PONTIFICIAE ACADEMIAE SCIENTIARVM SCRIPTA VARIA

20

FRANCESCO SEVERI

ACCADEMICO PONTIFICIO

FUNZIONI QUASI ABELIANE

SECONDA EDIZIONE AMPLIATA

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MCMLXI

PONTIFICIAE ACADEMIAE SCIENTIARVM SCRIPTA VARIA

20

FRANCESCO SEVERI

ACCADEMICO PONTIFICIO

FUNZIONI QUASI ABELIANE

SECONDA EDIZIONE AMPLIATA

PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MCMLXI

L'esigenza di avere una trattazione sulla teoria delle funzioni e delle varietà quasi abeliane che tenga conto dei progressi più recenti, e le richieste giunte da più parti, mi hanno indotto a preparare questa seconda edizione della mia Memoria « Funzioni quasi abeliane » del 1947.

In essa sono contenuti i miei risultati posteriori, che portano taluni complementi essenziali alla teoria. In particolare l'equivalenza di due diverse, tra le possibili, definizioni di corpo di funzioni abeliane da me date nella prima Memoria, che fu là dimostrata subordinatamente ad una ipotesi di lavoro (l'ipotesi « L »), viene qui stabilita in modo del tutto indipendente da quell'ipotesi.

Mi è stata di grande aiuto, nella preparazione di questo volume, la cooperazione del prof. MARIO ROSATI, *mio discepolo all'Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma, al quale va il mio ringraziamento per avere raccolto e coordinato il materiale dell'Appendice ed avere curato la compilazione dell'Indice analitico.*

Ma un'opera sulle funzioni quasi abeliane sarebbe certamente incompleta ove non tenesse conto dei contributi notevoli portati dagli altri Autori, quasi tutti della Scuola italiana, che dopo di me si sono occupati di questa teoria. Tra essi segnatamente ricordo il mio indimenticabile collega prof. FABIO

CONFORTO, *che è da considerare l'iniziatore della « Teoria aritmetica delle funzioni quasi abeliane ».*

Ho pregato quindi il prof. ROSATI *di proseguire egli stesso il lavoro, assumendosi il non lieve onere di redigere l'ulteriore volume che, con il titolo « Le funzioni e le varietà quasi abeliane dalla teoria del Severi ad oggi », ho testè presentato per la inserzione nelle pubblicazioni della Pontificia Accademia delle Scienze. Questo secondo volume, che raccoglie e sistematicamente espone tutti i risultati degli altri Autori sulle funzioni e sulle varietà quasi abeliane, offrirà al lettore, insieme con il precedente, un quadro completo sullo stato attuale della teoria. E spero che il lavoro possa riescire utile a chi voglia proseguire le ricerche in un campo che apre prospettive così vaste e interessanti.*

Roma, 8 gennaio 1959.

FRANCESCO SEVERI
Accademico Pontificio

FUNZIONI QUASI ABELIANE

INTRODUZIONE

Aequam memento rebus in arduis servare mentem (ORAZIO)
(Ottobre 1944-Maggio 1945)

Le funzioni trattate in questa Memoria s'identificano (n. 48) colla vasta categoria delle funzioni uniformi di più variabili, che ammettono un *teorema di addizione* nel senso di WEIERSTRASS (1) (2).

Esse risultano in conseguenza meromorfe (3) e periodiche con un numero di μ di *periodi indipendenti*, non superiore al doppio del numero π delle variabili (4).

---

(1) I numeri in grassetto fra parentesi quadre [ ] richiamano opere o memorie indicate nell'elenco bibliografico alla fine della Memoria.

(2) Come ha osservato PAINLEVÉ [**47**, p. 5], se π funzioni (funzionalmente) indipendenti di π variabili complesse $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, in un intorno 2π - dimensionale dello spazio euclideo $S_{2\pi}$, ove si distendan le variabili, soddisfanno ad un teorema di addizione di WEIERSTRASS e sono continue e a derivate parziali prime continue, per valori reali delle variabili, esse son in conseguenza analitiche.

Si dice poi che le π funzioni ammettono un teorema di addizione (algebrico), quando i valori di *ciascuna* di esse in $(u_1 + u_1', u_2 + u_2', \ldots, u_\pi + u_\pi')$ s'esprimono algebricamente coi valori delle π funzioni rispettivamente in $(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ e in $(u_1', u_2', \ldots, u_\pi')$.

Le *funzioni ellittiche*, le *funzioni esponenziali* e *trigonometriche* son casi particolari delle funzioni che stiamo considerando.

(3) Si sottintende « al finito ». Se le funzioni di cui trattasi son meromorfe anche all'infinito esse riduconsi a *funzioni razionali* e la periodicità svanisce (cioè il numero dei periodi effettivi, non costituiti tutti da zeri, è nullo).

(4) Un *periodo* di una funzione di π variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ è un insieme di π numeri (reali o complessi) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\pi$ (cioè un vettore reale o complesso) tale che in $u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, \ldots, u_\pi + \omega_\pi$) la funzione assume lo stesso valore che in $(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ qualunque sia $(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ nel campo dove la funzione è data. La terminologia che prima si usava di chiamare $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\pi$ un insieme di periodi «simultanei» è stata abban-

Il caso $\mu > 2\pi$ resta dunque in apparenza escluso dalle nostre considerazioni; ma esso non offre un interesse a sè, perchè conduce a funzioni che dipendono effettivamente da $q < \pi$ variabili e rispetto a queste ammettono non più di $2q$ periodi. Invero, si riconosce agevolmente, come fecero CLEBSCH-GORDAN e FROBENIUS [1] che una funzione di π variabili con $\mu > 2\pi$ periodi ammette in conseguenza *periodi infinitesimi*; e da ciò segue ch'essa riducesi a dipendere da $q < \pi$ variabili, le nuove essendo combinazioni lineari delle antiche [2]; e se le variabili non sono ulteriormente riducibili, esiston soltanto al più $2q$ periodi indipendenti, a componenti non tutte nulle in corrispondenza alle variabili rimaste e gli altri hanno componenti nulle

---

donata per la sua manifesta superfluità. Invero, anche se ω_1, da solo, applicato ad u_1, è un periodo, esso può sempre considerarsi come un vettore-periodo (rispetto alle π variabili) con $\pi - 1$ componenti nulle. Se una funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ ammette un certo numero finito di periodi, per iterazione essa ammette ogni periodo che sia combinazione lineare a coefficienti interi (positivi o negativi o nulli) di quelli. Si dice che μ periodi son *indipendenti* quando i corrispondenti vettori non son legati da alcuna relazione lineare omogenea a coefficienti interi, non tutti nulli.

(1) [**13**, p. 130], [**25**, Abhandlung I, p. 17]. L'asserzione non è esplicita nell'opera di CLEBSCH-GORDAN; ma il lemma dimostrato nel passo citato la contiene. In FROBENIUS invece l'asserzione è esplicita.

(2) Ved. per es. [**17**, p. 15], [**44**, p. 213]. È evidente che una funzione qualunque di q variabili $u_1, u_2, \ldots, u_q$, considerata come funzione di queste e di altre $\pi - q$ variabili $u_{q+1}, \ldots, u_\pi$, che in essa non compaiono, ammette periodi aventi nulle le q componenti relative alle q variabili effettive e arbitrarie le altre; sicchè ammette periodi di accumulazione e quindi periodi infinitesimi. Se poi la funzione possiede già $\mu' \leq 2q$ vettori-periodi indipendenti, come funzione delle $u_1, u_2, \ldots, u_q$, associando alle componenti di ciascuno di questi, $\pi - q$ componenti nulle, si ottengono altrettanti periodi della funzione, considerata rispetto alle variabili $u_1, \ldots, u_q, u_{q+1}, \ldots, u_\pi$; ma questi periodi si posson poi sommare con quelli a componenti nulle rispetto alle prime q variabili e se ne derivano periodi aventi diverse da zero le prime q componenti e infinitesime le ultime $\pi - q$.

Del resto è chiaro a priori che non possan esistere periodi infinitesimi comuni a π funzioni $f_1(u_1, \ldots, u_\pi), \ldots\ldots, f_\pi(u_1, \ldots, u_\pi)$ indipendenti, a determinante jacobiano non nullo in un certo intorno, perchè, detti $c_1, c_2, \ldots, c_\pi$ i valori assunti dalle $f_1, f_2, \ldots, f_\pi$ in un punto generico dell'intorno, sicchè le equazioni $f_1 = c_1, f_2 = c_2, \ldots, f_\pi = c_\pi$ non ammettono altre soluzioni nelle vicinanze del punto, l'esistenza di periodi infinitesimi comuni alle f, porterebbe invece l'esistenza di infinite soluzioni di quelle equazioni nelle vicinanze del punto considerato. Quest'osservazione estende la proprietà ben nota delle funzioni di una variabile (derivabili), le quali non posson avere più di due periodi, senza ridursi a costanti.

rispetto a queste ed agiscono perciò sulle sole variabili che non compaiono più nella funzione.

Per le funzioni dipendenti effettivamente da π variabili $u_1, \ldots, u_\pi$, è dunque sempre $\mu \leq 2\pi$.

Se $\mu = 2\pi$ non occorre neppure di supporre che le funzioni di cui si tratta soddisfacciano ad un teorema di addizione, bastando ammettere che sieno funzioni meromorfe, giacchè il teorema d'addizione resta in conseguenza soddisfatto. Ciò risulta dalle proposizioni fondamentali della teoria delle funzioni abeliane, nelle quali si cade appunto per $\mu = 2\pi$. Di queste proposizioni, note a RIEMANN fin dal 1860 e a WEIERSTRASS fin dal 1878, furon pubblicate le prime dimostrazioni nel 1883 da POINCARÉ e da PICARD (1).

Le funzioni oggetto del nostro studio son quelle soddisfacenti al teorema d'addizione (epperò meromorfe e periodiche) per cui $\mu < 2\pi$: le chiamiamo *funzioni quasi abeliane* (o, se vuolsi, funzioni abeliane degeneri), perchè esse posson concepirsi come limiti di funzioni abeliane [n. 36; n. 57, *f*)] ottenute facendo tendere ad infinito alcuni periodi (con ampia estensione della proprietà che riguarda le funzioni trigonometriche quali casi limiti delle funzioni ellittiche) (2).

* * *

Pei numerosi collegamenti della teoria da costruire con quella classica delle funzioni abeliane, convien riassumer anzitutto talune proprietà di queste.

(1) Ved. l'articolo di KRAZER-WIRTINGER nell'Enciclopedia matematica tedesca [**38**, p. 824]. Faremo spesso riferimento, per ciò che concerne le funzioni abeliane, al corso tenuto recentemente (1942) da F. CONFORTO presso l'Istituto Nazionale di Alta Matematica [**17**].

(2) Per necessità di cose noi partiamo anzi dalla disuguaglianza $\mu \leq 2\pi$ piuttosto che dalla $\mu < 2\pi$: onde, nei riguardi di certe proprietà, che avremo da studiare, le funzioni abeliane appariranno casi particolari delle quasi abeliane.

I periodi di una funzione abeliana di p variabili formano una matrice di p righe e di $2\,p$ colonne, che si chiama ([1]) una *matrice di* RIEMANN. Gli elementi di tale matrice soddisfanno ad una condizione quantitativa e ad una condizione qualitativa ([2]). Il teorema fondamentale (di esistenza) afferma che, viceversa, data comunque una matrice soddisfacente a queste condizioni, esistono funzioni meromorfe di p variabili delle quali la data è la matrice dei periodi.

A tale matrice può sostituirsi una matrice *equivalente* ([3]) normale, che indichiamo brevemente con $|A\ \Omega|$, in cui A è un determinante d'ordine p avente nulli tutti gli elementi, tranne quelli della diagonale principale, uguali rispettivamente a $\frac{2\pi i}{d_1}, \frac{2\pi i}{d_2}, \ldots\ldots, \frac{2\pi i}{d_p}$ ove $d_1, d_2, \ldots, d_p$ sono i *divisori* della considerata matrice (numeri interi tali che, per $s=2,\ldots, p$, d_s è divisibile per d_{s-1} e $d_1=1$); ed Ω è un determinante simmetrico di ordine p, i cui $\frac{p(p+1)}{2}$ elementi distinti soddisfano ad una condizione qualitativa, la quale è l'unica che rimanga, nei rapporti con la matrice normale, delle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza delle corrispondenti funzioni abeliane. Anche la scelta dei divisori, soddisfatte fra loro le accennate condizioni aritmetiche, resta arbitraria ([4]).

([1]) Con GAETANO SCORZA, che ha dedicato a queste matrici un vasto insieme di ricerche di alto interesse. Noi talvolta chiameremo anche, queste matrici, *matrici abeliane*.

([2]) La condizione quantitativa è che s'annulli una certa forma bilineare (*principale*) a coefficienti interi quando vi si prendano per variabili i periodi di due u qualunque; e la condizione qualitativa è che la forma stessa sia definita di segno allorchè, invece delle variabili, si pongano le parti reali e le parti immaginarie di una combinazione lineare qualunque, a coefficienti non tutti nulli, dei periodi. Ved. p. es. [**17**, p. 186].

([3]) Due matrici di RIEMANN si dicon *equivalenti* quando si deducon l'una dall'altra con sostituzioni lineari non degeneri sulle variabili (cioè sulle righe) e con sostituzioni lineari unimodulari a coefficienti interi sui periodi (cioè sulle colonne).

([4]) Ved. p. es. [**17**, p. 184]. Per ragioni rese evidenti dal seguito noi però normalizziamo la tabella dei periodi, come fanno del resto parecchi Autori, scrivendo $2\pi i$ laddove CONFORTO, con parecchi altri, scrive πi. I raffronti comunque son ovvii.

