineare neutra* e alla teoria delle *serie lineari neutre* di SEVERI.

3) Se K è un campo base arbitrario, e si assume $\mathfrak{o} = R$, si ottiene la teoria classica della equivalenza tra divisori dello CHEVALLEY (cfr. [18]).

4) Se K è un campo base arbitrario, e si assume come anello $\mathfrak{o}$ un *anello semilocale* cioè, nel nostro caso, un anello contenuto soltanto in un numero finito di anelli di valutazione, si ottiene la teoria di M. ROSENLICHT (cfr. [37]), che a sua volta è una estensione delle teorie precedenti 1), 2), 3).

L'interesse della generalizzazione della nozione di equivalenza data da BENEDICTY, come del resto di quella data da ROSENLICHT (cfr. [37]), risiede nella possibilità di dimostrare per essa il teorema di RIEMANN (in varie forme generalizzate) e di stabilire quindi l'esistenza del *genere* per il campo R (si tratta naturalmente di un « genere » relativo all'anello $\mathfrak{o}$, ovvero di un $\mathfrak{o}$-*genere*, ottenendosi il genere del campo R secondo CHEVALLEY quando $\mathfrak{o} = R$), e di introdurre la nozione di indice di specialità ecc., fino a dimostrare il teorema di RIEMANN-ROCH, che si può mettere sotto diverse forme generalizzate.

Entriamo in un interessante ordine di questioni, che esulano però dai compiti che ci siamo proposti in questo n.; rinviamo quindi il lettore alle memorie [16], [17], [37].

Parte seconda

TEORIA ARITMETICA DELLE FUNZIONI QUASI ABELIANE

8. Premessa. Relazioni di Hurwitz-Conforto di una matrice quasi abeliana.

Consideriamo una matrice quasi abeliana ω, cioè (cfr. [50]) una qualunque matrice a π righe e $\pi' < 2\pi$ colonne, la quale si possa assumere come matrice dei periodi primitivi di un corpo K di funzioni quasi abeliane di π variabili, che indicheremo con $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ (o anche con una matrice u a π righe e a una sola colonna).

La varietà quasi abeliana di Picard V_π associata a K è una varietà algebrica, determinata a meno di trasformazioni birazionali, i cui punti sono in corrispondenza generalmente biunivoca con il prisma dei periodi. Su di essa le variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ divengono integrali semplici linearmente indipendenti, da considerare come virtualmente di prima specie. Ad un gruppo generico di valori $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ corrisponde allora sulla V_π un punto P, che indicheremo con $P(u)$, in cui gli integrali anzidetti assumono tali valori; inversamente ad un punto generico di V_π corrisponde un gruppo di valori $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ e tutti quelli ad esso congrui modulo ω.

Sulla varietà V_π si possono definire ([50], n. 32), come nel caso classico, le trasformazioni di prima e di seconda specie, rappresentate rispettivamente dalle formule:

$$u' \equiv -u + a \qquad (\mathrm{mod}\ \omega) \tag{18}$$

$$u' \equiv u + b \qquad (\mathrm{mod}\ \omega) \tag{19}$$

ove a e b rappresentano matrici complesse a π righe e una colonna. Fissata a o b le (18) o (19) definiscono una corrispondenza analitica generalmente biunivoca tra i punti della V_π, rappresentata analiticamente da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie di V_π. Al variare di a, b si ottengono ∞^π trasformazioni delle due specie. Messe a confronto con le analoghe trasformazioni relative al caso di una varietà abeliana di PICARD, le (18), (19) presentano una prima analogia, perchè sono anch'esse trasformazioni birazionali; ma presentano anche una diversità fondamentale, quella che il gruppo da esse formato opera su V_π in modo *generalmente* transitivo, e non assolutamente transitivo come accade per il caso abeliano.

Si pone quindi, con CONFORTO, il problema di *determinare e studiare tutte le trasformazioni analitiche e biunivoche di una varietà quasi abeliana di* PICARD V_π *in sè, le quali, come le* (18) *e* (19), *siano rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie della* V_π. Tali trasformazioni si diranno anche trasformazioni di CONFORTO.

Osserviamo anzitutto che, nel caso abeliano, il problema analogo a quello or ora enunciato acquista immediatamente un aspetto *aritmetico,* conducendo, dal punto di vista analitico, alla considerazione delle cosiddette *relazioni di Hurwitz* a cui soddisfa la matrice di RIEMANN relativa alla varietà considerata, ovvero, secondo la veduta geometrica di SCORZA, alla ricerca delle *omografie* in sè della nominata matrice di RIEMANN. Ora in generale una matrice di RIEMANN non ammette omografie in sè distinte dall'identità e in conseguenza una varietà di PICARD a *moduli generali* non ha trasformazioni birazionali in sè oltre quelle di prima e di seconda specie. Per moduli particolari tuttavia la varietà di PICARD può acquistare altre trasformazioni rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali di prima specie, che sono distinte dalle trasformazioni di prima e di seconda specie; esse risultano però sempre *birazionali* e si distribuiscono in schiere ∞^{π}, la totalità di tali schiere venendo a dipendere da parametri variabili in modo *discreto*.

Nel caso quasi abeliano il problema proposto, come vedremo in seguito, presenta ancora un aspetto aritmetico poichè conduce alla considerazione di relazioni di HURWITZ generalizzate: le *relazioni di Hurwitz-Conforto*; ciò non esclude però il verificarsi di circostanze completamente nuove: in primo luogo può accadere che, oltre alle trasformazioni ordinarie (18), (19) si presentino *sempre*, e non soltanto per moduli particolari, anche altre trasformazioni le quali si distribuiscono in schiere ∞^{π}; in secondo luogo queste trasformazioni straordinarie possono essere *non birazionali*, pur rimanendo ovviamente analitiche. I casi in cui si presentano trasformazioni straordinarie e le relative modalità sono stati nettamente caratterizzati nelle ricerche di CONFORTO, come risulterà dal seguito.

La differenza più profonda tra il caso in esame e il caso classico sembra risiedere, allo stato attuale delle indagini, nel fatto che per il problema enunciato l'aspetto *aritmetico* e quello *funzionale* sono inscindibilmente legati l'un l'altro nel caso quasi abeliano mentre nel caso classico abeliano l'aspetto funzionale è, per così dire, assorbito in quello aritmetico.

Per comprendere il senso di questa affermazione si rifletta che mentre una matrice di RIEMANN ω *individua* un corpo di funzioni abeliane, come il corpo costituito da *tutte* le funzioni meromorfe con la matrice di periodi primitivi ω, avviene invece che vi possono essere *più* corpi di funzioni quasi abeliane con la *stessa* matrice ω di periodi primitivi, tutti contenuti nel corpo più ampio di tutte le funzioni meromorfe con la matrice di periodi ω. Da ciò segue che, mentre nel caso abeliano le proprietà aritmetiche della matrice ω si riflettono *univocamente* in campo funzionale, può invece a priori avvenire nel caso quasi abeliano — e di fatto avviene — che una proprietà aritmetica della ω si interpreti *in modo diverso* in rapporto ai diversi corpi quasi abeliani con la matrice di periodi ω. Mentre perciò la teoria delle matrici di RIEMANN può essere sviluppata, come ad es. avviene nelle classiche memorie di SCORZA, lasciando completamente da parte l'aspetto funzionale senza affatto menomarne il contenuto, occorre invece sempre tener presente l'aspetto funzionale nel caso quasi abeliano, giacchè esso non è assorbito in quello aritmetico.

Sembra dunque lecito affermare che la *teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane* è destinata ad assumere un'ampiezza forse anche maggiore della corrispondente teoria abeliana, senza comunque ridursi affatto ad nna ovvia generalizzazione di questa.

I risultati sopra ricordati sono frutto delle ricerche di CONFORTO, nelle quali egli è venuto edificando la prima base della teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane. Riservando gli ulteriori sviluppi della teoria alla parte seguente della nostra trattazione, cominciamo, nel prossimo n., con l'approfondire lo studio delle relazioni di HURWITZ-CONFORTO di una matrice quasi abeliana.

Come si perviene a dette relazioni?

Accenniamo alla dimostrazione molto in breve, anche perchè il ragionamento è sostanzialmente quello classico di HURWITZ relativo al caso abeliano.

Suppongasi che sulla varietà quasi abeliana V_π sia data una trasformazione T (anche soltanto) *univoca* rappresentata da una congruenza lineare tra gli integrali virtualmente di prima specie del tipo:

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \qquad (\text{mod } \omega) \tag{20}$$

ove $\Lambda^{(\pi,\pi)}$ è una matrice quadrata di ordine π e $\lambda^{(\pi,1)}$ è una matrice a π righe e 1 colonna, entrambe ad elementi complessi, mentre u, u' sono matrici a π righe e 1 colonna aventi per elementi rispettivi $u_1, \ldots, u_\pi$ e $u'_1, \ldots, u'_\pi$.

Con opportuna scelta delle determinazioni degli integrali $u_1, \ldots, u_\pi$, la (20) potrà scriversi come uguaglianza:

$$u' = \Lambda u + \lambda \tag{21}$$

e allora partendo da un generico punto P della V_π, in cui gli integrali assumano i valori u, la (21) fornirà i valori u' i quali, tramite il teorema di inversione, determineranno il punto P' corrispondente di P.

Sia ora γ un ciclo di V_π lungo il quale gli integrali u ricevano come incremento un periodo $\omega_1^{(\pi,1)}$ rappresentato da una colonna della matrice quasi abeliana $\omega^{(\pi,\pi')}$. Facendo descrivere a P il ciclo γ, il secondo membro della (21) subisce l'incremento $\Lambda\omega_1$, mentre il punto corrispondente P' descrive un ciclo γ' lungo il quale i valori u' subiranno l'incremento di un periodo ωa (ove la matrice $a^{(\pi',1)}$ è formata di interi); si ottiene per confronto $\Lambda\omega_1 = \omega a$. Facendo percorrere ad ω_1 tutte le π' colonne della matrice ω si perviene in definitiva alla seguente relazione tra matrici:

$$\Lambda\omega = \omega I$$

ove $\omega^{(\pi,\pi')}$ è la matrice quasi abeliana, $\Lambda^{(\pi,\pi)}$ è la matrice che compare nelle equazioni della trasformazione (20) e $I^{(\pi',\pi')}$ è una matrice intera. La relazione $\Lambda\omega = \omega I$, evidente generalizzazione della relazione di HURWITZ classica, stabilisce una condizione necessaria (e sufficiente) per l'esistenza di una trasformazione univoca T; tale esistenza implica dunque l'esistenza di una matrice intera I, oltrechè della Λ, legata alla Λ e alla ω dalla relazione anzidetta.

È la presenza della matrice I ad elementi *interi* che segna l'aspetto aritmetico del problema di determinare le trasformazioni T.

9. Proprietà aritmetiche delle relazioni di Hurwitz-Conforto di una matrice quasi abeliana

Dicesi relazione di Hurwitz-Conforto relativa alla matrice quasi abeliana $\omega^{(\pi,\pi')}$ ogni relazione del tipo:

$$\Lambda\omega = \omega I \tag{22}$$

nella quale Λ è una matrice quadrata di ordine π ad elementi complessi, ed I è intera di ordine π'.

Nel caso abeliano è ben noto che (cfr. ad es. [30]): la Λ e la I si individuano reciprocamente; per moduli generici la I non può essere che proporzionale alla matrice unitaria del suo ordine $I = kU$; per moduli particolari, quando accade che sia $I \neq kU$, la I non può però mai essere data ad arbitrio.

In questo n. daremo risposta agli analoghi interrogativi nel caso quasi abeliano, *mostrando che la* Λ *individua sempre la* I, *e determinando le condizioni necessarie e sufficienti perchè* I *individui* Λ *e perchè la* I *possa darsi ad arbitrio.* Studieremo inoltre il problema di *determinare tutte le* Λ *che, insieme con una data* I, *possono comparire nella* (22), naturalmente per una ω assegnata. In questo n. la trattazione avrà un carattere esclusivamente aritmetico; i prossimi n. saranno invece dedicati all'aspetto geometrico e funzionale delle relazioni di Hurwitz-Conforto di una matrice quasi abeliana.

Osserviamo preliminarmente che i problemi di determinare tutte le relazioni di Hurwitz-Conforto relative a due matrici quasi abeliane *equivalenti* coincidono. Ove naturalmente s'intenda per *equivalenza* (cfr. [50], n. 48) tra due matrici quasi abeliane ω, ω' con gli stessi caratteri, la relazione espressa dalla

$$\omega' = \alpha \omega A$$

con α matrice quadrata di ordine π, ad elementi complessi e non singolare, ed A matrice di ordine π' unimodulare (ad elementi interi e con determinante ± 1). Infatti da una relazione di HURWITZ-CONFORTO relativa alla ω se ne deduce subito una per la ω' e viceversa. Inoltre due distinte relazioni per la ω danno luogo a due relazioni distinte per la ω' talchè vi è corrispondenza biunivoca tra le relazioni di HURWITZ-CONFORTO relative a due matrici equivalenti. La facile dimostrazione di queste circostanze (cfr. ad es. [22]) è identica a quella che si ha nel caso abeliano.

Ciò premesso, ci limiteremo allo studio delle relazioni di HURWITZ-CONFORTO di una matrice quasi abeliana data nella forma normale di SEVERI ([50], n. 28):

$$(23) \qquad \omega = \left\| \begin{matrix} A^{(p,p)} & \Omega^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ O^{(\delta_1,p)} & \Omega_1^{(\delta_1,p)} & B^{(\delta_1,\delta_1)} \\ O^{(\delta_2,p)} & \Omega_2^{(\delta_2,p)} & O^{(\delta_2,\delta_1)} \end{matrix} \right\|$$

ove le matrici parziali hanno il numero di righe e di colonne indicati, talchè la ω ha $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ righe e $\pi' = 2p + \delta_1$ colonne. Ricordiamo che nella (23) la $\|A\ \Omega\|$ è una matrice di RIEMANN normale di genere p, cioè A è diagonale del tipo:

$$(24) \qquad A^{(p,p)} = \left\| \begin{matrix} \frac{2\pi i}{d_1} & & & \\ & \frac{2\pi i}{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2\pi i}{d_p} \end{matrix} \right\|$$

($d_1, \ldots, d_p$ sono i divisori elementari, tali che $d_1 = 1$ e d_i ($i = 2, \ldots, p$) è multiplo di d_{i-1}), mentre Ω è una matrice simmetrica la cui parte reale è matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita negativa; B è una matrice diagonale con gli elementi sulla diagonale principale tutti uguali a $2\pi i$; Ω_1 è una matrice ad elementi arbitrari; Ω_2 si può supporre che abbia la forma

$$(25) \qquad \Omega_2^{(\delta_2, p)} = \left\| \begin{matrix} C^{(\varrho,\varrho)} & \Omega'^{(\varrho, p-\varrho)}_2 \\ O^{(\delta_2-\varrho,\varrho)} & O^{(\delta_2-\varrho, p-\varrho)} \end{matrix} \right\|$$

dove C è diagonale con gli elementi sulla diagonale principale uguali a $2\pi i$, mentre Ω'_2 è arbitraria. L'intero ρ è la caratteristica di Ω_2, talchè risulta:

$$(26) \qquad \rho \leq p \quad , \quad \rho \leq \delta_2$$

Fissati i caratteri p, δ_1, δ_2, ρ e i divisori elementari, la ω data dalla (23) descrive un continuo, in dipendenza da

$$\nu = \frac{p\,(p+1)}{2} + p\,\delta_1 + \rho\,(p - \rho)$$

moduli indipendenti (cfr. [50], n. 55).

A) *La matrice* Λ *individua la matrice* I.

Cominciamo col dimostrare che, in una relazione (22), *la matrice* Λ *individua la* I. La dimostrazione poggia sul

LEMMA — *Se* $\omega^{(\pi,\pi')}$ *è una matrice quasi abeliana ed è*

$$(27) \qquad \omega\, C = O$$

con $C^{(\pi',1)}$ *matrice intera ad una sola colonna, gli elementi di* C *sono tutti nulli.*

Eccone la semplice dimostrazione. La ωC, essendo una combinazione lineare a coefficienti interi delle colonne della ω, fornisce intanto un periodo per le funzioni di un corpo K, anzi per la (27), il periodo nullo; ma ω è matrice di periodi primitivi per K, cioè ogni periodo si esprime *in un sol modo* come combinazione lineare a coefficienti interi delle colonne di ω, e siccome il periodo nullo si ottiene già prendendo i coefficienti tutti uguali a zero, non può essere C diversa dalla matrice nulla.

Ovviamente il lemma continua a valere *quando* C *è una matrice intera a* π' *righe e a un qualunque numero di colonne.*

Supponiamo allora che, per una data Λ, sia

$$\Lambda\omega = \omega I \quad , \quad \Lambda\omega = \omega I'$$

e quindi

$$\omega(I - I') = O$$

Segue subito $I = I'$, applicando il lemma precedente; quindi la matrice I è univocamente determinata da Λ.

Prima di vedere se e quando la I individui la Λ, facciamo una ulteriore osservazione.

Nel caso abeliano le due matrici Λ ed I si individuano reciprocamente e siccome vale la relazione tra determinanti:

$$|I| = |\Lambda| \cdot |\overline{\Lambda}|$$

ove $\overline{\Lambda}$ è la matrice complessa coniugata di Λ, le due equazioni $|I| = 0$ e $|\Lambda| = 0$ si conseguono a vicenda.

Nel caso quasi abeliano invece, se pure la Λ individua la I, come abbiamo sopra dimostrato, si ha che *da* $|\Lambda| = 0$ *non segue* $|I| = 0$, *mentre da* $|\Lambda| \neq 0$ *segue* $|I| \neq 0$. La prima parte di questa proposizione si dimostra con un semplice esempio (cfr. [20]). La seconda parte, di cui faremo uso in seguito, si dimostra come segue. Se $|\Lambda| \neq 0$, non solo la ω ma anche la $\Lambda\omega$ è una matrice quasi abeliana (relativa al corpo di funzioni quasi abeliane dedotte dal corpo K con la sostituzione di variabili $u' = \Lambda u$), e allora per la (22) anche ωI è matrice quasi abeliana. Se ora fosse $|I| = 0$ esisterebbe una matrice quadrata I' di ordine π', non nulla, per cui:

$$I\ I' = O$$

e sarebbe allora

$$\omega\ I\ I' = O\ .$$

Ma questa relazione implica $I' = O$, contro l'ipotesi, pur di applicare alla matrice quasi abeliana ωI il lemma di pag. 64.

B) *Quando e come la matrice I individua la matrice* Λ.

Vediamo ora quando e fino a che punto in una relazione di HURWITZ-CONFORTO la I individui la Λ.

Assunta la ω nella forma (23), poniamo:

$$I = \begin{Vmatrix} I_{11}^{(p,p)} & I_{12}^{(p,p)} & I_{13}^{(p,\delta_1)} \\ I_{21}^{(p,p)} & I_{22}^{(p,p)} & I_{23}^{(p,\delta_1)} \\ I_{31}^{(\delta_1,p)} & I_{32}^{(\delta_1,p)} & I_{33}^{(\delta_1,\delta_1)} \end{Vmatrix}, \tag{28}$$

e:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{Vmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11}^{(p,p)} & \mathbf{\Lambda}_{12}^{(p,\delta_1)} & \mathbf{\Lambda}_{13}^{(p,\delta_2)} \\ \mathbf{\Lambda}_{21}^{(\delta_1,p)} & \mathbf{\Lambda}_{22}^{(\delta_1,\delta_1)} & \mathbf{\Lambda}_{23}^{(\delta_1,\delta_2)} \\ \mathbf{\Lambda}_{31}^{(\delta_2,p)} & \mathbf{\Lambda}_{32}^{(\delta_2,\delta_1)} & \mathbf{\Lambda}_{33}^{(\delta_2,\delta_2)} \end{Vmatrix}, \tag{29}$$

ove gli elementi delle I_{hk} e delle Λ_{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$ sono, rispettivamente, interi e complessi. Ciò posto la (22) equivale al sistema di nove relazioni tra matrici:

$$
(30) \qquad \begin{cases}
A\, I_{11} + \Omega I_{21} = \Lambda_{11} A \\
A\, I_{12} + \Omega I_{22} = \Lambda_{11}\Omega + \Lambda_{12}\Omega_1 + \Lambda_{13}\Omega_2 \\
A\, I_{13} + \Omega I_{23} = \Lambda_{12} B \\
\Omega_1 I_{21} + B I_{31} = \Lambda_{21} A \\
\Omega_1 I_{22} + B I_{32} = \Lambda_{21}\Omega + \Lambda_{22}\Omega_1 + \Lambda_{23}\Omega_2 \\
\Omega_1 I_{23} + B I_{33} = \Lambda_{22} B \\
\Omega_2 I_{21} = \Lambda_{31} A \\
\Omega_2 I_{22} = \Lambda_{31}\Omega + \Lambda_{32}\Omega_1 + \Lambda_{33}\Omega_2 \\
\Omega_2 I_{23} = \Lambda_{32} B.
\end{cases}
$$

Si tratta di vedere se e fino a che punto le (30) possono risolversi rispetto alle matrici Λ_{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$, pensando assegnate le I_{hk} $(h, k = 1, 2, 3)$.

Per quanto ricordato all'inizio di questo n., le matrici A e B sono non singolari e quindi dotate di inversa A^{-1}, B^{-1}, sicchè le equazioni di posto 1, 3, 4, 6, 7, 9 tra le (30) forniscono già:

$$
(31) \qquad \begin{cases}
\Lambda_{11} = (A\, I_{11} + \Omega I_{21}) A^{-1} \\
\Lambda_{12} = (A\, I_{13} + \Omega I_{23}) B^{-1} \\
\Lambda_{21} = (\Omega_1 I_{21} + B I_{31}) A^{-1} \\
\Lambda_{22} = (\Omega_1 I_{23} + B I_{33}) B^{-1} \\
\Lambda_{31} = \Omega_2 I_{21} A^{-1} \\
\Lambda_{32} = \Omega_2 I_{23} B^{-1}.
\end{cases}
$$

Si ha quindi intanto, come parziale soluzione del problema, che *la matrice I individua in ogni caso le matrici* Λ_{11}, Λ_{12}, Λ_{21}, Λ_{22}, Λ_{31}, Λ_{32}, ossia, per la (29), *le prime due colonne della matrice* Λ.

Per determinare la terza colonna di Λ, ossia le matrici Λ_{13},

Λ_{23}, Λ_{33} restano le equazioni 2, 5, 8 delle (30), le quali in forza delle (31) divengono:

$$\Lambda_{13}\Omega_2 = L^{(p,p)}, \qquad \Lambda_{23}\Omega_2 = M^{(\delta_1,p)}, \qquad \Lambda_{33}\Omega_2 = N^{(\delta_2,p)}, \tag{32}$$

ove si è posto:

$$\left\{\begin{array}{l} L = AI_{12} + \Omega I_{22} - (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1}\Omega - (AI_{13} + \Omega I_{23})B^{-1}\Omega_1 \\ M = \Omega_1 I_{22} + BI_{32} - (\Omega_1 I_{21} + BI_{31})A^{-1}\Omega - (\Omega_1 I_{23} + BI_{33})B^{-1}\Omega_1 \\ N = \Omega_2 I_{22} - \Omega_2 I_{21} A^{-1}\Omega - \Omega_2 I_{23} B^{-1}\Omega_1. \end{array}\right. \tag{33}$$

Assunta la Ω_2 nella forma (25), si ponga:

$$\left\{\begin{array}{l} \Lambda_{13}{}^{(p,\delta_2)} = \| P_1{}^{(p,\varrho)} \;\; P_2{}^{(p,\delta_2-\varrho)} \| \\ \Lambda_{23}{}^{(\delta_1,\delta_2)} = \| Q_1{}^{(\delta_1,\varrho)} \;\; Q_2{}^{(\delta_1,\delta_2-\varrho)} \| \\ \Lambda_{33}{}^{(\delta_2,\delta_2)} = \| R_1{}^{(\delta_2,\varrho)} \;\; R_2{}^{(\delta_2,\delta_2-\varrho)} \| \end{array}\right. \tag{34}$$

e:

$$\left\{\begin{array}{l} L^{(p,p)} = \| L_1{}^{(p,\varrho)} \;\; L_2{}^{(p,p-\varrho)} \| \\ M^{(\delta_1,p)} = \| M_1{}^{(\delta_1,\varrho)} \;\; M_2{}^{(\delta_1,p-\varrho)} \| \\ N^{(\delta_2,p)} = \| N_1{}^{(\delta_2,\varrho)} \;\; N_2{}^{(\delta_2,p-\varrho)} \| . \end{array}\right. \tag{35}$$

È immediato allora che le (32), tenuto conto delle (25), (34) e (35) equivalgono alle sei relazioni tra matrici:

$$\left\{\begin{array}{ll} P_1 C = L_1, & P_1\Omega'_2 = L_2 \\ Q_1 C = M_1, & Q_1\Omega'_2 = M_2 \\ R_1 C = N_1, & R_1\Omega'_2 = N_2. \end{array}\right. \tag{36}$$

Poichè ora la matrice C, per quanto ricordato, è non singolare, esiste l'inversa C^{-1} e dalle tre equazioni nella prima colonna delle (36) si ricava:

$$(37) \qquad P_1 = L_1 C^{-1}, \qquad Q_1 = M_1 C^{-1}, \qquad R_1 = N_1 C^{-1}.$$

Queste, con riguardo anche alle (33), (34), mostrano che la matrice I *individua la prima colonna delle matrici* Λ_{13}, Λ_{23}, Λ_{33} *scritte nella forma* (34), cioè le matrici P_1, Q_1, R_1. Invece le matrici P_2, Q_2, R_2 non intervengono affatto nelle (36), e rimangono pertanto completamente arbitrarie.

Dopo quanto precede si conclude con il seguente:

TEOREMA I. — *Tutte e sole le matrici* Λ, *le quali, insieme con una data* I *soddisfano una relazione di* HURWITZ-CONFORTO *della matrice quasi abeliana* ω (scritta nella forma (23)) *sono le matrici della forma*:

$$(38) \qquad \Lambda = \begin{Vmatrix} (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1} & (AI_{13} + \Omega I_{23})B^{-1} & L_1 C^{-1} & P_2 \\ (\Omega_1 I_{21} + BI_{31})A^{-1} & (\Omega_1 I_{23} + BI_{33})B^{-1} & M_1 C^{-1} & Q_2 \\ \Omega_2 I_{21} A^{-1} & \Omega_2 I_{23} B^{-1} & N_1 C^{-1} & R_2 \end{Vmatrix},$$

dove L_1, M_1, N_1 *sono rispettivamente le matrici formate dalle prime* ρ *colonne delle matrici* L, M, N *definite dalle* (33) *e* P_2, Q_2, R_2 *sono matrici a* $\delta_2 - \rho$ *colonne e rispettivamente a* p, δ_1, δ_2 *righe, assolutamente arbitrarie.*

Nella (38) sono così presenti

$$(p + \delta_1 + \delta_2)(\delta_2 - \rho) = \pi(\delta_2 - \rho)$$

parametri arbitrari, onde si può dire che le matrici Λ che, insieme a una data I, soddisfano una relazione di HURWITZ-CONFORTO della (23) sono $\infty^{\pi(\delta_2 - \rho)}$.

È chiaro inoltre, dal teorema I, che la matrice *I non individua,* di regola, la Λ. Perchè la individui devono mancare P_2, Q_2, R_2, il che accade solo se $\rho=\delta_2$ (è escluso che sia $p=\delta_1=\delta_2=0$, chè sarebbe anche $\pi=p+\delta_1+\delta_2=0$). Dunque vale il:

TEOREMA II. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè in una relazione di* HURWITZ-CONFORTO *di una matrice quasi abeliana la matrice* I *individui la* Λ *è che sia*:

$$\rho = \delta_2.$$

C) *Un complemento al precedente teorema I.*

Precisiamo la struttura dell'ultima riga della matrice Λ data dalla (38) dimostrando che:

Le ultime $\delta_2-\rho$ *righe delle tre matrici*:

$$\Omega_2 I_{21} A^{-1} \quad , \quad \Omega_2 I_{23} B^{-1} \quad , \quad N_1 C^{-1}$$

sono costituite tutte da zeri.

Osserviamo preliminarmente, con riguardo alla (25), che, essendo:

$$H^{(p,l)} = \begin{Vmatrix} H_1{}^{(\rho,l)} \\ H_2{}^{(p-\rho,l)} \end{Vmatrix}$$

una qualunque matrice a p righe e ad l colonne, risulta:

$$\Omega_2 H = \begin{Vmatrix} C & \Omega'_2 \\ O^{(\delta_2-\rho,\rho)} & O^{(\delta_2-\rho,p-\rho)} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} H_1 \\ H_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} CH_1 + \Omega'_2 H_2 \\ O^{(\delta_2-\rho,l)} \end{Vmatrix}$$

sicchè le ultime $\delta_2 - \rho$ righe della $\Omega_2 H$ sono costituite tutte da zeri. Ciò premesso, basta far coincidere la H ordinatamente con le matrici:

$$I_{21}A^{-1} \;,\; I_{23}B^{-1} \;,\; (I_{22} - I_{21}A^{-1}\Omega - I_{23}B^{-1}\Omega_1)C^{-1}$$

per dimostrare, in forza della terza delle (33), che le matrici:

$$\Omega_2 I_{21}A^{-1} \;,\; \Omega_2 I_{23}B^{-1} \;,\; N\,C^{-1}$$

hanno le ultime $\delta_2 - \rho$ righe costituite da zeri; ciò avviene allora anche per la matrice N_1, che consta delle prime ρ colonne di N, e infine anche di $N_1\,C^{-1}$.

Volendo mettere in evidenza la circostanza ora dimostrata, nella matrice (38), si ponga:

$$(39) \qquad I_{21} = \left\| \begin{matrix} I'_{21}{}^{(\varrho,p)} \\ I''_{21}{}^{(p-\varrho,p)} \end{matrix} \right\| , \quad I_{22} = \left\| \begin{matrix} I'_{22}{}^{(\varrho,p)} \\ I''_{22}{}^{(p-\varrho,p)} \end{matrix} \right\| , \quad I_{23} = \left\| \begin{matrix} I'_{23}{}^{(\varrho,\delta_1)} \\ I''_{23}{}^{(p-\varrho,\delta_1)} \end{matrix} \right\|$$

in modo che si abbia:

$$(40) \qquad \Omega_2 I_{21} A^{-1} = \left\| \begin{matrix} (CI'_{21} + \Omega'_2 I''_{21})\,A^{-1} \\ O^{(\delta_2-\varrho,p)} \end{matrix} \right\|$$

$$(41) \qquad \Omega_2 I_{23} B^{-1} = \left\| \begin{matrix} (CI'_{23} + \Omega'_2 I''_{23})\,B^{-1} \\ O^{(\delta_2-\varrho,\delta_1)} \end{matrix} \right\|$$

$$(42) \qquad \Omega_2 I_{22} = \left\| \begin{matrix} CI'_{22} + \Omega'_2 I''_{22} \\ O^{(\delta_2-\varrho,p)} \end{matrix} \right\|$$

e quindi (cfr. (33)):

$$N = \left\| \begin{matrix} N'^{(\varrho,p)} \\ O^{(\delta_2-\varrho,p)} \end{matrix} \right\| \tag{43}$$

dove si è posto:

$$N' = (CI'_{22} + \Omega'_2 I''_{22}) - (CI'_{21} + \Omega'_2 I''_{21}) A^{-1}\Omega - \\ - (CI'_{23} + \Omega'_2 I''_{23}) B^{-1}\Omega_1 . \tag{44}$$

Dopo ciò la (28), per la (39) assume la forma:

$$I = \left\| \begin{matrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I'_{21} & I'_{22} & I'_{23} \\ I''_{21} & I''_{22} & I''_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{matrix} \right\| \tag{45}$$

mentre la (38), per le (40), (41), (42), (43) assume la forma:

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} (AI_{11} + \Omega I_{21}) A^{-1} & (AI_{13} + \Omega I_{23}) B^{-1} & L_1 C^{-1} & P_2 \\ (\Omega_1 I_{21} + BI_{31}) A^{-1} & (\Omega_1 I_{23} + BI_{33}) B^{-1} & M_1 C^{-1} & Q_2 \\ (CI'_{21} + \Omega'_2 I''_{21}) A^{-1} & (CI'_{23} + \Omega'_2 I''_{23}) B^{-1} & N'_1 C^{-1} & R'_2 \\ O & O & O & R''_2 \end{matrix} \right\| \tag{46}$$

dove N'_1 è la matrice costituita dalle prime ϱ colonne della matrice N' data dalla (44) e, naturalmente, si è posto:

$$R_2^{(\delta_2,\delta_2-\varrho)} = \left\| \begin{matrix} R'^{(\varrho,\delta_2-\varrho)}_2 \\ R''^{(\delta_2-\varrho,\delta_2-\varrho)}_2 \end{matrix} \right\| \tag{47}$$

in modo che R''_2 risulta una matrice quadrata di ordine $\delta_2 - \rho$.

D) *Le equazioni di condizione per la matrice* I.

Quali sono le matrici I, che, in rapporto ad una data matrice quasi abeliana ω, possono entrare in una relazione di HURWITZ-CONFORTO (22)?

Per rispondere al quesito si pensi che il sistema (30) è equivalente al sistema delle (31) e (36). Abbiamo visto che le (31) e le tre equazioni della prima colonna delle (36) permettono, nei limiti in cui ciò è possibile, di determinare la Λ, data che sia la I. Resta da vedere l'ufficio delle restanti tre equazioni della (36), le quali si scrivono, per le (37):

$$(48) \qquad L_1 C^{-1} \Omega'_2 = L_2 \, , \quad M_1 C^{-1} \Omega'_2 = M_2 \, , \quad N_1 C^{-1} \Omega'_2 = N_2 \, .$$

Queste non contengono più gli elementi della matrice Λ (si vedano le (33) e (35)), e rappresentano pertanto delle *relazioni tra gli elementi delle matrici* ω *ed* I, in numero non superiore a:

$$p(p-\rho) + \delta_1 (p-\rho) + \delta_2 (p-\rho) = (p + \delta_1 + \delta_2)(p-\rho) = \pi (p-\rho).$$

Le (48) sono dunque *le sole* relazioni a cui debbono soddisfare gli elementi della I, dato che il sistema delle (30) equivale al sistema delle (31) e (36).

Sono le (48) *effettivamente vincolanti* per la matrice I? Esse intanto vengono a mancare se $\rho = p$ (oppure se $p = \delta_1 = \delta_2 = 0$, ma questo caso va escluso, chè sarebbe $\pi = 0$). Se dunque $\rho = p$, la matrice I può essere scelta ad arbitrio.

Dimostriamo che questo è l'unico caso in cui I può essere data ad arbitrio.

Supponiamo allora $\rho \neq p$ e anzi, per la prima delle (26), $\rho < p$; e supponiamo ad un tempo che le (48) siano risolubili con qualsiasi matrice I del tipo (28). Si troverà un assurdo, onde dovrà essere $\rho = p$.

Siccome $0 \leqslant \rho < p$, sarà $p > 0$ e la matrice I_{12} non può mancare nella I data dalla (28). Scegliendo allora la I_{12} diagonale unitaria, e le altre I_{hk} presenti nella I, tutte nulle, la prima delle (33) fornisce:

$$L = A$$

la quale, scritta la A nella forma:

$$A = \begin{Vmatrix} A_1{}^{(\varrho,\varrho)} & O^{(\varrho,p-\varrho)} \\ O^{(p-\varrho,\varrho)} & A_2{}^{(p-\varrho,p-\varrho)} \end{Vmatrix} \tag{49}$$

(si ricordi che A è diagonale, cfr. (24)) equivale alle due relazioni (cfr. la prima delle (35)):

$$L_1 = \begin{Vmatrix} A_1{}^{(\varrho,\varrho)} \\ O^{(p-\varrho,\varrho)} \end{Vmatrix}, \qquad L_2 = \begin{Vmatrix} O^{(\varrho,p-\varrho)} \\ A_2{}^{(p-\varrho,p-\varrho)} \end{Vmatrix}. \tag{50}$$

Consideriamo ora la prima delle (48); questa dovrà essere soddisfatta (da qualunque I e quindi anche) dalla I costruita nel modo anzidetto e implica pertanto:

$$\begin{Vmatrix} A_1 \\ O \end{Vmatrix} C^{-1}\Omega'_2 = \begin{Vmatrix} O \\ A_2 \end{Vmatrix}$$

cioè:

$$A_1 C^{-1}\Omega'_2 = O \ , \qquad O = A_2 \ .$$

L'ultima equazione scritta, che non svanisce perchè $\rho < p$, è ora assurda, in quanto, per la (49), è incompatibile con la forma di A data dalla (24).

Vale dunque il:

TEOREMA III. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè, in una relazione di* HURWITZ-CONFORTO *di una matrice quasi abeliana si possa dare ad arbitrio la matrice* I *è che sia:*

$$\rho = p .$$

E) *Ulteriore indagine nel caso $\rho < p$.*

Approfondiamo l'indagine nel caso $\rho < p$, in cui le (48) rappresentano delle effettive condizioni per la matrice I. È chiaro che anche in tal caso esistono delle particolari matrici I per le quali le (48) risultano soddisfatte da *tutte* le matrici quasi abeliane ω (di dati caratteri p, δ_1, δ_2, ρ e di dati divisori elementari nella matrice A): se non altro la matrice unità di ordine π', la quale insieme con una Λ, matrice unità di ordine π, rende soddisfatta la (22) per ogni ω.

Determiniamo dapprima tutte le matrici I per cui le (48) sono soddisfatte da ogni ω del tipo (23), con le A, Ω_2 nella forma (24), (25) rispettivamente.

Ricordiamo che nella (23) gli elementi delle matrici Ω_1 ed Ω'_2 possono essere dati ad arbitrio, e osserviamo che la Ω'_2 non entra nelle matrici C, L, M (cfr. (25), (33)) e quindi neppure in C, L_1, L_2, M_1, M_2. È quasi immediato allora che le prime due delle (48), possono essere soddisfatte da un'arbitraria Ω'_2 soltanto se $L_1 C^{-1} = O$, $L_2 = O$, $M_1 C^{-1} = O$, $M_2 = O$, cioè soltanto se $L_1 = O$, $L_2 = O$, $M_1 = O$, $M_2 = O$, il che equivale a dire (cfr. (35)), $L = O$, $M = O$, ovvero per le (33):

$$(51)\quad \begin{cases} AI_{12} + \Omega I_{22} - (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1}\Omega - (AI_{13} + \Omega I_{23})B^{-1}\Omega_1 = O \\ \Omega_1 I_{22} + BI_{32} - (\Omega_1 I_{21} + BI_{31})A^{-1}\Omega - (\Omega_1 I_{23} + BI_{33})B^{-1}\Omega_1 = O. \end{cases}$$

Le (51), a loro volta, devono essere verificate scegliendo arbitrariamente la matrice Ω_1. Ciò porta intanto, per $\Omega_1 = O$:

$$\left\{\begin{aligned} & AI_{12} + \Omega I_{22} = (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1}\Omega \\ & BI_{32} = BI_{31}A^{-1}\Omega. \end{aligned}\right. \tag{52}$$

Ora essendo $\|A\ \Omega\|$ una matrice di RIEMANN in forma normale (cfr. (23)), la Ω è non singolare e ammette inversa Ω^{-1} (cfr. ad es. [30]), talchè, posto

$$\alpha = (AI_{12} + \Omega I_{22})\Omega^{-1}$$

la prima delle (52) equivale alla:

$$\alpha \| A\,\Omega \| = \| A\,\Omega \| \left\| \begin{matrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{matrix} \right\| . \tag{53}$$

Ma la (53) non è che una relazione di HURWITZ per la matrice di RIEMANN $\|A\ \Omega\|$, e quest'ultima, nella (23), è una *generica* matrice di RIEMANN con i divisori elementari $d_1, \ldots, d_p$. La (53) può allora sussistere soltanto se (cfr. [30])

$$I_{11} = kU\,, \qquad I_{12} = O\,, \qquad I_{21} = O\,, \qquad I_{22} = kU\,, \tag{54}$$

ove U è la matrice unità di ordine p e k un intero arbitrario.

Dalla seconda delle (52) poi, per essere B non singolare, discende:

$$I_{32} = I_{31}A^{-1}\,\Omega \tag{55}$$

ove, si ricordi, A^{-1} è ad elementi immaginari puri (cfr. (24)). Basta prendere allora Ω ad elementi reali, com'è possibile, per concludere con le

$$I_{31}=O\ , \qquad I_{32}=O\ . \tag{56}$$

In forza delle (54), (56), le (51) si riducono ora alle:

$$\left\{\begin{aligned} &(AI_{13}+\Omega I_{23})B^{-1}\Omega_1=O \\ &(\Omega_1 I_{23}+BI_{33})B^{-1}\Omega_1=k\Omega_1\ , \end{aligned}\right. \tag{57}$$

le quali ancora devono essere soddisfatte scegliendo arbitrariamente Ω_1 ed Ω, compatibilmente con l'essere $||A\ \Omega||$ una matrice di RIEMANN.

La prima delle (57), data l'arbitrarietà di Ω_1, porge allora

$$AI_{13}+\Omega I_{23}=O$$

la quale, per Ω reale, è soddisfatta solo se

$$I_{13}=O\ , \qquad I_{23}=O\ . \tag{58}$$

La seconda delle (57) si riduce allora alla

$$(BI_{33}B^{-1}-kU)\Omega_1=O$$

la quale, per l'arbitrarietà di Ω_1 fornisce la:

$$I_{33}=kU \tag{59}$$

Per le (54), (56), (58), (59), la matrice I data dalla (28) attualmente diviene:

$$(60) \qquad I = \begin{Vmatrix} kU^{(p,p)} & O & O \\ O & kU^{(p,p)} & O \\ O & O & kU^{(\delta_1,\delta_1)} \end{Vmatrix} = kU^{(2p+\delta_1, 2p+\delta_1)} .$$

Perchè dunque una I renda le (48) identicamente soddisfatte, è *necessario* che essa abbia la forma (60), ove k è un intero arbitrario.

Se viceversa la I ha la forma (60) è del tutto elementare la verifica, anche a posteriori, che le (48) sono sempre soddisfatte. Concludiamo senz'altro con il:

TEOREMA IV. — *Se* $\rho < p$ *tutte e sole le matrici* I *per le quali è soddisfatta una relazione di* HURWITZ-CONFORTO

$$\Lambda\omega = \omega I$$

qualunque sia la matrice quasi abeliana ω (*di dati caratteri*), *sono le matrici che si ottengono moltiplicando la matrice unità per un intero arbitrario.*

Tornando ora al teorema I, sempre se $\rho < p$ si ha che, una volta scelta la I a norma del teorema IV, tutte e sole le Λ ad essa corrispondenti hanno la forma (cfr. (38), (46)):

$$(61) \qquad \Lambda = \begin{Vmatrix} kU^{(p,p)} & O & O & P_2 \\ O & kU^{(\delta_1,\delta_1)} & O & Q_2 \\ O & O & kU^{(\varrho,\varrho)} & R'_2{}^{(\varrho,\delta_2-\varrho)} \\ O & O & O & R''_2{}^{(\delta_2-\varrho,\delta_2-\varrho)} \end{Vmatrix},$$

in cui gli elementi di P_2, Q_2, R'_2, R''_2 sono arbitrari.

Si può in conseguenza enunciare il:

TEOREMA V. — *Quando sia*

$$I = kU^{(2p+\delta_1, 2p+\delta_1)}$$

con k intero arbitrario, tutte e sole le Λ *che insieme a tale* I *entrano in una relazione di* HURWITZ-CONFORTO *sono le matrici della forma:*

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} kU^{(p+\delta_1+\varrho, p+\delta_1+\varrho)} & V^{(p+\delta_1+\varrho, \delta_2-\varrho)} \\ O^{(\delta_2-\varrho, p+\delta_1+\varrho)} & W^{(\delta_2-\varrho, \delta_2-\varrho)} \end{matrix} \right\|$$

dove gli elementi delle matrici V *e* W *sono completamente arbitrari.*

Invece per una I diversa da $kU^{(2p+\delta_1, 2p+\delta_1)}$, le equazioni (48) in base al teorema IV non sono soddisfatte identicamente rispetto alla ω e sono pertanto da interpretare come equazioni di una varietà, a priori anche vuota, subordinata al continuo ν-dimensionale rappresentativo delle ω di dati caratteri (cfr. pag. 64). Ciò significa che le ω soddisfacenti le (48), in corrispondenza alla I considerata, sono matrici quasi abeliane *a moduli particolari*; per una ω *a moduli generali* non possono invece esistere altre I all'infuori delle kU.

Il teorema IV si può quindi enunciare anche al modo seguente:

TEOREMA VI. — *Quando sia* $\varrho < p$, *tutte e sole le relazioni di* HURWITZ-CONFORTO *alle quali soddisfa la matrice quasi abeliana generica di dati caratteri e divisori elementari sono quelle per cui la matrice* I *è la matrice unità moltiplicata per un intero arbitrario.*

OSSERVAZIONE — È chiaro che nella teoria ora svolta rientra come caso particolare quella delle matrici di RIEMANN, in cui è:

$$p > 0 \,, \qquad \delta_1 = \delta_2 = 0 \,. \tag{62}$$

Vediamo di ritrovare i risultati noti ad essa relativi.

Per una matrice di RIEMANN, in forza delle (26) e (62) sarà $\rho \leq \delta_2$ e quindi:

$$\rho = \delta_2 = 0 \,,$$

e inoltre, ancora per la (62):

$$\rho < p \,.$$

È quindi possibile applicare i teoremi II e VI, e ritrovare così le note proprietà che per una matrice di RIEMANN la I individua la Λ (per essere $\rho = \delta_2$), mentre se la matrice è *generica,* la I si riduce a $kU^{(2p,2p)}$ (per essere $\rho < p$). Il teorema III dice poi che, nel caso di una matrice di RIEMANN anche *particolare,* la I non può essere data arbitrariamente.

Un secondo caso particolare interessante è quello in cui $p = 0$, che verrà approfondito in seguito. In questo caso risulta, per la (26), $\rho = p = 0$, e i teoremi II, III assicurano che la I può essere sempre data ad arbitrio (per essere $\rho = p$), mentre la Λ risulta individuata o no dalla I a seconda che sia $\delta_2 = 0$ o $\delta_2 > 0$ (nel primo caso si ha infatti $\rho = \delta_2$, nel secondo $\rho < \delta_2$).

Giova infine sottolineare che, in base ai teoremi dimostrati nel presente n., *le matrici quasi abeliane che presentano le più strette analogie con le matrici di Riemann* (individuazione di Λ da parte di I, riduzione della I alla kU per la matrice generica, possibilità di I diverse dalla kU per moduli particolari) *sono quelle per cui:*

$$\rho = \delta_2 \,, \qquad \rho < p \,.$$

Le matrici di RIEMANN rientrano come caso particolare tra le matrici quasi abeliane aventi tali caratteri.

10. TRASFORMAZIONI DI UNA VARIETÀ QUASI ABELIANA DI PICARD IN SÈ, RAPPRESENTATE DA CONGRUENZE LINEARI TRA GLI INTEGRALI VIRTUALMENTE DI PRIMA SPECIE.

Prima di applicare i risultati del n. precedente alla effettiva determinazione delle trasformazioni in sè di una varietà quasi abeliana di PICARD V_π, che sono rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie, svilupperemo, nel presente n., alcune considerazioni di carattere generale sopra dette trasformazioni e sulla loro struttura gruppale.

Se $u=(u_1, \ldots, u_\pi)$ sono gli integrali virtualmente di prima specie sulla V_π, consideriamo una formula del tipo (cfr. (20));

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \qquad (\mathrm{mod}\ \omega) \tag{63}$$

con $\Lambda^{(\pi,\pi)}$ e $\lambda^{(\pi,1)}$ matrici complesse.

Il n. 8 ci ha portato a concludere che la (63) rappresenta una corrispondenza univoca sulla varietà V_π allora e solo allora che la matrice quasi abeliana ω soddisfi una relazione di HURWITZ-CONFORTO del tipo:

$$\Lambda\omega = \omega I \tag{64}$$

con la I matrice quadrata di ordine π' ad elementi interi, relazione le cui proprietà aritmetiche sono state successivamente approfondite nel n. 9.

Ciò premesso, osserviamo che *la corrispondenza* (63) *è non degenere se e soltanto se il determinante* $|\Lambda|$ *della matrice* Λ *è non nullo.*

Poichè il punto $P(u)$ varia liberamente sulla V_π, affermare che la corrispondenza è non degenere equivale ad affermare che il corrispondente punto $P'(u')$ descrive anch'esso tutta la V_π.

Se ora $|\Lambda| = 0$, si può determinare una matrice quadrata Λ' di ordine π, non nulla, tale che

$$\Lambda'\Lambda = O \ ;$$

allora scritta la (63) nella forma

$$u' = \Lambda u + \lambda + \omega m \tag{65}$$

ove $m^{(\pi',1)}$ è una matrice intera, si moltiplichi la (65) a sinistra per Λ'. Ne viene:

$$\Lambda' u' = \Lambda'\lambda + \Lambda'\omega m$$

sicchè u' non è più liberamente variabile e la corrispondenza è degenere. Se dunque $|\Lambda| = 0$, la corrispondenza è degenere.

Viceversa, se $|\Lambda| \neq 0$, esiste la matrice inversa Λ^{-1} della Λ e la (65) porge:

$$u = \Lambda^{-1}u' - \Lambda^{-1}\lambda - \Lambda^{-1}\omega m \tag{66}$$

la quale permette di calcolare u in corrispondenza a un generico u', sicchè la corrispondenza è non degenere.

È così stabilita la proposizione iniziale.

Dimostriamo ora il seguente:

Teorema I. — *Una corrispondenza univoca del tipo* (63), *che sia non degenere, è sempre dotata di un primo indice finito, il cui valore è dato dal valore assoluto del determinante* $|I|$ *della matrice* I *che compare nella* (64).

Poichè, per ipotesi, è $|\Lambda| \neq 0$, vale la (66) ed essa è anzi equivalente alla (63). Si tratta allora di provare che, scelto un punto generico $P'(u')$ sulla varietà V_π, esiste un numero finito di u incongrui (mod ω), tali che i punti $P(u)$ abbiano come corrispondente nella (63) il punto P'. In altre parole si tratta di determinare il numero degli u incongrui (mod ω) che si ottengono dalla (66) quando u' percorre una totalità di valori congrui tra loro. L'esistenza di un primo indice finito per la corrispondenza sarà automaticamente acquisito con la effettiva determinazione di tale numero.

Detta $\varkappa$ una matrice intera a π' righe e 1 colonna, si ponga, nella (66), $u'+\omega\varkappa$ in luogo di u'. Ne viene

$$u=\Lambda^{-1}u'+\Lambda^{-1}\omega\varkappa-\Lambda^{-1}\lambda-\Lambda^{-1}\omega m$$

o anche, ponendo $\varkappa-m=\chi$ (con $\chi^{(\pi',1)}$ anch'essa intera):

$$u=\Lambda^{-1}u'-\Lambda^{-1}\lambda+\Lambda^{-1}\omega\chi\ . \tag{67}$$

Per una osservazione fatta nel n. 9 (a pag. 65) da $|\Lambda| \neq 0$ segue anche $|I| \neq 0$; essendo allora I dotata di inversa I^{-1} dalla (64) si deduce:

$$\Lambda^{-1}\omega=\omega I^{-1}$$

e la (67) si può scrivere nella forma:

$$u=\Lambda^{-1}u'-\Lambda^{-1}\lambda+\omega I^{-1}\chi\ . \tag{68}$$

Fissate che siano le matrici u', λ e Λ, tutto si riduce a vedere quante determinazioni incongrue si ottengono per u, al variare arbitrario della matrice χ intera. Ora due distinte matrici χ e χ' danno luogo a due u congrui (mod ω) se e solo se, insieme con la (68) vale anche la

$$u+\omega n=\Lambda^{-1}u'-\Lambda^{-1}\lambda+\omega I^{-1}\chi' \tag{69}$$

con la $n^{(\pi',1)}$ intera; da questa segue, per differenza con la (68):

$$\omega I^{-1}(\chi'-\chi)=\omega n\ . \tag{70}$$

È chiaro che, viceversa, se χ e χ' soddisfano la (70) dalla (68) segue subito la (69).

Posto ora:

$$J=|I|\cdot I^{-1}\ ,$$

(J risulta intera), la (70) si scrive:

$$\omega J(\chi'-\chi)-|I|\omega n=O \tag{71}$$

ovvero:

$$\omega\ [J(\chi'-\chi)-|I|n]=O\ .$$

Per un lemma dimostrato nel n. 9 (a pag. 64) dovrà allora essere nulla la matrice intera $J(\chi'-\chi)-|I|n$, ossia dovrà essere:

$$J\ (\chi'-\chi)\equiv O \qquad (\mathrm{mod}\ \alpha) \tag{72}$$

ove α è il valore assoluto del determinante $|I|$.

Inversamente dalla (72) si può risalire alla (70); la (72) rappresenta dunque la condizione necessaria e sufficiente perchè due matrici χ, χ' diano, dalla (67), valori di u congrui (mod ω).

Ora è evidente dalla (72) che due χ, χ' per cui:

$$\chi \equiv \chi' \qquad (\mathrm{mod}\ \alpha)$$

danno valori congrui di u. Basta allora ricercare quante classi χ (mod α) danno luogo a valori incongrui di u. Siccome ogni elemento della $\chi^{(\pi',1)}$ può assumere α valori distinti (mod α), esistono $\alpha^{\pi'}$ classi χ (mod α). Per un noto teorema (1), fissata una matrice χ, esistono $\alpha^{\pi'-1}$ matrici χ' soddisfacenti la (72), onde le matrici che danno luogo ad u incongrui (mod α) sono in numero di

$$\frac{\alpha^{\pi'}}{\alpha^{\pi'-1}} = \alpha$$

Resta così dimostrato che α è il primo indice della corrispondenza; si ha cioè il teorema *I*.

Ne segue anche immediatamente il:

COROLLARIO — *Condizione necessaria e sufficiente perchè la*

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \qquad (\mathrm{mod}\ \omega)$$

possa interpretarsi come una trasformazione (analitica e generalmente) biunivoca sulla varietà di PICARD V_π *associata ad un corpo* K *di funzioni quasi abeliane, cioè come una trasformazione di* CONFORTO *sulla varietà* V_π, *è che, detta* ω *una matrice di periodi primitivi relativa a* K, *sia non nullo il determinante di* Λ *ed esista una matrice unimodulare (cioè intera e con determinante* ± 1) I, *tale che sia*

$$\Lambda\omega = \omega I \ .$$

Quindi il problema di determinare tutte le trasformazioni della V_π in sè, che siano *biunivoche,* equivale al problema di

(1) Cfr. il trattato [34] del KRAZER, cap. II, teorema VI.

determinare, per la matrice quasi abeliana ω, tutte le relazioni di HURWITZ-CONFORTO (64) con:

$$|\Lambda| \neq 0 \; , \qquad |I| = \pm 1 \; . \tag{73}$$

Una trasformazione biunivoca della V_π in sè, rappresentata da una congruenza lineare del tipo (63), sarà d'ora innanzi anche indicata semplicemente con T.

Ancora qualche generalità sulle trasformazioni T, della varietà V_π in sè.

Determiniamo quando due relazioni del tipo (63) rappresentano la medesima T. All'uopo si osservi che due relazioni:

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \; , \qquad u' \equiv \overline{\Lambda} u + \overline{\lambda} \qquad (\text{mod } \omega)$$

rappresentano la medesima T quando e soltanto quando sia, identicamente rispetto ad u:

$$\overline{\Lambda} u + \overline{\lambda} \equiv \Lambda u + \lambda \qquad (\text{mod } \omega)$$

ossia

$$(\overline{\Lambda} - \Lambda) u + \overline{\lambda} - \lambda \equiv O \qquad (\text{mod } \omega) \; .$$

La precedente congruenza equivale all'uguaglianza:

$$(\overline{\Lambda} - \Lambda) u + \overline{\lambda} - \lambda = \omega m$$

ove $m^{(\pi',1)}$ è una opportuna matrice intera. Perchè ora l'ultima relazione scritta sia soddisfatta per ogni u occorre e basta che sia:

$$\overline{\Lambda} = \Lambda \; , \qquad \overline{\lambda} - \lambda = \omega m$$

ossia:

$$(74) \qquad \bar{\Lambda} = \Lambda\,, \qquad \bar{\lambda} \equiv \lambda \qquad (\mathrm{mod}\ \omega)\,.$$

Si conclude che *si ottengono tutte e sole e ciascuna una volta sola le trasformazioni* T *di* CONFORTO, *prendendo nella espressione*:

$$(75) \qquad u' \equiv \Lambda u + \lambda \qquad (\mathrm{mod}\ \omega)$$

la matrice Λ *in tutti i modi possibili, salve le* (64), (73), *e la matrice* λ *anch'essa in modo arbitrario, intendendo però la* λ *stessa definita a meno di una congruenza* (*mod* ω).

Per una Λ fissata, la (75) fornisce, al variare di λ una *schiera* ∞^{π} di trasformazioni *T;* e tenuta presente la seconda delle (74) è chiaro che la totalità delle trasformazioni di una schiera si può mettere in corrispondenza (generalmente) biunivoca con la totalità dei punti della V_{π}, facendo corrispondere ad ogni T della schiera (75) il punto $P(\lambda)$ della V_{π}. Si ha insomma il:

TEOREMA II. — *Le trasformazioni* T *di una* V_{π} *quasi abeliana di* PICARD *in sè si dividono in schiere* ∞^{π}; *e la totalità delle* T *di una schiera comunque prefissata si può mettere in corrispondenza generalmente biunivoca con la totalità dei punti della* V_{π}.

Vale anche il:

TEOREMA III. — *Le trasformazioni* T *di ciascuna schiera operano in modo generalmente transitivo sui punti della* V_{π}.

In una qualunque schiera (75), ove Λ sia fissata, vi è infatti la seguente T (ed essa sola):

$$u' \equiv \Lambda u + (\bar{u}' - \Lambda \bar{u}) \qquad (\mathrm{mod}\ \omega)$$

che muta $P(\overset{\cdots}{u})$ in $P'(\overset{\cdots}{u'})$, questi essendo due punti genericamente fissati sulla V_π.

Il gruppo delle trasformazioni di CONFORTO.

Sempre in analogia con il caso abeliano, si dimostra il:

TEOREMA IV. — *La totalità delle trasformazioni* T *di una* V_π *quasi abeliana di* PICARD *in sè costituisce un gruppo.*

Siano T' e T'' due trasformazioni rappresentate rispettivamente dalle

$$u' \equiv \Lambda' u + \lambda' \ , \ u' \equiv \Lambda'' u + \lambda'' \qquad (\mathrm{mod}\ \omega)\ .$$

Anzitutto la $T''\ T'$ è ancora una trasformazione T. Infatti, in primo luogo l'esistenza delle T', T'' porta l'esistenza di due matrici intere I', I'', di ordine π', per cui (cfr. (64), (73)):

$$(76) \qquad \begin{cases} \Lambda'\omega = \omega I', \quad \Lambda''\omega = \omega I'' \\ |\Lambda'| \neq 0\ , \quad |\Lambda''| \neq 0\ , \quad |I'| = \pm 1\ , \quad |I''| = \pm 1\ . \end{cases}$$

D'altronde la $T''T'$, rappresentata da:

$$u' \equiv \Lambda''\Lambda' u + (\Lambda''\lambda' + \lambda'') \qquad (\mathrm{mod}\ \omega)\ ,$$

è ancora del tipo T, perchè dalle (76) segue:

$$\Lambda''\Lambda'\omega = \Lambda''\omega I' = \omega I'' I'$$

con:

$$|\Lambda''\Lambda'| = |\Lambda''| \cdot |\Lambda'| \neq 0$$

$$|I''I'| = |I''| \cdot |I'| = \pm 1\ ;$$

inoltre sostituendo a λ', λ'' matrici ad esse congrue (mod ω), cioè le:

$$\lambda'_1 = \lambda' + \omega m' , \quad \lambda''_1 = \lambda'' + \omega m''$$

(con $m'^{(\pi',1)}$, $m''^{(\pi',1)}$ intere), si ha:

$$\begin{aligned} \Lambda''\lambda'_1 + \lambda''_1 &= \Lambda''(\lambda' + \omega m') + \lambda'' + \omega m'' = \\ &= \Lambda''\lambda' + \lambda'' + \omega(I''m' + m'') \equiv \Lambda''\lambda' + \lambda'' \quad (\text{mod } \omega) \end{aligned}$$

perchè la metrice $I''m' + m''$ è intera.

Il prodotto di due T è dunque ancora una T.

Inoltre l'inversa di una T, del tipo (75), è ancora una T, ed ha l'equazione:

$$(77) \qquad u' \equiv \Lambda^{-1}u - \Lambda^{-1}\lambda \qquad (\text{mod } \omega) .$$

Che la (77) sia una trasformazione T è dimostrato dal fatto che dalle (64), (73) segue:

$$\begin{aligned} &\Lambda^{-1}\omega = \omega I^{-1} \\ &|\Lambda^{-1}| \neq 0 , \qquad |I^{-1}| = \pm 1 \\ &\Lambda^{-1}(\lambda + \omega m) = \Lambda^{-1}\lambda + \omega I^{-1}m . \end{aligned}$$

L'identità è infine rappresentata dalla (75) quando si prenda $\lambda \equiv 0$ (mod ω) e per Λ la matrice unità di ordine π (e per I, nella (64), la matrice unità di ordine π').

Il gruppo delle schiere.

Il gruppo, che indicheremo con G, costituito da tutte le trasformazioni T, contiene certamente le trasformazioni di prima e di seconda specie (18), (19); quelle di seconda specie, in particolare, formano un sottogruppo H di G che è *invariante*: è immediato infatti che ogni T è permutabile con il sottogruppo H.

Le singole schiere di G sono allora le classi laterali di G rispetto ad H. Infatti una qualunque T:

$$u' \equiv \overline{\Lambda} u + \overline{\lambda} \qquad (\text{mod } \omega)$$

individua una classe laterale, formata dalle T che si ottengono moltiplicando (ad es. a destra) la T prefissata per tutte le trasformazioni di seconda specie (19). Tale classe è formata cioè dalle

$$u' \equiv \overline{\Lambda} u + \overline{\Lambda} b + \lambda \qquad (\text{mod } \omega)$$

che appartengono tutte alla schiera relativa alla matrice $\overline{\Lambda}$, ed anzi esauriscono la schiera stessa perchè al variare arbitrario di b, anche $\Lambda b + \lambda$ assume tutte le determinazioni possibili (una prefissata, λ^*, di queste si ottiene prendendo $b = \Lambda^{-1} [\lambda^* - \lambda]$).

Il gruppo Γ, costruito come gruppo quoziente di G rispetto ad H, si dirà il *gruppo delle schiere*. Esso ammette come immagine concreta il gruppo costituito dalle trasformazioni

$$u' \equiv \Lambda u \qquad (\text{mod } \omega) \tag{78}$$

(sottogruppo di G per cui è unito il punto $u \equiv 0$ (mod. ω) della V_π). È chiaro infatti che in ogni schiera $u' \equiv \Lambda u + \lambda$ (ove Λ è fissata) esiste una e una sola trasformazione del tipo (78), e viceversa la (78) dà origine ad una schiera ben determinata a cui appartiene.

Vi è dunque corrispondenza biunivoca tra le trasformazioni del tipo (78) o, ciò che è lo stesso, tra le matrici Λ per cui sono soddisfatte le (64), (73) e gli elementi del gruppo Γ, corrispondenza che è proprio un isomorfismo, come è facile verificare.

Concludendo, è chiaro che la conoscenza del gruppo G equivale a quella del gruppo Γ delle schiere, che si intenderà sempre concretato nel gruppo di tutte le matrici Λ soddisfacenti le (64), (73). La ricerca è così ricondotta alla caratterizzazione delle predette matrici Λ, per ogni tipo della matrice quasi abeliana ω.

Osserveremo infine che anche la totalità delle matrici I soddisfacenti le (64), (73) costituisce un gruppo, che risulta omomorfo al gruppo Γ.

Per convincersene basta ricordare (n. 9) che una matrice Λ individua una I (in particolare se Λ è la matrice unità, anche I è la matrice unità), e osservare che date due qualsiasi Λ', Λ'' per le corrispondenti I', I'' sarà:

$$\Lambda' \omega = \omega I' \quad , \quad \Lambda'' \omega = \omega I''$$

e quindi:

$$\Lambda' \omega I'' = \omega I' I''$$

ossia:

$$\Lambda' \Lambda'' \omega = \omega I' I'' \tag{79}$$

il che dimostra che il prodotto di due I è ancora una I; tenuto poi conto che tra le I c'è la matrice unità e l'inversa di ogni I si conclude che esse formano gruppo. L'omormorfismo con il gruppo Γ delle Λ è dimostrato dalla stessa (79), la quale assegna la $I' I''$ come corrispondente della $\Lambda' \Lambda''$.

Vale dunque il:

TEOREMA V. — *Il gruppo delle schiere, ovvero il gruppo delle matrici* Λ *soddisfacenti le*:

$$\Lambda \omega = \omega I \quad , \quad |\Lambda| \neq 0 \quad , \quad |I| = \pm 1$$

è omomorfo al gruppo delle matrici unimodulari I *soddisfacenti le relazioni ora scritte; l'omomorfismo è quello che ad ogni* Λ *associa la* I *da essa individuata* (a norma del n. 9).

Quand'è che l'omomorfismo considerato diventa un *isomorfismo?* Quando e soltanto quando è biunivoca la corrispondenza tra le Λ e le I. Per il teorema II del n. 9 abbiamo quindi il:

Teorema VI. — *Perchè il gruppo delle schiere sia isomorfo al gruppo delle matrici* I *è necessario e sufficiente che sia:*

$$\rho = \delta_2 \; .$$

11. Effettiva determinazione delle trasformazioni in sè di una varietà quasi abeliana di Picard, rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie.

In base ai risultati del n. precedente, la determinazione delle trasformazioni in questione è ricondotta alla determinazione del gruppo delle matrici Λ soddisfacenti le (64), (73).

Procederemo distinguendo i quattro casi seguenti (che, per le (26), sono gli unici casi possibili):

$$\begin{array}{llll}
a) & \rho = p & , & \rho = \delta_2 \\
b) & \rho = p & , & \rho < \delta_2 \\
c) & \rho < p & , & \rho = \delta_2 \\
d) & \rho < p & , & \rho < \delta_2
\end{array}$$

Caso $\rho = p$.

Occorre anzitutto por mente ai risultati del n. 9, ove sono state determinate, per una matrice quasi abeliana ω nella forma normale (23) soddisfacente una relazione di Hurwitz-Con-

FORTO (22), tutte le matrici Λ che possono comparire nella (22) stessa insieme con una I prefissata. Nel caso attualmente in esame sarà $\rho = p$, e inoltre la matrice I sarà unimodulare (cfr. la seconda delle (73)). Dalle (25), (35), (39), (44) si ha subito:

$$\Omega_2 = \left\| \begin{matrix} C \\ O \end{matrix} \right\|, \quad L_1 = L, \quad M_1 = M, \quad N'_1 = N',$$

$$I'_{21} = I_{21}, \quad I'_{22} = I_{22}, \quad I'_{23} = I_{23},$$

onde la (46) fornisce per Λ l'espressione:

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1} & (AI_{13} + \Omega I_{23})B^{-1} & LC^{-1} & P_2 \\ (\Omega_1 I_{21} + BI_{31})A^{-1} & (\Omega_1 I_{23} + BI_{33})B^{-1} & MC^{-1} & Q_2 \\ CI_{21}A^{-1} & CI_{23}B^{-1} & N'C^{-1} & R'_2 \\ O & O & O & R''_2 \end{matrix} \right\| \tag{80}$$

mentre la forma (45) per la I si riduce alla forma (28) e la (44) diviene:

$$N' = CI_{22} - CI_{21}A^{-1}\Omega - CI_{23}B^{-1}\Omega_1 . \tag{81}$$

Ciò posto, nel caso $\rho = p$, a norma del teorema III del n. 9, la matrice I può scegliersi ad arbitrio e quindi, per il nostro scopo, essa sarà una *arbitraria matrice unimodulare*. Scelta in tal modo la I, saranno soddisfatte sia la (64) sia la seconda delle (73); resta da vedere se e quando sia soddisfatta la prima delle (73), essendo la matrice Λ data dalla (80) con la I matrice unimodulare qualunque.