Le funzioni abeliane inerenti a una data tabella di periodi (e a tutte le tabelle equivalenti) formano un *corpo* nel senso moderno della parola.

Inoltre, $p+1$ funzioni qualunque del corpo son legate da una equazione algebrica; e, se sono a p a p indipendenti, ogni altra funzione del corpo si esprime razionalmente con esse. Questa proprietà ha la massima importanza, perchè trasferisce la teoria nel dominio della geometria algebrica e permette di trattarne i problemi anche con mezzi geometrici.

Si posson altresì scegliere le $p+1$ funzioni del corpo in modo che nel parallelepipedo P dei periodi (1) le funzioni non riprendano rispettivamente valori *tutti* uguali a quelli assunti in un punto generico di P. La varietà algebrica (irriducibile) V_p rappresentata parametricamente (in un S_{p+1}) da quelle $p+1$ funzioni, chiamasi una *varietà* di PICARD (di *divisori* $d_1, d_2, \dots, d_p$). Essa è di *rango* 1, nel senso che è in corrispondenza biunivoca con P.

La varietà V_p e tutte le varietà uniformizzate da gruppi di $p+1$ funzioni del corpo — le quali varietà son birazionalmente equivalenti a involuzioni algebriche su V_p, il cui grado è in relazione col rango della varietà — costituiscon la classe delle *varietà abeliane* inerenti alla data tabella di periodi. Lo studio di queste varietà (superficie iperellittiche per $p=2$) diede luogo ad una vasta letteratura (PICARD, HUMBERT, CASTELNUOVO, ENRIQUES-SEVERI, BAGNERA-DE FRANCHIS, LEFSCHETZ, SCORZA per citare soltanto i maggiori), sulla quale non occorre che ci fermiamo qui.

Un altro aspetto della teoria occorre piuttosto illuminare. La V_p di PICARD fu scoperta dall'eminente analista in ricerche celebri (1889, 1895) sulle varietà algebriche di dimensione p, che posseggono un gruppo abeliano continuo transitivo ∞^p di

(1) In questo parallelepipedo intendiamo ridotta ad una sola le faccie associate rispetto ai periodi, cioè coincidenti le coppie di punti di due faccie che differiscon fra loro di un vettore-periodo. Così il parallelepipedo s'identifica con un toro a $2p$ dimensioni, riemanniana della V_p di PICARD, inerente al dato corpo.

trasformazioni birazionali: estensione della ricerca di SCHWARZ (sulle curve ellittiche) relativa a $p=1$. Qualche lacuna rimasta nella ricerca di PICARD fu eliminata dalla penetrante analisi di PAINLEVÉ *in* una Memoria del 1903 [**47**], pubblicata in onore di ABEL (1).

Il risultato fondamentale di PICARD è che una varietà siffatta V_p possiede p integrali algebrici semplici (ossia integrali di differenziali totali a coefficienti funzioni razionali del punto di V_p). S'essi sono tutti di 1ª specie (e PICARD suppone implicitamente che così sempre sia, donde la lacuna cui s'è alluso) l'inversione simultanea del sistema di quegl'integrali consente di esprimere le coordinate del punto di V_p come funzioni abeliane di p variabili (che son poi i predetti integrali) e si cade così in un corpo di funzioni abeliane legate a V_p e al relativo gruppo continuo.

PAINLEVÉ non parla esplicitamente del gruppo continuo, perchè il suo problema originario, nella Memoria citata, è di caratterizzare le funzioni di p variabili che ammettono un teorema d'addizione, onde dimostrare il teorema che WEIERSTRASS aveva enunciato nelle sue lezioni (senza tuttavia esporne la dimostrazione, che sembra però possedesse) e cioè che se p funzioni indipendenti di p variabili ammettono un teorema d'addizione (algebrico), esse s'esprimono algebricamente con funzioni abeliane (proprie o degeneri) di p variabili, relative ai medesimi periodi. La dimostrazione, sviluppata da PAINLEVÉ con tutti i dettagli per $p=2$ e accennata per induzione quando p è qualunque, mostra come il teorema equivalga a ciò che: se una varietà algebrica a p dimensioni V_p possiede p integrali semplici (si sottintende sempre algebrici) funzionalmente indipendenti, e l'inversione del loro sistema, conduce a $p+1$ funzioni uniformi *contenenti razionalmente le coordinate dell'origine delle integrazioni,* quelle funzioni son abeliane (proprie o degeneri) coi medesimi periodi. Ma siccome siffatte funzioni,

(1) Ved. le citazioni nel n. 37. Il primo lavoro di PICARD (1889) si riferisce alle superficie ($p=2$).

appunto in conseguenza della ricerca di PAINLEVÉ, ammettono un teorema d'addizione, così ne segue agevolmente (n. 38) l'esistenza su V_p di un gruppo continuo, che è quello considerato da PICARD.

* * *

A questo punto la mia ricerca ha trovato i problemi concernenti le funzioni quasi abeliane (o funzioni abeliane degeneri). Di qualche altro precedente di carattere più particolare dirò nel seguito di questa Introduzione.

Ma prima di affrontare lo studio delle funzioni quasi abeliane generali, considerato che la teoria delle funzioni abeliane era storicamente nata per estensione della teoria delle *funzioni abeliane speciali* (così chiamata da POINÇARÉ), cioè di quelle che nascono dal teorema di inversione di JACOBI, relativo ai p integrali abeliani di 1ª specie d'una curva di genere p, ho reputato opportuno di costruire anzitutto la teoria delle *funzioni quasi abeliane speciali*, derivanti da un più ampio teorema di inversione sopra una curva algebrica, onde avere a disposizione adeguato materiale sperimentale d'assaggio delle questioni relative alle funzioni quasi abeliane generali.

E la preparazione degli strumenti geometrici per lo studio che mi proponevo mi ha condotto ad una completa *teoria delle serie lineari neutre* sopra una curva algebrica, di cui avevo dato qualche saggio preventivo, oltre a quelli che esistevano (con diverso linguaggio) presso altri Autori ([1]).

La teoria ha precedenti lontani e recenti. LINDEMANN nel 1879 [**43**] si occupò delle serie lineari segate sopra una curva algebrica piana (si sottintende irriducibile) da sistemi lineari di curve soddisfacenti soltanto in parte alle condizioni di aggiun-

([1]) Dirò anzi che mi ero indotto a riprendere con più ampio programma lo studio delle serie lineari neutre anche per preparare gli elementi occorrenti a talune questioni fondamentali di geometria sopra una superficie (le quali richiedono l'ulteriore trasporto, che lascio ad un mio discepolo, della teoria delle serie lineari neutre alle serie d'equivalenza neutre) e per delimitar compiutamente il teorema di unicità e d'esistenza, che domina la teoria.

zione (*curve non aggiunte* o σ *-curve*, secondo la terminologia di NOETHER) e stabilì il teorema di RIEMANN-ROCH proiettivo per tali serie, con una lacuna osservata e corretta, nell'anno stesso, da una Memoria di NOETHER [**45**], che trattò l'argomento con maggior larghezza dando due forme diverse del teorema proiettivo di RIEMANN-ROCH, dopo aver stabilito altresì, per le serie cui s'allude, il teorema proiettivo del resto.

Ma tali risultati restarono allora isolati non avendo riflessi in quello stadio di sviluppo della geometria algebrica. L'argomento fu da me ripreso nel 1921 [**67**, Anhang F, pag. 349] e inquadrato in una teoria generale dei sistemi continui di curve piane, sottolineando rapidamente i fatti salienti e dando loro assetto invariante rispetto alle trasformazioni birazionali. Chiamai allora « virtualmente aggiunte » le curve non aggiunte di NOETHER e mi limitai a considerare curve con soli punti doppi, perchè questo è il caso più importante nel campo birazionale. Nello stesso 1921 sfiorai in altro lavoro il medesimo soggetto, nel trattare degl'integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica [**68**, p. 217]).

Nel 1922 ENRIQUES [**21**, p. 195] (1), allo scopo di ricostruire la geometria sopra una curva algebrica col principio di continuità, considerò una curva razionale di conveniente ordine come limite d'una curva di genere $p>0$ e studiò le serie lineari della prima curva, limiti delle serie lineari della seconda.

Nel 1925 brevi accenni alla questione delle serie lineari neutre, in relazione all'estensione del teorema del resto di BRILL-NOETHER e dei teoremi che da esso derivano, furon dati da GAMBIER, in un'ampia Memoria, avente altro scopo [**26**, p. 220].

Infine nel 1932 [**72**, p. 28] e nel 1941 [**76**, p. 256] tornai ancora, ma sempre incidentalmente, sulle serie lineari neutre appartenenti ad una curva di genere qualunque, aggiunsi in proposito qualche osservazione e prospettai per la prima volta (nella Memoria del 1941) la necessità di riferire il teorema di

(1) Ved. pure [**22**, p. 405].

unicità e di esistenza d'una serie lineare neutra, definita a partire da uno de' suoi gruppi, a gruppi *indipendenti* dalle date coppie neutre, giacchè, senza certe limitazioni, il teorema non vale (¹). È nelle Memorie del 1932 e del 1941 che usai la terminologia, da allora seguìta (serie lineari neutre, aggiunte neutre, ecc.), la quale m'apparve necessaria per evitare ambiguità, derivanti da contrasti con locuzioni già usate in altro senso.

La delimitazione cui ho accennato, del teorema di unicità e d'esistenza, richiede che i gruppi di una serie lineare neutra vengan considerati nei rapporti coi punti delle coppie neutre date (che posson essere costituite da punti distinti o da punti coincidenti): bisogna cioè tener conto della molteplicità (≥ 0) con cui ognuno di questi figura nel gruppo considerato.

Un gruppo della serie è *ordinario* se tali molteplicità son le medesime di quelle relative al gruppo generico; è *singolare* in caso diverso. *Il teorema di unicità e di esistenza vale soltanto pei gruppi ordinari* (n. 5). Un gruppo singolare può, non in ipotesi, ma di fatto (come si verifica su esempi), appartenere, appunto come gruppo singolare, a più di una serie neutra completa. Questa eccezione ha riscontro (n. 27, Oss.) nelle singolarità che presentano, in corrispondenza ad un gruppo singolare, i coefficienti d'un sistema differenziale pfaffiano, che traduce la questione nel campo analitico; singolarità, le quali fanno appunto cadere per tale sistema il teorema di unicità e di esistenza.

Ciò naturalmente richiede che le operazioni di somma e di sottrazione sieno alla lor volta definite soltanto in relazione a gruppi ordinari (n. 7) e soltanto in relazione a questi vale il teorema del resto, sia proiettivo che invariantivo (²).

(¹) Ved. in particolare l'osservazione a pag. 358 della mia Memoria citata. Gli elementi della teoria trovansi altresì nella mia opera [**78**, p. 184].

(²) La dimostrazione del teorema proiettivo del resto data da Brill-Noether va incontro ad un'obiezione affacciata da Van der Waerden [**82**]. Io però mi appoggio alla dimostrazione contenuta a pag. 341 del mio Trattato [**69**], la quale è immune dall'obiezione cui s'allude e che io avevo, molto prima dell'Autore citato, osservata ed eliminata, senza neppure accennarvi).

Fissate bene queste nozioni, si arriva al punto culminante della teoria geometrica delle serie lineari neutre. Si stabilisce così direttamente, nel campo invariantivo (n. 13), l'esistenza della serie canonica neutra; si distinguon le serie in speciali e non speciali e si dimostra il teorema di Riemann-Roch per le serie neutre (n. 17).

Qui però, a differenza di quanto avviene per le ordinarie serie lineari, c'è da considerare, oltre all'*indice di specialità neutro*, anche l'*indice di specialità assoluto*. La differenza fra i due indici è la *sovrabbondanza* della data serie lineare neutra, avente un netto significato geometrico (n. 6, Oss. 2ª; n. 18). La sovrabbondanza è nulla per le serie non speciali.

Ma il complesso di tutte queste proprietà non costituirebbe che un'elegante estensione della teoria classica, se non gli conferisse più importante contenuto la considerazione delle serie lineari neutre, sopra una curva f di genere virtuale π e di genere effettivo p $(\pi > p \geq 0)$, come limiti di ordinarie serie lineari d'una curva $\bar{f}$ di genere effettivo π, per $\bar{f} \to f$. Quest'interpretazione è sempre possibile, comunque sieno state fissate su f le δ $(= \pi - p)$ coppie, mediante cui si definisce l'insieme delle serie che le posseggono come neutre, insieme che chiamiamo un *campo neutro*, riserbando il nome di *campo assoluto* alla totalità delle serie lineari ordinarie.

Come si è già accennato, le coppie che noi consideriamo nella presente trattazione, posson essere altresì costituite da punti coincidenti: e la cosa, lo vedremo, ha riflessi importanti nella teoria delle funzioni quasi abeliane. In un conveniente modello proiettivo piano (n. 2) f della curva, dotato di soli nodi o cuspidi ordinarie, ogni coppia neutra a punti distinti ha per imagine un nodo ed una a punti coincidenti una cuspide ordinaria. Questi nodi e queste cuspidi sono acquisiti *ex novo* dalla curva limite f, mentre gli altri eventuali nodi di f son limiti di quelli della curva variabile $\bar{f}$.

In verità, sono soltanto la serie canonica ed una generica serie non speciale della $\bar{f}$, che tendono alla serie canonica neutra e ad una serie non speciale neutra di f, dello stesso ordine della serie variabile. Una serie particolare al limite può cioè aumentare la propria specialità (in particolare divenire speciale, se non lo era) e può naturalmente accadere che in f vi sieno serie lineari neutre, che non son limiti di serie di $\overline{f}$ (n. 20).