Dimostriamo in proposito la seguente:

PROPOSIZIONE. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè sia:*

$$|\Lambda| \neq 0$$

la Λ *essendo data dalla* (80), *con la* I *unimodulare, è che sia:*

$$|R_2''| \neq 0 \, .$$

La necessità della condizione è immediata, perchè il determinante $|\Lambda|$ è il prodotto del determinante $|R_2''|$ per il determinante della matrice:

$$(82) \qquad \begin{Vmatrix} (AI_{11}+\Omega I_{21})A^{-1} & (AI_{13}+\Omega I_{23})B^{-1} & LC^{-1} \\ (\Omega_1 I_{21}+BI_{31})A^{-1} & (\Omega_1 I_{23}+BI_{33})B^{-1} & MC^{-1} \\ CI_{21}A^{-1} & CI_{23}B^{-1} & N'C^{-1} \end{Vmatrix} =$$

$$= \Lambda^* \begin{Vmatrix} A^{-1} & O & O \\ O & B^{-1} & O \\ O & O & C^{-1} \end{Vmatrix}$$

ove si è posto:

$$(83) \qquad \Lambda^* = \begin{Vmatrix} AI_{11}+\Omega I_{21} & AI_{13}+\Omega I_{23} & L \\ \Omega_1 I_{21}+BI_{31} & \Omega_1 I_{23}+BI_{33} & M \\ CI_{21} & CI_{23} & N' \end{Vmatrix} .$$

La sufficienza della condizione si dimostrerà provando che *la matrice* (83) *ha sempre determinante non nullo, comunque si scelga per* I *una matrice unimodulare della forma* (28).

Esaminiamo subito il caso $p=0$. Se $p=0$ la ω, la I, e la Λ^*, date rispettivamente dalle (23), (28), (83), si riducono alle:

$$\omega = \begin{Vmatrix} B^{(\delta_1,\delta_1)} \\ O^{(\delta_2,\delta_1)} \end{Vmatrix}, \quad I = I_{33}\,, \quad \Lambda^* = BI_{33}$$

e allora è ovvio che, qualunque sia la I cioè la I_{33} unimodulare, è sempre

$$|\Lambda^*| \neq 0$$

perchè $|B| \neq 0$ (cfr. n. 9, pag. 64).

Veniamo ora al caso generale $p \geq 1$.

Divideremo la dimostrazione in due parti, mostrando prima che $|\Lambda^*| \neq 0$ quando si prenda per I una qualunque matrice unimodulare, d'ordine $2p+\delta_1$, scelta in un sistema di generatori del gruppo di tutte le matrici unimodulari di ordine $2p+\delta_1$; e risalendo poi al caso di una matrice unimodulare qualunque.

È noto che il nominato sistema di generatori si può scegliere in più modi. Per il nostro scopo conviene scegliere il sistema formato dalle seguenti matrici:

$$X = \left\| \begin{matrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} \right\|, \quad Y = \left\| \begin{matrix} 1 & \pm 1 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{matrix} \right\|, \quad Z = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & 1 & 0 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{matrix} \right\|$$

i cui elementi sono:

$x_{11} = -1$; $x_{hh} = 1$ $(h = 2, \ldots, 2p+\delta_1)$; $x_{hk} = 0$ $(h \neq k)$;
$y_{hh} = 1$ $(h = 1, \ldots, 2p+\delta_1)$; $y_{12} = \pm 1$; tutti gli altri $y_{hk} = 0$;
$z_{hh} = 1$ $(h = 1, \ldots, i-1, i+2, \ldots, 2p+\delta_1)$; $z_{ii} = z_{i+1,\, i+1} = 0$;
$z_{i,i+1} = z_{i+1,i} = 1$; $(i = 1, \ldots, 2p+\delta_1 - 1)$; tutti gli altri $z_{hk} = 0$.

La X rappresenta complessivamente 1 generatore, la Y due, la Z $2p+\delta_1 - 1$ generatori.

La prima parte della dimostrazione consiste nel verificare che $|\Lambda^*| \neq 0$ se si prende per I la X, o Y, o Z.

Una prima semplificazione si ottiene osservando che: *È sempre* $|\Lambda^*| \neq 0$ *quando la* I, *data dalla* (28) *sia tale che* $I_{hk} = O$ $(h \neq k)$, *mentre* $|I_{11}| \neq 0$, $|I_{22}| \neq 0$, $|I_{33}| \neq 0$.

In queste ipotesi infatti, dalle (83), (33), (81) segue:

$$\Lambda^* = \left\| \begin{matrix} AI_{11} & O & \Omega I_{22} - AI_{11}A^{-1}\Omega \\ O & BI_{33} & \Omega_1 I_{22} - BI_{33}B^{-1}\Omega_1 \\ O & O & CI_{22} \end{matrix} \right\|$$

e quindi:

$$|\Lambda^*| = |A| \cdot |B| \cdot |C| \cdot |I_{11}| \cdot |I_{22}| \cdot |I_{33}| \neq 0$$

perchè A, B, C sono matrici non singolari (n. 9).

Ciò prova senz'altro che $|\Lambda^*| \neq 0$ quando sia $I = X$; oppure $I = Y$, *purchè sia* $p > 1$; oppure $I = Z$, *purchè la matrice*

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

che compare nella Z *sia contenuta nella* I_{11}, *o nella* I_{22}, *o nella* I_{33}.

Per completare la prima parte della dimostrazione in corso, restano così da esaminare soltanto i tre seguenti casi:

α) $I = Y$, $p = 1$, ossia:

$$I_{11} = 1 \,,\; I_{12} = \pm 1 \quad I_{21} = 0 \,,\; I_{22} = 1$$

$$I_{13} = O \,,\; I_{23} = O \,,\; I_{31} = O \,,\; I_{32} = O \,,\; I_{33} = U \,;$$

β) $I = Z$, in modo che sia:

$$I_{11} = \begin{Vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{Vmatrix} \qquad I_{12} = \begin{Vmatrix} & & & 0 \\ & & \,\cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 0 & & \\ 1 & & & \end{Vmatrix}$$

(84)

$$I_{21} = \begin{Vmatrix} & & & 1 \\ & & 0 & \\ & \,\cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 0 & & & \end{Vmatrix} \qquad I_{22} = \begin{Vmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}$$

$$I_{13} = O \,,\; I_{23} = O \,,\; I_{31} = O \,,\; I_{32} = O \,,\; I_{33} = U \,;$$

γ) $I = Z$, in modo che sia:

$$I_{11} = U\,,\ I_{12} = O\,,\ I_{13} = O\,,\ I_{21} = O\,,\ I_{31} = O$$

$$I_{22} = \begin{Vmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{Vmatrix} \qquad I_{23} = \begin{Vmatrix} & & & 0 \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 0 & & \\ 1 & & & \end{Vmatrix}$$

(85)

$$I_{32} = \begin{Vmatrix} & & & 1 \\ & & 0 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ 0 & & & \end{Vmatrix} \qquad I_{33} = \begin{Vmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}$$

(s'intende che nelle matrici scritte sono nulli tutti gli elementi non indicati nè esplicitamente, nè con la punteggiatura).

Esaminiamo separatamente i tre casi.

Nel caso α), la Λ^* data dalla (83), con riguardo alle (33), alla (81), e alla forma attuale della matrice ω:

$$\omega = \begin{Vmatrix} 2\pi i & \omega_{11} & O \\ O & \Omega_1 & B \\ O & 2\pi i & O \\ O & O & O \end{Vmatrix}$$

diviene:

$$\begin{Vmatrix} 2\pi i & O & \pm 2\pi i \\ O & 2\pi i U & O \\ O & O & 2\pi i \end{Vmatrix}$$

ed ha pertanto sempre determinante non nullo: $|\Lambda^*| \neq 0$.

Nel caso β) la Λ^* assume la forma:

$$\Lambda^* = \begin{Vmatrix} AI_{11} + \Omega I_{21} & O & AI_{12} + \Omega I_{22} - (AI_{11} + \Omega I_{21})A^{-1}\Omega \\ \Omega_1 I_{21} & B & \Omega_1 I_{22} - \Omega_1 I_{21} A^{-1}\Omega - \Omega_1 \\ CI_{21} & O & CI_{22} - CI_{21}A^{-1}\Omega \end{Vmatrix}$$

ed essere $|\Lambda^*| \neq 0$ equivale all'essere $|\Lambda_1^*| \neq 0$, ove:

$$\Lambda_1^* = \begin{Vmatrix} AI_{11} + \Omega I_{21} & AI_{12} + \Omega I_{22} - (AI_{11} + \Omega I_{21}) A^{-1}\Omega \\ CI_{21} & CI_{22} - CI_{21} A^{-1}\Omega \end{Vmatrix}$$

e le I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22} sono date dalle (84).

Posto allora:

$$\Omega = \|\omega_{hk}\| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, p)$$

e ricordando che la A è data dalla (24), che le B, C sono diagonali e con gli elementi sulla diagonale principale tutti uguali a $2\pi i$, e che valgono le (84), risulta:

$$A\,I_{11} + \Omega\,I_{21} = \begin{Vmatrix} \frac{2\pi i}{d_1} & & & & \omega_{11} \\ & \frac{2\pi i}{d_2} & & & \omega_{21} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \frac{2\pi i}{d_{p-1}} & \omega_{p-1,1} \\ & & & & \omega_{p1} \end{Vmatrix}, \quad C\,I_{21} = \begin{Vmatrix} & & 0 & 2\pi i \\ & & \cdot & \\ & \cdot & & \\ 0 & & & \end{Vmatrix},$$

$$CI_{22} - CI_{21}\,A^{-1}\,\Omega = \begin{Vmatrix} -\omega_{p1}\,d_p & -\omega_{p2}\,d_p & \ldots & -\omega_{pp}\,d_p \\ & 2\pi i & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2\pi i \end{Vmatrix}.$$

Sviluppando ora il determinante della Λ_1^* con la regola di LAPLACE secondo le prime $p-1$ colonne, esso si riduce, a meno di un fattore non nullo, al determinante della matrice quadrata di ordine $p+1$:

$$\begin{Vmatrix} \omega_{p1} & \varepsilon & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 2\pi i & -\omega_{p1} d_p & -\omega_{p2} d_p & \cdot & \cdot & \cdot & -\omega_{pp} d_p \\ 0 & & 2\pi i & & & & \\ \cdot & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & & 2\pi i \end{Vmatrix}$$

ove $\varepsilon = \dfrac{2\pi i}{d_p} - \dfrac{d_p}{2\pi i}\,\omega_{p1}^2$, e gli elementi indicati con * non hanno per noi interesse. Tale determinante è non nullo, perchè è non nullo il determinante

$$\begin{vmatrix} \omega_{p1} & \varepsilon \\ 2\pi i & -\omega_{p1} d_p \end{vmatrix} .$$

Anche in questo caso dunque è $|\Lambda^*| \neq 0$.

Nel caso γ) la dimostrazione procede in modo analogo al caso β). La matrice Λ^* assume anzitutto, in questo caso, l'aspetto:

$$\Lambda^* = \begin{Vmatrix} A & \Omega I_{23} & \Omega I_{22} - \Omega - \Omega I_{23} B^{-1} \Omega_1 \\ O & \Omega_1 I_{23} + B I_{33} & \Omega_1 I_{22} + B I_{32} - (\Omega_1 I_{23} + B I_{33}) B^{-1} \Omega_1 \\ O & C I_{23} & C I_{22} - C I_{23} B^{-1} \Omega_1 \end{Vmatrix}$$

e il suo determinante è non nullo se è non nullo quello della matrice:

$$\Lambda_2^* = \begin{Vmatrix} \Omega_1 I_{23} + B I_{33} & \Omega_1 I_{22} + B I_{32} - (\Omega_1 I_{23} + B I_{33}) B^{-1} \Omega_1 \\ C I_{23} & C I_{22} - C I_{23} B^{-1} \Omega_1 \end{Vmatrix}$$

ove le I_{22}, I_{23}, I_{32}, I_{33} sono date dalle (85).

Posto:

$$\Omega_1 = ||\lambda_{hk}|| \qquad (h = 1, \ldots, \delta_1; \; k = 1, \ldots, p) ,$$

si vede subito che è:

$$\Omega_1 I_{23} + B I_{33} = \begin{Vmatrix} \lambda_{1p} & & & & \\ \lambda_{2p} & 2\pi i & & & \\ \vdots & & \cdot & & \\ \vdots & & & \cdot & \\ \vdots & & & & \cdot \\ \lambda_{\delta_1, p} & & & & 2\pi i \end{Vmatrix} , \quad C I_{23} = \begin{Vmatrix} & & 0 \\ & 0 & \\ 2\pi i & & \end{Vmatrix} ,$$

$$C I_{22} - C I_{23} B^{-1} \Omega_1 = \begin{Vmatrix} 2\pi i & & & & \\ & 2\pi i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 2\pi i & \\ -\lambda_{11} & -\lambda_{12} & \cdots & -\lambda_{1, p-1} & -\lambda_{1p} \end{Vmatrix} .$$

Il determinante $|\Lambda_2^*|$, sviluppato secondo le $\delta_1 - 1$ colonne di posto $2, 3, \ldots, \delta_1$, risulta uguale, a meno di un fattore non nullo, al determinante della seguente matrice di ordine $p + 1$:

$$\begin{Vmatrix} \lambda_{1p} & * & & * & \eta \\ 0 & 2\pi i & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 2\pi i & \\ 2\pi i & -\lambda_{11} & & -\lambda_{1, p-1} & -\lambda_{1p} \end{Vmatrix}$$

in cui gli elementi indicati con * non interessano ed $\eta = 2\pi i - \dfrac{1}{2\pi i} \lambda_{1p}^2$. Sviluppando tale determinante secondo le

$p-1$ righe di posto $2, 3, \ldots, p$, si trova infine che $|\Lambda^*|$, a meno di un fattore non nullo è uguale al determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1p} & \eta \\ 2\pi i & -\lambda_{1p} \end{vmatrix}$$

che è diverso da zero.

Dunque anche nel caso γ) è sempre $|\Lambda^*| \neq 0$.

Riprendendo il ragionamento iniziato prima dell'esame dei tre casi α), β), γ), è ora acquisito che $|\Lambda^*| \neq 0$ quando (sia $p=0$ ovvero) I coincida con una delle matrici X, Y, Z che generano il gruppo delle matrici unimodulari di ordine $2p+\delta_1$. A questo punto è quasi immediato che è $|\Lambda^*| \neq 0$ qualunque sia la I unimodulare.

Tenuto conto che ogni matrice unimodulare si ottiene moltiplicando tra loro un numero finito di matrici generatrici, basterà dimostrare che se a due matrici unimodulari I, $\ddot{I}$ corrispondono ordinatamente le matrici Λ^*, Λ^* del tipo (83) e a determinante non nullo, anche al prodotto $I\ddot{I}$ corrisponde una matrice del tipo (83) a determinante non nullo.

Posto:

$$H = \begin{Vmatrix} A^{-1} & O & O \\ O & B^{-1} & O \\ O & O & C^{-1} \end{Vmatrix}, \quad S = \begin{Vmatrix} P_2 \\ Q_2 \\ R'_2 \end{Vmatrix}$$

si osservi che la (80), tenuto conto della (82), si scrive:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \Lambda^* H & S \\ O & R''_2 \end{Vmatrix} \tag{86}$$

Similmente la $\bar{\Lambda}$, relativa alla $\bar{I}$, sarà:

$$\bar{\Lambda} = \left\| \begin{matrix} \bar{\Lambda}^* H & \bar{S} \\ O & \bar{R}_2'' \end{matrix} \right\| . \tag{87}$$

Da $\Lambda\,\omega = \omega\, I$ e $\bar{\Lambda}\,\omega = \omega\,\bar{I}$ segue ora $\Lambda\,\omega\,\bar{I} = \omega\, I\,\bar{I}$, cioè $\Lambda\,\bar{\Lambda}\,\omega = \omega\, I\,\bar{I}$, sicchè alla $I\,\bar{I}$ corrisponde la matrice $\Lambda\,\bar{\Lambda}$ che, per le (86), (87), è la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \Lambda^* H \bar{\Lambda}^* H & \Lambda^* H \bar{S} + S \bar{R}_2'' \\ O & R_2'' \bar{R}_2'' \end{matrix} \right\| .$$

Ma questa mostra, con riguardo alla forma (80) per la Λ, che sostituendo la I con la $I\,\bar{I}$, la Λ^* si muta nella $\Lambda^* H \bar{\Lambda}^*$; e siccome le Λ^*, H, $\bar{\Lambda}^*$ sono matrici non singolari si conclude nel senso voluto.

È così completamente dimostrata la proposizione enunciata a pag. 93.

Ricordando anche i risultati del n. 10, possiamo infine mettere in evidenza il contenuto geometrico dell'analisi svolta, enunciando il seguente:

TEOREMA I. — *Se per un corpo K di funzioni quasi abeliane la matrice dei periodi primitivi è nella forma normale*:

$$\omega = \left\| \begin{matrix} A & \Omega & O \\ O & \Omega_1 & B \\ O & C & O \\ O & O & O \end{matrix} \right\| \tag{88}$$

(in modo che sia $\rho = p$), tutte e sole e ciascuna una volta sola le trasformazioni in sè della varietà quasi abeliana di PICARD *del corpo K, che siano rappresentate da congruenze lineari tra*

gli integrali virtualmente di prima specie, sono date dalla formula:

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \qquad (\mathrm{mod}\ \omega)$$

dove la matrice Λ *ha l'espressione:*

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \bar{\Lambda} & S \\ O & R \end{Vmatrix} \tag{89}$$

con:

$$\bar{\Lambda} = \begin{Vmatrix} (AI_{11}+\Omega I_{21})\,A^{-1} & (AI_{13}+\Omega I_{23})\,B^{-1} & X_1 \\ (\Omega I_{21}+BI_{31})\,A^{-1} & (\Omega_1 I_{23}+BI_{33})\,B^{-1} & X_2 \\ CI_{21}\,A^{-1} & CI_{23}\,B^{-1} & X_3 \end{Vmatrix} \tag{90}$$

$$X_1 = [(AI_{12}+\Omega I_{22}) - (AI_{11}+\Omega I_{21})\,A^{-1}\,\Omega - (AI_{13}+\Omega I_{23})\,B^{-1}\,\Omega_1]\,C^{-1}$$
$$X_2 = [(\Omega_1 I_{22}+BI_{32}) - (\Omega_1 I_{21}+BI_{31})\,A^{-1}\,\Omega - (\Omega_1 I_{23}+BI_{33})\,B^{-1}\Omega_1]\,C^{-1}$$
$$X_3 = [CI_{22} - CI_{21}\,A^{-1}\,\Omega - CI_{23}\,B^{-1}\,\Omega_1]\,C^{-1}$$

mentre $\mathrm{R}^{(\delta_2-\rho,\ \delta_2-\rho)}$, $S^{(2p+\delta_1,\ \delta_2-\rho)}$ *sono matrici arbitrarie (aventi il numero di righe e di colonne indicati), soggette alla sola condizione che il determinante della R sia non nullo; e la matrice*

$$\begin{Vmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{Vmatrix} \tag{91}$$

è un'arbitraria matrice unimodulare.

Il caso a)

Conviene ora, sempre nel caso $\rho = p$, distinguere i due sottocasi, indicati con *a*) e *b*) all'inizio di questo n., in cui rispettivamente è $\rho = \delta_2$, $\rho < \delta_2$.

Nel caso *a*), con riguardo al teorema VI del n. 10 e al precedente teorema I, si può enunciare il:

TEOREMA II. — *Se per un corpo di funzioni quasi abeliane è* $\rho = p = \delta_2$, *il gruppo delle schiere è isomorfo al gruppo delle matrici unimodulari d'ordine* $2p + \delta_1$, *mentre il gruppo delle matrici* Λ, *isomorfo al gruppo delle schiere, è costituito da tutte e sole le matrici* (89), *al variare della matrice I data dalla* (91) *nel campo delle matrici unimodulari d'ordine* $2p + \delta_1$.

Ne segue che, nel caso $\rho = p = \delta_2$ il gruppo delle schiere è sempre *infinito*, salvo che sia $2p + \delta_1 = 1$ ossia:

$$p = 0 \quad , \quad \delta_1 = 1 \quad ,$$

nel qual caso le possibili matrici I unimodulari, di ordine 1, si riducono ai numeri $+1$ e -1.

Enunciamo quindi anche il seguente:

TEOREMA III. — *La varietà quasi abeliana di* PICARD *di un corpo di funzioni quasi abeliane che possiede una matrice dei periodi normale con* $\rho = p = \delta_2$, *possiede sempre infinite schiere di trasformazioni in sè, rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie. Dette schiere si ottengono al variare di parametri interi e quindi in corrispondenza a parametri variabili in modo discreto. Fa eccezione il caso* $\rho = p = \delta_2 = 0$, $\delta_1 = 1$, *in cui si hanno le due sole schiere delle trasformazioni di prima e di seconda specie.*

Il caso b)

Nel caso *b*), in cui $\rho = p < \delta_2$, tenuto conto del precedente teorema I si può invece enunciare il:

TEOREMA IV. — *Se un corpo K di funzioni quasi abeliane possiede una matrice dei periodi normale con i caratteri* $\rho = p < \delta_2$, *il gruppo delle schiere è soltanto omomorfo al* *gruppo delle matrici unimodulari d'ordine* $2p+\delta_1$, *mentre il gruppo delle matrici* Λ, *isomorfo al gruppo delle schiere, è costituito da tutte e sole le matrici* (89), *dove la* $\overline{\Lambda}$ *è data dalla* (90), *e la* (91) *è una arbitraria matrice unimodulare. In conseguenza la varietà quasi abeliana di* PICARD *associata a* K *possiede sempre infinite schiere di trasformazioni in sè. Tali schiere si ottengono in corrispondenza al variare di parametri che in parte variano in modo discreto* [gli elementi interi della matrice unimodulare (91)] *e in parte in modo continuo* (gli elementi delle matrici S ed R che sono arbitrari, salvo la condizione $|R|\neq 0$). *I parametri variabili con continuità sono in numero di:*

$$(2p+\delta_1)(\delta_2-p)+(\delta_2-p)^2=(p+\delta_1+\delta_2)(\delta_2-p)=\pi(\delta_2-p).$$

Se $2p+\delta_1=0$, *ossia* $p=\delta_1=0$, *mancano i parametri variabili in modo discreto e vi sono solo* $(\delta_2)^2$ *parametri variabili con continuità. Il gruppo delle schiere è allora un gruppo continuo a una sola schiera.*

Se $2p+\delta_1=1$, *ossia* $p=0$ *e* $\delta_1=1$, *i parametri variabili in modo discreto si riducono a dipendere solo dalla scelta del numero* $+1$ *o* -1 *che da solo costituisce la matrice* (91). *Il gruppo delle schiere è allora un gruppo continuo misto formato a sua volta da due schiere a* $\delta_2(\delta_2+1)$ *parametri.*

Caso $\rho<p$.

Quando $\rho<p$ occorre distinguere il caso in cui la matrice quasi abeliana ω sia *generica*, o a *moduli generici*, dal caso in cui invece sia a *moduli particolari*.

Esauriamo qui la discussione nel caso di una matrice ω generica, lasciando aperta la questione nel caso di una matrice ω a moduli particolari.

Nelle ipotesi attuali la (64) è soddisfatta soltanto dalla:

$$I = kU \ .$$

ove U è la matrice unità e k un intero qualunque (cfr. il teorema VI del n. 9). Se inoltre deve essere $|I| = \pm 1$, necessariamente $k = \pm 1$; e allora per il teorema V del n. 9 la matrice Λ deve avere la forma:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \pm\ U^{(p+\delta_1+\varrho,\ p+\delta_1+\varrho)} & V^{(p+\delta_1+\varrho,\ \delta_2-\varrho)} \\ O^{(\delta_2-\varrho,\ p+\delta_1+\varrho)} & W^{(\delta_2-\varrho,\ \delta_2-\varrho)} \end{Vmatrix}$$

ove le matrici V e W sono arbitrarie. La condizione $|\Lambda| \neq 0$ sarà allora soddisfatta se e soltanto se

$$|\mathrm{W}| \neq 0 \ .$$

Si conclude con il:

TEOREMA V. — *Se per un corpo K di funzioni quasi abeliane si può scegliere come matrice dei periodi una generica matrice normale per la quale sia $\varrho < p$, tutte e sole e ciascuna una volta sola le trasformazioni in sè della varietà quasi abeliana di* PICARD *associata al corpo K, che siano rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie, sono date dalla formula*:

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \qquad\qquad (\mathrm{mod}\ \omega)$$

dove Λ ha l'espressione:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \pm\, U & V \\ O & W \end{Vmatrix}$$

in cui U è la matrice unità di ordine $p + \delta_1 + \varrho$, e $V^{(p+\delta_1+\varrho,\ \delta_2-\varrho)}$ $W^{(\delta_2-\varrho,\ \delta_2-\varrho)}$ sono due matrici, aventi il numero di righe e di colonne indicati, soggette alla sola condizione $|W| \neq 0$.

Il caso c)

E allora, nel caso *c*) in cui $\rho < p$, $\rho = \delta_2$ si ha il seguente:

TEOREMA VI. — *Se un corpo di funzioni quasi abeliane possiede come matrice dei periodi una generica matrice normale per cui* $\rho < p$, $\rho = \delta_2$, *esistono sulla varietà quasi abeliana di* PICARD *del corpo le due sole schiere delle trasformazioni di prima e di seconda specie. Il gruppo delle schiere è finito e si riduce ad un gruppo ciclico del secondo ordine.*

Il caso d)

Se invece siamo nel caso *d*), in cui $\rho < p$, $\rho < \delta_2$, vale il:

TEOREMA VII. — *Se un corpo di funzioni quasi abeliane possiede come matrice dei periodi una generica matrice normale per cui* $\rho < p$, $\rho < \delta_2$, *esistono sempre sulla varietà quasi abeliana di* PICARD *del corpo infinite schiere di trasformazioni. Il gruppo delle schiere è un gruppo continuo misto formato a sua volta da due schiere a* $(\delta_2 - \rho)\ (p + \delta_1 + \delta_2) = \pi\ (\delta_2 - \rho)$ *parametri.*

OSSERVAZIONE — La precedente analisi mette in rilievo profonde differenze tra il caso delle varietà V_π quasi abeliane e quello delle V_π abeliane. In queste ultime infatti, per *moduli generali,* si hanno soltanto le due schiere ∞^π di trasformazioni di prima e di seconda specie (date dalle (18) e (19)), e soltanto per *moduli particolari* possono presentarsi schiere *straordinarie* in dipendenza da parametri in ogni caso variabili in modo *discreto*; su una varietà quasi abeliana invece, anche a moduli generali possono benissimo presentarsi schiere distinte da quelle di prima e di seconda specie, in dipendenza da parametri che possono variare sia in modo discreto che in modo continuo.

Nel prossimo n. approfondiremo, in un caso particolare, lo studio della natura delle trasformazioni in esame, e giungeremo alla conclusione che esse possono essere anche *trascendenti*, contrariamente a quanto accade nel caso abeliano in cui esse sono invece sempre *birazionali*.

12. Ulteriore studio nel caso di una varietà quasi abeliana di Jacobi, relativa ad una curva di genere effettivo nullo.

Approfondiamo l'indagine nel caso che la varietà V_π sia la varietà di Jacobi di una curva C di genere effettivo nullo ($p=0$), sulla quale siano fissate $\pi=\delta_1+\delta_2$ coppie neutre, delle quali δ_1 a punti distinti e δ_2 a punti coincidenti; i punti della V_π risultando in corrispondenza generalmente biunivoca con i gruppi di π punti di C.

In questo caso è anche $\rho=0$, e vale il teorema I del n. 11: la matrice dei periodi primitivi (88) assume la forma:

$$\omega = \begin{Vmatrix} B^{(\delta_1, \delta_1)} \\ O^{(\delta_2, \delta_1)} \end{Vmatrix} \tag{92}$$

e le trasformazioni di Conforto T della varietà V_π in sè sono (tutte e sole e ciascuna una volta sola):

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \qquad (\mathrm{mod}\ \omega) \tag{93}$$

dove $\lambda^{(\pi, 1)}$ è arbitraria, ma determinata (mod ω), mentre la matrice Λ ha l'espressione:

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \overline{\Lambda}^{(\delta_1, \delta_1)} & S^{(\delta_1, \delta_2)} \\ O^{(\delta_2, \delta_1)} & R^{(\delta_2, \delta_2)} \end{Vmatrix} \tag{94}$$

in cui $\overline{\Lambda}$ è un'arbitraria matrice unimodulare, la S è arbitraria, la R è arbitraria non singolare ($|R| \neq 0$).

Le schiere ∞^{π} di trasformazioni di CONFORTO dipendono dunque da parametri variabili in modo discreto (gli elementi interi della matrice $\overline{\Lambda}$) e da

$$\delta_1 \delta_2 + \delta_2^2 = (\delta_1 + \delta_2) \delta_2 = \pi \delta_2$$

parametri variabili con continuità (gli elementi delle matrici R ed S). Naturalmente se $\delta_2 = 0$ vi sono solo parametri variabili in modo discreto, se $\delta_1 = 0$ solo parametri variabili in modo continuo.

Esaminiamo la natura delle trasformazioni operanti sulla V_π.

Quale modello proiettivo della V_π quasi abeliana di JACOBI considerata può assumersi ([50], n. 32) uno spazio lineare S_π. Se $x_1, x_2, \ldots, x_\pi$ sono coordinate non omogenee di punto nell'S_π, il teorema di inversione in un campo neutro ([50], n. 29) permette di associare al punto della V_π, in cui gli integrali virtualmente di prima specie assumono (mod ω) i valori $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, il punto di S_π di coordinate:

$$(95) \qquad \begin{cases} x_h = e^{u_h} & (h = 1, 2, \ldots, \delta_1) \\ x_l = u_l & (l = \delta_1 + 1, \delta_1 + 2, \ldots, \pi) \end{cases}$$

Su tale modello della V_π restano determinate le $2\delta_1 + \delta_2$ varietà $U_{\pi-1}$ rappresentative dei gruppi di π punti della curva C, dei quali fa parte un punto di una delle $\delta_1 + \delta_2$ coppie neutre fissate sulla C; esse si distribuiscono in δ_1 coppie tra loro *associate* (relative alle coppie neutre a punti distinti): l'iperpiano $x_h = 0$ e l'iperpiano improprio di S_π ($h = 1, 2, \ldots, \delta_1$), e in altre δ_2 varietà (relative alle coppie neutre a punti coincidenti) tutte coincidenti con l'iperpiano improprio.

Come si scrivono le equazioni delle trasformazioni T (93), in coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_\pi$? Posto (cfr. (93), (94)):

$$\lambda = \| \lambda_h \| \qquad (h = 1, 2, \ldots, \pi)$$

$$\overline{\Lambda} = \| \lambda_{hk} \| \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, \delta_1)$$

$$S = \| s_{ij} \| \qquad (i = 1, 2, \ldots, \delta_1 ; j = 1, 2, \ldots, \delta_2)$$

$$R = \| r_{lm} \| \qquad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \pi ; m = 1, 2, \ldots, \delta_2)$$

e tenuto conto delle (95), e della forma (92) per la matrice dei periodi, le (93) equivalgono alle:

$$(96) \quad \begin{cases} e^{u'_h} = c_h \, e^{\sum_{1}^{\delta_1} {}_k \lambda_{hk} u_k + \sum_{1}^{\delta_2} {}_m s_{hm} u_{m+\delta_1}} & (h = 1, 2, \ldots, \delta_1) \\ u'_l = \sum_{1}^{\delta_2} {}_m r_{lm} u_{m+\delta_1} + c_l & (l = \delta_1 + 1, \ldots, \pi). \end{cases}$$

ove è:

$$c_h = e^{\lambda_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \delta_1)$$

$$c_l = \lambda_l \qquad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \pi).$$

cosicchè le c_h $(h = 1, 2, \ldots, \delta_1)$ sono costanti (finite e) non nulle.

Teniamo ora conto delle (95), e indichiamo con $x'_1, x'_2, \ldots, x'_\pi$ le coordinate del punto corrispondente di $x_1, x_2, \ldots, x_\pi$ nella T considerata, in modo che sia:

$$\begin{cases} x'_h = e^{u'_h} & (h = 1, 2, \ldots, \delta_1) \\ x'_l = u'_l & (l = \delta_1 + 1, \ldots, \pi). \end{cases}$$

Le (96) si scrivono allora nella forma:

$$(97) \quad \begin{cases} x'_h = c_h \, x_1^{\lambda_{h1}} x_2^{\lambda_{h2}} \ldots x_{\delta_1}^{\lambda_{h\delta_1}} \cdot e^{\sum_{1}^{\delta_2} {}_m s_{hm} x_{m+\delta_1}} & (h = 1, 2, \ldots, \delta_1) \\ x'_l = \sum_{1}^{\delta_2} {}_m r_{lm} x_{m+\delta_1} + c_l & (l = \delta_1 + 1, \ldots, \pi) \end{cases}$$

Queste sono dunque le equazioni della trasformazione a cui si riduce una T sul modello considerato della varietà V_π, cioè nell'S_π di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_\pi$.

Le (97) rappresentano tutte le trasformazioni T (93) al variare dei parametri in esse contenuti cioè degli interi λ_{hk} in modo che $|\lambda_{hk}| = \pm 1$ e delle c_h, c_l, s_{ij}, r_{lm} in modo che $|r_{lm}| \neq 0$, essendo inoltre le c_h non nulle.

Dalle (97) discendono ora importanti conseguenze.

Supponiamo dapprima $\delta_1 = 0$ (e $\pi = \delta_2$), in modo che sulla curva C di partenza le coppie neutre sono tutte a punti coincidenti. Le (97) si riducono alle:

$$x'_l = \sum_{1}^{\pi}{}_m\, r_{lm}\, x_m + c_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, \pi)$$

che sono *affinità* non degeneri dello S_π in sè, e vale il:

TEOREMA I. — *Il gruppo delle trasformazioni di* CONFORTO *sulla varietà quasi abeliana di* JACOBI *di una curva di genere virtuale* π, *ottenuta da una curva di genere effettivo nullo fissando sopra questa* π *coppie neutre a punti coincidenti, è un gruppo continuo a* $\pi(\pi+1)$ *parametri, isomorfo al gruppo delle affinità (non degeneri) di uno spazio lineare* S_π.

Esaminiamo ora il caso $\delta_2 = 0$ (e $\pi = \delta_1$), in cui sulla curva C le coppie neutre sono tutte a punti distinti. Le (97) si riducono alle:

$$(98) \qquad x'_h = c_h\, x_1^{\lambda_{h1}}\, x_2^{\lambda_{h2}} \ldots x_\pi^{\lambda_{h\pi}} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \pi)$$

ove le λ_{hk} sono interi il cui determinante vale ± 1, mentre le c_h sono costanti non nulle.

Le (98) rappresentano trasformazioni cremoniane dell'S_π in sè di un particolare tipo che diremo, con CONFORTO (cfr.

[19]) *tipo monomiale* perchè ciascuna delle coordinate x'_h del punto trasformato di $(x_1, x_2, \ldots, x_\pi)$ si esprime come quoziente di due *monomi* nelle coordinate x_h.

Le (98) rappresentano anzi, al variare dei π parametri (non nulli) c_h $(h = 1, 2, \ldots, \pi)$ e al variare degli interi λ_{hk} (con la condizione $|\lambda_{hk}| = \pm 1$), *tutte* le trasformazioni cremoniane monomiali dello S_π in sè, pur di *chiamare monomiale ogni trasformazione cremoniana le cui equazioni siano del tipo* (98), *prescindendo dalla condizione* $|\lambda_{hk}| = \pm 1$ (purchè siano però non nulle le costanti c_h, altrimenti la trasformazione degenera). Infatti, *scelti comunque nella* (98) *gli interi* λ_{hk}, *la* (98) *stessa rappresenta una trasformazione birazionale* (e non soltanto razionale) *se e soltanto se* $|\lambda_{hk}| = \pm 1$. Questo fatto si può stabilire direttamente, ma noi siamo in grado di dimostrarlo nel modo più rapido, osservando che ogni trasformazione del tipo (98) (biunivoca o no), scritta nella forma:

$$u'_h \equiv \sum_{1}^{\pi}{}_k \, \lambda_{hk} \, u_k + \log c_h \qquad (\text{mod. periodi}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, \pi)$$

si può interpretare come una trasformazione sopra una varietà V_π quasi abeliana di Jacobi relativa ad una curva di genere virtuale π, ottenuta fissando sopra una curva di genere effettivo nullo π coppie neutre a punti distinti; e che tale trasformazione sulla V_π è biunivoca se e soltanto se $|\lambda_{hk}| = \pm 1$ (cfr. l'inizio del presente n.).

In uno spazio lineare S_π nel quale sia fissato un sistema di coordinate non omogenee di punto si può quindi parlare del *gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali*, e allora si può enunciare il:

Teorema II. — *Il gruppo delle trasformazioni di* Conforto *sulla varietà quasi abeliana di* Jacobi *di una curva di genere virtuale* π, *ottenuta da una curva di genere effettivo nullo fissando sopra questa* π *coppie neutre a punti distinti, è isomorfo* *al gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali di uno spazio lineare* S_π.

Resta da discutere il caso generale, in cui $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$. In questo caso occorre considerare le (97) nella loro generalità. E qui ci si imbatte nel fatto, a priori inaspettato e assai significativo che, di regola, le trasformazioni (97) non sono birazionali, ma *trascendenti*, rimanendo pur sempre analitiche e generalmente biunivoche. È chiaro che questa circostanza è intrinseca al problema trattato e non dipende dal modello scelto per la varietà di JACOBI (lo spazio S_π), nè dal sistema di coordinate fissato entro lo S_π.

Concludendo si ha il:

TEOREMA III. — *Il gruppo delle trasformazioni di* CONFORTO *sulla varietà quasi abeliana di* JACOBI *di una curva di genere virtuale* π, *ottenuta da una curva di genere effettivo nullo fissando sopra questa* π *coppie neutre, delle quali* δ_1 ($\neq 0$) *a punti distinti e* δ_2 ($\neq 0$) *a punti coincidenti* (ove $\pi = \delta_1 + \delta_2$) *è un gruppo continuo misto ad infinite schiere costituito da trasformazioni* (*generalmente*) *trascendenti.*

NOTA. — *Sulle trasformazioni cremoniane monomiali.*

Il gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali di un S_π in sè, di equazioni (98), presenta un notevole interesse a sè, indipendentemente dai suoi legami con le varietà quasi abeliane.

Si tratta manifestamente, come mostrano le (98), di un *gruppo continuo misto ad infinite schiere* (salvo il caso $\pi = 1$, in cui esiste una sola schiera): si ottengono infatti le trasformazioni di una stessa schiera, fissando gli interi λ_{hk} e facendo variare le c_h; le diverse schiere essendo date da tutte le possibili scelte degli interi λ_{hk}, compatibilmente con la condizione $|\lambda_{hk}| = \pm 1$.

Uno studio preliminare delle proprietà generali di questo gruppo, con riguardo sopratutto alla sua struttura, è stato compiuto da M. BENEDICTY (cfr. [3]) relativamente ad un valore qualsivoglia dell'intero π. Non essendo nostro compito analizzare il gruppo in questione, diremo soltanto che esso risulta generabile mediante un gruppo continuo di affinità a π parametri, e mediante tre sue trasformazioni particolari, due omografiche ed una quadratica. La ricerca di BENEDICTY mette anche in evidenza una differenza esistente tra il caso $\pi = 2$ e il caso $\pi \geq 3$, per cui l'argomento si può trattare nella sua generalità solo per $\pi \geq 3$.

Più difficile appare lo studio dei sistemi lineari omaloidici ∞^{π} di S_{π} che generano le trasformazioni monomiali.

Tale studio è stato condotto a termine, nel caso $\pi = 2$, da M. T. BRENCI (nel suo lavoro [2]); ivi è completamente determinata la configurazione dei punti base della rete omaloidica relativa ad ogni trasformazione del gruppo. Le difficoltà incontrate già in questo caso, si accentuano notevolmente passando al caso generale $\pi > 2$, che rimane ancora da esaminare.

13. ANCORA SULLE TRASFORMAZIONI DI UNA VARIETÀ QUASI ABELIANA DI JACOBI, RELATIVA AD UNA CURVA DI GENERE EFFETTIVO NULLO.

Scopo del presente n. è di mettere in relazione le trasformazioni birazionali sopra un dato campo neutro γ di genere effettivo nullo (ove queste esistano, cfr. n. 2), con le trasformazioni esistenti — a norma del n. precedente — sulla relativa varietà quasi abeliana di JACOBI.

Il campo γ sia realizzato, come nel n. 3, sopra una retta r sulla quale è distesa un'ascissa x, assegnando le coppie neutre di punti distinti (α_s, β_s) $(s = 1, 2, \ldots, \delta_1)$, e le coppie neutre di punti coincidenti (α_t, α_t) $(t = \delta_1 + 1, \ldots, \delta_1 + \delta_2)$, talchè sia $\pi = \delta_1 + \delta_2$ il genere virtuale del campo.

In queste condizioni un sistema di integrali normali virtualmente di prima specie del campo si può scrivere nella forma ([50], n. 29):

$$(99)\quad \begin{cases} v_s = \log \dfrac{x-\alpha_s}{x-\beta_s} & (s=1,2,\ldots,\delta_1) \\[2ex] v_t = \dfrac{1}{x-\gamma_t} & (t=\delta_1+1,\ldots,\delta_1+\delta_2) \end{cases}$$

ovvero, se un punto della coppia considerata è il punto improprio, nella forma:

$$(99')\qquad v^* = \log\,(x-\alpha^*)\ ,\qquad v^{**} = x$$

La matrice dei periodi è in ogni caso del tipo (92).

Supponiamo ora che il campo γ ammetta trasformazioni birazionali in sè, e sia τ una di esse:

$$x' = \tau(x) = \frac{a\ x+b}{c\ x+d}$$

Studiamo il comportamento degli anzidetti integrali nei confronti della τ.

Una verifica del tutto elementare mostra intanto che:

$$(100)\quad \begin{cases} \log \dfrac{\tau(x)-\alpha}{\tau(x)-\beta} = \log \dfrac{x-\tau^{-1}(\alpha)}{x-\tau^{-1}(\beta)} + \log \dfrac{a-\alpha c}{a-\beta c} \\[2ex] \dfrac{1}{\tau(x)-\alpha} = \dfrac{(c\,\tau^{-1}(\alpha)+d)^2}{a\,d-b\,c}\ \dfrac{1}{x-\tau^{-1}(\alpha)} + \dfrac{c\,(c\,\tau^{-1}(\alpha)+d)}{a\,d-b\,c} \end{cases}$$

e:

$$(100')\quad \begin{cases} \log\,(\tau(x)-\alpha) = \log \dfrac{x-\tau^{-1}(\alpha)}{x-\tau^{-1}(\infty)} + \log\left(\dfrac{a}{c}-\alpha\right), \\[2ex] \tau(x) = -\dfrac{a\,d-b\,c}{c^2}\ \dfrac{1}{x-\tau^{-1}(\infty)} + \dfrac{a}{c}\ . \end{cases}$$

Osserviamo ora che se (α, β) o (α, α) è una coppia neutra del campo considerato, lo è anche $\tau^{-1}(\alpha, \beta) \equiv (\tau^{-1}(\alpha), \tau^{-1}(\beta))$ ovvero $\tau^{-1}(\alpha, \alpha) = (\tau^{-1}(\alpha), \tau^{-1}(\alpha))$. Se allora indichiamo con $v_1, \pm v_2, v_3, v_4$ gli integrali (99) o (99′) relativi alle coppie (α, β), $\tau^{-1}(\alpha, \beta)$, (α, α), $\tau^{-1}(\alpha, \alpha)$ [il doppio segno essendo dovuto all'ambiguità nella scelta dell'ordine della coppia], dalle (100) segue subito:

$$
(101) \quad \begin{cases} v'_1 = \pm v_2 + \log \dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c}, \\[2ex] v'_3 = \dfrac{(c\,\tau^{-1}(\alpha) + d)^2}{a d - b c}\, v_4 + \dfrac{c\,(c\,\tau^{-1}(\alpha) + d)}{a d - b c}, \end{cases}
$$

dove si è indicato con $v'_i = v_i(x')$ il valore assunto dall'integrale $v_i = v_i(x)$ nel punto x' corrispondente del punto x nella trasformazione τ.

Nel caso che la coppia neutra contenga il punto improprio, dalle (100′) segue:

$$
(101') \quad v'_1 = \pm v_2 + \log\left(\frac{a}{c} - \alpha\right), \quad v'_3 = -\frac{a d - b c}{c^2}\, v_4 + \frac{a}{c}.
$$

S'intende che l'integrale v_2 $[v_4]$ può coincidere, eventualmente a meno del segno, con l'integrale v_1 $[v_3]$, nel caso che la relativa coppia neutra sia mutata in sè dalla trasformazione τ. Inoltre i coefficienti degli integrali nei secondi membri delle (101), (101′) sono: ± 1 per quelli relativi a coppie di punti distinti, e costanti complesse non nulle per quelli relativi a coppie di punti coincidenti: basta osservare che nella seconda delle (101) (l'unica per cui l'affermazione non sia immediata di per sè), non può essere $c\,\tau^{-1}(\alpha) + d = 0$, senza essere $\alpha = \infty$ e senza cadere quindi nella seconda delle (101′).

Si conclude in ogni caso con il seguente:

TEOREMA I. — *Una trasformazione birazionale in sè di un campo neutro di genere effettivo nullo e di caratteri* δ_1, δ_2 *opera sugli integrali normali virtualmente di prima specie del campo una sostituzione lineare che si può scrivere, in forma matriciale:*

$$(102)\qquad v' = \Lambda v + \lambda_1 \quad , \quad \text{con } \Lambda = \begin{Vmatrix} \overline{\Lambda}^{(\delta_1,\delta_1)} & O^{(\delta_1,\delta_2)} \\ O^{(\delta_2,\delta_1)} & R^{(\delta_2,\delta_2)} \end{Vmatrix},$$

avendo indicato con $v^{(\pi,1)}$, $v'^{(\pi,1)}$ *le matrici costruite con i valori degli integrali in un punto e nel suo trasformato, con* $\overline{\Lambda}$ *ed* R *matrici che contengono in ciascuna riga e in ciascuna colonna un solo elemento non nullo; inoltre* $\overline{\Lambda}$ *è unimodulare* (*i suoi elementi non nulli sono quindi* ± 1) *mentre* R *è ad elementi complessi; infine* $\lambda_1^{(\pi,1)}$ *è una matrice complessa definita* (mod ω), *essendo* ω *la matrice dei periodi* (92).

Prendiamo ora in esame la varietà quasi abeliana di JACOBI V_π relativa al campo γ, definita, a meno di trasformazioni birazionali, come la varietà dei gruppi di π punti della curva sostegno del campo.

Se $x_1, x_2, \ldots, x_\pi$ è un gruppo di π punti della retta sostegno del nostro campo γ, le quantità:

$$u_r = v_r(x_1) + v_r(x_2) + \ldots + v_r(x_\pi) \qquad (r = 1, 2, \ldots, \pi)$$

sono funzioni del punto di V_π definite (mod ω) (cfr. [50], n. 29), e per il teorema di inversione in un campo neutro ([50], n. 26) le coordinate del punto di V_π sono funzioni quasi abeliane delle u_r con la matrice dei periodi ω (92). Le $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ risultano integrali normali virtualmente di prima specie della V_π.

Ora una trasformazione birazionale τ del campo neutro in sè, pensata come trasformazione dei gruppi di π punti, induce una trasformazione birazionale T sulla V_π. In base al teorema I di questo n. e alla definizione degli integrali u_r, la T induce su questi ultimi la sostituzione lineare:

$$u' = \Lambda u + \lambda$$

ove Λ è data dalla (102) e $\lambda = \pi\lambda_1$, la λ essendo sempre determinata (mod ω) per essere π un intero.

In definitiva dunque, la trasformazione T operante sulla V_π è rappresentabile con una congruenza lineare tra gli integrali virtualmente di prima specie della V_π, e rientra quindi tra quelle del tipo (93) studiate nel n. 12, l'attuale matrice Λ essendo una particolare determinazione della Λ data dalla (94). Anzi, poichè l'attuale Λ rientra fra le matrici (94) per le quali $S = O$, e queste forniscono sempre trasformazioni (93) che sono *birazionali* (cfr. (97)) possiamo enunciare il:

TEOREMA II. — *Il gruppo delle trasformazioni indotte sulla varietà quasi abeliana di* JACOBI *relativa ad un campo neutro di genere effettivo nullo dalle trasformazioni birazionali in sè del campo, è un sottogruppo (di trasformazioni birazionali) del gruppo delle trasformazioni di* CONFORTO *della V_π in sè, di cui al n. precedente.*

È importante tuttavia osservare che le trasformazioni qui trovate esistono *sempre* sulla varietà quasi abeliana di JACOBI avente i caratteri δ_1, δ_2 del campo γ considerato (ammetta questo o no trasformazioni birazionali in sè). Esse acquistano però un particolare significato geometrico — quello di provenire da trasformazioni del campo γ — quando quest'ultimo, pur mantenendo i caratteri δ_1, δ_2, viene ad acquistare trasformazioni birazionali in sè.

I risultati conseguiti in questo n. valgono anche per il campo χ di caratteri $p = \delta_1 = 0$, $\delta_2 = 2$ (cfr. n. 1), che andava trattato a sè in alcune questioni di carattere generale.

Se infatti le coppie neutre sono (0,0), (∞, ∞) le proiettività $x'=r_{11}\, x$, $x'=r_{12}/x$ inducono sugli integrali $u_1=x_1+x_2$, $u_2=1/x_1+1/x_2$ le trasformazioni:

$$u'=\begin{Vmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r_{11}} \end{Vmatrix} u \quad , \quad u'=\begin{Vmatrix} 0 & r_{12} \\ \dfrac{1}{r_{12}} & 0 \end{Vmatrix} u$$

che rientrano come caso particolare tra le:

$$u'=\begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{Vmatrix} u+\lambda \qquad \text{con} \quad \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Si comprende infine che è possibile determinare la matrice Λ, che compare nella (102), relativamente alle trasformazioni dei diversi tipi di campi neutri che ammettono trasformazioni birazionali in sè, classificati nel n. 3 (cfr. [5], n. 8).

14. Sulla nozione di varietà quasi abeliana e di trasformazione birazionale su di essa.

Premettiamo un richiamo sulla teoria delle funzioni abeliane.

Sia ω una matrice di Riemann di genere π, K il relativo corpo di funzioni abeliane di π variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, e V_π la varietà di Picard ad esso associata. Le funzioni del corpo K si interpretano allora come (tutte e sole le) funzioni razionali su V_π, e $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ come integrali semplici di prima specie sulla V_π (cfr. ad es. [30]). È anche ben noto che coincidono i problemi di:

a) determinare tutte le trasformazioni birazionali in sè della varietà V_π (ovvero gli automorfismi del corpo K).

b) determinare tutte le matrici $\Lambda^{(\pi,\pi)}$ per cui la congruenza:

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \qquad (\mathrm{mod}\ \omega) \tag{103}$$

sia univocamente invertibile.

In questo n. prenderemo in esame i due problemi *a*) e *b*) nel caso quasi abeliano, e giungeremo alla conclusione che la loro coincidenza viene a mancare per delle circostanze che saranno chiarite.

Pensando che la coincidenza dei problemi *a*), *b*) è a fondamento della *teoria aritmetica delle funzioni abeliane*, quale è stata sviluppata da G. SCORZA in classici lavori [1], è chiaro quale sia l'importanza della questione qui affrontata per dare un orientamento alla costruzione della *teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane*, a cui sono dedicate le considerazioni di questa seconda parte del volume.

Sia dunque K un corpo di funzioni quasi abeliane, con una matrice di periodi primitivi ω nella forma normale di SEVERI, data dalla (23); e sia V_π la relativa varietà quasi abeliana di PICARD. Su questa, come nel caso abeliano, le funzioni del corpo K si rispecchiano in tutte e sole le funzioni razionali, mentre $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ dànno luogo su V_π ad altrettanti integrali semplici, da considerare come virtualmente di prima specie. Indichiamo anche con W la varietà di V_π luogo dei punti singolari e dei punti di indeterminazione dei suddetti integrali.

Importa ora osservare che la varietà V_π può essere considerata in due diverse accezioni: cioè considerata *in sè* ovvero come *varietà quasi abeliana*.

Considerare la V_π come varietà quasi abeliana di PICARD significa considerare la V_π insieme con il sistema dei π integrali semplici $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ virtualmente di prima specie, che individuano su di essa la varietà W.

---

(1) Cfr. per es. le due memorie [41] e [42].

Considerare la V_π *in sè* significa invece prescindere dagli integrali anzidetti.

Fatta questa precisazione, potrà accadere che una trasformazione birazionale della V_π in sè non debba considerarsi tale pensando la V_π come varietà quasi abeliana di PICARD. Cosa debba intendersi per trasformazione sopra una varietà quasi abeliana, concepita come tale, è suggerito da ragioni di analogia con il caso abeliano e sopratutto dal fatto che in una congruenza come la (103) (in cui $u_1, \ldots, u_\pi$ siano gli integrali sulla varietà quasi abeliana) u' diventa infinito solo quando lo sia u. Si considereranno quindi come trasformazioni birazionali sopra una V_π quasi abeliana soltanto quelle trasformazioni birazionali rappresentabili da congruenze lineari univocamente invertibili tra gli integrali virtualmente di prima specie; insomma quelle trasformazioni della V_π in sè per le quali è invariante la varietà W.

Ciò premesso, è intanto chiaro che una trasformazione birazionale sopra la V_π considerata *in sè* non può sempre essere rappresentata da una congruenza come la (103). Infatti una V_π considerata in sè può sempre pensarsi come prodotto di una varietà abeliana di PICARD a p dimensioni per uno spazio lineare a δ dimensioni (vedi [50], n. 54); e mentre quest'ultima ammette in generale un gruppo continuo infinito di trasformazioni birazionali in sè, nella (103) è disponibile soltanto al più un numero finito di parametri.

È quindi escluso che, nel caso quasi abeliano, coincidano i due problemi *a*) e *b*), almeno finchè si prendono in esame le trasformazioni birazionali della V_π considerata *in sè*.

A questo punto vien fatto di chiedersi se i due problemi coincidono considerando la V_π come *varietà quasi abeliana*, tanto più che le trasformazioni birazionali su di essa sono appunto definite come quelle rappresentabili mediante una congruenza invertibile del tipo della (103).

I risultati del n. 12 ci consentono di dare anche qui una risposta che in generale è negativa, giacchè una congruenza lineare univocamente invertibile tra gli integrali virtualmente di prima specie può rappresentare una trasformazione *trascendente* sulla relativa varietà quasi abeliana.

In conclusione si ha il:

TEOREMA. — *Se la V_π viene considerata in sè i due problemi a) e b) sono distinti.*

Se la V_π viene considerata come varietà quasi abeliana, i due problemi a) e b) coincidono quando tutte le congruenze lineari univocamente invertibili tra gli integrali virtualmente di prima specie rappresentano trasformazioni birazionali sulla V_π (beninteso considerando le trasformazioni birazionali che risultano dal riguardare la V_π come quasi abeliana). *I due problemi non coincidono se invece esistono* (e possono esistere, cfr. n. 12) *congruenze del tipo nominato che rappresentano trasformazioni trascendenti sulla V_π.*

È chiaro che la mancata coincidenza dei due problemi in questione trae origine dalle due circostanze seguenti:

1) *la varietà V_π di* PICARD *relativa ad un corpo di funzioni quasi abeliane può essere considerata in due modi distinti: in sè o come varietà quasi abeliana;*

2) *una congruenza invertibile del tipo* (103) *può non rappresentare sulla V_π una trasformazione birazionale.*

* * *

Accenniamo qui alla posizione e all'ufficio delle varietà quasi abeliane nella più ampia teoria delle varietà gruppali secondo L. ROTH, cioè di quelle varietà algebriche non singolari le quali ammettono un gruppo G continuo finito, algebrico, abeliano, di trasformazioni birazionali in sè.

Se d è la dimensione della varietà V, è ben noto il caso in cui anche il gruppo ha dimensione d ed è (semplicemente) transitivo su V_d. A seconda che G operi in modo *assolutamente* o *generalmente* transitivo, la V_d è un'ordinaria varietà di PICARD ovvero è una varietà quasi abeliana di PICARD.

Una classe più generale di varietà gruppali è offerto dalle varietà pseudo abeliane. Cosa si intende per varietà pseudo abeliana?

Supponiamo che V_d ammetta un gruppo (intransitivo) di trasformazioni birazionali in sè di dimensione $q<d$. Il gruppo ha come traiettorie delle varietà algebriche, sulle quali si suppone che operi in modo assolutamente transitivo, talchè esse siano delle varietà di PICARD V_q. In queste condizioni si dice che V_d è una *varietà pseudo abeliana di tipo* q.

La conoscenza dei tre tipi precedenti di varietà gruppali è uno strumento essenziale nella costruzione della teoria delle varietà gruppali in generale, che culmina nella classificazione delle varietà in questione: *ogni varietà gruppale è una varietà (abeliana o quasi abeliana) di* PICARD, *ovvero una varietà pseudo abeliana, ovvero una varietà trasformabile birazionalmente in una varietà rigata (contenente cioè una congruenza di spazi lineari).*

Il lettore troverà una limpida sintesi di questa teoria nel lavoro monografico [40] di L. ROTH, che è corredato da ricche notizie storiche e bibliografiche sull'argomento.

15. SULLA NOZIONE DI CORPI EQUIVALENTI E CORPI COINCIDENTI DI FUNZIONI QUASI ABELIANE.

Dobbiamo ora trarre ulteriori conseguenze dalle due circostanze enunciate nel n. precedente (pag. 122), in special modo dalla seconda. In particolare saremo condotti a stabilire quand'è che due corpi di funzioni quasi abeliane sono da considerare equivalenti e quando coincidenti. Per la necessaria chiarezza faremo spesso riferimento anche al caso abeliano.

Definiamo qui (con CONFORTO, ved. [23]) come *equivalenti* due corpi K e K' di funzioni abeliane o quasi abeliane di π (≥ 1) variabili quando K' si ottenga da K eseguendo sulle variabili indipendenti una sostituzione lineare e non degenere:

$$u' = \Lambda u + \lambda \tag{104}$$

ove u, u' sono matrici del tipo $(\pi, 1)$ aventi per elementi rispettivi le variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ ed $u'_1, u'_2, \ldots, u'_\pi$ dei due corpi K e K', mentre la Λ è una matrice complessa quadrata di ordine π a determinante non nullo, e infine λ, del tipo $(\pi, 1)$, è anch'essa ad elementi complessi.

Sia ora ω una matrice di periodi primitivi per K, sicchè tutte le altre matrici di periodi primitivi si ottengano da essa moltiplicandola a destra per una arbitraria matrice A *unimodulare* (cioè ad elementi interi e a determinante ± 1). Passando da K al corpo K' ad esso equivalente mercè la (104) si ottengono come matrici di periodi primitivi per K' tutte e sole le

$$\omega' = \Lambda\, \omega\, A \tag{105}$$

al variare della A unimodulare, talchè *se K e K' sono due corpi di funzioni abeliane o quasi abeliane equivalenti mercè la* (104), *tra due matrici di periodi primitivi ω ed ω' di K, K' intercorre sempre una relazione del tipo* (105) *con la A unimodulare.*

Si ricorderà pure che, nella teoria delle funzioni abeliane, due matrici di RIEMANN ω, ω' legate da una relazione del tipo (105), con Λ a determinante non nullo ed A unimodulare, si dicono esse stesse *equivalenti* (secondo G. SCORZA) onde *due corpi di funzioni abeliane equivalenti nel senso dell'attuale definizione hanno matrici di* RIEMANN *equivalenti secondo* SCORZA.

Premesso ciò, si ricordi che nella trattazione del SEVERI (cfr. [50], n. 48) due corpi *equivalenti* nel senso attuale vengono considerati spesso come uno *stesso* corpo, cioè « corpi equivalenti » equivale in pratica a « corpi coincidenti ». E non v'ha dubbio che numerosi e validi motivi giustificano questa identificazione.

Si presentano però delle questioni nella teoria delle funzioni quasi abeliane, a differenza dal caso delle funzioni abeliane, in cui è necessario tenere distinti i due concetti di *equivalenza* e di *coincidenza*. Di ciò passiamo subito a parlare, intendendo quindi in questo n. che due corpi coincidono quando sono costituiti dalle *stesse* funzioni, *salvo al più la denominazione delle variabili indipendenti*.

Suppongasi di avere due corpi K, K' equivalenti di funzioni quasi abeliane (o abeliane). Quali sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè essi coincidano? Una prima condizione necessaria è che K e K' possano ricondursi ad avere la medesima matrice di periodi primitivi. Ora *mentre nel caso abeliano questa condizione, insieme con l'equivalenza di* K *e* K', *è sufficiente per garantire la loro coincidenza, ciò non si verifica nel caso quasi abeliano, potendo due corpi equivalenti di funzioni quasi abeliane con gli stessi periodi essere tra loro distinti, cioè non costituiti dalle stesse funzioni.*

Nel dimostrare la precedente affermazione determineremo al tempo stesso le condizioni necessarie e sufficienti per la coincidenza di due corpi equivalenti di funzioni quasi abeliane, constatando che il fatto asserito è essenzialmente legato, da un lato con la circostanza n. 2 di cui al precedente n. 14 (pag. 122), e d'altro lato con il fatto che un corpo di funzioni quasi abeliane con una data matrice di periodi può non esaurire il (ma essere propriamente contenuto nel) corpo di *tutte* le funzioni meromorfe con quei periodi.

Prima di passare alla dimostrazione, dobbiamo premettere alcune necessarie considerazioni.

Siano K, K' due corpi equivalenti di funzioni quasi abeliane (o abeliane) con le rispettive matrici di periodi primitivi ω, ω'.

La (104), che muta le funzioni di K in quelle di K', può applicarsi anche al corpo K^*, a priori più ampio di K, formato da tutte le funzioni meromorfe di π variabili aventi ω come matrice di periodi primitivi; il risultato della trasformazione sarà il corpo K'^* di tutte le funzioni meromorfe con la matrice di periodi ω', a priori più ampio di K'. La (104) stabilisce anzi, come è immediato constatare, un *isomorfismo* tra i due corpi K e K' come pure tra K^* e K'^*.

In definitiva *la sostituzione lineare non degenere di variabili che muta l'uno nell'altro due corpi equivalenti K e K' di funzioni quasi abeliane, trasforma l'uno nell'altro, inducendo tra essi un isomorfismo, i corpi K^*, K'^*, a priori più ampi di K, K', costituiti da tutte le funzioni meromorfe con gli stessi periodi delle funzioni di K, K'. L'isomorfismo tra K^* e K'^* subordina tra K e K' l'isomorfismo generato dalla considerata sostituzione lineare non degenere di variabili.*

In base alla precedente osservazione lo studio della coincidenza o meno di K con K' potrà farsi indifferentemente a partire da K o da un qualunque corpo ad esso equivalente. Assumiamo quindi la matrice dei periodi primitivi ω nella forma normale di SEVERI (23) relativa ad un corpo di funzioni quasi abeliane di $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ variabili; gli interi p, δ_1, δ_2 e ρ associati alla ω hanno naturalmente il significato consueto, già richiamato nel n. 9.

Sia ora $\overline{K}$ un qualsiasi corpo per cui $\rho = \delta_2$, sicchè la sua matrice di periodi sia del tipo (23) con la Ω_2 della forma:

$$\Omega_2 = \|C \quad \Omega'_2\|$$

ove C ed Ω'_2 hanno il medesimo significato che avevano nel n. 9. Il corpo $\overline{K}$ è formato da funzioni meromorfe delle $\pi = p + \delta_1 + \rho$ variabili $u_1, u_2, \ldots, u_{p+\delta_1+\rho}$. Ampliando il corpo $\overline{K}$ con l'aggiunta di $\delta_2 - \rho$ nuove variabili $u_{p+\delta_1+\rho+1}$, $u_{p+\delta_1+\rho+2}, \ldots, u_{p+\delta_1+\delta_2}$, ove ora δ_2 è un qualunque intero maggiore di ρ, si ottiene un corpo K di $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ variabili avente una matrice di periodi (23) in cui la Ω_2 ha la forma generale (25).

Ora il corpo K^* relativo a K, è certamente più ampio di K stesso, perchè K^* contiene, tra le altre, tutte le funzioni meromorfe delle sole variabili $u_{p+\delta_1+\rho+i}$ $(i = 1, 2, \ldots, \delta_2 - \rho)$, e queste funzioni, se non si riducono a funzioni razionali, non possono appartenere a K, essendo quest'ultimo corpo costituito esclusivamente da funzioni razionali delle funzioni di $\bar{K}$ e delle nuove variabili $u_{p+\delta_1+\rho+i}$.

Ecco dunque un esempio di corpo K, che è un effettivo sottocorpo di K^*, e per il quale p, δ_1, δ_2, ρ sono arbitrari, salvo la condizione $\rho < \delta_2$.

Un altro esempio in cui si verifica la circostanza in esame si ottiene nell'ipotesi che sia $\rho = \delta_2 = 0$, p e δ_1 arbitrari e la matrice Ω_1 nella (23) sia identicamente nulla. In questo caso infatti la matrice (23) assume la forma:

$$\omega = \begin{Vmatrix} A & \Omega & O \\ O & O & B \end{Vmatrix} \tag{106}$$

ed è chiaro che il corpo K ottenuto combinando razionalmente le funzioni abeliane delle variabili $u_1, u_2, \ldots, u_p$ con la matrice dei periodi $\|A\ \Omega\|$ e le funzioni esponenziali e^{u_α} $(\alpha = p+1,\ p+2, \ldots, p+\delta_1)$ ammette la (106) come matrice dei periodi. Invece il corpo K^* di tutte le funzioni meromorfe con i periodi (106) è più ampio di K perchè a quest'ultimo non appartiene, ad es., la funzione:

$$e^{\left(e^{u_{p+1}} + u_{p+2} + \cdots + u_{p+\delta_1}\right)}$$

che pure ha i periodi (106).

È presumibile che K^* sia più ampio di K in *tutti* i casi (ved. CONFORTO [23], n. 5), ma non è questo che ora ci interessa.

Aggiungiamo invece qualche altra considerazione prima di tornare alla questione iniziale.

A partire da un corpo K di funzioni quasi abeliane delle variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, si consideri la varietà quasi abeliana di PICARD V_π associata a K, sulla quale le funzioni di K si interpretano come tutte e sole le funzioni razionali di punto. Sappiamo che sulla V_π le variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ sono integrali semplici virtualmente di prima specie che individuano su di essa la varietà W luogo dei loro punti singolari e di indeterminazione, sicchè i gruppi di valori finiti delle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ sono rappresentati dai punti di V_π non appartenenti a W.