* * *

La totalità dei gruppi di π punti sopra una curva C di genere virtuale π e di genere effettivo $p \geq 0$, dove sia dato un campo neutro γ, mediante $\delta = \pi - p$ coppie di punti, costituisce una varietà quasi abeliana (speciale), che si riduce alla varietà di JACOBI (¹) per $\delta = 0$ e che perciò chiamiamo *varietà quasi abeliana di* JACOBI, inerente al campo γ. Diciamo V_π questa varietà o un suo modello proiettivo. Essa possiede un gruppo continuo abeliano ∞^π, transitivo, di trasformazioni birazionali in sè (21), che si costruisce subito sulla base della precedente teoria ripetendo in questo caso più generale un noto procedimento (²). Per brevità diremo nel seguito Γ ogni gruppo di trasformazioni birazionali del tipo suddetto (abeliano, continuo, transitivo di dimensione uguale alla dimensione della varietà che lo sostiene).

Qui però apparisce una differenza essenziale tra il gruppo Γ relativo al campo assoluto ($\delta = 0$), esistente sopra una V_π, che si riduce ad una V_p di JACOBI, ed il gruppo Γ relativo ad un campo neutro ($\delta > 0$), perchè il primo, sulla V_p priva di varietà eccezionali (³), *è assolutamente transitivo*, cioè ogni punto di V_p vien portato dalle trasformazioni del gruppo in ogni altro; mentre il secondo è *generalmente transitivo* (n. 21), cioè un pnnto generico di V_π vien trasportato in un altro punto generico da una trasformazione del gruppo, ma vi è in V_π una *varietà*

(¹) Ved. [**69**, pag. 281].
(²) CASTELNUOVO [**8**].
(³) Ved. [**69**, pag. 284]. Comunque, anche se V_p possiede varietà eccezionali, queste lo sono per ogni trasformazione del gruppo e non son invarianti pel gruppo perchè ognuna di esse vien portata in ogni *punto* di V_p.

invariante, a $\pi - 1$ dimensioni, pel gruppo Γ, i cui punti (*generici,* per le sue componenti) non possono esser portati dalle trasformazioni del gruppo fuori della varietà stessa. È una distinzione che le ricerche di PICARD e di PAINLEVÉ e quelle ad esse collegate avevano lasciato in ombra e che fu accennata da me per la prima volta nel 1907 sulle superficie (n. 38).

La varietà invariante consta di tutti e soli i punti di V_π imagini dei gruppi singolari di π punti di C (singolari, s'intende rispetto al campo γ), ossia di quei gruppi che contengono qualche punto delle coppie neutre.

La V_π gode di un'altra proprietà notevolissima, che la distingue dalle ordinarie varietà di JACOBI. Essa contiene cioè un'involuzione ∞^p di varietà razionali M_δ ciascuna delle quali rappresenta i gruppi di π punti tolti da una g^δ_π completa, generica, del campo assoluto. Ne deriva (n. 22) che V_π *è birazionalmente equivalente al prodotto di una* $V_p{}'$ *di* JACOBI *e di uno spazio lineare* S_δ. In particolare per $p=0$ riducesi ad un S_δ. La V_π rappresenta la varietà dei gruppi di un qualunque numero prefissato $\pi > p$ di punti della curva C, varietà che è dunque sempre quasi abeliana; mentre la varietà dei gruppi di p punti è abeliana.

La costruzione delle funzioni quasi abeliane speciali richiede che la geometria delle serie lineari neutre venga ampliata dal punto di vista trascendente, col teorema di Abel, diretto e inverso, e col teorema d'inversione nel campo neutro γ.

Considerato un modello piano f di C, dotato di soli nodi e cuspidi ordinarie, ove δ_1 dei nodi sieno immagini delle coppie neutre a punti distinti di γ e le δ_2 cuspidi sieno immagini delle coppie neutre a punti coincidenti ($\delta = \delta_1 + \delta_2$, $\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$, $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$), e riguardata f come limite di una curva piana $\bar{f}$ dello stesso ordine (con soli nodi), la quale acquisti δ_1 nodi nuovi e le δ_2 cuspidi, si determinano agevolmente (n. 23) i limiti dei π integrali abeliani di 1ª specie di $\bar{f}$ e si ottengon così π *integrali abeliani neutri di 1ª specie* (linearmente indipendenti) relativi al campo γ, fra i quali figurano i p integrali abeliani di 1ª specie di f; δ_1 integrali che son di fatto di 3ª specie e δ_2 integrali di 2ª specie.

Il passaggio al limite può esser compiuto in modo (n. 23) che ogni coppia neutra coincidente con uno dei δ_1 nodi comprenda le due singolarità logaritmiche (pure) di uno dei δ_1 integrali di 3ª specie, non avente altre singolarità; e che ogni coppia neutra coincidente con una cuspide sia polo di 1º ordine di uno dei δ_2 integrali di 2ª specie, non avente altre singolarità.

Dopo ciò la dimostrazione del teorema di Abel diretto pei gruppi di una serie lineare neutra (n. 25) si presenta con semplicità irriducibile; il teorema d'inversione nel campo γ si ottiene, mediante il passaggio al limite, dall'ordinario teorema d'inversione di JACOBI relativo agl'integrali abeliani di 1ª specie di $\bar{f}$, per $\bar{f} \to f$ (n. 26); e da questo si deduce poi agevolmente (n. 27) l'inverso del teorema d'Abel, che dà la condizione di equivalenza di due gruppi di punti nel campo neutro γ.

Ecco ora in proposito qualche indicazione bibliografica. La considerazione dei limiti degl'integrali abeliani di 1ª specie di una curva, quando questa acquista nuovi nodi e cuspidi, risale in un caso particolare a KLEIN (1874) (1); il teorema inverso di quello di Abel per gl'integrali di 1ª specie, con riferimento ad integrali di 2ª e di 3ª specie aggiunti a quelli di 1ª specie, è stato dato prima da HUMBERT (1887) [**30**, p. 338] coll'uso delle funzioni fuchsiane e da NOETHER (1890) [**46**, p. 475], sotto una forma sostanzialmente equivalente alla nostra (n. 27), conseguita però in modo molto meno semplice ed elementare.

Nei riguardi del teorema d'inversione nel campo γ, cioè del teorema d'inversione relativo ad un sistema di π integrali abeliani della curva C, comprendente i p integrali di 1ª specie, δ_1 integrali normali di 3ª specie e δ_2 integrali normali di 2ª specie ($\pi = p + \delta_1 + \delta_2$), esiste un'ampia letteratura. A prescindere da

(1) KLEIN afferma in una Memoria del 1889 [**36**, p. 61] di aver fin dall'estate del 1874 considerato la questione. Nella Memoria cui si allude egli si riferisce ai limiti degl'integrali di 1ª specie d'una quartica piana priva di punti multipli, che varii acquistando un punto doppio.

qualche caso particolare considerato da JACOBI (1850) [**41**, p. 349), da ROSENHAIM (1851) [**53**, p. 376], da CLEBSCH (1865) [**12**, p. 234] e da altri, la prima completa risoluzione del problema d'inversione nel più vasto senso accennato (*erweiterte Umkehrproblem*), trovasi in CLEBSCH-GORDAN (1866). Gli Autori trattano del problema in due riprese [**13**, p. 143 e p. 270] e lo riducono per mezzo del teorema di Abel all'ordinario problema di JACOBI, costruendo, colle serie Θ di JACOBI, le più generali $\Theta^{(q)}$, mediante cui il problema si risolve; e trattano più che altro il caso in cui vi sono soltanto integrali di 3ª specie ($\delta_2 = 0$), riguardando il caso in cui vi sono integrali di 2ª specie come limite del precedente. Questi Autori vedono nettamente che l'ipotesi veramente importante, alla quale ci si riduce con trasformazioni birazionali, che non mutan l'essenza del problema, è quella in cui la curva è piana con nodi e cuspidi e le singolarità degl'integrali di 3ª specie cadono nei nodi e quelle degl'integrali di 2ª specie nelle cuspidi.

Ulteriori contributi alla questione vennero apportati da ELLIOT (1882) [**20**], il quale, sulla scia di CLEBSCH-GORDAN, studiò a priori le funzioni che servono al problema d'inversione generalizzato, anche nel caso degl'integrali di 2ª specie, soltanto accennato dai predetti Autori, e diede la soluzione del problema estendendo il metodo classico di RIEMANN.

Successivamente APPELL (1885) [**1**] considerò l'inversione nel caso in cui oltre agl'integrali di 1ª specie e agl'integrali normali di 2ª e di 3ª specie, si ha da fare con derivate di ordine qualunque degl'integrali normali di 2ª specie rispetto al loro parametro, cioè con integrali di 2ª specie presentanti ciascuno un polo di ordine arbitrario in un punto. In questo caso (e la cosa risulterà anche a noi altrimenti) il problema è ancora risoluto da funzioni uniformi.

Invece GOURSAT (1892) in una posteriore trattazione, semplice ed elegante [**28**] pone il problema più in generale supponendo che ai p integrali di 1ª specie sieno associati comunque altri integrali di 2ª e di 3ª specie. L'inversione non si fa allora in generale in modo uniforme, ma comunque l'A. indica un metodo per ricondurla al teorema di Abel, delimitando i casi d'univoca inversione ed avvertendo che, quando non vi sono che integrali di 2ª specie, le funzioni provenienti dall'inversione hanno sempre un numero finito di rami (1).

La nostra trattazione del teorema d'inversione (n. 26) ispirata ad un concetto di limite, è diversa dalle trattazioni preesistenti e aderisce meglio al nostro punto di vista geometrico. Ma più importante è una seconda dimostrazione del teorema d'inversione, che viene esposta nei nn. 29 e 30, perchè in essa è la radice di un metodo che nel seguito della mia ricerca vien di frequente usato per problemi più generali: lo citeremo dipoi brevemente come « metodo fondamentale ».

Occorre all'uopo un'indagine preventiva concernente il sistema lineare Σ dei π integrali « virtualmente » di 1ª specie che sulla V_π quasi abeliana di Jacobi nascono in corrispondenza agl'integrali neutri di 1ª specie della curva C; e precisamente sulle singolarità di quei δ_1 e δ_2, fra i predetti integrali, che son nel fatto di 3ª e di 2ª specie. Un integrale di 3ª specie ha due varietà logaritmiche pure (algebricamente equivalenti) $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ $(j=1, \ldots, \delta_1)$, associate nel senso che i periodi polari relativi hanno segni opposti e la cui intersezione $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ è perciò luogo di punti d'indeterminazione (cioè di singolarità inessenziali) dell'integrale considerato; mentre un integrale di 2ª specie ha una varietà polare di 1º ordine $\mathfrak{A}_{\delta_1+l}$, algebricamente equivalente anch'essa alle $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ $(l=1, \ldots, \delta_2)$, sulla quale la varietà d'indeterminazione dell'integrale è segnata dalla varietà ad essa infinitamente vicina entro il sistema algebrico ∞^1 cui appartengono tutte le varietà singolari (n. 28).

Se ne traggono due conseguenze importanti, che offriranno poi opportuni orientameuti per stabilire le proprietà analoghe nel caso delle funzioni abeliane generali; e cioè il fatto che

(1) Una trattazione del problema d'inversione generalizzato nel caso che a noi interessa in cui vi figurano integrali normali di 2ª e di 3ª specie può anche vedersi in Appell-Goursat [**2**, p. 460].

ogni integrale di Σ riducasi, a meno di funzioni razionali e di logaritmi di funzioni razionali, a integrali di 3ª e di 2ª specie, aventi gli stessi periodi ciclici, e *costanti lungo le varietà razionali M_δ tracciate su V_π;* ed il fatto che la matrice dei periodi ciclici e polari degl'integrali di Σ possa assumere fin da ora la forma (T') del n. 28, che sarà poi generalizzata nella forma (40) del n. 45 (coll'introduzione dei divisori).

Premesso tutto ciò, il problema d'inversione per una V_π ridotta ad uno spazio lineare S_δ ($\pi=\delta$, $p=0$), si presenta come un problema di risoluzione di un sistema di δ equazioni lineari indipendenti e ciò conduce immediatamente al risultato. Per una V_π corrispondente a p qualunque, fissati i valori degl'integrali di 1ª specie, appartenenti a Σ, si determina una M_δ e tenuto conto che gl'integrali di 3ª e 2ª specie di Σ hanno rispettivamente la forma:

$$u_{p+j} = \log R_j + w_{p+j} \qquad (j = 1, \ldots, \delta_1);$$

$$u_{p+\delta_1+l} = R_{\delta_1+l} + w_{p+\delta_1+l} \qquad (l = 1, \ldots, \delta_2),$$

ove le R son funzioni razionali del punto di V_π, e i w son costanti sulle M_δ, si riconduce la determinazione di un punto soddisfacente al problema a quella del punto che soddisfa al problema stesso entro la M_δ trovata (che è, in un senso ben precisato (n. 22) una varietà « lineare » come un S_δ).

* * *

La preparazione dei teoremi relativi alla costruzione dei corpi di funzioni quasi abeliane, richiede che sieno approfondite le proprietà del gruppo continuo Γ esistente sulla V_π quasi abeliana di JACOBI. Le trasformazioni β di questo gruppo si chiaman *trasformazioni di 2ª specie*. Vi sono ∞^π altre trasformazioni birazionali di V_π in sè, α, involutorie e non formanti gruppo, le quali moltiplicate a due a due dànno le β e si chiaman *trasformazioni di 1ª specie* (n. 32). Le une e le altre si ottengon con ovvia estensione di quel che avviene nel caso di un'ordinaria varietà di JACOBI [**8**]. *Le trasformazioni di 1ª specie mu-*

tano in sè ogni varietà polare di un integrale di 2^a specie proveniente dal gruppo e scambian fra loro le varietà logaritmiche di un integrale di 3^a specie; epperò le trasformazioni di 2^a specie mutano in sè ogni varietà singolare dei predetti integrali.