Si pensi ora sulla V_π ad una funzione uniforme che abbia singolarità essenziali su W e sia meromorfa altrove. Come funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, essa non può però appartenere a K, chè altrimenti sarebbe razionale su V_π e dovrebbe quindi avere sole singolarità polari e di indeterminazione. Tuttavia essa è pur sempre una funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ meromorfa al finito e con i periodi ω, sicchè appartiene certo a K^*. È immediato anche il viceversa e possiamo allora concludere con il

TEOREMA I. — *Sia K un corpo di funzioni quasi abeliane delle variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ con la matrice dei periodi ω, V_π la varietà quasi abeliana di* PICARD *associata a K, e W la varietà di V_π luogo dei punti singolari e di indeterminazione degli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, da considerare virtualmente di prima specie su V_π. La condizione necessaria e sufficiente perchè il corpo K^* di tutte le funzioni meromorfe di $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ con i periodi ω sia più ampio di K è che esistano su V_π funzioni uniformi con singolarità essenziali sulla W e ovunque meromorfe fuori di essa.*

È appena necessario avvertire che se, in particolare, K è un corpo di funzioni *abeliane*, gli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ sono effettivamente di prima specie sulla V_π, onde la W viene a mancare e, com'è ben noto, K^* coincide con K.

Una condizione *sufficiente* perchè K^* sia più ampio di K è che *esista sulla* V_π *qualche funzione razionale* $f(P)$, *la cui varietà polare sia contenuta nella* W. In tal caso infatti la funzione $e^{f(P)}$, è olomorfa su V_π tranne che nella varietà polare della $f(P)$, che però è contenuta in W, ove si presentano singolarità essenziali.

Dobbiamo ora tornare alla questione iniziale circa la coincidenza di due corpi di funzioni quasi abeliane, che siano equivalenti a norma della (104), e che abbiano quindi le matrici dei periodi ω ed ω' legate dalla (105).

Ove i corpi equivalenti K e K' siano abeliani è ben noto ([23], n. 2) che essi coincidono *se e solo se, essendo* ω *una matrice dei periodi relativa ad uno di essi, esiste una matrice unimodulare* I *per cui*:

$$\omega I = \Lambda \omega \tag{107}$$

Conviene accennare, sia pure rapidamente, alla dimostrazione, per vedere dove essa viene meno quando si passi al caso quasi abeliano.

Per le matrici dei periodi ω, ω' relative a K, K' vale intanto la (105) con la A unimodulare. Se K e K' coincidono, i sistemi di periodi generati da ω, ω' devono coincidere, cioè deve esistere una matrice unimodulare B per cui $\omega' = \omega B$; e allora, per la (105) è $\omega B = \Lambda \omega A$, o anche $\omega B A^{-1} = \Lambda \omega$, e cioè vale la (107) non appena si ponga $I = B A^{-1}$. Ciò dimostra la *necessità* della (107).

Circa la *sufficienza* si pensi che, per la (107), la (105) si scrive:

$$\omega' = \omega I A = \omega B$$

con la B unimodulare. E allora coincidono i sistemi di periodi generati da ω, ω' talchè ogni funzione meromorfa di π variabili con la matrice dei periodi primitivi ω ammette anche la matrice dei periodi primitivi ω' e viceversa. *E siccome i corpi K, K' sono costituiti da* TUTTE *le funzioni meromorfe di π variabili con le rispettive matrici dei periodi* ω, ω', *essi necessariamente coincidono.*

Passiamo ora al caso quasi abeliano.

Il ragionamento che ci ha condotto a dimostrare la necessità della (107) vale tal quale:

Perchè coincidano due corpi di funzioni quasi abeliane, equivalenti mercè la sostituzione lineare non degenere di variabili (104), *è necessario che, essendo ω una matrice di periodi primitivi relativa a uno dei due corpi, esista una matrice unimodulare I per cui sia:*

$$\omega I = \Lambda \omega .$$

Esaminiamo la dimostrazione della sufficienza della (107). Anche nel caso attuale si può concludere che coincidono i sistemi di periodi generati da ω ed ω', ma non più che coincidono i corpi K e K', perchè sappiamo che un corpo K *non è necessariamente costituito da* TUTTE *le funzioni meromorfe con i dati periodi.*

Il fatto è che mentre un corpo di funzioni abeliane è costituito, *per definizione* (cfr. [30]), da tutte le funzioni meromorfe con una data matrice di periodi primitivi (in numero uguale al doppio del numero delle variabili), un corpo di funzioni quasi abeliane è invece costituito da funzioni meromorfe con una data matrice di periodi primitivi (in numero minore del doppio del numero delle variabili), soddisfacenti un teorema di addizione algebrica nel senso di WEIERSTRASS (cfr. [50], Introduzione, pag. 5 e segg.).

Gli esempi precedentemente adotti dimostrano che con quest'ultima definizione si ottiene un corpo K di funzioni quasi abeliane che di fatto può non esaurire il corpo K^* di tutte le funzioni meromorfe con i dati periodi.

Quale nuovo elemento occorre aggiungere per assicurare la coincidenza di due corpi K, K' di funzioni quasi abeliane, equivalenti mediante la (104)?

È la corrispondenza biunivoca, che abbiamo dianzi dimostrato essere un isomorfismo, stabilita tra K e K' dalla (104) stessa.

Essendo soddisfatta la (107) con la I unimodulare e la Λ a determinante non nullo, sappiamo (n. 10) che la (104) può interpretarsi come una trasformazione analitica e generalmente biunivoca sulla varietà quasi abeliana V_π. Se ora K e K' coincidono l'isomorfismo sopradetto si riduce a un automorfismo di K, e si interpreta pertanto come trasformazione birazionale sulla V_π (cfr. [24]).

Viceversa la (104), quando rappresenta una trasformazione birazionale sulla V_π, induce un automorfismo nel corpo delle funzioni razionali della V_π, cioè nel corpo K, sicchè K' coincide con K, e in definitiva vale il:

Teorema II. — *Perchè coincidano due corpi di funzioni quasi abeliane, che siano equivalenti mercè la* (104), *è necessario e sufficiente che:*

a) *esista una matrice unimodulare I, per cui valga la* (107), *essendo ω una matrice dei periodi relativa ad uno dei due corpi;*

b) *la sostituzione lineare di variabili* (104), *che muta un corpo nell'altro, possa interpretarsi come trasformazione birazionale sulla varietà quasi abeliana associata al primo corpo.*

Nel caso abeliano la condizione *b*) è superflua, mentre nel caso quasi abeliano, per quanto sappiamo, essa è essenziale.

Va tuttavia ricordato che, sia nell'un caso che nell'altro, la condizione *a*) è conseguenza della *b*). Ciò è ben noto nel caso abeliano, e risulta dal n. 10 nel caso quasi abeliano, laddove si è dimostrato che il sussistere di una relazione del tipo (107) è una condizione necessaria (oltrechè sufficiente) perchè la (104) rappresenti una corrispondenza biunivoca sulla varietà quasi abeliana di PICARD associata al corpo K.

Aggiungeremo poi che, nel caso abeliano, è superfluo postulare che la (104) rappresenti una trasformazione *birazionale,* perchè sopra la varietà di PICARD relativa ad un corpo di funzioni abeliane *ogni* corrispondenza biunivoca (104) è birazionale. Supporre la birazionalità è invece essenziale nel caso quasi abeliano, in cui una corrispondenza biunivoca del tipo (104) può risultare trascendente.

Osservato quanto precede, la conclusione del presente n. si può esprimere con il:

TEOREMA III. — *Siano K, K' due corpi di funzioni quasi abeliane (o abeliane) di π variabili, tra loro equivalenti, talchè K' si ottenga trasformando K mediante una sostituzione di variabili lineare non degenere del tipo:*

$$u' = \Lambda u + \lambda$$

($\Lambda^{(\pi,\pi)}$ a determinante non nullo).

Perchè K e K' coincidano è necessario e sufficiente che l'anzidetta sostituzione di variabili si possa interpretare come una trasformazione birazionale sulla varietà quasi abeliana di PICARD *relativa a K.*

Nel caso abeliano l'ipotesi della birazionalità della trasformazione può sostituirsi con quella della biunivocità.

OSSERVAZIONE I. — Due corpi K, K' di funzioni quasi abeliane (o abeliane) con le matrici dei periodi primitivi ω, ω' per cui siano soddisfatte le (105) e (107), cioè le:

$$(108) \qquad \omega' = \Lambda \omega A \ , \qquad \omega I = \Lambda \omega$$

si possono ricondurre ed avere la *medesima* matrice di periodi. Ciò è conseguenza immediata delle (108), da cui viene infatti:

$$\omega' = \omega\ (I\ A)\ ,\qquad \omega = \omega'\ (I\ A)^{-1}$$

con la $I\ A$ e la $(I\ A)^{-1}$ unimodulari, perchè tali sono I ed A. Questo appunto significa che anche ω, come ω', è matrice di periodi primitivi per K'.

In altre parole: *due corpi K, K' per i quali siano soddisfatte le* (108) *si possono pensare come due corpi con la medesima matrice di periodi primitivi.*

Nel caso che si tratti di corpi di funzioni abeliane, ciò basta ad assicurare la coincidenza dei due corpi. Ed è ben naturale, perchè un corpo di funzioni abeliane è costituito da *tutte* le funzioni meromorfe con una data matrice di periodi primitivi.

Nel caso che invece K, K' siano corpi di funzioni quasi abeliane, equivalenti mercè la (104), le (108) non bastano più a garantire la coincidenza di K, K': la condizione b) di cui al precedente teorema II assicura infatti che *quando la* (104) *rappresenta una trasformazione trascendente sulla varietà V_π relativa a K, i due corpi sono due corpi* (*equivalenti, ma*) *distinti con la medesima matrice dei periodi.*

È questa circostanza, nuova rispetto al caso abeliano ove non ha riscontro alcuno, che qui intendiamo sottolineare.

Di più: *i corpi equivalenti a K e con i medesimi periodi di K, che siano però distinti da quest'ultimo, si ottengono tutti e soli da K eseguendo le sostituzioni di variabili* (104) *che sulla varietà quasi abeliana di* Picard *di K rappresentano trasformazioni biunivoche trascendenti.*

Questo dimostra l'importanza e la necessità dello studio delle trasformazioni biunivoche trascendenti sopra la varietà quasi abeliana di Picard di un corpo di funzioni quasi abeliane, al fine di ottenere una classificazione completa di tutti i corpi anzidetti, mentre potrebbe a prima vista sembrare scarso l'interesse da attribuire a quelle trasformazioni dal punto di vista delle proprietà algebrico-geometriche del corpo di funzioni.

OSSERVAZIONE II. — Quando due corpi distinti K e K' siano equivalenti e con gli stessi periodi, per quanto abbiamo visto in questo n., sono sempre isomorfi. Ne segue che K e K' sono entrambi sottocorpi *propriamente contenuti* nel più ampio corpo di tutte le funzioni meromorfe con i medesimi periodi di K e K'.

E vale allora la proposizione:

Se un corpo K di funzioni quasi abeliane con la matrice di periodi ω gode della proprietà che sulla relativa varietà quasi abeliana di PICARD *esistono trasformazioni biunivoche trascendenti, rappresentate da sostituzioni lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie, il corpo K^* di tutte le funzioni meromorfe con i periodi ω è certo più ampio di K.*

Non vale però il viceversa potendo un corpo K essere propriamente contenuto nel relativo K^* e tuttavia la corrispondente varietà V_π possedere soltanto trasformazioni *birazionali*, rappresentate da sostituzioni lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie.

Eccone un esempio. Si consideri il corpo di funzioni quasi abeliane di $\delta_1 > 0$ variabili generato dalle funzioni

$$x_h = e^{u_h} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \delta_1) .$$

La sua matrice dei periodi è diagonale (di ordine δ_1) con gli elementi sulla diagonale principale tutti uguali a $2\pi i$; la sua varietà di PICARD è uno spazio proiettivo S_{δ_1}. In tale S_{δ_1} le trasformazioni biunivoche, rappresentabili mediante sostituzioni lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie, sono soltanto le trasformazioni cremoniane *monomiali* (di cui al n. 12), dunque birazionali.

D'altronde K^* è in questo caso più ampio di K perchè, mentre K è isomorfo al corpo delle funzioni razionali delle variabili x_h $(h=1, 2, \ldots, \delta_1)$, K^* è isomorfo al corpo delle funzioni meromorfe delle medesime variabili.

16. Un teorema sulle matrici quasi abeliane.

Per proseguire l'indagine sulle proprietà aritmetiche delle matrici quasi abeliane torna assai utile il seguente:

Teorema. — *Se* ω *è una matrice quasi abeliana* (*a* π *righe e* π' *colonne*), *anche la matrice*:

$$\omega' = \alpha\,\omega\,D \tag{109}$$

(*con* $\alpha^{(\pi,\,\pi)}$ *e* $D^{(\pi',\,\pi')}$ *rispettivamente complessa e razionale, entrambe a determinante non nullo*) *è una matrice quasi abeliana.*

A meglio comprendere il senso e la portata di questa proposizione, si rifletta che quando $\pi'=2\pi$ la matrice quasi abeliana ω si riduce a un'ordinaria matrice di Riemann di genere π e il teorema stesso si riduce a una proposizione ben nota, la cui dimostrazione discende immediatamente dall'esistenza per ω di una matrice principale rispetto alla quale la ω soddisfa le uguaglianze e disuguaglianze riemanniane (cfr. ad es. [25], n. 2), le quali traducono una condizione necessaria e sufficiente perchè una matrice a π righe e 2π colonne sia una matrice di Riemann. Quella dimostrazione viene meno nel caso quasi abeliano ($\pi'<2\pi$), perchè, allo stato attuale delle indagini, manca per una matrice quasi abeliana l'analogo della matrice principale.

Occorre quindi poggiare sul criterio analitico di Severi (cfr. [50]), secondo il quale una matrice $\omega^{(\pi,\,\pi')}$, ad elementi complessi, è quasi abeliana se e soltanto se esistono una matrice

$\lambda^{(\pi,\pi)}$ complessa non degenere, e una matrice $L^{(\pi',\pi')}$ unimodulare, tali che $\lambda\ \omega\ L$ sia una matrice della forma normale (23):

$$(110) \qquad \left\| \begin{matrix} A^{(p,p)} & \Omega^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ O^{(\delta_1,p)} & \Omega_1^{(\delta_1,p)} & B^{(\delta_1,\delta_1)} \\ O^{(\delta_2,p)} & \Omega_2^{(\delta_2,p)} & O^{(\delta_2,\delta_1)} \end{matrix} \right\|$$

ove A, B, Ω, Ω_1, Ω_2 hanno il significato dichiarato nel n. 9.

Per mostrare allora che, ω essendo quasi abeliana, lo è anche la ω' data dalla (109) occorre far vedere che, se ω si può ridurre alla forma normale (110), lo stesso può farsi della ω'. Nel corso della dimostrazione si potrà fare anche uso del fatto che una matrice quasi abeliana rimane tale moltiplicandola a sinistra per una matrice complessa non degenere e a destra per una matrice unimodulare.

Prima di passare alla dimostrazione facciamo una osservazione preliminare. Data la ω, sia $\omega^* = \lambda\ \omega\ L$ una sua forma normale del tipo (110) certamente esistente (λ non degenere ed L unimodulare). Dopo ciò la (109) si può scrivere:

$$\omega' = (\alpha\ \lambda^{-1})\ (\lambda\ \omega\ L)\ (L^{-1}\ D) = \alpha'\ \omega^*\ D'$$

con α' complessa e D' razionale entrambe non degeneri ed entrambe arbitrarie, al pari di α e D, tra le matrici dei rispettivi tipi. Ciò significa che basta dimostrare il teorema nell'ipotesi che la ω sia in forma normale. Inoltre non è restrittivo supporre che la matrice razionale D sia intera, conglobando un eventuale fattore numerico (minimo comune multiplo dei denominatori degli elementi di D) nella matrice α. Il teorema equivale allora a dimostrare che *se ω è una matrice quasi abeliana in forma normale e D una qualunque matrice intera non degenere, anche ($\alpha\ \omega\ D$, con α non degenere, e quindi anche $\alpha^{-1}\ \alpha\ \omega\ D =$) $\omega\ D$ è una matrice quasi abeliana.*

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema che sarà eseguita in passi successivi.

Sia ω una matrice quasi abeliana nella forma normale (110) e D non degenere ad elementi interi. Perchè la $\omega\, D$ sia quasi abeliana occorre mostrare l'esistenza di una matrice non degenere σ e di una matrice unimodulare S tali che la matrice $\sigma\, \omega\, D\, S$ sia anch'essa nella forma normale (110).

In primo luogo moltiplichiamo la D a destra per una matrice unimodulare E in modo che la $D\, E$ sia *triangolare* con gli elementi al di sopra della diagonale principale tutti nulli. Passiamo così dalla $\omega\, D$ alla

$$\omega_1 = \omega\, D\, E = \omega\, I \qquad\qquad (\text{con } I = D\, E)$$

che, per la (110), si scrive:

$$\omega_1 = \begin{Vmatrix} A^{(p,p)} & \Omega^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ O^{(\delta_1,p)} & \Omega_1^{(\delta_1,p)} & B^{(\delta_1,\delta_1)} \\ O^{(\delta_2,p)} & \Omega_2^{(\delta_2,p)} & O^{(\delta_2,\delta_1)} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_{11}^{(p,p)} & O^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ I_{21}^{(p,p)} & I_{22}^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ I_{31}^{(\delta_1,p)} & I_{32}^{(\delta_1,p)} & I_{33}^{(\delta_1,\delta_1)} \end{Vmatrix} =$$

$$(111) \qquad = \begin{Vmatrix} A\, I_{11} + \Omega\, I_{21} & \Omega\, I_{22} & O \\ \Omega_1\, I_{21} + B\, I_{31} & \Omega_1\, I_{22} + B\, I_{32} & B\, I_{33} \\ \Omega_2\, I_{21} & \Omega_2\, I_{22} & O \end{Vmatrix}$$

ove le I_{hk} sono intere (in più le I_{11}, I_{22}, I_{33} triangolari) e la matrice I è non degenere; questo implica che sono non degeneri le I_{11}, I_{22}, I_{33}.

Cerchiamo di ricondurre la matrice (111) alla forma normale (110), moltiplicandola anzitutto a sinistra per la matrice:

$$(112) \qquad \mu = \begin{Vmatrix} U^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} & O^{(p,\delta_2)} \\ \lambda_{21}^{(\delta_1,p)} & I_{33}^{-1} & O^{(\delta_1,\delta_2)} \\ \lambda_{31}^{(\delta_2,p)} & O^{(\delta_2,\delta_1)} & U^{(\delta_2,\delta_2)} \end{Vmatrix}$$

dove le U sono matrici unità e λ_{21}, λ_{31} sono per ora indeterminate. La matrice μ è manifestamente non degenere e permette di passare dalla ω_1 alla:

$$\omega_2 = \mu\, \omega_1$$

cioè alla (cfr. (111), (112)):

$$\omega_2 = \begin{Vmatrix} U & O & O \\ \lambda_{21} & I_{33}^{-1} & O \\ \lambda_{31} & O & U \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A\, I_{11} + \Omega\, I_{21} & \Omega\, I_{22} & O \\ \Omega_1\, I_{21} + B\, I_{31} & \Omega_1\, I_{22} + B\, I_{32} & B\, I_{33} \\ \Omega_2\, I_{21} & \Omega_2\, I_{22} & O \end{Vmatrix} =$$

(113)

$$= \begin{Vmatrix} A\, I_{11} + \Omega\, I_{21} & \Omega\, I_{22} & O \\ \lambda_{21}(A\, I_{11} + \Omega\, I_{21}) + I_{33}^{-1}(\Omega_1\, I_{21} + B\, I_{31}) & \Omega_1' & B \\ \lambda_{31}(A\, I_{11} + \Omega\, I_{21}) + \Omega_2\, I_{21} & \Omega_2' & O \end{Vmatrix}$$

dove si è posto:

(114) $\Omega_1' = \lambda_{21}\, \Omega I_{22} + I_{33}^{-1}(\Omega_1 I_{22} + B I_{32})$, $\Omega_2' = \lambda_{31}\, \Omega I_{22} + \Omega_2 I_{22}$.

Prendiamo ora in esame la matrice:

(115) $$\| A\, I_{11} + \Omega\, I_{21} \qquad \Omega\, I_{22} \| \quad .$$

Essa si può scrivere:

(116) $$\| A\, I_{11} + \Omega\, I_{21} \qquad \Omega\, I_{22} \| = \| A\ \Omega \| \begin{Vmatrix} I_{11} & O \\ I_{21} & I_{22} \end{Vmatrix}$$

come prodotto della matrice di RIEMANN $\|A\ \Omega\|$ (cfr. n. 9) per la matrice intera non degenere:

(117) $$\begin{Vmatrix} I_{11} & O \\ I_{21} & I_{22} \end{Vmatrix} = F$$

ed è pertanto essa stessa una matrice di RIEMANN, se pure non necessariamente in forma normale.

Ricordiamo ora che la $\|A\ \Omega\|$ è in forma normale ed ha i divisori elementari $d_1, d_2, \ldots, d_p$ (cfr. n. 9), talchè essa ammette come matrice principale la

$$M = \begin{Vmatrix} O & \Delta \\ -\Delta & O \end{Vmatrix} \tag{118}$$

con Δ diagonale:

$$\Delta = \begin{Vmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_p \end{Vmatrix} \tag{119}$$

e $d_1 = 1$, d_{i-1} divide d_i; $(i = 2, 3, \ldots, p)$.

È allora immediato che la matrice di RIEMANN (116), la quale è isomorfa nel senso di SCORZA alla $\|A\ \Omega\|$ ammette come matrice principale la:

$$M' = F^{-1}\, M\, F_{-1}^{-1} \quad . \tag{120}$$

Anzi la matrice M', razionale, si può supporre, previa moltiplicazione per un opportuno intero, ad elementi interi e primi tra loro; sicchè, a norma di un classico risultato di FROBENIUS (cfr. [30]) esisterà una matrice unimodulare G che riduce M' alla forma normale:

$$G\, M'\, G_{-1} = \begin{Vmatrix} O & \Delta' \\ -\Delta' & O \end{Vmatrix} \tag{121}$$

ove Δ' è del tipo (119).

Allora è chiaro che la matrice di RIEMANN

$$\| A\ \Omega \|\ F\ G^{-1} \tag{122}$$

possiede la matrice principale (121).

Ciò premesso, si scriva la matrice unimodulare G^{-1}, di ordine $2p$, nella forma:

$$G^{-1} = \left\| \begin{matrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix} \right\| \tag{123}$$

con le G_{hk} di ordine p, e si moltiplichi a destra la ω_2, data dalla (113), per la matrice unimodulare:

$$H = \left\| \begin{matrix} G_{11}^{(p,p)} & G_{12}^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ G_{21}^{(p,p)} & G_{22}^{(p,p)} & O^{(p,\delta_1)} \\ O^{(\delta_1,p)} & O^{(\delta_1,p)} & U^{(\delta_1,\delta_1)} \end{matrix} \right\| ;$$

in tal modo si passa dalla matrice ω_2 alla:

$$\omega_3 = \omega_2\, H$$

cioè alla:

$$\omega_3 = \left\| \begin{matrix} A I_{11} + \Omega I_{21} & \Omega I_{22} & O \\ \lambda_{21}(A I_{11} + \Omega I_{21}) + I_{33}^{-1}(\Omega_1 I_{21} + B I_{31}) & \Omega_1' & B \\ \lambda_{31}(A I_{11} + \Omega I_{21}) + \Omega_2 I_{21} & \Omega_2' & O \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} G_{11} & G_{12} & O \\ G_{21} & G_{22} & O \\ O & O & U \end{matrix} \right\| =$$

(124)

$$= \left\| \begin{matrix} (A I_{11} + \Omega I_{21}) G_{11} + \Omega I_{22} G_{21} & (A I_{11} + \Omega I_{21}) G_{12} + \Omega I_{22} G_{22} & O \\ N_{21} & \Omega_1'' & B \\ N_{31} & \Omega_2'' & O \end{matrix} \right\|$$

ove si è posto:

$$N'_{21} = \lambda_{21}(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+I_{33}^{-1}(\Omega_1 I_{21}+BI_{31})\,G_{11}+\Omega_1'\,G_{21}$$

$$N_{31} = \lambda_{31}(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+\Omega_2 I_{21}G_{11}+\Omega_2'\,G_{21}$$

$$\Omega_1'' = \lambda_{21}(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{12}+I_{33}^{-1}(\Omega_1 I_{21}+BI_{31})\,G_{12}+\Omega_1'\,G_{22}$$

$$\Omega_2' = \lambda_{31}(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{12}+\Omega_2 I_{21}G_{12}+\Omega_2'\,G_{22}.$$

Ora la matrice:

$$\|\,(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+\Omega I_{22}G_{21} \qquad (AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{12}+\Omega I_{22}G_{22}\,\|$$

che compare nella espressione della ω_3 data dalla (124), altro non è che la matrice di RIEMANN (122) [si tenga conto delle (116), (117), (123)].

Trattandosi di una matrice di RIEMANN che ammette una matrice principale nella forma normale di FROBENIUS, possiamo affermare (cfr. [25], p. 343) che entrambe le matrici:

$$(125)\qquad (AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+\Omega I_{22}G_{21} \quad \text{e} \quad (AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{12}+\Omega I_{22}G_{22}$$

sono non degeneri e pertanto ammettono inversa.

Tenuto ora conto delle (114) si ha:

$$\begin{aligned} N_{21} &= \lambda_{21}(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+I_{33}^{-1}(\Omega_1 I_{21}+BI_{31})\,G_{11}+\Omega_1'\,G_{21} = \\ &= \lambda_{21}(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+I_{33}^{-1}(\Omega_1 I_{21}+BI_{31})\,G_{11}+\lambda_{21}\Omega I_{22}G_{21}+ \\ &+ I_{33}^{-1}(\Omega_1 I_{22}+BI_{32})\,G_{21} = \lambda_{21}\,[(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+\Omega I_{22}G_{21}]+ \\ &+ I_{33}^{-1}\,[(\Omega_1 I_{21}+BI_{31})\,G_{11}+(\Omega_1 I_{22}+BI_{32})\,G_{21}]\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{31} &= \lambda_{31}(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+\Omega_2 I_{21}G_{11}+\Omega_2\,G_{21} = \\ &= \lambda_{31}(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+\Omega_2 I_{21}G_{11}+\lambda_{31}\Omega I_{22}G_{21}+\Omega_2 I_{22}G_{21} = \\ &= \lambda_{31}\,[(AI_{11}+\Omega I_{21})\,G_{11}+\Omega I_{22}G_{21}]+\Omega_2\,(I_{21}G_{11}+I_{22}G_{21})\,. \end{aligned}$$

E allora scegliendo le due matrici λ_{21}, λ_{31}, finora indeterminate, al seguente modo:

$$\lambda_{21} = - I_{33}^{-1} [(\Omega_1 I_{21} + B I_{31}) G_{11} + (\Omega_1 I_{22} + B I_{32}) G_{21}] \cdot$$
$$\cdot [(A I_{11} + \Omega I_{21}) G_{11} + \Omega I_{22} G_{21}]^{-1}$$
$$\lambda_{31} = - \Omega_2 (I_{21} G_{11} + I_{22} G_{21}) \cdot [(A I_{11} + \Omega I_{21}) G_{11} + \Omega I_{22} G_{21}]^{-1}$$

(come è possibile perchè le due matrici (125) sono dotate di inversa), la matrice ω_3 data dalla (124) si scrive:

$$\omega_3 = \begin{Vmatrix} (A I_{11} + \Omega I_{21}) G_{11} + \Omega I_{22} G_{21} & (A I_{11} + \Omega I_{21}) G_{12} + \Omega I_{22} G_{22} & O \\ O & \Omega_1'' & B \\ O & \Omega_2'' & O \end{Vmatrix}$$

in cui:

$$\| (A I_{11} + \Omega I_{21}) G_{11} + \Omega I_{22} G_{21} \qquad (A I_{11} + \Omega I_{21}) G_{12} + \Omega I_{22} G_{22} \|$$

è una matrice di RIEMANN con la matrice principale (121).

Moltiplicando da ultimo la ω_3 a sinistra per la matrice non degenere:

$$\nu = \begin{Vmatrix} 2\pi i \Delta'^{-1} [(A I_{11} + \Omega I_{21}) G_{11} + \Omega I_{22} G_{21}]^{-1} & O & O \\ O & U^{(\delta_1, \delta_1)} & O \\ O & O & U^{(\delta_2, \delta_2)} \end{Vmatrix}$$

si passa dalla ω_3 alla matrice:

$$\omega_4 = \nu\, \omega_3$$

che si scrive nella forma:

$$\omega_4 = \begin{Vmatrix} A' & \Omega' & O \\ O & \Omega_1'' & B \\ O & \Omega_2'' & O \end{Vmatrix} . \tag{126}$$

La (126) ha ora la forma normale di SEVERI (110), perchè:

$$(127) \qquad A' = 2\pi i \Delta'^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{2\pi i}{d'_1} & & & \\ & \frac{2\pi i}{d'_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2\pi i}{d'_p} \end{matrix} \right\|$$

e la $||A'\Omega'||$ è una matrice di RIEMANN *normale* in forza della (127) e del fatto che la (121) è una sua matrice principale.

Concludendo, con riguardo alle precedenti posizioni per ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, risulta $\omega_4 = \nu \mu \omega \; CEH$. Ponendo allora:

$$\sigma = \nu \mu \quad \text{e} \quad S = E\,H$$

si ottengono due matrici, rispettivamente non degenere ed unimodulare, che soddisfano l'enunciato da dimostrare: la $\omega\, C$ è quasi abeliana perchè lo è la $\omega_4 = \sigma\; (\omega\, C)\; S$.

17. ALCUNE PROPRIETÀ DELLA RELAZIONE DI EQUIVALENZA TRA MATRICI QUASI ABELIANE.

Nei nn. seguenti affronteremo la questione della equivalenza di due matrici quasi abeliane nella forma normale di SEVERI.

Prima ancora di enunciare e di chiarire la portata del problema, premettiamo, in questo n., alcune necessarie definizioni e proprietà formali.

Adottiamo (con BENEDICTY, cfr. [13]) d'ora in avanti come *forma normale di* SEVERI per una matrice quasi abeliana, una forma leggermente diversa dalla (23), ma ad essa « equivalente » nel senso che sarà più sotto precisato.

Tale forma normale, che si rivelerà più idonea per i successivi sviluppi, è la seguente:

$$(128)\qquad \begin{Vmatrix} \Delta^{-1\,(p,\,p)} & O^{(p,\,\delta_1)} & \Omega^{(p,\,p)} \\ O^{(\delta_1,\,p)} & U^{(\delta_1,\,\delta_1)} & \Phi_1^{(\delta_1,\,p)} \\ O^{(\delta_2,\,p)} & O^{(\delta_2,\,\delta_1)} & \Psi_1^{(\delta_2,\,p)} \end{Vmatrix}$$

In essa Δ^{-1} è l'inversa della matrice Δ espressa dalla (119); la matrice $\|\Delta^{-1}\,\Omega\|$ è una matrice normale di RIEMANN (cioè Ω è una matrice simmetrica la cui parte immaginaria è matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita positiva), che diremo *associata* alla (128); U è matrice unità, e inoltre:

$$(129)\qquad \begin{cases} \Phi_1 = \begin{Vmatrix} O^{(\delta_1,\,\varrho)} & \Phi^{(\delta_1,\,p-\varrho)} \end{Vmatrix} & \text{con } \Phi \text{ matrice complessa arbitraria,} \\ \Psi_1 = \begin{Vmatrix} U^{(\varrho,\,\varrho)} & \Psi^{(\varrho,\,p-\varrho)} \\ O^{(\delta_2-\varrho,\,\varrho)} & O^{(\delta_2-\varrho,\,p-\varrho)} \end{Vmatrix} & \text{con } \Psi \text{ matrice complessa arbitraria.} \end{cases}$$

Indicheremo brevemente con $M\,N\,S$ una matrice come la (128).

Definiamo ora come *equivalenti* due qualunque matrici complesse simili (aventi cioè il medesimo numero di righe e colonne) $\omega^{(g,\,g')}$ e $\omega^{*(g,\,g')}$, se tra esse corre la relazione:

$$(130)\qquad \omega^* = \lambda\,\omega\,L$$

con $\lambda^{(g,\,g)}$ non degenere ed $L^{(g',\,g')}$ unimodulare (cfr. n. 9).

La (130) è una effettiva relazione di equivalenza, poichè risulta riflessiva, simmetrica e transitiva.

Per quanto sappiamo una matrice equivalente a una $M\,N\,S$ è una matrice quasi abeliana (cfr. ad es. il precedente n. 16). Per sottolineare la relazione di equivalenza indicheremo con $M\,E\,S$ ogni matrice equivalente a una $M\,N\,S$.

Per giustificare l'assunzione della (128) occorre mostrare soltanto che una qualunque matrice del tipo (128) è equivalente a una matrice del tipo (23), e viceversa.

Che ogni matrice (128) sia equivalente a una matrice (23) è immediato: basta moltiplicarla a sinistra per $2\pi i\, U^{(p+\delta_1+\delta_2,\, p+\delta_1+\delta_2)}$ ed eseguire opportune permutazioni di righe e colonne (il che è possibile fare mediante operazioni del tipo (130).

Viceversa ogni matrice (23) è equivalente a una del tipo (128).

Mediante scambi di righe e colonne (realizzabili moltiplicando la (23) a destra e a sinistra per opportune matrici unimodulari) e moltiplicando poi a sinistra per $\dfrac{1}{2\pi i}\, U^{(p+\delta_1+\delta_2, p+\delta_1+\delta)}$ si perviene alla matrice equivalente:

$$(131) \qquad \begin{Vmatrix} \Delta^{-1} & O & \Omega' \\ O & U & \Phi' \\ O & O & \Psi' \end{Vmatrix}$$

nella quale $\Omega' = \dfrac{1}{2\pi i}\,\Omega$, $\Phi' = \dfrac{1}{2\pi i}\,\Omega_1$, $\Psi' = \dfrac{1}{2\pi i}\,\Omega_2$, e naturalmente $\|\Delta^{-1}\,\Omega'\|$ è una matrice normale di RIEMANN.

Mediante successivi scambi di righe e colonne, e mediante moltiplicazione a sinistra e a destra per opportune matrici [che traducono determinate operazioni sugli elementi della (131)] si passa poi dalla (131) ad una matrice, ad essa equivalente, che ha la stessa struttura formale ma con le Φ', Ψ' del tipo delle Φ_1, Ψ_1 date dalle (129), sicchè la nuova matrice è appunto del tipo (128) (per i particolari dimostrativi il lettore veda il n. 12 della memoria [15]).

Osserviamo infine che, nella (128), le Φ_1, Ψ_1 si potrebbero supporre matrici complesse arbitrarie, la seconda delle quali di caratteristica ρ; in tal modo si otterrebbe infatti una matrice sempre equivalente, com'è facile convincersi, a una del tipo (128), avente anzi le stesse matrici Λ^{-1}, Ω, U.

Proprietà dell'equivalenza tra matrici.

Conviene ora mettere in luce alcune proprietà della relazione (130) di equivalenza tra matrici simili, in particolare tra matrici quasi abeliane simili, per preparare il terreno alla soluzione del problema accennato all'inizio di questo n.

I. Siano ω, ω^* due matrici complesse simili e ω_1, ω_1^* due matrici complesse ad esse rispettivamente equivalenti. *Esiste allora una corrispondenza biunivoca tra le (eventuali) relazioni di equivalenza* (130) *che intercorrono tra* ω, ω^* *e le relazioni analoghe che intercorrono tra* ω_1, ω_1^*.

La dimostrazione è immediata.

II. Conseguenza immediata per le matrici quasi abeliane è che *lo studio delle relazioni di equivalenza* (130) *tra due M E S equivale allo studio delle relazioni analoghe tra due M N S.*

III. *Se* $\omega^{(g,\, g')}$, $\omega^{*(g,\, g')}$ *sono due matrici complesse simili, di caratteristica rispettiva* h, h^*, *esistono certo due matrici* ω_1, ω_1^*, *ad esse rispettivamente equivalenti, della forma:*

$$\omega_1^{(g,\, g)} = \left\| \begin{matrix} \omega_2^{(h,\, g')} \\ \\ O^{(g-h,\, g')} \end{matrix} \right\| , \quad \omega_1^{*(g,\, g')} = \left\| \begin{matrix} \omega_2^{*(h^*,\, g')} \\ \\ O^{(g-h^*,\, g')} \end{matrix} \right\| ,$$

con le ω_2, ω_2^* *di caratteristica* h, h^*.

Ciò premesso: *condizione necessaria e sufficiente perchè* ω *e* ω^* *siano equivalenti a norma della* (130) *è che lo siano le* ω_2, ω_2^*.

Supposta l'equivalenza di ω_2, ω_2^*, è intanto necessariamente $h = h^*$. Sia ora:

$$\omega_2^* = \lambda_2\, \omega_2\, L_2 \tag{132}$$

una relazione del tipo (130) tra ω_2, ω_2^*.

Posto
$$\lambda_1^{(g,g)} = \left\| \begin{matrix} \lambda_2^{(h,h)} & O^{(h,g-h)} \\ O^{(g-h,h)} & U^{(g-h,g-h)} \end{matrix} \right\|$$

(λ_1 è non degenere come λ_2) si verifica subito la relazione:

$$\omega_1^* = \lambda_1 \, \omega_1 \, L_2$$

che assicura l'equivalenza di ω_1, ω_1^* e quindi di ω, ω^*.

Supponiamo che, viceversa, valga la (130) per la coppia di matrici ω, ω^*, e quindi anche per ω_1, ω_1^* nella forma:

(133) $$\omega_1^* = \lambda_1 \, \omega_1 \, L_1 \, .$$

Scritta la λ_1 come segue:

$$\lambda_1^{(g,g)} = \left\| \begin{matrix} \lambda_2^{(h,h)} & \lambda_{12}^{(h,g-h)} \\ \lambda_{21}^{(g-h,h)} & \lambda_{22}^{(g-h,g-h)} \end{matrix} \right\|$$

è subito visto che la (133) equivale alle due equazioni in matrici:

$$\begin{cases} \omega_2^* = \lambda_2 \, \omega_2 \, L_1 \\ \lambda_{21} \, \omega_2 \, L_1 = O \end{cases}$$

La seconda implica $\lambda_{21} = 0$ per essere ω_2 di caratteristica uguale al numero delle righe; la prima allora, essendo $|\lambda_1| \neq 0$ e quindi anche $|\lambda_2| \neq 0$, fornisce una relazione del tipo (130) tra ω_2, ω_2^*, c. d. d.

IV. Segue anche da III) che *tutte e sole le relazioni del tipo* (130) *tra* ω_1, ω_1^*, *che sono relative a una L prefissata, sono date dalla* (133) *nella quale sia*:

(134) $$\lambda_1 = \left\| \begin{matrix} \lambda_2 & \lambda_{12} \\ O & \lambda_{22} \end{matrix} \right\| ,$$

ove λ_2 *è la matrice che compare nella* (132), *valida per ipotesi, mentre* λ_{12}, λ_{22} *sono matrici arbitrarie salvo la condizione* $|\lambda_{22}| \neq 0$.

V. Da III e IV segue poi che lo *studio delle relazioni* (130) *esistenti tra due matrici complesse equivale, a meno della indeterminazione precisata nella* λ_1, *allo studio delle relazioni analoghe tra due matrici complesse la cui caratteristica è uguale al numero delle righe*.

VI. Sia ora ω una $M\,N\,S$ a π righe e π' colonne ($\pi = p + \delta_1 + \delta_2$, $\pi' = 2p + \delta_1$) e sia h la sua caratteristica ($h = p + \delta_1 + \rho$). Sia inoltre ω^* una seconda $M\,N\,S$, equivalente alla ω, della quale indichiamo i relativi caratteri interi con gli stessi simboli di prima, ma asteriscati.

Dalle ovvie relazioni $\pi = \pi^*$, $\pi' = \pi'^*$, $h = h^*$ segue facilmente, posto $p - p^* = k$:

$$(135)\quad \begin{cases} p^* = p - k \\ \delta_1^* = \delta_1 + 2k \\ \delta_2^* = \delta_2 - k \\ \rho^* = \rho - k \\ -\rho^* \leqslant k \leqslant \left[\dfrac{\delta_1^*}{2}\right], \quad \text{ossia} \ -\left[\dfrac{\delta_1}{2}\right] \leqslant k \leqslant \rho \end{cases}$$

Le (135) *sono condizioni necessarie per l'equivalenza di due matrici* $M\,N\,S$.

Si osserverà che $p - \rho = p^* - \rho^* = \pi' - h = \pi'^* - h^*$ è il comune valore per le due matrici della differenza tra il numero delle colonne e la caratteristica.

Inoltre se di una matrice quasi abeliana si conoscono il numero π, π' delle righe e colonne e la caratteristica h, uno qualunque dei quattro interi p, δ_1, δ_2, ρ determina gli altri tre, perchè, posto $l = \pi - \delta_2$:

$$p = \pi' - l\,, \qquad \delta_1 = 2l - \pi'\,, \qquad \delta_2 = \pi - l\,, \qquad \rho = h - l\,.$$

VII. Si pensi ora che una $M\ N\ S$ di caratteristica uguale al numero delle righe è caratterizzata dall'essere $\delta_2 = \rho$. Da II) e V) discende allora che *lo studio delle relazioni* (130) *tra due qualunque* $M\ E\ S$ *equivale, a meno della indeterminazione insita nella* λ, *allo studio delle relazioni analoghe tra* $M\ N\ S$ *per le quali i caratteri* ρ, δ_2 *sono tra loro uguali* (e se questo accade in una delle due matrici equivalenti, accade anche nell'altra).

In concreto tutte le relazioni del tipo (130) tra due $M\ E\ S$ ω, ω^*, si otterranno attraverso i successivi passi: si considerano due $M\ N\ S$ ω_1, ω_1^* rispettivamente equivalenti ad ω, ω^*; si considerano le $M\ N\ S$ ω_2, ω_2^* costituite dalle prime $h = h^*$ righe di ω_1, ω_1^*, e tutte le relazioni del tipo (132) che intercorrono tra esse; da ciascuna di tali relazioni si passa a tutte le relazioni (133) tra ω_1, ω_1^* (che sono quelle ottenute ponendo nella (133) la matrice (134) in luogo della λ_1); da ciascuna di queste ultime relazioni si risale poi a una relazione del tipo (130) tra ω e ω^*, a norma del punto I.

* * *

Prendiamo ora in considerazione una relazione di HURWITZ-CONFORTO relativa a una matrice quasi abeliana ω (cfr. n. 9):

$$\Lambda\, \omega = \omega\, I \tag{136}$$

(Λ complessa, I intera).

Per semplicità di discorso, diremo che una relazione (136) è *banale* se $\Lambda = k\, U^{(\pi,\, \pi)}$ e $I = k\, U^{(\pi',\, \pi')}$ (con k intero); *non degenere* se è simultaneamente $|\Lambda| \neq 0$ e $|I| \neq 0$; *propria* se è non banale, non degenere, e inoltre I è unimodulare.

Dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA. — *Se due matrici quasi abeliane* ω, ω^* *soddisfano una relazione del tipo* (130), *affinchè esse soddisfino un'altra relazione*:

$$\omega^* = \tilde{\lambda}\, \omega\, \tilde{L} \tag{137}$$

distinta dalla (130), *è necessario e sufficiente che una delle due* ω, ω^* *soddisfi una relazione propria di* HURWITZ-CONFORTO. *E se, valendo la* (130), *una delle due matrici soddisfa una relazione propria di* HURWITZ-CONFORTO, *lo stesso accade anche per l'altra.*

Si intenderà che la (137) è distinta dalla (130) se non è simultaneamente $\tilde{\lambda} = \varepsilon\, \lambda$, $\tilde{L} = \varepsilon\, L$, con $\varepsilon = \pm 1$.

Supponiamo che valgano la (130) e una relazione propria di HURWITZ-CONFORTO (136) per la ω. Ne segue $\omega^* = \lambda \Lambda^{-1} \omega I L$, cioè una seconda relazione tra ω e ω^* del tipo (137); e questa è certo distinta dalla (130), chè altrimenti si avrebbe $\lambda \Lambda^{-1} = \varepsilon \lambda$ e $I\, L = \varepsilon\, L$, cioè $\Lambda = \varepsilon\, U$ e $I = \varepsilon\, U$ e la (136) non sarebbe propria.

Analogamente se la ω^*, anzichè la ω, soddisfa una relazione del tipo (136).

Viceversa siano ora verificate le due relazioni distinte (130), (137). Ne seguono immediatamente le:

$$\lambda\, \omega\, L = \tilde{\lambda}\, \omega\, \tilde{L} \quad , \quad \lambda^{-1}\, \omega^*\, L^{-1} = \tilde{\lambda}^{-1}\, \omega^*\, \tilde{L}^{-1} \quad , \text{ cioè le}$$

$$\tilde{\lambda}^{-1}\, \lambda\, \omega = \omega\, \tilde{L}\, L^{-1} \quad , \quad \tilde{\lambda}\, \lambda^{-1}\, \omega^* = \omega^*\, \tilde{L}^{-1}\, L$$

che sono due relazioni, non degeneri, di HURWITZ-CONFORTO per le ω, ω^* nelle quali le matrici che tengono il posto della I sono unimodulari. Dette relazioni sono poi non banali; se infatti lo fossero, sarebbe $\tilde{\lambda}^{-1}\lambda = \tilde{\lambda}\ \lambda^{-1} = \varepsilon U$, $\tilde{L}L^{-1} = \tilde{L}^{-1}L = \varepsilon U$ e quindi $\tilde{\lambda} = \varepsilon\, \lambda$, $\tilde{L} = \varepsilon L$ contro l'ipotesi.

L'ultima affermazione contenuta nel teorema è ormai immediata.

Riassumendo i risultati del presente n. con particolare riguardo al punto VII e al precedente teorema, concludiamo: *tutte le relazioni di equivalenza* (130) *tra due* $M\,E\,S$ ω, ω^* *si possono costruire conoscendo* una *relazione* (130) *tra le* $M N S$ ω_2, $\omega_2{}^*$ (*formate dalle prime* $h = h^*$ *righe di due* $M\,N\,S$ *risp. equivalenti a* ω, ω^*), *e* tutte *le relazioni proprie di* HURWITZ-CONFORTO *di una delle due* ω_2, $\omega_2{}^*$.

18. Equivalenza tra matrici quasi abeliane nella forma normale di Severi

Consideriamo una matrice normale di Severi ($M\ N\ S$) della forma indicata all'inizio del n. 17 (a cui faremo costante riferimento nel presente n., salvo contrario avviso).

Essa determina i suoi *interi caratteristici* p, δ_1, δ_2, ρ e i suoi *divisori elementari* $d_1, d_2, \ldots, d_p$ (elementi della matrice Δ).

Consideriamo d'altro canto una matrice quasi abeliana $M\ E\ S$ che, per definizione, è equivalente a una qualche MNS. Perciò stesso viene naturale di attribuire alla $M\ E\ S$ i caratteri interi sopra nominati della $M\ N\ S$ a cui essa è equivalente e di chiamarli ordinatamente *interi associati* e *divisori elementari* della $M\ E\ S$.

È lecito ritenere che questi siano intrinsecamente associati alla $M\ E\ S$, come lo sono alla $M\ N\ S$?

Evidentemente soltanto se la $M\ E\ S$ individua una sola $M\ N\ S$ ad essa equivalente, o magari più di una ma tutte con gli stessi caratteri interi.

Sta di fatto invece che due diverse $M\ N\ S$, tra loro equivalenti, possono avere interi caratteristici e divisori elementari differenti, e per determinate categorie di matrici quasi abeliane ciò costituisce la regola e non l'eccezione.

Tutto ciò risulterà dalla trattazione che segue. Questi accenni bastano a far comprendere la necessità di affrontare il problema di *determinare tutti i sistemi di interi associati e divisori elementari di una prefissata $M\ E\ S$* ovvero *i sistemi di interi caratteristici e divisori elementari delle $M\ N\ S$ equivalenti a una data $M\ N\ S$.*

Il problema è stato posto nella sua generalità da Benedicty, e da lui risolto per una matrice qualunque quando sia $p-\rho=0$ e $p-\rho=1$, per una matrice generica quando sia $p-\rho>1$.

E una matrice quasi abeliana si intenderà *generica* quando in una $M\ N\ S$ ad essa equivalente, scritta nella forma (128), gli elementi τ_{rs} della matrice Ω ($r \leq s$; $r, s = 1, 2, \ldots, p$) e tutti gli elementi delle matrici Φ e Ψ come pure le loro parti reali e i loro coefficienti dell'immaginario sono algebricamente indipendenti sul campo razionale.

Cominciamo col dimostrare un lemma che offre un primo esempio di matrici equivalenti, ma con caratteri diversi:

LEMMA: *Se ω è una $M\,N\,S$ nella forma* (128), *esiste una $M\,N\,S$ ω^* equivalente ad ω, avente gli stessi caratteri p, δ_1, δ_2, ρ, e per la quale la relativa matrice $||\Delta^{*-1}\,\Omega^*||$ è una qualunque matrice normale di* RIEMANN *equivalente a* $||\Delta^{-1}\,\Omega||$.

Siano $\lambda_1^{(p,p)}$ una matrice complessa non degenere ed $L_1^{(2p,2p)}$ una matrice unimodulare, entrambe arbitrarie purchè la matrice $\lambda_1 ||\Delta^{-1}\,\Omega||\, L_1$, equivalente alla $||\Delta^{-1}\,\Omega||$, sia anch'essa in forma normale $||\Delta^{*-1}\,\Omega^*||$. Scritta la L_1 nella forma:

$$L_1 = \begin{Vmatrix} L_{11}^{(p,p)} & L_{13}^{(p,p)} \\ L_{31}^{(p,p)} & L_{33}^{(p,p)} \end{Vmatrix}$$

si ponga:

$$L^{(\pi',\pi')} = \begin{Vmatrix} L_{11} & O & L_{13} \\ O & U & L_{23} \\ L_{31} & O & L_{33} \end{Vmatrix}, \lambda^{(\pi,\pi)} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & O & O \\ -\Phi_1 L_{31}(\Delta^{-1}L_{11}+\Omega L_{31})^{-1} & U & O \\ -\Psi_1 L_{31}(\Delta^{-1}L_{11}+\Omega L_{31})^{-1} & O & U \end{Vmatrix}$$

con $L_{23}^{(\delta_1,p)}$ intera arbitraria (com'è ben noto dalla teoria delle matrici di RIEMANN la $\Delta^{-1}\,L_{11} + \Omega\,L_{31}$ è non degenere). Allora L è unimodnlare e λ non degenere, talchè la matrice $\lambda \omega L$ è equivalente ad ω e a calcoli fatti risulta:

$$\lambda\,\omega\,L = \begin{Vmatrix} \Delta^{*-1} & O & \Omega^* \\ O & U & \Phi_1^* \\ O & O & \Psi_1^* \end{Vmatrix} .$$

Senza calcolare esplicitamente Φ_1^*, Ψ_1^*, sappiamo (n. 17) che la precedente $\lambda\,\omega\,L$ è riconducibile alla forma normale (128) tenendo fisse Δ^{*-1}, Ω^*, U.

Quest'ultima matrice si può assumere come ω^* per soddisfare l'enunciato. È ovvio infatti che $p=p^*$, $\delta_1=\delta_1^*$, $\delta_2=\delta_2^*$ ed è poi $\rho=\rho^*$ in forza delle relazioni (135); inoltre:

Se la matrice di RIEMANN $||\Delta^{-1}\ \Omega||$, *che compare nella* (128), *non individua i suoi divisori elementari, lo stesso accade per la matrice quasi abeliana* (128).

Esaminiamo ora in generale una $M\,N\,S$ e le sue equivalenti, supponendo che sia $\delta_2=\rho$ (quest'ipotesi non è restrittiva, per quanto abbiamo visto al punto V del n. 17). Converrà anche distinguere i tre casi in cui la differenza p-ρ (sempre ≥ 0 per la (26)) sia $=0$, $=1$ oppure >1.

Il caso $p-\rho=0$

Questo primo caso, estremamente semplice, è quello in cui per una delle matrici considerate, e quindi anche per l'altra, è $p=\rho$. Siano infatti ω, ω^* due $M\,N\,S$ simili per le quali $p=\rho=\delta_2$, $p^*=\rho^*=\delta_2^*$; esse sono in conseguenza matrici quadrate di ordiue π e non degeneri, e allora, scelta comunque $L^{(\pi,\pi)}$ unimodulare, risulta $\omega^*=(\omega^*\,L^{-1}\,\omega^{-1})\,\omega\,L$; ciò prova che ω, ω^* sono tra loro equivalenti, e inoltre, siccome $U^{(\pi,\pi)}=\omega^{-1}\omega$, sono entrambe equivalenti alla matrice unità dello stesso ordine.

Possiamo in conclusione enunciare:

TEOREMA I. — *Due $M\,N\,S$ simili per le quali sia $p=\rho$, $p^*=\rho^*$ sono sempre equivalenti tra loro e alla $M\,N\,S$ di caratteri $p=\rho=0$ e ad esse simile.*

P. II, n. 18

TEOREMA II. — *Una M E S* $\omega^{(\pi,\pi')}$ *di caratteristica uguale al numero delle colonne, ammette come valori per gli interi associati*:

$$p = k \quad , \quad \delta_1 = \pi' - 2k \quad , \quad \delta_2 = \pi - \pi' + k \quad , \quad \rho = k$$

$$\left(k = 0, 1, \dots, \left[\frac{\pi'}{2}\right]\right)$$

mentre i divisori elementari sono arbitrari.

Alcune premesse, valide nel caso $p - \rho > 0$.

Consideriamo una prefissata matrice $\omega^{(\pi,\pi')}$, che sia una *M N S* nella forma (128) per la quale $p > \rho = \delta_2$. E sia $\omega^{*(\pi,\pi')}$ una qualunque *M N S* equivalente ad ω a norma della relazione di equivalenza (130), scritta anch'essa nella forma (128) per la quale sarà certo $p^* > \rho^* = \delta_2^*$ (cfr. oss. VI del n. 17). Scambiando eventualmente le due matrici poniamo $p - p^* = k \geq 0$.

Con riferimento a dette ω, ω^*, eseguiamo le seguenti decomposizioni delle matrici Δ, Δ^* [1]:

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} \Delta_1^{(k,k)} & & \\ & \Delta_2^{(\rho-k,\,\rho-k)} & \\ & & \Delta_3^{(p-\rho,\,p-\rho)} \end{matrix} \right\| \quad ; \quad \Delta^* = \left\| \begin{matrix} \Delta_1^{*(\rho-k,\,\rho-k)} & \\ & \Delta_2^{*(p-\rho,\,p-\rho)} \end{matrix} \right\|$$

Analogamente, scriviamo:

$$\Omega = \| \Omega_{ij} \| \quad (i,j = 1,2,3) \quad ; \quad \Omega^* = \| \Omega^*_{ij} \| \quad (i,j = 1,2) ;$$

---

[1] In una matrice gli elementi non indicati in alcun modo, nemmeno con la punteggiatura, sono nulli. Quando una matrice è decomposta in matrici parziali, i tipi di questo saranno indicati in maniera sufficiente per determinare completamente la natura della decomposizione.

con:

$$\Omega_{11}^{(k,k)}\ ,\ \Omega_{22}^{(\varrho-k,\varrho-k)}\ ,\ \Omega_{33}^{(p-\varrho,p-\varrho)}\ ;\ \Omega_{11}^{*(\varrho-k,\varrho-k)}\ ,\ \Omega_{22}^{*(p-\varrho,p-\varrho)}\ ;$$

$$\Psi = \left\| \begin{matrix} \Psi'^{(k,p-\varrho)} \\ \Psi''^{(\varrho-k,p-\varrho)} \end{matrix} \right\| \quad ; \quad \Phi^* = \left\| \begin{matrix} \Phi'^{*(k,p-\varrho)} \\ \Phi''^{*(\delta_1,p-\varrho)} \\ \Phi'''^{*(k,p-\varrho)} \end{matrix} \right\| .$$

Data la simmetria delle matrici Ω, Ω^* si ha ovviamente:

$$(138)\begin{cases} \Omega_{ii} = (\Omega_{ii})_{-1} \quad (i = 1,2,3)\ ; & \Omega^*_{jj} = (\Omega^*_{jj})_{-1} \quad (j = 1,2) \\ \Omega_{ij} = (\Omega_{ji})_{-1} \quad (i,j = 1,2,3\ ;\ i \neq j)\ ; & \Omega^*_{12} = (\Omega^*_{21})_{-1} \end{cases}$$

e queste sono le uniche relazioni algebriche sul campo razionale *necessariamente* soddisfatte dagli elementi delle matrici i cui simboli contengono le lettere Ω, Φ, Ψ.

Sostituiamo ora ad ω, ω^* le due matrici ad esse rispettivamente equivalenti a norma della (130):

$$\chi = \lambda\, \omega \qquad\qquad \chi^* = \lambda^*\, \omega^*\, L^*$$

in modo però che esse risultino della forma [1]

$$(139)\qquad \begin{cases} \chi = \left\| U^{(p+\delta_1+\varrho,\,p+\delta_1+\varrho)} \quad \varphi^{(p+\delta_1+\varrho,\,p-\varrho)} \right\| \\ \chi^* = \left\| U^{(p+\delta_1+\varrho,\,p+\delta_1+\varrho)} \quad \varphi^{*(p+\delta_1+\varrho,\,p-\varrho)} \right\| \end{cases}$$

---

[1] Com'è possibile realizzare prendendo:
$\lambda = \| \lambda_{rs} \|$, $\lambda^* = \| \lambda^*_{rs} \|$ $(r, s = 1, 2, \ldots, 6)$; $L^* = \| L^*_{rs} \|$ $(r, s = 1, 2, \ldots, 7)$
con:
$\lambda_{11} = \Delta_1$, $\lambda_{22} = \Delta_2$, $\lambda_{33} = \Delta_3$, $\lambda_{44} = U^{(\delta_1,\delta_1)}$, $\lambda_{55} = U^{(k,k)}$, $\lambda_{66} = U^{(\varrho-k,\varrho-k)}$,
$\lambda_{15} = -\Delta_1\Omega_{11}$, $\lambda_{16} = -\Delta_1\Omega_{12}$, $\lambda_{25} = -\Delta_2\Omega_{21}$, $\lambda_{26} = -\Delta_2\Omega_{22}$, $\lambda_{35} = -\Delta_3\Omega_{31}$,
$\lambda_{36} = -\Delta_3\Omega_{32}$; $\lambda^*_{13} = U^{(k,k)}$, $\lambda^*_{21} = \Delta^*_1$, $\lambda^*_{32} = \Delta^*_2$, $\lambda^*_{44} = U^{(\delta_1,\delta_1)}$, $\lambda^*_{55} = U^{(k,k)}$,
$\lambda^*_{66} = U^{(\varrho-k,\varrho-k)}$, $\lambda^*_{26} = -\Delta^*_1\Omega^*_{11}$, $\lambda^*_{36} = -\Delta^*_2\Omega^*_{21}$;
$L^*_{12} = L^*_{55} = U^{(k,k)}$, $L^*_{23} = L^*_{66} = U^{(\varrho-k,\varrho-k)}$, $L^*_{31} = L^*_{77} = U^{(p-\varrho,p-\varrho)}$,
$L^*_{44} = U^{(\delta_1,\delta_1)}$
(le matrici parziali non indicate sono tutte nulle).

con:

$$\varphi = \| \varphi_r \| \quad , \quad \varphi^* = \| \varphi^*_r \| \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6)$$

e:

$$(140) \begin{cases} \varphi_1 = \Delta_1(\Omega_{13} - \Omega_{11}\Psi' - \Omega_{12}\Psi'') & \varphi^*_1 = \Phi'^* \\ \varphi_2 = \Delta_2(\Omega_{23} - \Omega_{21}\Psi' - \Omega_{22}\Psi'') & \varphi^*_2 = \Delta^*_1(\Omega^*_{12} - \Omega^*_{11}\Psi^*) \\ \varphi_3 = \Delta_3(\Omega_{33} - \Omega_{31}\Psi' - \Omega_{32}\Psi'') & \varphi^*_3 = \Delta^*_2(\Omega^*_{22} - \Omega^*_{21}\Psi^*) \\ \varphi_4 = \Phi & \varphi^*_4 = \Phi''^* \\ \varphi_5 = \Psi' & \varphi^*_5 = \Phi'''^* \\ \varphi_6 = \Psi'' & \varphi^*_6 = \Psi^* \quad . \end{cases}$$

Analizziamo le matrici φ, φ^*, osservando in particolare che dalle (140) discende:

$$\Omega_{13} = \Delta_1^{-1}\varphi_1 + \Omega_{11}\varphi_5 + \Omega_{12}\varphi_6$$

$$\Omega_{23} = \Delta_2^{-1}\varphi_2 + \Omega_{21}\varphi_5 + \Omega_{22}\varphi_6$$

$$\begin{aligned} \varphi_3 \ = \Delta_3 [\Omega_{33} - (\varphi_1)_{-1}\Delta_1^{-1}\varphi_5 - (\varphi_2)_{-1}\Delta_2^{-1}\varphi_6 - (\varphi_5)_{-1}\Omega_{11}\varphi_5 - \\ - (\varphi_6)_{-1}\Omega_{22}\varphi_6 - (\varphi_6)_{-1}\Omega_{21}\varphi_5 - (\varphi_5)_{-1}\Omega_{12}\varphi_6] \end{aligned}$$

e quest'ultima si può scrivere:

$$(141) \qquad \varphi_3 = \Delta_3 [\sigma - (\varphi_1)_{-1}\Delta_1^{-1}\varphi_5 - (\varphi_2)_{-1}\Delta_2^{-1}\varphi_6]$$

con:

$$\sigma = \Omega_{33} - (\varphi_5)_{-1}\Omega_{11}\varphi_5 - (\varphi_6)_{-1}\Omega_{22}\varphi_6 - (\varphi_6)_{-1}\Omega_{21}\varphi_5 - (\varphi_5)_{-1}\Omega_{12}\varphi_6$$

matrice *simmetrica*.

Inoltre se ω è una matrice generica, anche Ω_{13}, Ω_{23}, Φ, Ψ', Ψ'' e quindi φ_1, φ_2, φ_4, φ_5, φ_6 sono generiche; ed essendo Ω_{33} simmetrica generica anche σ è simmetrica generica.

Sempre dalle (140) si ha analogamente:

$$\Omega^*_{12} = \Delta_1^{*-1}\varphi^*_2 + \Omega^*_{11}\varphi^*_6$$

$$\varphi^*_3 \ = \Delta^*_2 [\Omega^*_{22} - (\varphi^*_6)_{-1}\Omega^*_{11}\varphi^*_6 - (\varphi^*_2)_{-1}\Delta_1^{*-1}\varphi^*_6]$$

e anche:

$$\varphi^*_3 = \Delta^*_2 \left[\sigma^* - (\varphi^*_2)_{-1} \Delta_1^{*-1} \varphi^*_6\right] \tag{142}$$

con:

$$\sigma^* = \Omega^*_{22} - (\varphi^*_6)_{-1} \Omega^*_{11} \varphi^*_6$$

matrice simmetrica.

Dall'essere ω^* generica segue poi la genericità di Φ'^*, Ω_{12}^*, Φ''^*, Φ'''^*, Ψ^* e quindi di φ_1^*, φ_2^*, φ_4^*, φ_5^*, φ_6^*; ed essendo Ω_{22}^* simmetrica generica anche σ^* è simmetrica generica.

Ciò premesso ricordiamo (n. 17, I) che le relazioni di equivalenza (130) tra ω, ω^* saranno note non appena lo siano quelle tra χ, χ^*, date dalle (139), ad esse rispettivamente equivalenti.

Consideriamo allora una relazione siffatta tra χ, χ^*:

$$\chi^* = \gamma\, \chi\, G \tag{143}$$

con γ complessa non degenere e G unimodulare.

Scritta l'inversa G^{-1} di G nella forma:

$$G^{-1} = \left\| \begin{matrix} D_{11}^{(p+\delta_1+\varrho,\, p+\delta_1+\varrho)} & -D_{12}^{(p+\delta_1+\varrho,\, p-\varrho)} \\ -D_{21}^{(p-\varrho,\, p+\delta_1+\varrho)} & D_{22}^{(p-\varrho,\, p-\varrho)} \end{matrix} \right\|$$

si osserverà che è unimodulare anche la matrice:

$$D = \left\| \begin{matrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{matrix} \right\| = \| d_r \| = \| d_{rs} \| \quad (r, s = 1, 2, \dots, 7),$$

nella quale:

d_1, d_5, d_{1s}, d_{5s} sono matrici a k righe;
d_2, d_6, d_{2s}, d_{6s} » » » $\varrho - k$ » ;
d_3, d_7, d_{3s}, d_{7s} » » » $p - \varrho$ » ;
d_4, d_{4s} » » » δ_1 » ;
d_{rr} sono matrici quadrate.

La (143) equivale ora alla relazione (cfr. (139)):

$$\| \gamma \quad \gamma\varphi \| = \gamma \| U \quad \varphi \| = \| U \quad \varphi^* \| \begin{Vmatrix} D_{11} & -D_{12} \\ -D_{21} & D_{22} \end{Vmatrix} =$$

$$= \| D_{11} - \varphi^* D_{21} \qquad -D_{12} + \varphi^* D_{22} \|$$

da cui:

$$\gamma = D_{11} - \varphi^* D_{21} \quad , \quad (D_{11} - \varphi^* D_{21}) \varphi = - D_{12} + \varphi^* D_{22}$$

$$D_{11} \varphi + D_{12} = \varphi^* (D_{21} \varphi + D_{22})$$

ossia:

$$(144) \qquad \| D_{11} \quad D_{12} \| \psi = \varphi^* \| D_{21} \quad D_{22} \| \psi = \varphi^* d_7 \psi$$

avendo posto:

$$\psi^{(2p+\delta_1, p-\varrho)} = \begin{Vmatrix} \varphi \\ U^{(p-\varrho, p-\varrho)} \end{Vmatrix} .$$

Nelle nostre ipotesi è ora immediato che *non può essere* $|D_{21} \varphi + D_{22}| = 0$, *qualunque sia la* ω, *e quindi la* ψ.

Se fosse infatti $|D_{21} \varphi + D_{22}| = 0$ esisterebbe una matrice complessa non nulla $\tau^{(p-\varrho, 1)}$ tale che $\|D_{21} \; D_{22}\| \; \psi \tau = O$, e allora sarebbe anche, per la (144), $\|D_{11} \; D_{12}\| \; \psi \tau = O$, cioè $D \psi \tau = O$, $\psi \tau = O$ e $\tau = O$ contro l'ipotesi.

Dalla (144) segue allora:

$$\varphi^* = \| D_{11} \qquad D_{12} \| \psi (d_7 \psi)^{-1} ,$$

$$\varphi^*_r = d_r \psi (d_7 \psi)^{-1} \qquad (r = 1, 2, \dots, 6)$$

Pensiamo ora di aver fissato la ω, cioè χ, ψ, sempre essendo valida la (143). La condizione che ω^* sia una matrice normale $M\,N\,S$ esige in particolare che Ω^*_{22}, e quindi σ^* e [per la (142)] la $\Delta_2^{*-1}\,\varphi_3^* + (\varphi_2^*)_{-1}\,\Delta_1^{*-1}\,\varphi_6^*$ siano matrici simmetriche.

Questa condizione è automaticamente soddisfatta se $p-\rho=1$, perchè allora Ω^*_{22} si riduce a un solo elemento (e per questo il caso $p-\rho=1$ va trattato a parte).