La varietà V_π, a differenza di un'ordinaria varietà di Jacobi, della quale, come si è detto, esiston modelli privi di varietà eccezionali, *contiene infinite varietà eccezionali*, non eliminabili in blocco con una trasformazione birazionale. Vi son addirittura sistema continui di varietà siffatte, che son analoghe alle curve eccezionali di 2^a specie, caratterizzanti (secondo CASTELNUOVO-ENRIQUES) le rigate e le superficie razionali. Esse costituiscono una delle maggiori difficoltà nello studio delle V_π quasi abeliane. Una di queste varietà non può trasformarsi in una di dimensione diversa, senza che, contemporaneamente, una varietà ad essa appartenente (contenente o contenuta) si muti in una varietà appartenente (contenuta o contenente) alla sua trasformata.

Le varietà eccezionali cui alludiamo son eccezionali rispetto ad ogni α o ad ogni β: si tratta delle varietà d'indeterminazione degli integrali di 3^a e di 2^a specie inerenti a Γ e della varietà $E_{\pi-1}$ (n. 31) che rappresenta i gruppi di π punti di C, speciali nel dato campo neutro; nonchè delle trasformate di questa varietà rispetto alle α, β. La varietà $E_{\pi-1}$ contiene tutte le varietà d'indeterminazione $F'_{\pi-2}$. Una data $F'_{\pi-2}$ mutasi mediante una α (o β) in una $F_{\pi-1}$, contenente tutte le varietà d'indeterminazione da cui non proviene e il sistema delle $F_{\pi-1}$ invade V_π e ne fa parte la $E_{\pi-1}$. La $E_{\pi-1}$ è invece portata dalle α (o β) in infinite $E'_{\pi-2}$, invadenti V_π. Rispetto ad una α o ad una β fissata, la $E_{\pi-1}$ e la trasformata $F_{\pi-1}$ di una $F'_{\pi-2}$ son associate nel senso che ognuna contiene la varietà eccezionale corrispondente all'altra (n. 33).

Come vedesi, la varietà dei punti singolari degl'integrali inerenti al gruppo Γ non è invariante in modo assoluto per Γ, poichè vi sono in essa certe varietà a $\pi - 2$ dimensioni che vengon portate dovunque su V_π (aumentando la lor dimensione): son le varietà d'indeterminazione. *I soli punti singolari che non posson venire mutati dalle trasformazioni del gruppo in punti non singolari son i poli ed i punti logaritmici propriamente detti.*

* * *

Le funzioni quasi abeliane speciali sono considerate nella seconda parte della presente Memoria. Esse nascono dall'inversione dei π integrali, virtualmente di 1^a specie, del sistema lineare Σ sopra la varietà quasi abeliana di JACOBI V_π. Supposto, com'è lecito, V_π in un $S_{\pi+1}$, quest'inversione fornisce le coordinate del punto di V_π come funzioni meromorfe a $2p+\delta_1$ periodi dei π integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$: in una parola come $\pi+1$ funzioni quasi abeliane di π variabili, e le funzioni razionali di queste dànno luogo a un corpo di funzioni quasi abeliane speciali (n. 34).

Le funzioni quasi abeliane speciali di genere effettivo zero ($p=0$) risultano subito caratterizzate come applicazione del metodo fondamentale. Previa una conveniente sostituzione lineare omogenea non degenere sulle variabili, esse *riduconsi a funzioni razionali di* $e^{u_1}, \ldots, e^{u_{\delta_1}}, u_{\delta_1+1}, \ldots, u_{\delta_1+\delta_2}$ ove $u_1, u_2, \ldots, u_{\delta_1}$ son gl'integrali di 3^a specie e $u_{\delta_1+1}, \ldots, u_{\delta_1+\delta_2}$ gl'integrali di 2^a specie del sistema lineare Σ, inerente allo S_δ ($\delta=\delta_1+\delta_2$), a cui si riduce in tal caso la V_π. Si può anche dire ch'esse sono funzioni trigonometriche-razionali (soltanto trigonometriche, cioè funzioni razionali di seni e coseni, se $\delta_2=0$; soltanto funzioni razionali, se $\delta_1=0$).

Nello spazio euclideo $S_{2\pi}$ rappresentativo delle π variabili complesse, un campo fondamentale del considerato corpo di funzioni quasi abeliane è costituito da *un qualunque prisma indefinito che abbia come figura direttrice il parallelepipedo dei* $2p+\delta_1$ *periodi*. Quando il corpo si consideri, com'è lecito, quale limite di un corpo di funzioni abeliane di π variabili, nelle quali vanno all'infinito certi $\delta_1+2\delta_2$ periodi, il prisma si presenta come limite del parallelepipedo dei 2π periodi delle funzioni abeliane, allorchè altrettanti spigoli tendono all'infinito. Nel n. 36 sono indicate le eccezioni alla biunivocità della corrispondenza fra V_π e il prisma dei periodi (nel quale si considerino sovrapposti due punti del contorno, differenti d'un vettore-periodo). La varietà invariante viene a corrispondere ai punti all'infinito del prisma. Com'è ben noto, queste eccezioni non si presentano nel caso abeliano.

* * *

Preparato così, attraverso l'esempio delle funzioni quasi abeliane speciali, il necessario materiale d'orientamento, nella terza parte passo alla teoria delle funzioni quasi abeliane generali.

Qui si presentano a priori tre tipi di definizioni che vengono ampiamente discussi (nn. 37 e segg.), ma di cui in ultima analisi si dimostra la equivalenza, sotto ipotesi molto ampie. La discussione relativa serve a chiarire talune utili circostanze elementari ed altre che son invece più riposte e delicate. La definizione dominante è quella che considera come varietà quasi abeliana di rango 1 (cioè varietà quasi abeliana di Picard, per la sua analogia colla varietà di Picard, del caso abeliano), una V_π con un gruppo continuo del solito tipo Γ. Il gruppo continuo dà luogo su V_π ad un sistema lineare Σ di π integrali semplici $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, e anche qui si trova (n. 38) che il caso abeliano è caratterizzato dall'assoluta transitività di Γ. Nel caso quasi abeliano la varietà K invariante per Γ consta di tutti e soli i punti singolari degli u ed il sistema Σ è caratterizzato come il sistema lineare più ampio degl'integrali semplici di V_π invarianti per Γ.

Il sistema Σ comprende *sempre* (qualunque sia Γ sopra la data V_π) gli eventuali integrali semplici di 1ª specie $u_1, u_2, \ldots, u_p$ di V_π, ove p (≥ 0) sia l'irregolarità di V_π. È dunque necessariamente $p \leq \pi$ e p uguaglia π soltanto quando gl'integrali di Σ son tutti di 1ª specie, cioè quando V_π è una varietà di Picard. Pertanto, nel caso quasi abeliano è $0 \leq p < \pi$ e in Σ

si può trovare un sistema lineare subordinato, Σ_1, ∞^{δ_1-1}, di integrali *essenzialmente di 3ª specie* (cioè tali che nessuna loro combinazione lineare si abbassi di specie) e sieno $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ δ_1 integrali indipendenti di Σ_1; ed un sistema subordinato Σ_2, ∞^{δ_2-1}, di integrali *essenzialmente di 2ª specie* e sieno $u_{p+\delta_1+1}, u_{p+\delta_1+2}, \ldots, u_{p+\delta_1+\delta_2}$ δ_2 integrali indipendenti di Σ_2; in guisa che Σ sia il sistema lineare congiungente di Σ_1, Σ_2 e del sistema lineare Σ_0, ∞^{p-1}, degl'integrali di 1ª specie $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

I sistemi lineari Σ_1, Σ_2 non sono naturalmente individuati da Σ. È individuato il sistema Σ' congiungente Σ_0, Σ_2, e dentro Σ', il sistema Σ_2 può essere scelto ad arbitrio, purchè non avente integrali comuni con Σ_0; dentro Σ si può poi scegliere Σ_1, ad arbitrio, purchè non avente integrali comuni con Σ'.

Il gruppo Γ individua così *tre interi* (≥ 0) *caratteristici* p, δ_1, δ_2, il primo dei quali non dipende da Γ, ma soltanto da V_π. Il caso quasi abeliano speciale mostra già che, per un dato π, gl'interi p, δ_1, δ_2 possono assumere valori non negativi arbitrari compatibili colla $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$; e che vi sono sopra una data V_π quasi abeliana infiniti gruppi continui di tipo Γ (la totalità delle trasformazioni birazionali di V_π in sè forma un gruppo continuo infinito). Lo stesso vale anche per una V_π quasi abeliana di PICARD, ma questo vien acquisito in uno stadio più avanzato della teoria (n. 54).

Ne deriva altresì (n. 48) che, mentre nel caso abeliano ha senso di parlare del corpo di funzioni abeliane definito da una determinata varietà di PICARD, in quanto esso è individuato e ne è individuata la tabella dei periodi primitivi (in una classe di matrici fra loro equivalenti), nel caso quasi abeliano vi sono infiniti corpi di funzioni quasi abeliane associate da una data V_π ed eventualmente distinti fra loro (diciamo eventualmente, perchè per es. quando $p = 0$ si ha un solo corpo, che è quello delle funzioni trigonometriche-razionali); sicchè, per definire uno di questi corpi, bisogna associare alla V_π uno dei gruppi continui Γ su essa esistenti.

L'indagine di altre proprietà geometriche caratterizzanti una V_π quasi abeliana, richiede un preliminare affinamento di qualche teorema della teoria della base per le varietà a $\pi - 1$ dimensioni tracciate su una qualunque varietà algebrica V^π (1). Bisogna anzitutto introdurre il concetto di *legame semplice* fra più varietà $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ a $\pi - 1$ dimensioni (effettive o virtuali, ma pure) tracciate su V_π. Si dice che fra queste varietà intercede un legame algebrico semplice:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\tau C_\tau \equiv 0$$

(coi λ interi positivi, negativi o nulli), quando non tutti i coefficienti λ sono nulli, così che le τ varietà sono algebricamente legate, ma fra esse se ne posson trovare $\tau - 1$ algebricamente indipendenti.

Il numero $\tau - \sigma$ dei legami *linearmente indipendenti* fra le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ si desume dalla caratteristica σ della matrice formata coi numeri virtuali d'intersezione $[C_j, D_s]$ delle C colle curve $D_1, D_2, \ldots, D_\varrho$ di una base delle curve di V_π; si posson sempre scegliere nel sistema lineare di quei legami, per individuare il sistema stesso, $\tau - \sigma$ legami semplici (n. 39), in ciascun dei quali dunque non comparisce che una varietà di più del massimo numero di varietà indipendenti, che in esso figurano.

Un'altra premessa essenziale riguarda lo studio delle varietà eccezionali per le trasformazioni di 1ª e di 2ª specie di una V_π con un gruppo continuo Γ. Le trasformazioni, β, di 2ª specie son le trasformazioni del gruppo e le trasformazioni di 1ª specie, α, esistono anche in questo caso generale in virtù del presupposto teorema di addizione (ed esse dànno come prodotti a due a due le β).

Qui si presenta la difficoltà accennata, inerente alle varietà eccezionali. I punti singolari degl'integrali di 2ª e di 3ª specie invarianti per Γ riempiono una varietà algebrica pura K,

(1) Rinvio al seguito e all'elenco bibliografico la citazione dei miei lavori sulla base, che qui occorre tenere presenti.

a $\pi - 1$ dimensioni. Nel caso quasi abeliano speciale, questa varietà (costituita dalle $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, $\mathfrak{A}_{\delta_1+l}$) non contiene alcuna *componente eccezionale a $\pi - 1$ dimensioni*. Ma non è perciò detto che tale circostanza si debba necessariamente verificare anche in generale. Già è chiaro che se si trasforma birazionalmente una V_π quasi abeliana (di JACOBI o di PICARD) in modo che un punto generico di una varietà logaritmica o polare a $\pi - 1$ dimensioni di un integrale di Σ, si muti in una varietà eccezionale a $\pi - 1$ dimensioni, la varietà che così nasce è per l'integrale trasformato logaritmica o polare ed è una componente $(\pi - 1)$-dimensionale della varietà invariante K relativa alla varietà V_π trasformata. All'infuori di questo caso banale, ve ne sono altri in cui K contiene componenti eccezionali a $\pi - 1$ dimensioni? I tentativi per rispondere in modo esauriente a questa domanda non hanno per ora avuto esito. È stato perciò necessario d'introdurre a questo punto l'ipotesi, eventualmente limitativa (ipotesi L), che esista un modello (privo di punti multipli) di V_π, su cui sieno eliminate le eventuali varietà eccezionali a $\pi - 1$ dimensioni, luoghi di punti singolari degl'integrali di Σ. L'ipotesi è soddisfatta nel caso quasi abeliano speciale (e quindi in particolare sempre per $p \leq 3$) e per corpi quasi abeliani molto generali (n. 41). D'altronde è probabile che sopra ogni V_π quasi abeliana di PICARD esistano Γ soddisfacenti ad L (oltre forse a gruppi che non vi soddisfanno).

Circa il valore dell'ipotesi L (n. 47), pongo anzitutto in luce una proprietà, ad essa non vincolata, d'un gruppo qualunque del tipo Γ: e cioè che *ogni integrale di 3ª specie invariante per Γ possiede almeno una varietà d'indeterminazione a $\pi - 2$ dimensioni*: il che costituisce una particolarità per un integrale di 3ª specie d'una varietà algebrica, mentre è il fatto normale per un integrale di 2ª specie (n. 42). Ognuna delle varietà d'indeterminazione d'un integrale di 2ª o di 3ª specie invariante per Γ è eccezionale per le trasformazioni α e β di V_π in sè, nel senso che i punti di una, irriducibile, di queste varietà, vengon portati dalle α, β in curve razionali f di un sistema involutorio $\infty^{\pi-1}$, il quale riempie V_π ed è mutato in sè dalle α, β. Se, com'è probabile, sopra la generica f è possibile di fissare razionalmente un punto, si può fare a meno dell'ipotesi L nelle ulteriori deduzioni, che acquistan così valore indipendente da essa. D'altro canto anche le questioni d'esistenza di cui poi diremo, sono in gran parte indipendenti da L.

Accanto al concetto di legame semplice, valevole sopra una qualunque varietà algebrica, occorre inoltre introdurre il concetto di *legame auto-coniugato* specifico d'una V_π (n. 43): è un legame fra un certo numero di coppie C_1, C_{t+1}; C_2, C_{t+2}; . . . ; C_t, C_{2t} di componenti (a $\pi - 1$ dimensioni) della varietà invariante K, ove le varietà di ognuna di quelle coppie sieno coniugate in una α (e quindi in tutte le α), e che abbia la forma:

$$\lambda_1 \ (C_1 - C_{t+1}) + \lambda_2 \ (C_2 - C_{t+2}) + \ldots\ldots + \lambda_t \ (C_t - C_{2t}) \equiv 0 .$$

Vale allora il seguente *teorema fondamentale* (n. 44).

Gl'integrali essenzialmente di 3ª specie e invarianti pel gruppo continuo Γ, *sono tanti, indipendenti, quanti i legami (indipendenti) semplici e autoconiugati fra le componenti della varietà invariante* K *e si possono scegliere in modo che abbiano soltanto singolarità logaritmiche pure.*

Resta in tal modo precisato il significato geometrico dei caratteri δ_1, δ_2. Si vede inoltre (ed è questa la proprietà essenziale su cui s'impernia la ricerca) che i periodi polari di ogni integrale di 3ª specie invariante per Γ son proporzionali ai coefficienti (interi) del legame semplice (autoconiugato) che intercede fra le sue varietà logaritmiche (nn. 39, 44). La proprietà ha carattere essenziale, perchè qualora quei periodi non si riducessero, a meno di un comune fattore di proporzionalità, a multipli interi di $2\pi i$, il nostro procedimento diverrebbe inapplicabile (ved. la fine del n. 47), non potendosi trasferire certe relazioni dal dominio trascendente a quello algebrico.

Il teorema fondamentale dà luogo a conseguenze notevolissime. Eccone alcune:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una V_π, *mutata in sè da un gruppo continuo del tipo* Γ (*abeliano,* ∞^π, *generalmente transitivo*) *di trasformazioni birazionali, abbia l'irregolarità* $p < \pi$, *è che* Γ *contenga un sottogruppo abeliano razionale* ∞^δ ($\delta = \pi - p$). *La* V_π *è allora birazionalmente equivalente al prodotto di una varietà di* Picard V_p' *e di uno spazio lineare* S_δ. *Viceversa ogni tal prodotto soddisfa alle ipotesi. Per* $p = 0$, *la* V_π *riducesi addirittura ad una varietà razionale* (n. 46).

Ne segue (n. 46, Oss. 1ª) che una V_π del tipo indicato contiene un gruppo continuo infinito di trasformazioni birazionali in sè al quale appartengono infiniti gruppi del tipo Γ.

Ridotti a forma normale, rispetto a prescelti cicli lineari normali, sia gl'integrali di 1ª specie $u_1, u_2, \ldots, u_p$ di V_π, sia gl'integrali di 3ª specie $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, come quelli di 2ª specie $u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ ed eseguita un'ulteriore opportuna sostituzione lineare non degenere sugl'integrali di 3ª specie, i δ_1, δ_2 integrali di 3ª e di 2ª specie restan *essenzialmente* delle specie cui appartengono e i periodi normali dei π integrali u invarianti per Γ dànno luogo ad una *tabella normale di periodi primitivi della forma* (40) (n. 45), importante premessa ad uno dei teoremi d'esistenza.

* * *

Un'indagine preliminare sul concetto di moduli di una V_π quasi abeliana o meglio di un corpo di funzioni quasi abeliane, mostra la necessità di alcune altre precisazioni (n. 48).

Anzitutto occorre fissare quand'è che due corpi K, K' di funzioni quasi abeliane si riguardano coincidenti: il che non offre difficoltà, perchè è l'analogo di quanto si fa pei corpi di funzioni abeliane.

I due corpi si considerano invero come uno solo quando i loro periodi formano *matrici equivalenti*, cioè matrici deducibili l'una dall'altra con sostituzioni lineari non degeneri sulle variabili (ossia sulle orizzontali) e con sostituzioni unimodulari a coefficienti interi sui $2p+\delta_1$ cicli lineari (ossia sulle verticali). Nel caso abeliano vi è un sol corpo di funzioni, per una data varietà di PICARD.

Due gruppi continui *distinti* Γ, Γ', associati alla V_π quasi abeliana, posson dar luogo al medesimo corpo di funzioni quasi abeliane. Perchè così avvenga occorre e basta che i due gruppi sieno trasformati l'uno dell'altro con una trasformazione birazionale di V_π in sè (che, naturalmente, non è una trasformazione di 1ª o di 2ª specie nè dell'uno nè dell'altro gruppo, perchè una tale muta in sè l'uno o l'altro).

Nel caso $p=0$, *tutti* i gruppi continui Γ di trasformazioni cremoniane di un S_δ in sè (ché a tale può ridursi V_π) aventi gli stessi interi caratteristici originano lo stesso corpo di funzioni quasi abeliane: le funzioni razionali di $e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots, e^{u_{\delta_1}}$, $u_{\delta_1+1}, \ldots, u_{\delta_1+\delta_2}$ $(\delta=\delta_1+\delta_2)$. Essi riduconsi con trasformazioni cremoniane al gruppo tipico di omografie:

$$x_j'=c_j x_j (j=1, \ldots, \delta_1;\ c_j\neq 0),\quad x_l'=x_l+c_l (l=\delta_1+1, \ldots, \delta_1+\delta_2),$$

ove $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$ sono coordinate (non omogenee) di punto in S_δ (1).

Per procedere oltre, nella preparazione degli elementi occorrenti ad affrontare le questioni di esistenza, ho approfondito anzitutto il caso d'un corpo di funzioni quasi abeliane speciali, determinando le *relazioni fra i loro periodi, come limiti delle relazioni fra i periodi d'un corpo di funzioni abeliane speciali,* cioè fra i periodi di π integrali normali di 1ª specie d'una curva $\overline{C}$ di genere π, quando questa tende ad una curva C di genere effettivo p e di genere virtuale π.

L'istrumento principale della ricerca è l'equazione differenziale lineare di FUCHS-PICARD cui soddisfanno i periodi d'un integrale abeliano di 1ª specie, sopra una curva dipendente

(1) Gl'integrali $u_1, \ldots, u_{\delta_1}, u_{\delta_1+1}, \ldots, u_\delta$ relativi ad un tal gruppo hanno rispettivamente come iperpiani logaritmici, i primi δ_1, gl'iperpiani $x_1=0, \ldots, x_{\delta_1}=0$ e l'iperpiano all'infinito e, gli ultimi δ_2, come polare (di 1° ordine) l'iperpiano all'infinito, con $S_{\delta-2}$ d'indeterminazione variabile dall'uno all'altro dei δ_2 integrali di 2ª specie.

razionalmente da un parametro. Il risultato cui si perviene ha un aspetto poco incoraggiante nella forma, ma ha un valore decisivo e inaspettato nella sostanza. Si ottengon naturalmente fra le relazioni limiti quelle che legano i periodi degl'integrali di 1^a specie della curva limite C. Le relazioni rimanenti sono le classiche espressioni dei periodi normali degli integrali normali di 3^a specie inerenti alle coppie neutre a punti distinti di C, mediante i valori degl'integrali normali di 1^a specie inerenti alle coppie neutre a punti coincidenti; le relazioni esprimenti il teorema di permutabilità del parametro coll'argomento nelle coppie dei predetti integrali di 3^a specie e un analogo teorema di permutabilità per gl'integrali di 2^a specie e infine altre relazioni integro-differenziali fra integrali di 2^a e di 3^a specie.

Il valore sostanziale e decisivo del risultato sta in ciò: che tutte le relazioni trovate, ad eccezione di quelle che riguardano i periodi degl'integrali di 1^a specie di C, *non costituiscono vincoli effettivi pei periodi ciclici degl'integrali di 2^a e di 3^a specie!* Dei periodi polari non è il caso di parlare perchè di essi è già fissato il valore nella matrice normale (40).

Il caso quasi abeliano speciale offre un modo d'assaggio per interpretare anche questo risultato paradossale .Come primo esame della questione mi limito a cercare gli eventuali vincoli che le precedenti relazioni possono addurre fra gli elementi della matrice parziale Ω_1, contenuta nella tabella normale (40) e formata dai periodi ciclici degl'integrali di 3^a specie, la cui indagine, in questo problema, si presenta più semplice che per gl'integrali di 2^a specie.

La conclusione è che i legami apparenti addotti dalle precedenti relazioni dipendono essenzialmente dal fatto che, eseguita la scelta di un sistema di cicli normali, i periodi son già per questo legati; ma tali legami sono sostanzialmente inefficienti, perchè con una scelta opportuna dei cicli normali si riesce a dare ai periodi valori prefissati ad arbitrio. La radice topologica sta nel fatto che, dati sopra una superficie di RIEMANN C un sistema S di retrosezioni ed un cammino aperto orientato λ, di estremi A, B, che incontri le retrosezioni, si può sostituire ad S un altro sistema S' di retrosezioni *i cui cicli sieno ad uno ad uno omologhi ai corrispondenti di* S, in modo che S' non incontri più λ (n. 49, Oss. 2ª).

* * *

Un ulteriore passo verso i teoremi di esistenza è costituito dalla ricerca delle espressioni effettive degl'integrali di 3ª e di 2ª specie di una varietà di PICARD V_p' come funzioni degl'integrali semplici di 1ª specie $u_1, u_2, \ldots, u_p$ della varietà stessa (nn. 51, 52).

Un integrale di 3ª specie w con sole varietà logaritmiche pure e semplicemente legate (¹), si riduce sempre, a meno di un fattore costante, al logaritmo del quoziente di due funzioni intermediarie di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, che si annullano lungo le varietà logaritmiche di w.

Più precisamente l'espressione di w (dopo aver diviso l'integrale per una eventuale costante non nulla) può ridursi al tipo

$$w = \log \left[e^g \frac{\varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)}{\varphi(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p)} \right],$$

ove le a, b sono costanti e $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ è una funzione intermediaria tale che le equazioni

$$(1) \quad \varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0, \quad \varphi(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p) = 0$$

rappresentino le varietà logaritmiche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in cui w ha rispettivamente i periodi polari $+2\pi i$, $-2\pi i$ (contando ogni eventuale componente di $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ colla molteplicità che le è propria). Inoltre g è un conveniente polinomio di 2° grado nelle $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Si può infine, per un dato w, particolarizzare ulteriormente la funzione $\varphi(u_1, \ldots, u_p)$, supponendo addirittura che sia una

(¹) Nell'Osservazione finale del n. 51 si dà anche l'espressione di un integrale di 3ª specie indipendentemente da queste ipotesi, che per noi son però le più importanti.

trascendente theta $\Theta u d_p\ (u_1, \ldots, u_p)$ [**17**, p. 166] spettante alla matrice di RIEMANN normale $|A\ \Omega|$ della V_p', la qual matrice è poi parte della (40).

Allora g risulta un polinomio lineare della forma:

$$g = \sum_{s=1}^{p} m_s\, d_s\, u_s + 2\pi i \nu \tag{2}$$

con le m interi convenienti (positivi, negativi o nulli), le d divisori di V_p' e ν una certa costante.

Viceversa, scelte comunque la funzione φ (fra le $\Theta u d_p$) e le costanti a, b; posto

$$Q = \frac{\varphi\,(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)}{\varphi\,(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p)}$$

e costruito l'integrale semplice normale di 3ª specie w, avente le varietà logaritmiche pure (semplicemente legate) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ di equazioni (1), risulta:

$$e^w = Qe^g\,,$$

essendo g della forma (2), cioè (a meno di multipli interi di $2\pi i$) viene:

$$w = \Sigma\, m_s\, d_s\, u_s + 2\pi i \nu + \log Q.$$

Questa relazione dà luogo ad un'altra apparente contraddizione. Invero, $\log Q$ come funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, ha periodi nulli in corrispondenza ai periodi del 1° gruppo A della matrice normale $|A\ \Omega|$ e periodi polari uguali a $+2\pi i$, $-2\pi i$ lungo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Pertanto esso dovrebbe coincidere con w, che è appunto l'integrale normale relativo alle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

In realtà si dimostra (n. 54) che anche $\log Q$ può considerarsi come un integrale *normale* di 3ª specie, ma *rispetto ad un sistema di cicli normali diverso da quello da cui siamo partiti*: i cicli del nuovo sistema sono uno ad uno omologhi ai cicli di uguali indici del primitivo; però queste omologie, valide nella V_p', non valgono più nella $V_p' - \mathfrak{A} - \mathfrak{B}$. I periodi normali del

2° gruppo (relativi ai nuovi cicli normali di V_p') sono espressi dalle

$$\Delta_h = l\,d_p\,(a_h - b_h) \qquad (h = 1, \ldots, p).$$

Queste considerazioni son fondamentali nella dimostrazione del terzo teorema d'esistenza.