Ma qualunque sia $p-\rho\geqslant 1$ la nominata condizione si traduce nel fatto che è simmetrica la seguente matrice:

$$\Delta_2^{*-1}\,d_3\psi\,(d_7\psi)^{-1} + (d_7\psi)^{-1}_{-1}\,(d_2\psi)_{-1}\,\Delta_1^{*-1}\,d_6\psi\,(d_7\psi)^{-1} =$$

$$= (d_7\psi)^{-1}_{-1}\left[(d_7\psi)_{-1}\,\Delta_2^{*-1}\,d_3\psi + (d_2\psi)_{-1}\,\Delta_1^{*-1}\,d_6\psi\right](d_7\psi)^{-1}$$

il che, per essere $|d_7\,\psi|\neq 0$, equivale alla simmetria della matrice scritta in parentesi quadre, cioè alla condizione:

$$\psi_{-1}\left[(d_6)_{-1}\Delta_1^{*-1}\,d_2+(d_3)_{-1}\Delta_2^{*-1}\,d_7-(d_2)_{-1}\Delta_1^{*-1}\,d_6-(d_7)_{-1}\Delta_2^{*-1}\,d_3\right]\psi=O.$$

In forma più compatta questa si può scrivere:

$$\psi_{-1}\,W\,\psi = O \tag{145}$$

avendo posto:

$$W^{(2p+\delta_1,\,2p+\delta_1)} = \left\|\begin{matrix} d_6 \\ d_3 \end{matrix}\right\|_{-1} \left\|\begin{matrix} \Delta_1^{*-1} & \\ & \Delta_2^{*-1} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} d_2 \\ d_7 \end{matrix}\right\| - \left\|\begin{matrix} d_2 \\ d_7 \end{matrix}\right\|_{-1} \left\|\begin{matrix} \Delta_1^{*-1} & \\ & \Delta_2^{*-1} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} d_6 \\ d_3 \end{matrix}\right\|.$$

È chiaro che la W è una matrice razionale emisimmetrica ($W_{-1}= -W$); si verifica inoltre senza difficoltà che essa si può scrivere:

$$W = E_{-1}\,M^*\,E \tag{146}$$

con:

$$(146') \quad E = \left\| \begin{matrix} d_5 \\ d_6 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_7 \end{matrix} \right\| \quad , \quad M^* = \left\| \begin{array}{cccccc} & & & O^{(k,\,k)} & & \\ & & & & \Delta_1^{*-1} & \\ & & & & & \Delta_2^{*-1} \\ & & & O^{(\delta_1,\,\delta_1)} & & \\ O^{(k,\,k)} & & & & & \\ & -\Delta_1^{*-1} & & & & \\ & & -\Delta_2^{*-1} & & & \end{array} \right\|$$

Poichè la E non è altro che la D, salvo una permutazione delle righe, le matrici E, E_{-1} sono unimodulari e allora la caratteristica di W è uguale a quella di M^* e vale $2\,(p-k)$.

In conclusione:

TEOREMA III. — *Fissata la matrice normale di* SEVERI ω, *nella forma* (128), *affinchè la* ω^*, *che è legata alla* ω *attraverso le* (139) *e* (143), *sia anch'essa normale di* SEVERI, *è necessario che valga la* (145), *in cui la* W, *data dalla* (146), *è una matrice razionale emisimmetrica di caratteristica* $2\,(p-k)$. La (145) *è automaticamente soddisfatta se* $p-\rho=1$.

Il caso $p-\rho=1$.

Si considerino le matrici ω, ω^* e le χ, χ^*, ad esse equivalenti, ottenute secondo il procedimento sopra indicato.

Sia χ' la matrice data dalla

$$(147) \qquad \chi' = \alpha\,\chi\,A$$

in cui le matrici α ed A sono così definite:

$$A = \left\| \begin{matrix} \alpha^{-1} & \\ & U^{(p-\rho,\,p-\rho)} \end{matrix} \right\| \quad , \quad \alpha = \| \alpha_{rs} \| \qquad (r,\, s = 1,\, 2,\, \ldots,\, 6)$$

essendo:

$$\alpha_{11} = \alpha_{55} = U^{(k,k)} \ , \ \alpha_{22} = \alpha_{66} = U^{(\varrho-k,\varrho-k)} \ , \ \alpha_{44} = U^{(\delta_1,\delta_1)} \ ,$$

$$\alpha_{43} = J_1^{(\delta_1, p-\varrho)} \ , \ \alpha_{34} = J_2^{(p-\varrho,\delta_1)} \ , \ \alpha_{33} = 1 + J_2 J_1 \ , \ \alpha_{31} = \alpha_{33} K_1 \ ,$$

$$\alpha_{32} = \alpha_{33} K_2 \ , \ \alpha_{35} = -\alpha_{33}\Delta_3 H_1 \ , \ \alpha_{36} = -\alpha_{33}\Delta_3 H_2 \ , \ \alpha_{41} = J_1 K_1 \ ,$$

$$\alpha_{42} = J_1 K_2 \ , \ \alpha_{45} = -J_1\Delta_3 H_1 \ , \ \alpha_{46} = -J_1 \Delta_3 H_2 \ ;$$

le matrici $H_1^{(p-\varrho,k)}$, $H_2^{(p-\varrho,\varrho-k)}$, $K_1^{(p-\varrho,k)}$, $K_2^{(p-\varrho,\varrho-k)}$, $J_1^{(\delta_1,p-\varrho)}$, $J_2^{(p-\varrho,\delta_1)}$ sono intere arbitrarie. Le altre matrici parziali α_{rs} sono tutte nulle.

Supposto che la χ sia data dalla prima delle (139), la (147) fornisce per χ' un'espressione del tipo:

$$\chi' = \left\| U^{(p+\delta_1+\varrho,\,p+\delta_1+\varrho)} \quad \varphi'^{(p+\delta_1+\varrho,\,p-\varrho)} \right\|$$

con $\varphi' = \|\varphi'_r\| \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6)$ e

$$\varphi'_1 = \Delta_1(\Omega_{13} - \Omega_{11}\Psi' - \Omega_{12}\Psi'') \ , \ \varphi'_2 = \Delta_2(\Omega_{23} - \Omega_{21}\Psi' - \Omega_{22}\Psi'') \ ,$$

$$\varphi'_3 = a = a' + ia'' = J_2\Phi + (1 + J_2 J_1)b \ , \ \varphi'_4 = \Phi + J_1 b$$

$$\varphi'_5 = \Psi' \ , \ \varphi'_6 = \Psi''$$

dove

$$b = b' + ib'' = K_1\Delta_1(\Omega_{13} - \Omega_{11}\Psi' - \Omega_{12}\Psi'') + K_2\Delta_2(\Omega_{23} - \Omega_{21}\Psi' - \Omega_{22}\Psi'') + \\ + \Delta_3[\Omega_{33} - (\Omega_{31} + H_1)\Psi' - (\Omega_{32} + H_2)\Psi''].$$

Le matrici α, A risultano in ogni caso unimodulari, e pertanto χ' è equivalente a χ. Si vede inoltre che, *scegliendo in modo opportuno le matrici H_1, H_2, K_1, K_2, J_1, J_2 si può realizzare che a'' sia positivo e grande a piacere* (1).

(1) A questo scopo si osservi preliminarmente che le parti immaginarie delle matrici:

$$(*) \qquad \begin{array}{l} \Omega_{13} - \Omega_{11}\Psi' - \Omega_{12}\Psi'' \\ \Omega_{23} - \Omega_{21}\Psi' - \Omega_{22}\Psi'' \\ \Omega_{33} - (\Omega_{31} + H_1)\Psi' - (\Omega_{32} + H_2)\Psi'' \end{array}$$

Dimostriamo allora che, *con scelta opportuna di* J_1, *la matrice* χ' *è una* $M\,E\,S$, cioè che la χ^* data dalla seconda delle (139) si può identificare con la χ' data dalla (147), ovvero che la ω^* ad essa legata risulta di fatto una matrice normale di SEVERI di tipo $M\,N\,S$.

Osserviamo che nella χ' gli elementi di φ_1', φ_2', φ_5', φ_6' non dipendono da J_1, e fissiamo gli elementi di α come sopra precisato, salvo J_1 che rimane per ora arbitraria. Pensiamo ora di fissare, nella ω^*, la Ω^*_{11} (simmetrica) purchè $\Omega^{*\,\prime\prime}_{11}$ sia definita positiva; $\Delta_1{}^*$, $\Delta_2{}^*$ arbitrarie del loro tipo, in modo che Δ^* sia del tipo indicato a pag. 154. Identificando le matrici Φ'^*, Φ''^*, Φ'''^*, Ψ'^*, $\Delta_1{}^*\,(\Omega_{12}{}^* - \Omega_{11}{}^*\,\Psi'^*)$ con le corrispondenti in χ', si vengono a determinare le Φ'^*, Φ''^*, Φ'''^*, Ψ'^*, Ω^*_{12}, $\Omega^*_{21} = (\Omega^*_{12})_{-1}$, che risultano indipendenti da J_1, salvo la Φ''^*. Dopo di ciò, posto $\Delta_2{}^*\,(\Omega^*_{22} - \Omega^*_{21}\,\Psi'^*) = a$ si ottiene $\Omega^*_{22} = \Delta_2^{*-1}\,a + \Omega^*_{21}\,\Psi'^*$; e disponendo di J_1 si può rendere positivo e grande a piacere il coefficiente dell'immaginario di Ω^*_{22} (si tenga conto che, al variare di J_1, le Ω^*_{11}, Ω^*_{12} sono costanti), e si può quindi fare in modo che $||\Delta^{*-1}\,\Omega^*||$ sia una matrice normale di RIEMANN e ω^* una $M\,N\,S$.

---

non possono essere simultaneamente nulle, comunque si scelgano le H_1, H_2. Ciò infatti porterebbe al verificarsi simultaneo delle relazioni:

$$\begin{array}{lll}
[\Psi']'' = O & , & [\Psi'']'' = O \\
\Omega''_{13} - \Omega''_{11}[\Psi']' & - & \Omega''_{12}[\Psi']' = O \\
\Omega''_{23} - \Omega''_{21}[\Psi']' & - & \Omega''_{22}[\Psi']' = O \\
\Omega''_{33} - \Omega''_{31}[\Psi']' & - & \Omega''_{32}[\Psi']' = O
\end{array}$$

in contrasto con la condizione $|\Omega''| > 0$, che consegue dall'essere Ω'' matrice dei coefficienti di una forma quadratica definita positiva.

Fissate dunque le matrici $H_1\,H_2$ in modo che le (*) non abbiano tutte parte immaginaria nulla, si scelgano, com'è allora possibile, K_1, K_2 in modo che $b'' \neq 0$.

Così risulta $a'' = J_2\,\Phi'' + (1 + J_2\,J_1)\,b''$ con $b'' \neq 0$. Fissata allora $J_2 \neq O$, al variare di J_1 in modo arbitrario $1 + J_2\,J_1$ risulta essere un intero arbitrario, sicchè si può scegliere J_1 in modo che a'' sia positivo e grande a piacere.

Si ha dunque il:

TEOREMA IV. — *Ogni M N S per cui* $p-\rho=1$, $\delta_2=\rho$, *è equivalente ad una M N S avente i caratteri* $p^*=p-k$ $\delta_1^*=\delta_1+2k$, $\delta_2^*=\rho^*=\rho-k$ $(k=1, 2, \ldots, \rho)$ *e avente i divisori elementari arbitrari.*

Ove si ponga $k=\rho$, risulta $p^*=1$, $\delta_1^*=\delta_1+2\rho$, $\delta_2^*=\rho^*=0$, e quindi:

TEOREMA V. — *Ogni M N S per cui* $p-\rho=1$, $\delta_2=\rho$, *è equivalente ad una M N S del tipo:*

$$(148) \qquad \begin{Vmatrix} 1 & O & \tau^* \\ O & U^{(\delta_1^*,\, \delta_1^*)} & \Phi^{*(\delta_1^*,\, 1)} \end{Vmatrix}$$

avende quindi i caratteri $p^*=1$, δ_1^* *arbitrario,* $\delta_2^*=\rho^*=0$.

Con riguardo poi all'oss. III del n. 17 si ha il:

TEOREMA VI. — *Ogni M N S per cui* $p-\rho=1$ *è equivalente ad una M N S del tipo:*

$$(149) \qquad \begin{Vmatrix} 1 & O & \tau^* \\ O & U^{(\delta_1^*,\, \delta_1^*)} & \Phi^{*(\delta_1^*,\, 1)} \\ O & O & O^{(\delta_2^*,\, 1)} \end{Vmatrix},$$

avende quindi i caratteri $p^*=1$, δ_1^* *e* δ_2^* *arbitrari,* $\rho^*=0$.

Infine, tenendo presente l'oss. VII del n. 17:

TEOREMA VII. — *Ogni M E S del tipo* (π, π') (*con* $\pi'\leqslant 2\pi$), *avente la caratteristica* $\pi'-1$, *è equivalente ad una matrice normale* (149) *di caratteri* $p^*=1$, $\delta_1^*=\pi'-2$, $\delta_2^*=\pi-\pi'+1$, $\rho^*=0$.

Si potrebbe poi dimostrare (cfr. [15], n. 7) *che la matrice*

ω^*, di cui ai teoremi IV, V, VI è generica non appena lo sia la ω o la χ.

Questo fa supporre che ogni matrice normale del tipo (149) sia equivalente ad una *MNS* avente il carattere p arbitrario (salvo le ovvie limitazioni $1 \leq p \leq \left[\frac{\delta_1^*}{2}\right]$; e il fatto è vero, come si dimostra in [15], con un procedimento analogo a quello seguito finora talchè vale il:

TEOREMA VIII. — *Ogni matrice normale* (149), *e quindi ogni MES del tipo* (π, π') *e di caratteristica* $\pi' - 1$, *è equivalente ad una MNS di caratteri* $p = k + 1$, $\delta_1 = \pi' - 2k - 2$, $\delta_2 = \pi - \pi' + k + 1$, $\rho = k$ $\left(k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\pi'}{2}\right] - 1\right)$ *e divisori elementari arbitrari.*

Alcuni lemmi

Riportiamo gli enunciati di alcuni lemmi, che ci occorrono per poter proseguire la nostra analisi, rinviando a [15] per le relative dimostrazioni.

LEMMA I. — *Se $\beta^{(r,\, s)}$ è una generica matrice complessa e $w^{(s,\, r)}$ è una matrice razionale, la relazione:*

$$\beta_{-1}\, w_{-1} - w\, \beta = O$$

è soddisfatta se e solo se $s = 1$ ovvero $w = O$.

LEMMA II. — *Se $\beta^{(r,s)}$, $\beta'^{(r',s)}$ sono due matrici complesse generiche, uguali oppure distinte, e se $w^{(r',\, r)}$ è razionale (in più emisimmetrica se $\beta = \beta'$), la relazione:*

$$\beta_{-1}\, w_{-1}\, \beta' - \beta'_{-1}\, w\, \beta = O$$

è soddisfatta se e solo se $s = 1$ ovvero $w = O$.

LEMMA III. — *Se* $\sigma^{(s,\,s)}$ *è una matrice complessa simmetrica generica,* $A^{(s,\,s)}$ *una matrice razionale diagonale non degenere,* $w^{(s,\,s)}$ *una matrice razionale, la relazione:*

$$\sigma\, A\, w_{-1} - w\, A\, \sigma = O$$

è soddisfatta se e soltanto se $w = t\, A^{-1}$, *con* t *numero razionale.*

LEMMA IV. — *Se* $\sigma^{(s,\,s)}$ *è una matrice complessa simmetrica generica,* $\beta^{(r,\,s)}$ *una matrice complessa generica,* $A^{(s,\,s)}$ *una matrice diagonale razionale non degenere,* $w^{(r,\,s)}$ *una matrice razionale, la relazione:*

$$\sigma\, A\, w_{-1}\, \beta - \beta_{-1}\, w\, A\, \sigma = O$$

è soddisfatta se e solo se $s = 1$ *ovvero* $w = O$.

Il caso $p - \rho > 1$.

Riprendiamo il teorema III nell'ipotesi $p - \rho > 1$, ricordando in particolare che una relazione di equivalenza del tipo (130) tra ω, ω^*, ovvero del tipo (143) tra χ, χ^*, implica necessariamente la (145).

Dimostriamo che: *se* $p - \rho > 1$ *e se* ω *(e quindi* χ *e* ψ*) è generica, la* (145) *può valere soltanto se* $k = 0$. Da ciò seguirà immediatamente il prossimo teorema IX, tenendo presente il significato di k (pag. 154).

Si scriva anzitutto la matrice W data dalla (146) nella forma:

$$W = \| w_{rs} \| \qquad (r,\, s = 1,\, 2,\, \ldots,\, 7)$$

ove le matrici parziali w_{rs} sono del tipo seguente:

$$w_{11}^{(k,\,k)} \quad , \quad w_{22}^{(\varrho-k,\,\varrho-k)} \quad , \quad w_{33}^{(p-\varrho,\,p-\varrho)} \quad , \quad w_{44}^{(\delta_1,\,\delta_1)}$$

$$w_{55}^{(k,\,k)} \quad , \quad w_{66}^{(\varrho-k,\,\varrho-k)} \quad , \quad w_{77}^{(p-\varrho,\,p-\varrho)}$$

mentre il tipo delle $w_{rs} = -(w_{sr})_{-1}$ per $r \neq s$ è automaticamente determinato dal tipo delle precedenti.

Con queste notazioni la (145) si scrive:

$$\sum_{1}^{7}{}_{rs} \; (\varphi_r)_{-1} \; w_{rs} \; \varphi_s = O \; ,$$

avendo posto $\varphi_7 = U^{(p-\varrho, p-\varrho)}$.

Nelle nostre ipotesi, e cioè $p - \varrho > 1$ e ψ generica, tenendo anche conto della espressione (141) della φ_3, si possono trarre le seguenti conseguenze.

Per $\varphi_1 = O$, $\varphi_2 = O$, $\sigma = O$, $\varphi_4 = O$, $\varphi_5 = O$, $\varphi_6 = O$ si ha $w_{77} = O$.

Per φ_1 generica, $\varphi_2 = O$, $\sigma = O$, $\varphi_4 = O$, $\varphi_5 = O$, $\varphi_6 = O$ si ottiene $(\varphi_1)_{-1} \; w_{11} \; \varphi_1 + (\varphi_1)_{-1} \; w_{17} + w_{71} \; \varphi_1 = O$; e questa relazione implica simultaneamente le due $(\varphi_1)_{-1} \; w_{11} \, \varphi_1 = O$ e $(\varphi_1)_{-1} \, w_{17} - (w_{17})_{-1} \, \varphi_1 = O$. Dalla prima segue notoriamente $w_{11} = O$; dalla seconda, per il lemma I, segue $w_{17} = O$, $w_{71} = O$.

Analogamente si prova che sono nulle le matrici w_{22}, w_{27}, w_{72}; w_{44}, w_{47}, w_{74}; w_{55}, w_{57}, w_{75}; w_{66}, w_{67}, w_{76}.

Per φ_1, φ_2 generiche, $\sigma = O$, $\varphi_4 = O$, $\varphi_5 = O$, $\varphi_6 = O$ si ha $(\varphi_1)_{-1} \; w_{12} \; \varphi_2 + (\varphi_2)_{-1} \; w_{21} \; \varphi_1 = O$, da cui segue, per il lemma II, $w_{12} = O$, $w_{21} = O$.

Analogamente si prova che sono nulle le matrici w_{14}, w_{41}; w_{16}, w_{61}; w_{24}, w_{42}; w_{25}, w_{52}; w_{45}, w_{54}; w_{46}, w_{64}; w_{56}, w_{65}.

Per σ simmetrica generica, $\varphi_1 = O$, $\varphi_2 = O$, $\varphi_4 = O$, $\varphi_5 = O$, $\varphi_6 = O$ si ha $\sigma \Delta_3 \; w_{33} \, \Delta_3 \; \sigma + \sigma \; \Delta_3 \; w_{37} + w_{73} \; \Delta_3 \; \sigma = O$, da cui simultaneamente $\sigma \Delta_3 \; w_{33} \, \Delta_3 \; \sigma = O$ e $\sigma \; \Delta_3 \; w_{37} - (w_{37})_{-1} \, \Delta_3 \sigma = O$. Dalla prima, tenuto anche conto che, per essere σ generica, è $|\Delta_3 \; \sigma| \neq 0$, segue $w_{33} = O$; dalla seconda, per il lemma III, segue $w_{73} = t \; \Delta_3^{-1}$, $w_{37} = -t \; \Delta_3^{-1}$ con t razionale.

Per φ_1, σ generiche, $\varphi_2 = O$, $\varphi_4 = O$, $\varphi_5 = O$, $\varphi_6 = O$ si ha $(\varphi_1)_{-1} \; w_{13} \; \Delta_3 \; \sigma + \sigma \; \Delta_3 \, w_{31} \; \varphi_1 = O$, da cui, per il lemma IV, $w_{13} = O$, $w_{31} = O$.

Similmente si prova che sono nulle le matrici w_{23}, w_{32}; w_{34}, w_{43}; w_{35}, w_{53}; w_{36}, w_{63}.

Per φ_1, φ_5 generiche, $\varphi_2 = O$, $\sigma = O$, $\varphi_4 = O$, $\varphi_6 = O$ si ha $(\varphi_1)_{-1}(w_{15} - t\,\Delta_1^{-1})\,\varphi_5 + (\varphi_5)_{-1}\,(t\,\Delta_1^{-1} + w_{51})\,\varphi_1 = O$ da cui, per il il lemma II, $w_{15} = t\,\Delta_1^{-1}$, $w_{51} = -t\,\Delta_1^{-1}$.

Similmente si ricava $w_{26} = t\,\Delta_2^{-1}$, $w_{62} = -t\,\Delta_2^{-1}$.

In conclusione abbiamo dimostrato che, nelle nostre ipotesi,

$$W = t\,M_1\,, \quad \text{con } M_1 = \|m_{rs}\| \quad (r, s = 1, 2, \ldots, 7) \tag{150}$$

ove $m_{15} = -m_{51} = \Delta_1^{-1}$, $m_{26} = -m_{62} = \Delta_2^{-1}$, $m_{37} = -m_{73} = -\Delta_3^{-1}$, $m_{44} = O^{(\delta_1, \delta_1)}$, e t è un numero razionale. Le altre m_{rs} sono tutte nulle.

E si può naturalmente sviluppare un calcolo analogo al precedente scambiando le veci delle due matrici ω, ω^* (cfr. [15], n. 10).

Confrontando ora le due diverse espressioni (146), (150) della matrice W, in particolare, uguagliando le rispettive caratteristiche, segue $k = 0$.

Possiamo dunque enunciare il:

TEOREMA IX. — *Una MNS generica per cui $p - \rho > 1$ non è equivalente ad alcuna MNS avente gli interi caratteristici diversi. In altri termini: una MNS generica per cui $p - \rho > 1$ individua univocamente i suoi interi associati.*

O anche in forma equivalente:

TEOREMA X. — *Una MES generica del tipo (π, π'), avente caratteristica minore di $\pi' - 1$, individua univocamente i suoi interi associati.*

A questo punto vien fatto di chiedersi se sia possibile rinforzare il teorema IX, o X, togliendo l'ipotesi che la *MNS* sia generica. La risposta è negativa; daremo infatti al termine di questo n. un significativo esempio di *MNS* (con il carattere $p \geq 2$), avente gli interi caratteristici arbitrariamente prefissati, la quale non individua i propri interi associati.

Passiamo ora a dimostrare un teorema analogo al precedente, che si riferisce però ai divisori elementari anzichè agli interi associati.

Siano sempre ω, ω^* due *MNS* equivalenti, e una di esse, ad es. la ω, sia generica. Per quanto visto esse hanno uguali gli interi caratteristici.

Supposto che tra χ, χ^*, rispettivamente equivalenti ad ω, ω^*, interceda una relazione di equivalenza (143), vale necessariamente la (145) e la (150). Siccome ora è $k=0$, la matrice D, considerata in precedenza, si può scrivere:

$$(151) \qquad D = \|t_r\| = \|t_{rs}\| \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, 5)$$

con le t_r, t_{rs} del tipo seguente: $t_1^{(\varrho,\,2p+\delta_1)}$, $t_2^{(p-\varrho,\,2p+\delta_1)}$, $t_3^{(\delta_1,\,2p+\delta_1)}$, $t_4^{(\varrho,\,2p+\delta_1)}$, $t_5^{(p-\varrho,\,2p+\delta_1)}$; $t_{11}^{(\varrho,\,\varrho)}$, $t_{22}^{(p-\varrho,\,p-\varrho)}$, $t_{33}^{(\delta_1,\,\delta_1)}$, $t_{44}^{(\varrho,\,\varrho)}$, $t_{55}^{(p-\varrho,p-\varrho)}$.

La matrice W diviene allora (cfr. (146), (150)):

$$(152) \qquad W = E_{-1}\, M^*\, E = t\, M_1$$

in cui, per le (146′), (151):

$$(153) \qquad E = \left\| \begin{matrix} t_4 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_1 \\ t_5 \end{matrix} \right\|$$

mentre M_1 è data dalla (150) ed M^* dalla (146′), nelle quali si tenga conto che $k=0$.

Moltiplicando i due membri della (152) per d^*_p (massimo dei divisori elementari di Δ^*), essa diviene:

$$d^*_p\, W = E_{-1}\, d^*_p\, M^*\, E = t\, d^*_p\, M_1 \,.$$

Confrontando ora il primo con l'ultimo membro, tenendo presente la struttura particolare delle matrici W, M_1 e ricordando che E, E_{-1} sono unimodulari, ne segue l'uguaglianza dei divisori elementari di Δ e Δ^*, cioè $d^*_i = d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$; risulta inoltre $t = \pm 1$.

Si conclude con il:

TEOREMA XI. — *Una MNS generica per cui $p - \rho > 1$, e quindi una MES generica del tipo (π, π'), di caratteristica minore di $\pi' - 1$, determina univocamente i propri divisori elementari.*

Con riguardo ai precedenti teoremi IX, X, XI possiamo infine enunciare il:

TEOREMA XII. — *Una MNS generica per cui $p - \rho > 1$ (in forma equivalente una MES generica del tipo (π, π'), di caratteristica minore di $\pi' - 1$) individua univocamente gli interi associati e i divisori elementari.*

Altra immediata conseguenza dei risultati conseguiti è espressa dal:

TEOREMA XIII. — *Ogni MES è equivalente ad una forma canonica di uno ed uno solo dei seguenti tre tipi:*

I tipo: $\left\| \begin{matrix} U^{(\delta_1, \delta_1)} \\ \\ O^{(\delta_2, \delta_1)} \end{matrix} \right\|$, $(p = \rho = 0,\ \delta_1,\ \delta_2$ arbitrari);

II tipo: dato dalla (149), $(p = 1,\ \rho = 0,\ \delta_1,\ \delta_2$ arbitrari);

III tipo: dato dalla (128), (caratteri arbitrari, purchè $p - \rho > 1$).

Una MES equivalente ad una forma canonica generica del terzo tipo individua univocamente gli interi caratteristici e i divisori elementari.

COMPLEMENTO — Come preannunciato, diamo un esempio di *MNS*, con il carattere $p \geqslant 2$, avente gli interi caratteristici arbitrariamente prefissati, la quale non individua i propri interi associati (cfr. [8], n. 5). L'esempio in questione è contenuto nella proposizione più generale: *condizione sufficiente perchè una matrice quasi abeliana* ω, *i cui interi caratteristici siano arbitrariamente prefissati, sia equivalente ad una matrice* ω' *avente il carattere* p *minore, è che la matrice di* RIEMANN $\|\Delta^{-1}\,\Omega\|$ *associata alla* ω, *sia* composta *secondo* G. SCORZA.

Ricordiamo subito che l'essere $\|\Delta^{-1}\,\Omega\|$ *composta* significa che la considerata matrice di RIEMANN, di genere p, è equivalente ad una matrice del tipo

$$\left\|\begin{matrix} \omega_1^{(k,\,2k)} & O^{(k,\,2p-2k)} \\ O^{(p-k,\,2k)} & \omega_2^{(p-k,\,2p-2k)} \end{matrix}\right\|$$

con ω_1, ω_2 matrici di RIEMANN di genere k, $p-k$ rispettivamente. Il verificarsi di questa circostanza presuppone dunque $p \geqslant 2$. In tal caso è immediato che $\|\Delta^{-1}\,\Omega\|$ è equivalente a una matrice del tipo:

$$(154) \qquad \left\|\begin{matrix} \Delta_1^{-1} & O & \Omega_{11} & O \\ O & \Delta_2^{-1} & O & \Omega_{22} \end{matrix}\right\|,$$

$\|\Delta_1^{-1}\,\Omega_{11}\|$ e $\|\Delta_2^{-1}\,\Omega_{22}\|$ sono matrici normali di RIEMANN di genere k, $p-k$ rispettivamente. In base ad un lemma dimostrato all'inizio di questo n. si potrà allora sostituire la matrice quasi abeliana ω con altra matrice equivalente, che indicheremo ancora con ω, nella quale però la relativa matrice di RIEMANN ha la forma (154); talchè potrà supporsi che nella ω data dalla (128) sia:

$$\| \Delta^{-1}\, \Omega \| = \begin{Vmatrix} (\Delta_1^{-1})^{(k,\,k)} & O & O & \Omega_{11}^{(k,\,k)} & O & O \\ O & (\Delta_2^{-1})^{(\rho-k,\,\rho-k)} & O & O & \Omega_{22}^{(\rho-k,\,\rho-k)} & \Omega_{23}^{(\rho-k,\,p-\rho)} \\ O & O & (\Delta_3^{-1})^{(p-\rho,\,p-\rho)} & O & \Omega_{32}^{(p-\rho,\,\rho-k)} & \Omega_{33}^{(p-\rho,\,p-\rho)} \end{Vmatrix}$$

$$\Psi = \begin{Vmatrix} \Psi'^{(k,\,p-\rho)} \\ \Psi''^{(\rho-k,\,p-\rho)} \end{Vmatrix} .$$

Moltiplicando a sinistra la ω per la matrice:

$$\lambda = \begin{Vmatrix} \Delta_1^{(k,\,k)} & O & -\Delta_1 \Omega_{11} & O \\ O & U^{(p-k+\delta_1,\,p-k+\delta_1)} & O & O \\ O & O & U^{(k,\,k)} & O \\ O & O & O & U^{(\delta_2-k,\,\delta_2-k)} \end{Vmatrix}$$

si passa dalla ω alla matrice equivalente $\lambda\, \omega$; permutando in quest'ultima righe e colonne si passa infine alla matrice:

$$\omega' = \begin{Vmatrix} \Delta_2^{-1} & O & O & O & O & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ O & \Delta_3^{-1} & O & O & O & \Omega_{32} & \Omega_{33} \\ O & O & U & O & O & O & -\Delta_1 \Omega_{11} \Psi' \\ O & O & O & U & O & O & \Phi \\ O & O & O & O & U & O & \Psi' \\ O & O & O & O & O & U & \Psi'' \\ O & O & O & O & O & O & O \end{Vmatrix}$$

che è equivalente ad ω, ed è nella forma normale di SEVERI. La proposizione iniziale resta dimostrata non appena si osservi che gli interi di ω' sono:

$$p' = p - k\ , \quad \delta'_1 = \delta_1 + 2k\ , \quad \delta'_2 = \delta_2 - k\ , \quad \rho' = \rho - k\ .$$

19. Il gruppo unimodulare ristretto

Nella teoria aritmetica delle funzioni abeliane, in particolare nello studio della equivalenza tra matrici di Riemann di un dato genere p, nella forma normale $||\Delta^{-1}\,\Omega||$, sono ben noti l'ufficio e l'importanza del *gruppo modulare ristretto* (cfr. [26]).

Fissata che sia la matrice Δ, cioè i divisori elementari $d_1, d_2, \ldots, d_p$ della matrice di Riemann (con le note condizioni $d_1 = 1$, d_h divide d_{h+1} per $h = 1, 2, \ldots, p-1$) si tratta del gruppo delle matrici intere Γ_1 di ordine $2p$ soddisfacenti la condizione:

$$\Gamma_1\, N_2\, (\Gamma_1)_{-1} = N_2 \quad , \quad \text{con } N_2 = \begin{Vmatrix} O & \Delta \\ -\Delta & O \end{Vmatrix} \tag{155}$$

Le matrici Γ_1 hanno in conseguenza determinante $+1$ e quindi il gruppo in questione, che indicheremo con $G\,[\Delta]$, è un sottogruppo del gruppo di tutte le matrici unimodulari di ordine $2p$. Una matrice di Riemann in forma normale (brevemente *MNR*) $||\Delta^{-1}\,\Omega||$ la diremo *generica*, quando, posto $\Omega = \Omega' + i\,\Omega'' = ||\omega'_{rs} + i\,\omega''_{rs}||$, gli elementi ω'_{rs}, ω''_{rs} ($r \leqslant s$; $r, s = 1, 2, \ldots, p$) sono algebricamente indipendenti sul campo razionale. Ciò premesso, richiamiamo un teorema di Conforto (cfr. [26], p. 122) nella forma più idonea a mostrare l'importanza del gruppo $G\,[\Delta]$ nell'ordine di questioni che dovremo trattare:

Teorema I. — *Sia* $\omega_1^{(p,\,2p)} = ||\Delta^{-1}\,\Omega||$ *una generica MNR, e* $\Gamma_1^{(2p,\,2p)}$ *una matrice intera unimodulare; condizione neces-*

saria e sufficiente affinchè esista una matrice complessa non degenere $\gamma_1^{(p,\,p)}$ *tale che* $\gamma_1 \omega_1 \Gamma_1$ *sia una MNR è che* Γ_1 *appartenga al gruppo modulare ristretto* $G\,[\Delta]$.

Nel presente n. mostreremo, con BENEDICTY, l'esistenza di un gruppo analogo a $G\,[\Delta]$ che, per quanto possibile, compie lo stesso ufficio nei confronti però delle matrici quasi abeliane. E sarà anche chiarito dove e perchè viene meno l'analogia con il caso abeliano.