Quanto agl'integrali di 2ª specie, stabilisco prima *sopra una varietà algebrica qualunque* ch'essi possono esprimersi come somme di funzioni razionali, d'integrali di 1ª specie e di derivate di un integrale di 3ª specie w, delle cui due varietà logaritmiche una, $\mathfrak{A}$, è fissata (genericamente) una volta per sempre e l'altra varia nel sistema continuo $\{\mathfrak{A}\}$ in funzione di p parametri (p irregolarità superficiale della varietà data): le derivate di w essendo calcolate rispetto a questi parametri pei valori ch'essi assumono in $\mathfrak{A}$.

Applicato questo teorema generale alla V_p' di Picard, si trova che ogni integrale di 2ª specie di V_p' riducesi, a meno di un'additiva funzione razionale e di un additivo integrale di 1ª specie, a un'espressione del tipo:

$$v = \frac{\sum_{s=1}^{p} c_s\,\varphi'_{a_s}(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)}{\varphi\,(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)}$$

la quale rappresenta un integrale avente per varietà polare di 1° ordine una $\mathfrak{A}$ di equazione:

$$\varphi\,(u_1 - a_1, u_2 - a_2, \ldots, u_p - a_p) = 0.$$

La φ è una $\Theta_{ld_p}(u_1, \ldots, u_p)$ e

$$\varphi\,(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0, \quad \sum_{s=1}^{p} c_s\,\varphi'_{a_s}(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0$$

sono le equazioni della varietà d'indeterminazione $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ fissata per v su $\mathfrak{A}$ (varietà mobile, al variare dei parametri c, nel sistema lineare caratteristico di $\mathfrak{A}$).

L'integrale v è normale e il suo periodo Δ'_h all'h-esimo siclo normale del 2^0 gruppo, vale

$$\Delta'_h = ld_p\, c_h \qquad (h = 1, \ldots, p).$$

* * *

Posso dopo ciò affrontare le questioni di esistenza. Comincio anzitutto (n. 53) con un teorema che fornisce la *struttura* delle funzioni quasi abeliane di un corpo K derivante dall'associare ad una V_π quasi abeliana (di PICARD) uno Γ degl'infiniti gruppi del tipo più volte indicato appartenenti a V_π, e relativo agl'interi caratteristici δ_1, δ_2 ($\delta_1 \geq 0$, $\delta_2 \geq 0$, $\pi = p + \delta_1 + \delta_2 \geq p$; p irregolarità superficiale di V_π).

Eseguite sulle π variabili e sui cicli le sostituzioni che mutano la matrice dei periodi delle funzioni di K nella matrice equivalente (40) sicchè $|A\ \Omega|$ viene ad esser la matrice abeliana normale associata a V_π, e designate con $u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}, u_{p+\delta_1+1}, \ldots u_\pi$ le nuove variabili, che s'interpretano, le prime p, come integrali normali di 1ª specie di V_π; le successive δ_1, come integrali normali di 3ª specie; le successive δ_2 come integrali normali di 2ª specie, invarianti per Γ; ogni funzione del corpo K è una funzione razionale Φ degli argomenti

$$e^{u_{p+j}-w_{p+j}}\ (j = 1, \ldots, \delta_1),\ u_{p+k} - w_{p+k}\ (k = \delta_1 + 1, \ldots, \delta_1 + \delta_2),$$

in cui

$$w_{p+j} = \log\left[e^{g_j} \frac{\varphi^{(j)}(u_1 - a_{1j}, \ldots, u_p - a_{pj})}{\varphi^{(j)}(u_1 - b_{1j}, \ldots, u_p - b_{pj})}\right],\ g_j = \Sigma m_{sj} d_s u_s + 2\pi i \nu_j$$

(m_{sj} interi; a, b, ν costanti),

$$w_{p+k} = \frac{\sum_{s=1}^{p} c_{sk}\, \varphi'^{(k)}_{a_{sk}}(u_1 - a_{1k}, \ldots, u_p - a_{pk}),}{\varphi^{(k)}(u_1 - a_{1k}, \ldots, u_p - a_{pk})}\,,$$

ove le φ son funzioni theta Θ_{ld_p} inerenti ad $|A\ \Omega|$ e i coefficienti della funzione razionale Φ son funzioni abeliane di $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Viceversa, ogni Φ della struttura predetta, qualunque sieno le φ, a, b, ν e gl'interi m_{sj} appartiene a K.

Questo teorema costituisce di per sè un notevole apporto alla conoscenza delle funzioni oggetto del nostro studio. Esso è subordinato alla L, in quanto quest'ipotesi serva per ridurre la matrice dei periodi alla forma normale (40). Se invece si considera come teorema di struttura delle funzioni quasi abeliane inerenti a corpi di cui sia a priori assegnata la matrice dei periodi sotto la forma normale (40), esso è indipendente da L.

La parte reciproca della proposizione, si può verificare a priori con facili calcoli, una volta messa la mano sulla forma delle funzioni; ma anche fatta questa verifica a priori, essa non permetterebbe di affermare che tutto il corpo K si ottiene con funzioni di quel tipo.

Nel caso delle funzioni quasi abeliane speciali bastano, per la costruzione delle funzioni stesse, le serie theta ϑ del 1° ordine (n. 53, Oss. 2ª). Si ha così l'estensione a p e δ qualunque delle *funzioni semirazionali* di COUSIN corrispondenti al caso particolare $p=\delta=\delta_1=1$ (funzioni di 2 variabili a 3 periodi; ved. per la citazione relativa la fine del n. 53).

I teorema d'esistenza (n. 54) la cui dimostrazione segue quella del teorema di struttura, sono tre.

Il *primo teorema di esistenza afferma* che data una qualunque V_p' di PICARD e scelti *comunque* su V_p' δ_1 integrali semplici (essenzialmente) di 3ª specie linearmente indipendenti *sottoposti alla sola condizione che le loro varietà logaritmiche sieno pure e semplicemente legate* e δ_2 integrali semplici (essenzialmente) di 2ª specie linearmente indipendenti, la matrice dei periodi ciclici e polari dei predetti $\delta_1+\delta_2$ integrali è equivalente alla forma normale (40) ed *esiste un corpo K di funzioni quasi abeliane di π variabili, i cui $2p+\delta_1$ periodi hanno per componenti gli elementi delle verticali della matrice* (40),

$$\begin{vmatrix} A & \Omega & O \\ O & \Omega_1 & B \\ O & \Omega_2 & O \end{vmatrix},$$

Intr.

ove $|A\ \Omega|$ è la matrice abeliana normale inerente a V_p'; Ω_1, Ω_2 son le matrici dei periodi ciclici dei δ_1, δ_2 integrali di 3ª e di 2ª specie e B il determinante (a elementi nulli, salvo quelli della diagonale principale uguali a $2\pi i$) dei periodi polari degl'integrali di 3ª specie.

La dimostrazione è indipendente dall'ipotesi L, la quale interviene soltanto quando si voglia concludere che nel modo indicato si ottengono tutti i corpi soddisfacenti ad L.

Si prova poi agevolmente che il corpo K ottenuto è relativo ad una V_π (prodotto di V_p' per un S_δ) a cui è associato un gruppo continuo del tipo Γ, che la muta in sè.

Il *secondo teorema di esistenza* afferma che *su* $V_\pi = V_p' \times S_\delta$ *esistono infiniti gruppi* Γ *che associati a* V_π *dànno lo stesso corpo* K ed essi dipendono dalla scelta d'un'arbitraria trasformazione cremoniana in uno spazio lineare S_δ.

Il *terzo teorema di esistenza* è il più significativo per la costruzione delle funzioni considerate. Esso invero afferma che *la condizione necessaria e sufficiente perchè esista un corpo* K *di funzioni quasi abeliane, i cui interi caratteristici, arbitrariamente prescelti, valgano* p, δ_1, δ_2 *ed i cui periodi formino la tabella normale* (40), *è che la matrice parziale* $|A\ \Omega|$, *contenuta nella* (40), *sia abeliana!* Le Ω_1, Ω_2 son del tutto arbitrarie.

E così, contro ogni contraria apparenza (che ha deviato e reso più volte delicata la mia ricerca), cade la possibilità che esistano relazioni quantitative o qualitative, vincolanti comunque i periodi ciclici normali degl'integrali di 2ª e di 3ª specie, fra loro o in rapporto ai periodi degl'integrali di 1ª specie. Le relazioni, che a priori si presentano, risultano in realtà automaticamente soddisfatte (n. 54, Oss. 4ª).

Tuttavia si deve tener presente che *tutto ciò è subordinato alla ipotesi che la tabella dei periodi sia già ridotta al tipo normale* (40). Resta dunque aperto il problema di assegnare relazioni che assicurino la possibilità di questa riduzione e l'altro di riconoscere se le relazioni cui alludiamo son quelle alle quali soddisfa la più generale matrice dei periodi di un corpo di funzioni quasi abeliane, intese quali funzioni meromorfe ammettenti un teorema algebrico d'addizione.

Se però è vero che condizioni qualitative non esistono (all'infuori di quelle inerenti ad $|A\ \Omega|$, non è men vero che lasciando p. es. i periodi ciclici degl'integrali di 3ª specie assolutamente liberi di variare, non si ottengono sempre corpi distinti. I medesimi corpi ottenuti colla Ω_1 arbitraria, si ottengono invero anche scegliendo gli elementi di ogni singola orizzontale di Ω_1, in guisa che il vettore di cui son componenti, applicato all'origine ($u_1 = u_2 \quad \ldots = u_p = 0$), appartenga al parallelepipedo dei periodi di $|A\ \Omega|$ (n. 53, Oss. 3ª): il che si traduce in disuguaglianze, che ho scritto esplicitamente nel caso particolare $\pi = 2$ (n. 50).

La determinazione effettiva dei moduli d'un corpo di funzioni quasi abeliane (sui quali già facemmo uno scandaglio preliminare) getta nuova luce sui problemi sciolti e su quelli insoluti.

Occorre all'uopo introdurre un altro *intero* ρ ($\leq p$) *caratteristico del corpo* e invariante per trasformazioni birazionali: è la caratteristica della prescelta matrice Ω_2; cioè il numero degli integrali indipendenti di 2ª specie, *essenzialmente trascendenti,* invarianti per Γ, che vengono ad appartenere alla costruenda V_π. Allora la matrice normale (40) può essere ulteriormente particolarizzata, eseguendo una sostituzione lineare omogenea non degenere soltanto sui δ_2 integrali di 2ª specie, sicchè Ω_2 riducesi alla forma:

$$\Omega_2 = \begin{vmatrix} C & \Omega_2' \\ O & O \end{vmatrix} ,$$

ove C è un determinante d'ordine ρ i cui elementi son nulli, salvo quelli della diagonale principale uguali a $2\pi i$, ed Ω_2' è una matrice arbitraria di p orizzontali e di $p - \rho$ verticali, che manca quando $p = \rho$ (e quindi $\delta_2 \geq p$), giacchè allora Ω_2 riducesi semplicemente a

$$\Omega_2 = \begin{vmatrix} C \\ O \end{vmatrix} .$$

Ebbene, *i moduli del più generale corpo K, avente gl'interi caratteristici p, δ_1, δ_2, ρ e inerente ad una matrice* (40), *sono gli elementi della matrice ridotta nel modo ora indicato*, epperò il loro numero η è esattamente espresso da

$$\eta = \frac{p\ (p+1)}{2} + p\,\delta_1 + \rho\ (p-\rho)\ .$$

Riconoscere se la matrice più generale spettante ad un corpo di funzioni quasi abeliane può ridursi sempre alla forma normale (40) ossia se l'ipotesi L è sostanzialmente limitativa, oppure se, a meno di trasformazioni birazionali, essa possa sempre soddisfarsi, equivale a riconoscere se i parametri essenziali che figurano nella matrice generale sono più di η o soltanto η(1).

* * *

I risultati e le considerazioni esposte conducono a formulare come segue i problemi più importanti che devono ancora esser risoluti per ulteriori progressi della teoria.

Anzitutto: Assegnata una matrice di π orizzontali e di $\mu < 2\pi$ verticali quali relazioni qualitative e quantitative sono necessarie e sufficienti per l'esistenza di un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili a cui spetti quella matrice di periodi?

La matrice, in base a tali relazioni, è sempre riducibile alla forma normale (40)?

La sola condizione che le funzioni sieno meromorfe e a $\mu < 2\pi$ periodi non è sufficiente (come invece lo è nel caso abeliano $\mu = \pi$) onde assicurare che le funzioni sono quasi abe-

(1) In collegamento con taluni risultati della presente Memoria, tratto incidentalmente d'un'interessante riduzione di ogni integrale semplice d'una varietà qualunque, d'irregolarità superficiale p, a $3\,p$ fissati integrali, a meno d'un additivo integrale privo di periodi ciclici. Dò inoltre una condizione necessaria e sufficiente perchè un integrale privo di periodi ciclici riducasi ad una combinazione razionale-logaritmica; condizione che è soddisfatta, p. es., quando le varietà logaritmiche dell'integrale son semplicemente legate (n. 56).

liane, ossia che ammettono un teorema algebrico di addizione o, ciò che è equivalente, che sono a $\pi+1$ a $\pi+1$ algebricamente legate. Questa insufficienza risulta da esempi indicati nel n. 59. P.es. è facile constatare che esistono funzioni meromorfe di π variabili con π periodi arbitrari (generici) e che la loro totalità è un corpo di funzioni, non quasi abeliane (ma che contiene un sottocorpo di funzioni quasi abeliane).