Per non interrompere più avanti la nostra trattazione, completiamo qui i necessari richiami sul gruppo $G\,[\Delta]$. Anzitutto la definizione di $G\,[\Delta]$, fornita dalla (155), si può dare anche per mezzo della relazione (che si dimostra subito equivalente alla precedente):

$$(\Gamma_1)_{-1}\; N_1\; \Gamma_1 = N_1 \tag{156}$$

ove:

$$N_1 = -N_2^{-1} = \begin{Vmatrix} O & \Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1} & O \end{Vmatrix} . \tag{157}$$

Posto inoltre:

$$\Gamma_1 = \begin{Vmatrix} D^{(p,\,p)} & B^{(p,\,p)} \\ C^{(p,\,p)} & A^{(p,\,p)} \end{Vmatrix} \tag{158}$$

la (156) equivale (cfr. [26], p. 137) alle relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} & A_{-1}\,\Delta^{-1}\,B = B_{-1}\,\Delta^{-1}\,A \\ & C_{-1}\,\Delta^{-1}\,D = D_{-1}\,\Delta^{-1}\,C \\ & D_{-1}\,\Delta^{-1}\,A - C_{-1}\,\Delta^{-1}\,B = \Delta^{-1} . \end{aligned} \right. \tag{159}$$

Infine, date la ω_1 e la Γ_1 soddisfacente la (156), la matrice γ_1 di cui al teorema I è $\gamma_1 = \Delta^{-1} (\Delta^{-1} D + \Omega C)^{-1}$, e risulta $\gamma_1 \omega_1 \Gamma_1 = ||\Delta^{-1} \Omega^*||$, con:

$$\Omega^* = \Delta^{-1} (\Delta^{-1} D + \Omega C)^{-1} (\Delta^{-1} B + \Omega A) . \tag{160}$$

Venendo ora al caso quasi abeliano definiamo un gruppo discontinuo analogo a $G [\Delta]$, che chiameremo *gruppo unimodulare ristretto* e indicheremo con $G [\Delta, \delta_1]$.

Fissata una matrice Δ *diagonale intera di ordine* p, *i cui elementi* $d_1, d_2, \ldots, d_p$ *sono tali che* $d_1 = 1$, d_h *divide* d_{h+1} (*per* $h = 1, 2, \ldots, p-1$), *e fissato un intero* δ_1, *intendiamo per gruppo unimodulare ristretto* $G [\Delta, \delta_1]$, *relativo a* Δ *e* δ_1, *il gruppo delle matrici* Γ *unimodulari, di ordine* $2p + \delta_1$, *soddisfacenti la condizione*:

$$\Gamma_{-1} M \Gamma = M \tag{161}$$

ove:

$$M^{(2p+\delta_1, 2p+\delta_1)} = \left\| \begin{matrix} O & O & \Delta^{-1} \\ O & O^{(\delta_1, \delta_1)} & O \\ -\Delta^{-1} & O & O \end{matrix} \right\| . \tag{162}$$

È evidente che $G [\Delta, \delta_1]$ si riduce a $G [\Delta]$ per $\delta_1 = 0$. In generale, scritta la matrice Γ nella forma:

$$\Gamma = \left\| \begin{matrix} D^{(p,p)} & P^{(p,\delta_1)} & B^{(p,p)} \\ Q^{(\delta_1,p)} & R^{(\delta_1,\delta_1)} & S^{(\delta_1,p)} \\ C^{(p,p)} & T^{(p,\delta_1)} & A_s^{(p,p)} \end{matrix} \right\| \tag{163}$$

la (161) equivale alle:

$$(164)\qquad \begin{cases} A_{-1}\,\Delta^{-1}\,B = B_{-1}\,\Delta^{-1}\,A \\ C_{-1}\,\Delta^{-1}\,D = D_{-1}\,\Delta^{-1}\,C \\ D_{-1}\,\Delta^{-1}\,A - C_{-1}\,\Delta^{-1}\,B = \Delta^{-1} \\ C_{-1}\,\Delta^{-1}\,P - D_{-1}\,\Delta^{-1}\,T = O \\ P_{-1}\,\Delta^{-1}\,A - T_{-1}\,\Delta^{-1}\,B = O \\ P_{-1}\,\Delta^{-1}\,T - T_{-1}\,\Delta^{-1}\,P = O\,. \end{cases}$$

Si osservi che le prime tre delle (164) non sono altro che le (159) ed esprimono che la matrice $\begin{Vmatrix} D & B \\ C & A \end{Vmatrix} = \Gamma_1$ appartiene a $G\,[\Delta]$; la quarta e la quinta equivalgono a $\begin{Vmatrix} P \\ T \end{Vmatrix}_{-1} M_1\,\Gamma_1 = O$ cioè a:

$$(165)\qquad P = T = O\,,$$

mentre l'ultima delle (164) è ormai soddisfatta; resta soltanto la condizione che R sia unimodulare, affinchè lo sia anche Γ.

L'importanza del gruppo unimodulare ristretto $G\,[\Delta, \delta_1]$ risiede nel seguente teorema di BENEDICTY che, nel caso quasi abeliano, tiene il posto del teorema I:

TEOREMA II. — *Sia* $\omega^{(\pi,\pi')}$ *una generica MNS* ($\pi = p + \delta_1 + \delta_2$, $\pi' = 2p + \delta_1$) *per la quale* $p - \rho > 1$, *e sia* $\Gamma^{(\pi',\pi')}$ *una matrice unimodulare. Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una matrice complessa non degenere* $\gamma^{(\pi,\pi)}$ *tale che* $\gamma\,\omega\,\Gamma$ *sia una MNS è che* Γ *appartenga al gruppo unimodulare ristretto* $G\,[\Delta, \delta_1]$. (Δ è, naturalmente, la matrice dei divisori elementari della ω, che essa individua univocamente, a norma del teorema XI del n. 18).

P. II, n. 19

Senza soffermarci sulla dimostrazione di questo teorema che discende dai risultati del n. precedente (e per la quale rinviamo ai due lavori [14], [15]), preferiamo fare qualche riflessione critica.

Confrontando il teorema I, relativo alle matrici di RIEMANN, con il teorema II, relativo alle matrici quasi abeliane, si noterà subito che quest'ultimo viene enunciato nell'ipotesi che sia $p-\rho>1$.

È questa un'ipotesi essenziale? In altri termini vale il teorema II, o uno analogo, quando sia $p-\rho\leqslant 1$?

Evidentemente, quando $p-\rho\leqslant 1$, la definizione del gruppo unimodulare ristretto conserva inalterato il suo significato (diventa banale solo in sottocasi particolarissimi, del resto evidenti); tuttavia il gruppo perde il suo significato più espressivo perchè non vale più il teorema II.

A questo proposito si ricorderà (teoremi I e IV del n. 18) che una *MNS*, anche generica, per la quale $p-\rho\leqslant 1$, non individua nè i propri interi caratteristici (uno dei quali rimane, entro certi limiti, arbitrario, e gli altri sono funzioni di questo) nè i divisori elementari (che sono tutti arbitrari, salvo a soddisfare le condizioni aritmetiche che sono loro proprie). Pertanto non è assegnata a priori la specie della *MNS* a cui dovrebbe potersi ridurre la matrice data. D'altronde ogni *MNS* per cui $p-\rho=0,1$ è equivalente (cfr. i teoremi I e VI del n. 18) rispettivamente alla forma normale:

$$(166) \qquad \omega^{(\pi,\pi')}\begin{Vmatrix} U^{(\delta_1,\delta_1)} \\ O^{(\delta_2,\delta_1)} \end{Vmatrix}, \quad \omega^{(\pi,\pi')} = \begin{Vmatrix} 1 & O & \tau^{(1,1)} \\ O & U^{(\delta_1,\delta_1)} & \Phi^{(\delta_1,1)} \\ O & O & O^{(\delta_2,1)} \end{Vmatrix}$$

con Φ arbitraria e $\tau=\tau'+i\,\tau''$ con $\tau''>0$, sicchè basta prendere in considerazione queste ultime.

Ora vale in proposito il:

TEOREMA III. — *Moltiplicando la prima delle* (166), *ovvero la seconda purchè generica, a destra per una matrice unimodulare* $\Gamma^{(\pi', \pi')}$ *esiste sempre una matrice complessa non degenere* $\gamma^{(\pi, \pi)}$ *tale che* $\gamma\omega\Gamma$ *sia ancora una MNS del tipo della prima delle* (166), *ovvero della seconda delle* (166) *a meno di un eventuale cambiamento di segno dell'ultima colonna.*

La sua dimostrazione per la prima delle (166) è immediata. Meno immediata è la dimostrazione per la seconda delle (166) (il lettore veda la nota [14]). A noi importa qui osservare una notevole conseguenza del teorema III. Poichè ogni *MNS* per cui $p - \rho \leq 1$ è equivalente ad una delle (166), segue dal teorema III il:

TEOREMA IV. — *Moltiplicando una MNS* $\omega^{(\pi, \pi')}$ *per la quale sia* $p - \rho = 0, 1$ (*generica nel secondo caso*) *per una matrice unimodulare* $\Gamma^{(\pi', \pi')}$, *esiste sempre una matrice complessa non degenere* $\gamma^{(\pi, \pi)}$ *tale che* $\gamma\, \omega\, \Gamma$ *sia una MNS rispettivamente del primo o del secondo tipo* (166), *a meno di un eventuale cambiamento di segno dell'ultimo colonna nel secondo caso.*

Quanto abbiamo detto non esclude che possa valere il teorema II, o uno analogo, per le *MNS* ω per le quali $p - \rho \leq 1$, esigendo che $\gamma\, \omega\, \Gamma$ abbia i medesimi interi caratteristici e i medesimi divisori elementari della ω; ma si comprende che un tal teorema, anche se valesse, non sarebbe molto significativo, perchè l'una o l'altra determinazione dei divisori elementari e degli interi caratteristici non ha maggior significato intrinseco di quella iniziale.

A conclusione della trattazione sull'equivalenza tra *MNS* (svolta nei nn. 17, 18, 19), con riguardo anche a tutti i precedenti sviluppi della teoria aritmetica delle matrici quasi abeliane, osserviamo che i risultati ottenuti hanno valore e senso nell'ambito della nominata teoria aritmetica. Sappiamo infatti

P. II, n. 19

da quanto precede che il punto di vista aritmetico non equivale al punto di vista funzionale, cioè alla teoria delle funzioni quasi abeliane; mentre invece ([26], [30]) la teoria delle matrici di RIEMANN si può ritenere equivalente alla teoria dei corpi di funzioni abeliane.

Resta dunque aperto il problema di interpretare i risultati di natura aritmetica in termini di funzioni quasi abeliane.

Per quanto riguarda in particolare il presente n. si pone naturalmente il problema dello studio sistematico del gruppo unimodulare ristretto $G\,[\Delta,\, \delta_1]$, nonchè del gruppo che, in analogia con il caso classico, potrebbe chiamarsi il *gruppo simplettico generalizzato,* cioè il gruppo delle matrici *reali non degeneri* (anzichè intere unimodulari) di ordine $2p+\delta_1$ sempre soddisfacenti una condizione del tipo (161).

Circa l'equivalenza tra *MNS* rimane poi aperta la questione di stabilire quando e come una *MNS* per cui sia $p-\rho>1$ non individui i propri interi associati ovvero i divisori elementari, cessando naturalmente di essere generica.

20. NUOVA FORMA NORMALE PER LE MATRICI QUASI ABELIANE E QUESTIONI CONNESSE

Cerchiamo in questo n. di approfondire lo studio del gruppo unimodulare ristretto $G\,[\Delta,\, \delta_1]$, per vedere fino a che punto esso possa interpretarsi come gruppo discontinuo di trasformazioni in un opportuno spazio rappresentativo delle matrici quasi abeliane. Il problema analogo nel caso abeliano è ben noto (cfr. [26]), e porta a considerare il gruppo modulare ristretto $G\,[\Delta]$ come gruppo discontinuo operante nella regione di un conveniente spazio i cui punti rappresentano le matrici simmetriche $\Omega^{(p,\,p)}$, con la parte immaginaria definita positiva, cioè anche le matrici normali di RIEMANN $||\Delta^{-1}\,\Omega||$ con prefissati divisori elementari (o, come si dice, appartenenti al prefissato *livello* Δ).

Assunta una matrice quasi abeliana nella forma normale di SEVERI (128), chiameremo, in analogia con il caso classico, *livello* ad essa relativo l'insieme dei suoi divisori elementari $d_1, d_2, \ldots, d_p$, e *strato* l'insieme degli interi caratteristici p, δ_1, δ_2, ρ. E parleremo di matrice quasi abeliana *generica* nel senso finora convenuto (cfr. n. 18).

Introduciamo ora una forma normale per una matrice quasi abeliana, diversa da quella di SEVERI, che chiameremo, con BENEDICTY, *forma normale* χ e che si rivelerà particolarmente idonea per gli scopi del presente n.

Scritta anzitutta la matrice $\Omega^{(p,\,p)}$ nella forma:

$$\Omega = \left\| \begin{matrix} \Omega_{11}^{(\varrho,\,\varrho)} & \Omega_{12}^{(\varrho,\,p-\varrho)} \\ \Omega_{21}^{(p-\varrho,\,\varrho)} & \Omega_{22}^{(p-\varrho\,\,p-\varrho)} \end{matrix} \right\| ,$$

si consideri la matrice complessa non degenere

$$\gamma = ||\gamma_{rs}|| \qquad (r,\, s = 1,\, 2,\, \ldots,\, 5)$$

(che risulta divisa in successivi gruppi di ρ, $p-\rho$, δ_1, ρ, $\delta_2 - \rho$ righe e colonne) nella quale $\gamma_{rr} = U$ $(r = 1, 2, \ldots, 5)$, $\gamma_{14} = -\Omega_{11}$, $\gamma_{24} = -\Psi_{-1}\Omega_{11}$, e tutte le altre matrici minori γ_{rs} sono nulle.

È allora immediato che la matrice $\gamma\,\omega$, equivalente alla ω, ha anch'essa la struttura della (128), nella quale però al posto della Ω compare la matrice (simmetrica come la Ω):

$$\left\| \begin{matrix} O & \Omega_{12} - \Omega_{11}\,\Psi \\ (\Omega_{12} - \Omega_{11}\,\Psi)_{-1} & \Omega_{22} - \Psi_{-1}\,\Omega_{11}\,\Psi \end{matrix} \right\|$$

Assumiamo, per definizione, come matrice normale χ (brevemente $MN\chi$) una matrice di quest'ultimo tipo, cioè una matrice:

$$(167) \qquad \chi = \left\| \begin{matrix} \Delta^{-1} & O & X \\ O & U & \Phi_1 \\ O & O & \Psi_1 \end{matrix} \right\|$$

nella quale:

a) $\Delta^{(p,p)}$ è la stessa matrice che compare nella (128);

b) $X^{(p,p)}$ è del tipo:

$$X = \left\| \begin{matrix} O^{(\varrho,\varrho)} & K^{(\varrho,p-\varrho)} \\ K_{-1}^{(p-\varrho,\varrho)} & H^{(p-\varrho,p-\varrho)} \end{matrix} \right\|$$

con H, K matrici complesse ed H simmetrica;

c) Φ_1, Ψ_1 sono date dalle (129);

d) è soddisfatta la condizione: esiste una matrice complessa $\Omega_{11}^{(\varrho,\varrho)}$ (necessariamente simmetrica e con la parte immaginaria definita positiva) tale che la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \Omega_{11} & K + \Omega_{11}\Psi \\ (K + \Omega_{11}\Psi)_{-1} & H + \Psi_{-1}\Omega_{11}\Psi \end{matrix} \right\|$$

sia simmetrica ed abbia la parte immaginaria definita positiva.

Con questa definizione è evidente che ogni $MN\chi$ è equivalente ad una MNS (oltrechè viceversa), e nello studio delle matrici quasi abeliane ci si potrà quindi riferire alle matrici equivalenti a qualche $MN\chi$.

Che relazioni ci sono tra gli elementi di una $MN\chi$?

Dalla definizione discende che la matrice Ψ, considerata a sè stante, è arbitraria; similmente dicasi della K. La condizione d) implica tuttavia, almeno di regola, delle relazioni di disuguaglianza tra gli elementi di H, K, Ψ. Si riconosce però che:

Tra gli elementi di H, K, Ψ non intervengono altre relazioni di uguaglianza, all'infuori delle relazioni di simmetria della H.

Scritte infatti le matrici in questione:

$$H = H' + i\,H'' \,, \qquad K = K' + i\,K'' \,, \qquad \Psi = \Psi' + i\,\Psi''$$

(scindendo il reale dall'immaginario) è chiaro intanto che H', K' non intervengono nella condizione d). Si rappresenti inoltre la quaterna delle rimanenti H'', K'', Ψ', Ψ'' con un punto P di uno spazio euclideo reale R^* nel quale sono coordinate, in un prefissato ordine, gli elementi h_{rs} ($r \leq s$; $r, s = 1, 2, \dots, p - \rho$) di H'' e tutti gli elementi di K'', Ψ', Ψ''.

Sia ora P_0 il punto immagine di una determinata quaterna per la quale valga la condizione d), in relazione ad una matrice $\Omega_{11} = \Omega'_{11} + i\,\Omega''_{11}$ anch'essa fissata. La d) si traduce allora in un numero finito di disuguaglianze le quali, essendo soddisfatte in senso stretto in P_o, rimangono soddisfatte, con la stessa Ω_{11}, in tutto un intorno di P_0. Ciò prova l'enunciato.

Dalla precedente dimostrazione segue pure che: *i punti di R^* immagini di quaterne H'', K'', Ψ', Ψ'' relative a $MN\chi$ formano un campo.*

Costruiamo ora una immagine geometrica delle $MN\chi$. Per un fissato strato e livello basta semplicemente considerare i punti di uno spazio euclideo complesso S_d, di dimensione

$$d = \tfrac{1}{2}(p-\rho)(p-\rho+1) + 2\,\rho\,(p-\rho) + \delta_1\,(p-\rho) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(p-\rho)(p+3\,\rho+2\,\delta_1+1)$$

nel quale sono coordinate gli elementi h_{rs} ($r \leq s$; $r, s = 1, 2, \ldots, p-\rho$) di H e tutti gli elementi di K, Φ, Ψ; ovvero i punti di uno spazio euclideo reale R_{2d} nel quale sono coordinate le parti reali e i coefficienti dell'immaginario degli elementi suddetti.

Quanto abbiamo visto in precedenza ci permette di affermare:

L'insieme delle $MN\chi$, appartenenti ad un dato strato e livello, è rappresentato in R_{2d} dai punti di un campo $\mathfrak{B}$ che risulta una regione cilindrica con spazi generatori paralleli allo spazio su cui si annullano gli elementi di H'', K'', Ψ', Ψ''.

Intendendo sempre *generica* una $MN\chi$ rappresentata in R_{2d} da un punto le cui coordinate siano algebricamente indipendenti sul campo razionale, i precedenti risultati mostrano che la trasformazione introdotta all'inizio di questo n. la quale muta MNS in $MN\chi$, muta di fatto *MNS generiche* in *$MN\chi$ generiche*. Viceversa se si fissa una *$MN\chi$ generica* e si fa variare la Ω_{11} in un intorno della sua posizione iniziale, è subito visto che *tra le matrici γ tali che $\gamma^{-1}\chi$ sia una MNS, ce ne sono di quelle per cui $\gamma^{-1}\chi$ è una MNS generica.*

Valgono poi le proposizioni seguenti che trasportano alle $MN\chi$ note proprietà delle MNS (cfr. [13]):

I. - *Una $MN\chi$ per la quale $p-\rho>1$, individua il suo strato e il suo livello.*

II. - *Se $\chi^{(\pi,\pi')}$ è una generica $MN\chi$ per cui $p-\rho>1$, e $\Gamma^{(\pi',\pi')}$ è una matrice unimodulare, condizione necessaria e sufficiente perchè esista una matrice complessa non degenere $\delta^{(\pi,\pi)}$ tale che $\delta\chi\Gamma$ sia una $MN\chi$ è che Γ appartenga a $G\,[\Delta, \delta_1]$.*

Se $p-\rho=0,1$ la condizione è sufficiente.

Si dimostra poi con un semplice calcolo (cfr. [13]):

III. - *Se χ è una $MN\chi$ e δ una matrice complessa non degenere tale che $\delta\chi$ sia una $MN\chi$, si ha necessariamente $\delta\chi=\chi$.*

In forma equivalente si ha anche:

IV. - *Se* $\omega^{(\pi, \pi')}$ *è una matrice quasi abeliana e* $\delta^{(\pi, \pi)}$ *una matrice complessa non degenere tale che* $\delta\,\omega$ *sia una* $MN\chi$, *quest'ultima è univocamente determinata da* ω.

In particolare:

V. - *Se* $\omega^{(\pi, \pi')}$ *è una matrice quasi abeliana,* $\Gamma^{(\pi', \pi')}$ *una matrice unimodulare e* $\delta^{(\pi, \pi)}$ *una matrice complessa non degenere tali che* $\delta\,\omega\,\Gamma$ *sia una* $MN\chi$, *quest'ultima è univocamente determinata da* ω *e da* Γ.

Dalle proposizioni II, V discendono ora delle conseguenze importanti. Sia χ una generica $MN\chi$, e Γ una prefissata matrice del gruppo unimodulare ristretto $G\,[\Delta, \delta_1]$. Associando alla matrice χ la $MN\chi$: $\chi^* = \delta\,\chi\,\Gamma$ equivalente a χ e da essa univocamente determinata, si definisce una applicazione:

$$\varphi: \quad \chi \rightarrow \chi^*$$

dell'insieme delle $MN\chi$ generiche nell'insieme delle $MN\chi$. Estendendo l'applicazione a tutte le $MN\chi$ si ottiene una corrispondenza solo generalmente univoca del campo $\mathfrak{B}$ in se stesso, anzi una corrispondenza generalmente biunivoca di $\mathfrak{B}$ su se stesso, perchè $G\,[\Delta, \delta_1]$ è un gruppo.

Lasciando ora variare Γ nel gruppo $G\,[\Delta, \delta_1]$ si ottiene:

VI. - *Associando ad ogni* χ *la matrice* $\chi^* = \delta\,\chi\,\Gamma$ *come sopra detto, e lasciando poi variare* Γ *in* $G\,[\Delta, \delta_1]$ *si ottiene un gruppo di corrispondenze generalmente biunivoche in sè dell'insieme delle* $MN\chi$ *di un dato strato e livello. Tale gruppo non è ulteriormente ampliabile se* $p - \rho > 1$.

Si noti che la locuzione « generalmente » qui usata per intendere che si riferisce la corrispondenza solo a matrici generiche, ha un significato che coincide con quello tradizionale della geometria algebrica, nel senso di riferire la corrispondenza, nello spazio S_d, ai punti che non appartengono una sottovarietà algebrica determinata da Γ. E ciò perchè, come si potrebbe agevolmente riconoscere, la corrispondenza sopra considerata $\chi \rightarrow \chi^*$ è una *trasformazione birazionale dello spazio S_d in sè.*

Da tutto quanto precede risulta poi che l'insieme delle $MN\chi$ equivalenti ad una $MN\chi$ generica è al più numerabile, e quindi:

VII. - *Le classi di $MN\chi$, distinte rispetto alla relazione di di equivalenza, costituiscono un insieme dipendente da $d = \frac{1}{2}(p - \rho)(p + 3\rho + 2\delta_1 + 1)$ parametri complessi.*

Aggiungeremo che (cfr. [13], n. 5) esistono matrici Γ di $G[\Delta, \delta_1]$, anche diverse dalla matrice unità, per le quali la corrispondenza $\chi \rightarrow \chi^* = \delta\chi\Gamma$ è assolutamente biunivoca in $\mathfrak{B}$. D'altro canto è anche facile vedere che, almeno per certi strati, la corrispondenza in questione ammette eccezioni in rapporto a particolari matrici Γ di $G[\Delta, \delta_1]$.

Si pone quindi il problema di determinare le matrici Γ di $G[\Delta, \delta_1]$, formanti evidentemente un sottogruppo $G'[\Delta, \delta_1]$ di $G[\Delta, \delta_1]$, per le quali la corrispondenza $\chi \rightarrow \chi^* = \delta\chi\Gamma$ è assolutamente biunivoca in $\mathfrak{B}$. Per quanto sopra osservato G' non si riduce mai al solo elemento identico, e non sempre accade che esso invada tutto G.

Pertanto i due gruppi di matrici $G[\Delta, \delta_1]$ e $G'[\Delta, \delta_1]$ inducono in $\mathfrak{B}$ due gruppi di trasformazioni, che indicheremo rispettivamente con $T[\Delta, \delta_1]$ e $T'[\Delta, \delta_1]$. Questi rappresentano due possibili generalizzazioni del gruppo analogo relativo al caso abeliano, cioè il gruppo $\overline{T}$ di trasformazioni che il gruppo modulare ristretto $G[\Delta]$ induce nella regione immagine delle matrici normali di RIEMANN in forma normale, appartenenti al livello Δ (cfr. [26]).

Mentre la condizione di biunivocità senza eccezioni delle trasformazioni avvicina di più $\overline{T}$ a T', la struttura formale di $\overline{T}$ è però più vicina a quella di T. Si osserverà poi che, quando $p - \rho = 0, 1$, i gruppi T, T' possono essere ampliabili.

In ogni caso la nozione di gruppo unimodulare ristretto, e quella di $MN\chi$ ci hanno consentito di costruire un insieme di matrici normali e un gruppo di trasformazioni operanti su di esse che, nella teoria delle matrici quasi abeliane, tengono il posto delle matrici normali di RIEMANN e del gruppo modulare ristretto.

A questo punto si pongono in modo naturale interessanti questioni. Citiamo soltanto l'esistenza e la costruzione di un campo fondamentale rispetto al gruppo T'; l'estensione della nozione di gruppo simplettico e questioni connesse; la ricerca delle matrici quasi abeliane che possiedono rappresentanti in strati diversi, ovvero nello stesso strato e in livelli diversi (questione questa collegata con lo studio di $MN\chi$ equivalenti, ma non trasformabili l'una nell'altra con una operazione del gruppo T). Si tratta, come si vede, di estensioni, tutt'altro che ovvie però, di questioni analoghe relative alla teoria aritmetica delle funzioni abeliane.

Per quanto riguarda più propriamente le matrici quasi abeliane, viene messo sotto nuova luce il problema della ricerca di qualcosa di analogo alla matrice principale delle matrici di RIEMANN. Il problema può porsi nella forma di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una matrice complessa sia equivalente ad una MNS ovvero ad una $MN\chi$; in pari tempo si pone la questione di determinare, in modo diretto, le condizioni per le matrici H, K, Ψ affinchè sia verificata la condizione d), di cui all'inizio del presente n. 20.

BIBLIOGRAFIA

[1] Andreotti A., *Sopra le varietà di Picard di una superficie algebrica.* Rend. Acc. Naz. dei XL, (IV) *2* (1951), p. 1-9.

[2] Brenci M. T., *Sulla varietà quasi abeliana di Jacobi di genere effettivo nullo e genere virtuale due.* Rend. di Matem. e delle sue Applicazioni, (V) *7* (1948), p. 458-483.

[3] Benedicty M., *Sul gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali.* Rend. Acc. Naz. Lincei, (VIII) *6* (1949), p. 697-702.

[4] — *Sopra una trasformazione cremoniana collegata con la teoria delle funzioni quasi abeliane.* Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, (III) *4* (1950), p. 27-33.

[5] — *Sopra le trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro, in particolare nel caso di genere effettivo nullo.* Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, (III) *4* (1950), p. 157-173.

[6] — *Sopra i campi neutri che ammettono trasformazioni birazionali in sè.* Atti IV Congresso dell'U.M.I., Taormina 1951, p. 1-4.

[7] — *Sopra le trasformazioni birazionali in sè di un campo neutro a sostegno ellittico o iperellettico.* Rend. di Matem. e delle sue Applicazioni, (V) *11* (1952), p. 411-433.

[8] — *Sui caratteri di matrici quasi abeliane equivalenti.* Rend. di Matem. e delle sue Applicazioni (V), *12* (1953), p. 332-339.

[9] — *Le varietà* $\omega M \omega_{-1} = 0$. Rend. di Matem. e delle sue Applicazioni, (V) *13* (1954), p. 89-98.

[10] — *Interi caratteristici e divisori elementari delle matrici normali di Severi.* Rend. Acc. Naz. Lincei, (VIII) *16* (1954), p. 716-720.

[11] — *Neutral Fields on algebraic curves.* Proceed. of the Intern. Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954, vol. II, p. 196.

[12] — *Sopra alcuni appunti inediti di Fabio Conforto.* Rend di Matem. e delle sue Applicazioni, (V) 14 (1955), p. 487-509.

[13] — *Una nuova forma normale per le matrici quasi abeliane.* Rend. Acc. Naz. Lincei, (VIII) *18* (1955), p. 602-608.

[14] — *Sulla definizione di gruppo unimodulare ristretto.* Rend. di Matem. e delle sue Applicazioni, (V) *14* (1955), p. 368-381.

[15] — *Sull'equivalenza tra matrici normali di Severi.* Ann. di Matem. pura e applicata, (IV) *38* (1955), p. 51-76.

[16] — *Sur une généralization de la notion d'équivalence linéaire sur une courbe algébrique*. Bull. de l'Académie royale de Belgique, (V) *41* (1955), p. 551-555.

[17] — *Quelques considérations sur les genres d'une courbe algébrique par rapport à une relation d'équivalence généralisée*. Bull. de l'Académie royale de Belgique, (V) *41* (1955), p. 829-836.

[18] CHEVALLEY C., *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable*. Mathem. Survey n. 6 of the American Mathematical Society, New York 1951.

[19] CONFORTO F., *Sopra le trasformazioni in sè della varietà di Jacobi relativa ad una curva di genere effettivo diverso dal genere virtuale, in ispecie nel caso di genere effettivo nullo*. Ann. di Matem. pura ed applicata, (IV) *27* (1948), p. 273-291.

[20] — *Sopra le corrispondenze univoche tra i punti di una varietà quasi abeliana di Picard, rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie*. Rend. Acc. Naz. Lincei, (VIII) *5* (1948), p. 369-375.

[21] — *Alcune osservazioni sulla teoria delle funzioni e delle varietà quasi abeliane*. Atti III Congresso dell'U.M.I., Pisa 1948, p. 129-130.

[22] — *Sulla totalità delle relazioni generalizzate di Hurwitz di una matrice quasi abeliana*. Ann. di Matem. pura ed applicata, (IV) *28* (1949), p. 299-315.

[23] — *Sulla nozione di corpi equivalenti e di corpi coincidenti nella teoria delle funzioni quasi abeliane*. Rend. Sem. Matem. di Padova, *18* (1949), p. 292-310.

[24] — *Alcune osservazioni sulla teoria delle funzioni e delle varietà quasi abeliane*. Bollettino dell'U.M.I. (III) *4* (1949), p. 6-13.

[25] — *Una proposizione sulle matrici quasi abeliane*. Rend. di Matem. e delle sue Applicazioni, (V) *9* (1950), p. 335-345.

[26] — *Funzioni abeliane modulari*. Lezioni raccolte dal dott. M. Rosati. Corsi dell'Istituto Naz. di Alta Matematica. Roma 1951.

[27] — *Sulle trasformazioni in sè della varietà quasi abeliana di Picard, che sono rappresentate da congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie*. Rend. di Matem. e delle sue Applicazioni, (V) *13* (1954), p. 219-248.

[28] — *Sopra i sistemi lineari di integrali semplici di prima specie con periodi ridotti sopra una varietà di Picard*. Archiv der Mathematik, *5* (1954), p. 282-291.

[29] — *Complemento ad una ricerca sopra i sistemi lineari di integrali semplici di prima specie con periodi ridotti sopra una varietà di Picard*. Bollettino dell'U.M.I. (III) *2* (1954), p. 119-125.

[30] — *Abelsche Funktionen und Algebraische Geometrie (aus dem Nachlass bearbeitet und herausgegeben von W. Gröbner, A. Andreotti und M. Rosati)*. Berlino 1956.

[31] ENRIQUES F. - CHISINI O., *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. IV, Bologna, 1934.

[32] HURWITZ A., *Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen*. Mathematische Annalen, *32* (1888), p. 290-308.

[33] — *Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich.* Mathematische Annalen, *41* (1893), p. 403-442.

[34] KRAZER A., *Lehrbuch der Thetafunktionen.* Lipsia, 1903.

[35] ROSATI M., *Sulle varietà di equazione* $\omega M \omega_{-1} = 0$ *con M matrice modulare.* Rend. di Matem. e delle sue Applicazioni, (V) *14* (1955), p. 712-728.

[36] — *Funzioni abeliane ed abeliane modulari nelle lezioni e nei manoscritti inediti di Fabio Conforto.* Rend. di Matem. e delle sue Applicazioni, (V) *14* (1955), p. 696-711.

[37] ROSENLICHT M., *Equivalence relations on algebraic curves.* Annals of Mathematics, *56* (1952), p. 169-191.

[38] ROTH L., *Algebraic threefolds.* Ergebnisse der Mathem. und ihrer Grenzgebiete, neue Folge h. 6. Berlino 1955.

[39] — *Further properties of pseudo-abelian varieties.* Rend. Sem. Matem. di Padova, 27 (1957), p. 1-15.

[40] — *Questioni di razionalità e varietà gruppali.* In: « Geometria aritmetica e algebrica ». Corso C.I.M.E., Varenna, maggio 1957.

[41] SCORZA G., *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni.* Rend. Circ. Matem. di Palermo, *41* (1916), p. 263-380.

[42] — *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann.* Rend. Circ. Matem. di Palermo, *45* (1921), p. 1-204.

[43] SEGRE B., *Forme differenziali e loro integrali,* vol. I e II. Corsi dell'Istituto Naz. di Alta Matematica. Roma 1951 e 1956.

[44] SEVERI F., *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche,* a cura di F. Conforto e di E. Martinelli. Roma 1942.

[45] — *Le funzioni periodiche di più variabili.* Comm. Mathem. helvetici, *18* (1945-46), p. 16-29.

[46] — *Sulla caratterizzazione dei corpi di funzioni quasi abeliane.* Convegno intern. di geometria differenziale. Italia 1953, p. 21-26.

[47] — *Quelques problèmes se rapportant aux fonctions analytiques de plusieurs variables.* Colloque sur les fonctions de plusieurs variables. Bruxelles 1953, p. 9-20.

[48] — *Fonctions et variétés quasi abéliennes.* Simposio di geometria algebrica. In: Proceed. of the Intern. Congress of Mathematicians, Amsterdam 1954, vol. III, p. 521-528.

[49] — *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra una varietà algebrica,* vol. II e III. Roma 1958 e 1959.

[50] — *Funzioni quasi abeliane,* seconda edizione ampliata. Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, n. 20, 1961.

INDICE ANALITICO

I numeri si riferiscono alle pagine del volume

INDICE