COUSIN [**18**] ha studiato fin dal 1902 le funzioni meromorfe di π variabili con $\pi+1$ o $\pi+2$ periodi ed ha accennato [**18**, p. 52] anche a quelle con $\pi+q$ periodi ($q \leq \pi$). Quando i periodi sono in numero di $\pi+1$ essi son arbitrari [**18**, p. 25]; quando sono in numero di $\pi+2$ vi è tra essi una relazione quantitativa [**18**, p. 44] e in ogni caso le funzioni di cui trattasi si esprimono come quozienti di funzioni intere analoghe alle serie Θ.

COUSIN non si occupa di queste funzioni nei loro rapporti col teorema di addizione (la Memoria di PAINLEVÈ [**47**] è posteriore di un anno a quella di COUSIN); ma è molto probabile che le più generali funzioni di COUSIN, per quanto meromorfe, non sieno quasi abeliane. Precisazioni ulteriori alla propria ricerca COUSIN apporta in una Memoria del 1910 [**19**], dove mostra che l'arbitrarietà della scelta dei periodi di una funzione di π variabili a $\pi+1$ periodi è vincolata da una disuguaglianza, ch'egli studia diffusamente per $\pi=2$ quando i tre periodi non sono eccezionali (ved. l'Oss. alla fine del nostro n. 50); e nella quale compaiono taluni interi arbitrari, caratteristici delle funzioni in giuoco [**19**, p. 132].

Lo studio di queste funzioni come quozienti di trascendenti intere viene spinto fino in fondo per $\pi=2$ [**19**, p. 164]. Il passaggio alle funzioni semirazionali di due variabili si compie aggiungendo la condizione che le funzioni studiate sieno legate algebricamente alle loro derivate parziali prime, il che le fa rientrare nel dominio delle funzioni quasi abeliane (ved. la fine del n. 53).

Per completare il riassunto delle conoscenze sulle funzioni periodiche di più variabili e l'illustrazione dei problemi ancora insoluti, avvertiremo che esistono (secondo esempi indicati da PAINLEVÈ e inquadrati nel nostro punto di vista al n. 59) funzioni di più variabili, periodiche, possedenti singolarità essenziali al finito, alle quali sono collegati gruppi continui abeliani non più algebrici, ma trascendenti, sopra varietà algebriche o sopra varietà trascendenti.

Tutto ciò mostra quanto sia vasto e importante il campo di ricerche sulle funzioni periodiche di più variabili. Ma ad un altro problema non vogliamo tralasciare di accennare: quello che concerne la *riduzione a tipi con trasformazioni birazionali o anche soltanto unirazionali delle equazioni a derivate parziali, integrabili con funzioni abeliane e con funzioni quasi abeliane.* L'esempio più antico del genere è dato dalle equazioni di RIEMANN a cui soddisfano le funzioni ϑ di 1° ordine. Vi è una letteratura abbastanza ampia nei riguardi di trascendenti collegate colle funzioni abeliane (ma non colle funzioni quasi abeliane) per la quale rinvio a KRAZER-WIRTINGER [**38**, pp. 638, 805, 806]. La visione geometrica condurrà certamente a risultati coordinati, semplici e maneggevoli per le applicazioni ed abbraccianti funzioni di π variabili con meno di 2π periodi.

* * *

L'ampia generalità dei risultati conseguiti rende opportuna un'illustrazione, sia analitica che geometrica, del caso $\pi = 2$, cioè delle *funzioni quasi iperellittiche*. È quanto faccio nell'ultima parte della Memoria.

Classificati i casi che si presentano (n. 58) e determinate le loro tabelle normali tipiche (nn. 50, 58) ed i modelli delle corrispondenti superficie quasi iperellittiche di JACOBI, F, ritrovo, dal mio punto di vista, la classificazione dei corpi di funzioni quasi iperellittiche, che costituisce il punto di arrivo della fondamentale Memoria già citata di PAINLEVÈ [**47**]. Per ciascuno dei detti tipi sono assegnate (n. 57) tre funzioni (a due a due indipendenti) mediante cui si esprimono razionalmente tutte le altre funzioni del corpo. Com'è naturale, queste funzioni possono scegliersi con una larga arbitrarietà, ma bisogna cercare di porre la mano sulle più semplici. Il mio quadro delle funzioni tipiche è un po' dissimile da quello di PAINLEVÈ, ma vien ricondotto agevolmente a quest'ultimo, mercè relazioni classiche della teoria delle funzioni ellittiche.

Per l'illustrazione geometrica mi riferisco al caso più importante $p=1$, $\delta=\delta_1=1$, in cui la superficie F è una rigata ellittica astratta, quale varietà (senza eccezione) delle coppie di punti di una curva ellittica C. Essa (come nel caso generale di una V_π quasi abeliana di JACOBI) è anche prodotto della curva ellittica C e di una retta; ma fra i modelli senza eccezione di questi due atteggiamenti di F non si può porre una corrispondenza birazionale senza eccezione; cosicchè la F, nel primo atteggiamento, è riferibile senza eccezione soltanto a rigate d'ordine dispari (≥ 5), mentre nel secondo è riferibile soltanto a rigate d'ordine pari (≥ 4).

Conviene tuttavia possedere la rappresentazione di F anche sopra un cilindro cubito ellittico di S_3 e su questo ricercare sia le curve ognuna delle quali rappresenta le coppie di F con un punto fisso, sia gli elementi eccezionali della rappresentazione (n. 60), onde esemplificare circostanze accennate in generale, nel rappresentare una V_π quasi abeliana di JACOBI o di PICARD sopra un cilindro abeliano (n. 53, Oss. 1ª; n. 54).

Il ritorno ad un modello senza eccezione di F permette di isolare le eccezioni connesse colla natura della questione: eccezioni delle trasformazioni di 1ª e di 2ª specie, α, β, di F in sè, le quali son determinate in relazione ad una coppia A, B di punti distinti, data su C, per definire ivi un campo neutro γ (n. 61) e di trovare i punti doppi dell'involuzione di 2° ordine generale su F da una α (n. 62).

Si presenta allora il problema di costruire la superficie Φ, che, in questa teoria fa le veci della superficie di KUMMER della teoria delle funzioni iperellittiche. Tale costruzione, resa disagevole dalle difficoltà determinate dalla presenza degli elementi eccezionali, si svolge nei nn. 63, 64, ove son indicate altresì le più notevoli proprietà della Φ. Trattasi di una superficie del 4° ordine, come la superficie $\overline{\Phi}$ di KUMMER. Essa è razionale ed *è caratterizzata, quale superficie quasi iperellittica di rango 2, dal fatto di possedere una retta doppia con 8 punti doppi conici fuori della retta doppia* (il massimo numero di punti siffatti che una superficie del 4° ordine può avere fuori di una retta doppia). Proprietà analoga a quella che caratterizza la superficie di KUMMER come superficie del 4° ordine col massimo numero, 16, di punti doppi isolati.

La Φ coincide dunque con una superficie scoperta da PLÜCKER fin dal 1867 in questioni di geometria della retta (ved. le notizie storiche relative nel n. 66). Come le funzioni quasi iperellittiche possono considerarsi quali limiti delle funzioni iperellittiche, così la Φ può considerarsi limite della superficie di KUMMER $\overline{\Phi}$. In questo passaggio al limite dei 16 punti doppi di $\overline{\Phi}$ otto vanno verso i punti doppi conici di Φ e gli altri otto tendono a coppie ai 4 punti cuspidali di Φ (sulla retta doppia).

La Φ possiede due invarianti proiettivi (che son poi i suoi moduli come superficie quasi iperellittica): i birapporti dei cinque punti doppi di Φ (i 4 punti doppi conici e 1 punto della retta doppia) contenuti in una conica di Φ. Punti doppi e coniche di Φ (tante quanti i punti doppi) formano un'elegante configurazione, che gode delle proprietà limiti di quelle della configurazione di KUMMER.

Nel n. 65 vengono infine indicate le proprietà della superficie di PLÜCKER corrispondente al caso di una coppia neutra A, B di punti coincidenti. È caratterizzata, fra le superficie del 4° ordine, come superficie quasi iperellittica, dal fatto di possedere una retta doppia cuspidale con 4 punti doppi conici isolati (il massimo numero); possiede un sol invariante (modulo); ecc.

Accenno in ultimo ad altri modelli (quadrica doppia, rigata del 4° ordine con 2 rette doppie direttrici, ecc.), che provengono da forme degeneri di funzioni quasi iperellittiche e che son sempre casi limiti d'una superficie di KUMMER.

* * *

Attesa la mole inconsueta di questa Memoria, ho reputato utile, per un più facile orientamento del lettore [1], di diffondermi abbastanza largamente sui risultati in essa contenuti e sopra ampie notizie bibliografiche, le quali riesciranno, spero, di qualche vantaggio a chi vorrà proseguire le ricerche in un campo tanto attraente ed importante.

---

(1) Ved. anche l'Indice alla fine della Memoria.

PARTE PRIMA

LE SERIE LINEARI NEUTRE E LE VARIETÀ QUASI ABELIANE SPECIALI

Proprietà delle serie lineari neutre

1. Definizioni e concetti preliminari inerenti ad un campo neutro. — Sopra una curva irriducibile C, di genere p, astrattamente concepita priva di punti multipli (attraverso un conveniente modello proiettivo), fissiamo un gruppo γ di un numero finito di coppie di punti, distinte fra loro, i punti di ogni coppia potendo esser distinti o coincidenti.

L'insieme delle serie lineari sopra C, ciascuna delle quali ha quelle coppie come neutre, cioè tali che ogni coppia imponga (al più) una condizione ai gruppi della serie, si dirà il *campo neutro* γ.

L'insieme delle serie lineari sopra C, cui non si prescriva nessuna coppia neutra, si dirà il *campo assoluto*.

Se si considera il campo γ' definito da una parte delle coppie di γ (in particolare il campo assoluto, qualora non si fissi alcuna coppia di γ), ogni serie di γ è anche serie di γ' (non necessariamente viceversa). In particolare ogni serie di γ è contenuta totalmente nella serie lineare assoluta completa, individuata da un suo gruppo qualunque.

Coppie neutre accidentali d'una serie d'un campo (neutro o assoluto) son coppie neutre che la serie possiede automaticamente, senza che siano state prescritte nel definirla. Le altre, ove occorra distinguerle, si chiaman *coppie neutre date*. Ma in generale, poichè soltanto di queste c'è da occuparsi, si parlerà semplicemente di coppie neutre.

Se δ è il numero delle coppie di γ, l'intero $\pi = p + \delta$ si chiamerà il *genere virtuale* di C (si sottintende in relazione a γ).

2. Modello proiettivo piano d'un campo neutro. Aggiunte neutre. — Dimostriamo che:

Dato sopra una curva un campo neutro γ, esiste sempre qualche modello proiettivo piano f della curva, nel quale le coppie neutre di γ, costituite ciascuna da punti distinti, cadono in altrettanti nodi ordinari di f; le coppie neutre costituite ciascuna da punti coincidenti, in altrettante cuspidi ordinarie di f; gli altri punti multipli di f essendo soltanto nodi ordinari.

Un modello siffatto si chiamerà *un modello proiettivo (piano) del campo γ.*

Per dimostrare il teorema assumasi sulla curva una g_n^{n-p} completa con $n > 2\pi$, la cui imagine proiettiva sarà una C^n di S_{n-p}, priva di punti multipli (1); e diciamo a_1 la corda (o tangente) di C, congiungente i punti della coppia neutra A_1 di γ. Per un punto di a_1, diverso dai punti di appoggio su C, non passa nessuna altra corda o tangente di C, se no pel piano delle due corde passerebbero ∞^{n-p-3} iperpiani, seganti su C, fuori dei punti d'appoggio delle due corde, una g_{n-4}^{n-p-3} speciale, perchè avente la dimensione $> (n-4) - p$. D'altro canto questa g_{n-4} non potrebbe essere speciale avendo l'ordine $n - 4 > 2\pi - 4 \geq 2p - 2$ (si ricordi che $\delta \geqslant 1$).

Per analoga ragione le due tangenti a C nei punti d'appoggio di A_1, se questi sono distinti, non posson incontrarsi;

---

(1) [**69**, p. 148]. Il ragionamento che stiamo per sviluppare è rapidamente accennato in [**67**, p. 352].

nè, se a_1 è tangente a C, il piano osculatore alla curva nel punto di contatto è a contatto più che tripunto.

Ne segue che la proiezione di C da un punto generico O di a_1, sopra un S_{n-p-1}, dà una curva C_1 in cui la coppia A_1 vien sostituita da un nodo o da una cuspide ordinaria O_1 di C_1, secondo che A_1 è a punti distinti o coincidenti.

Gl'iperpiani per O_1 segano altrove su C_1 una g_{n-2}^{n-p-2} completa, proiezione della serie completa segata su C dagl'iperpiani per A_1.

Ciò posto, consideriamo la corda o tangente a_2 di C_1, congiungente i punti della coppia A_2 di γ (¹). Per un punto di a_2, diverso dai punti d'appoggio, supposti distinti, non passa altra corda di C_1, se no pel piano delle due corde e per O_1, passerebbero ∞^{n-p-5} iperpiani seganti su C_1, fuori dei punti fissi, una g_{n-6}^{n-p-5} che dovrebbe essere speciale, avendo la dimensione $n - p - 5 > (n - 6) - p$ e non speciale, avendo l'ordine $n - 6 > 2\pi - 6 \geq 2p - 2$. (Si tenga presente che, nel caso che stiamo esaminando, è $\delta \geq 2$).

Per analoga ragione le due tangenti a C_1 nei punti d'appoggio di a_2 supposti distinti, non sono complanari; e, se a_2 è tangente a C_1, il piano osculatore a C_1, nel punto di contatto di a_2, ha ivi contatto tripunto. Onde la proiezione di C_1 da un punto generico di a_2, sopra un S_{n-p-2}, muta la coppia A_2 in un nodo o in una cuspide ordinaria della curva C_2 proiezione.

Così continuando si trova una curva C_3^n di S_{n-p-3}, proiezione di C_2, nella qnale le coppie A_1, A_2, A_3 son sostituite da nodi o cuspidi ordinarii; finchè si arriva ad una C_δ^n di $S_{n-p-\delta}$, in cui le coppie $A_1, A_2, \ldots, A_\delta$ son sostituite da nodi o da cuspidi ordinarii. La proiezione di questa C_δ^n da un $S_{n-p-\delta-3}$ generico ($n - p - \delta - 3 \geq p + \delta - 2$) sopra un piano, fornisce il modello f considerato.

(¹) È sottinteso che le notazioni inerenti a C si trasportan senz'altro da C alle sue proiezioni.

I nodi e le cuspidi di f, che rappresentano le coppie di γ, si chiameranno, ancora, brevemente, *coppie di* γ. Poichè, come vedremo in seguito (n. 20), le serie lineari di γ s'ottengon quasi tutte come limiti di serie lineari assolute sopra una curva piana $\bar{f}$, dello stesso ordine di f e di genere *effettivo* π per $\bar{f}$ tendente ad f, le coppie di γ si chiameranno anche *punti doppi virtualmente inesistenti* di f, mentre gli altri punti doppi di f si chiameranno *punti doppi assegnati*.

Una curva passante pei nodi assegnati di f, dicesi un'*aggiunta neutra* ad f.

Un'aggiunta ad f in senso ordinario, cioè passante per tutti i punti doppi di f, si chiama un'*aggiunta assoluta*. Essa è una particolare aggiunta neutra.

OSSERVAZIONE. — La curva C_δ^n di $S_{n-p-\delta}$, sopra ottenuta, fornisce un modello proiettivo iperspaziale del campo γ, privo di punti multipli, salvo i nodi e le cuspidi delle coppie di γ.

3. COSTRUZIONE PROIETTIVA DELLE SERIE NEUTRE DETERMINATE DA GRUPPI INDIPENDENTI DAL CAMPO. — Un gruppo G di punti d'una curva irriducibile C, non contenente alcun punto delle coppie di γ, dicesi *indipendente da* γ.

Sussiste il TEOREMA PROIETTIVO DEL RESTO:

Sul modello proiettivo f di γ, sia G un gruppo indipendente da γ; φ un'aggiunta neutra, d'ordine l, contenente G e segante ulteriormente f, fuori dei nodi assegnati, in un gruppo H, pure indipendente da γ; g una serie lineare di γ, contenente (totalmente) G. Allora φ fa parte d'un sistema lineare di aggiunte neutre di ordine l, passanti per H, che sega su f, fuori di H e dei nodi assegnati, la serie g.

Vale il ragionamento classico per le serie e le aggiunte assolute [**69**, p. 341], in quanto, in esso, a causa delle ipotesi, i punti doppi virtualmente inesistenti di f non hanno influenza alcuna.

4. Il teorema di unicità e di esistenza pei gruppi indipendenti da γ. — È importante osservare che per ogni dato gruppo G, indipendente da γ, si può sempre condurre un'aggiunta neutra φ, di ordine l, abbastanza alto, la quale soddisfaccia all'ipotesi del precedente teorema, cioè seghi f, fuori di G e dei nodi assegnati, in un gruppo H pure indipendente da γ. Basta invero ricordare che, se m è l'ordine di f, alle curve di ordine $\geq m - 3$ i punti doppi (assegnati e virtualmente inesistenti) di f presentano condizioni indipendenti, sicchè si può sempre costruire un'aggiunta di ordine $\geq m - 3$, contenente i nodi assegnati e nessun altro punto doppio di f. Aggregando a questa aggiunta tante rette generiche passanti pei singoli punti di G (se un punto di G è r-plo per esso si dovranno condurre r rette generiche), si ottiene un'aggiunta soddisfacente alle richieste condizioni.

Per la serie $\bar{g}$ segata su f, fuori dei nodi assegnati e del gruppo H, dalle aggiunte d'ordine l, i punti doppi virtualmente inesistenti costituiscono nel fatto altrettante coppie neutre, in quando ognuna di tali coppie presenta una sola condizione alle dette aggiunte e quindi ai gruppi della serie. D'altra parte ogni serie g di γ, contenente totalmente G, a norma del n. prec., appartiene a $\bar{g}$, che dunque è la più ampia e l'unica serie lineare non ampliabile di γ, contenente totalmente G. Si dirà la serie lineare neutra *completa* individuata da G. Si ottiene in tal guisa, secondo il concetto classico di Brill e Noether, il *teorema di esistenza e di unicità della serie lineare completa di* γ, *contenente totalmente un dato gruppo G di punti*, indipendente *da* γ; e si assegna il modo di costruire proiettivamente questa serie completa mediante le aggiunte neutre.

La serie completa di γ individuata da G s'indicherà con $|G|_\gamma$. Non resta escluso che $|G|_\gamma$ riducasi al solo gruppo G.

5. Estensione del teorema a gruppi qualunque. — Occorre ora indagare se una serie lineare neutra può o meno indi-

viduarsi con un gruppo dipendente da γ. Premettiamo all'uopo talune nozioni.

Sia O_1, O_2 una coppia di γ e g una serie lineare del campo. Le molteplicità λ_1 (≥ 0), λ_2 (≥ 0) di O_1, O_2 in un gruppo di g, le diremo i *caratteri* della coppia O_1, O_2 rispetto a quel gruppo. L'annullarsi di un carattere implica che il punto corrispondente non appartenga al gruppo.

I caratteri della coppia O_1, O_2 rispetto al gruppo generico della serie, si posson assumere addirittura come *caratteri della coppia rispetto alla serie*. I caratteri di O_1, O_2 rispetto ad un gruppo particolare sono non minori dei corrispondenti caratteri rispetto alla serie.

La coppia O_1, O_2 è una *coppia neutra propria* per g, se O_1, O_2 hanno caratteri nulli rispetto alla serie; è *impropria* (cioè contiene un punto fisso per la serie) se uno solo dei caratteri è nullo; è *fissa* se ambedue sono (positivi) non nulli.

Ogni gruppo di g avente nelle singole coppie di γ gli stessi caratteri che queste hanno rispetto alla serie, lo chiameremo un *gruppo ordinario*, mentre si dirà *gruppo singolare* nel caso contrario, cioè se per qualche punto delle coppie di γ il carattere relativo al gruppo è maggiore di quello relativo al gruppo generico.

Premesse queste nozioni, possiamo enunciare come segue il TEOREMA GENERALE DI UNICITÀ E DI ESISTENZA:

In un campo neutro γ esiste ed è unica la serie completa $|G|_\gamma$, che contiene (totalmente) come GRUPPO ORDINARIO *un dato gruppo G di punti della curva.*

La dimostrazione consegue facilmente dal n. prec. Poichè per ogni serie lineare di γ, contenente G come gruppo ordinario, sono fissi i punti delle coppie di γ, che figurano in G con caratteri >0, facendo astrazione, in G e in tutti i gruppi di g, da tali punti, si ottiene un gruppo $\bar{G}$ ed una serie $\bar{g}$, per la quale le coppie di γ che non hanno alcun punto in G sono neutre proprie. Diremo $\bar{\gamma}$ il campo da esse definito. Una serie g contenente totalmente G come gruppo ordinario e non ulteriormente ampliabile, dà luogo pertanto alla più ampia serie $\bar{g}$ di $\bar{\gamma}$ contenente $\bar{G}$ come gruppo ordinario; e viceversa, perchè l'aggiunta a tutti i gruppi di $\bar{g}$ dei punti che si erano tolti da G, ricostituisce senz'altro una serie del campo γ contenente totalmente G come gruppo ordinario.

Ma siccome il gruppo $\bar{G}$ è indipendente da $\bar{\gamma}$, così per esso vale il teorema di unicità e di esistenza del n. prec.; epperò vale anche in γ, nella forma enunciata, il teorema di unicità e d'esistenza.

La serie completa individuata da G in γ s'indicherà ancora con $|G|_\gamma$.

L'ipotesi che il gruppo G, con cui si vuol individuare la serie, sia, entro questa, ordinario, è essenziale per la validità del teorema. *Il teorema cade in difetto pei gruppi singolari delle serie neutre.* Ecco in proposito un esempio.

Sia in S_r una curva *normale* C ed una sua corda AB; sieno P, Q due punti generici della corda. Le serie g^{r-1} segate su C dalle stelle d'iperpiani di centri P, Q appartengono al campo neutro γ definito dalla coppia A, B; e sono complete nel campo, perchè la g^r delle sezioni iperpiane non appartiene a γ.

Le serie stesse hanno in comune la g^{r-2} segata su C dagli iperpiani per PQ e i gruppi di questa g^{r-2} son tutti singolari per le due serie. Nessuno di questi gruppi è pertanto capace d'individuare una serie di cui esso sia gruppo singolare, mentre è capace d'individuare la serie completa g^{r-2}, di cui il gruppo stesso è gruppo ordinario.

Il teorema stabilito mostra che il concetto di serie *completa* contenente G, d'una serie cioè che abbia la più alta dimensione fra le serie del campo γ contenenti G, *ha valore soltanto quando si è precisato che si vuole una serie di cui G sia gruppo ordinario*; in caso diverso la serie non è individuabile.

Così, nell'esempio precedente, una sezione iperpiana contenente i punti A, B determina ∞^1 serie complete del campo γ, che la contengono totalmente come gruppo singolare.

OSSERVAZIONE 1ª. — Se non esiste alcuna serie infinita di γ per cui G sia gruppo ordinario, si dirà che *G individua una serie* $|G|_\gamma$ *di dimensione zero, del campo* γ, conformemente all'analoga definizione che, a rimuover ogni caso d'eccezione nell'enunciato del teorema, si dà nel campo assoluto. Naturalmente non è detto che se $|G|_\gamma$ è ∞^0 lo sia pure la serie assoluta $|G|$; ma, viceversa, se questa è ∞^0 lo è certo anche $|G|_\gamma$.

OSSERVAZIONE 2ª. — L'eccezione che i gruppi singolari presentano nei riguardi del teorema d'unicità e d'esistenza ha riscontro, come si è detto nell'Introduzione, in ciò che (n. 27, Oss.), la determinazione di una serie neutra individuata da un dato gruppo di punti, equivale all'integrazione di un sistema pfaffiano i cui coefficienti presentano, nei punti delle coppie di γ, singolarità non eliminabili con cangiamenti di variabili, leciti nel dominio delle trasformazioni birazionali. Se il gruppo da cui si muove è ordinario per la costruenda serie, a quel sistema pfaffiano se ne può sostituire facilmente un altro, i cui coefficienti non hanno singolarità nei punti del gruppo iniziale; mentre questo non è possibile quando il gruppo è singolare.

OSSERVAZIONE 3ª. — Una serie subordinata ad una qualunque serie g di γ, appartiene a γ, ma naturalmente con un gruppo ordinario, che può esser gruppo singolare di g. L'intersezione di due serie lineari di γ, equivalenti nel campo assoluto, appartiene perciò a γ; mentre la loro congiungente, entro la serie del campo assoluto che le contiene, non appartiene in generale a γ. Un esempio in proposito è offerto dalle due g^{r-1} sulla curva normale C di S_r, sopra considerata: esse hanno come serie congiungente la g^r delle sezioni iperpiane di C, la quale non appartiene al campo γ cui appartengono le due g^{r-1}.

6. UN'ALTRA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI ESISTENZA. CONSEGUENZE. — Per la dimostrazione cui s'allude e che, specialmente pel metodo dimostrativo, ha la maggiore importanza

pel seguito, basta che ci riferiamo ad un gruppo G indipendente da γ, perchè, una volta acquisito il teorema in questo caso, lo si deduce in generale come al n. prec. [1].

Sia ρ la dimensione della serie assoluta completa $|G|$. Se questa appartiene a γ, il teorema è dimostrato. Tale fatto si verifica certo se $\rho=0$.

Supponiamo dunque che esista una serie neutra, almeno ∞^1, di γ, contenente totalmente G (sicchè è certo $\rho\geq 1$) e proviamo che questa serie, eventualmente completata, è unica e che la sua dimensione r soddisfa alla disuguaglianza $r\geq\rho-\delta$.

Alcune delle δ coppie di γ potranno esser automaticamente neutre per G: non tutte, perchè se no si cade nel caso $r=\rho$ già considerato. Sieno δ' le coppie rimanenti $A_1, A_2, \ldots, A_{\delta'}$, non neutre per $|G|$ ($\delta'\geqslant 1$). Sarà certo $\rho\geqslant 2$, perchè, se fosse $\rho=1$, la serie $|G|$ si ridurrebbe alla serie neutra infinita del campo γ, di cui si è supposto l'esistenza e risulterebbe di nuovo $r=\rho$. Vi sono pertanto in $|G|$ $\infty^{\rho-2}$ gruppi contenenti A_1, e soltanto $\infty^{\rho-2}$, perchè altrimenti A_1 sarebbe automaticamente neutra per $|G|$. Tra questi gruppi non figura G. Pertanto la predetta serie $\infty^{\rho-2}$ è congiunta a G, entro $|G|$, da una serie $\infty^{\rho-1}$, per la quale A_1 è coppia neutra propria. Questa serie $\infty^{\rho-1}$ è completa ed è l'unica serie completa contenente G (e necessariamente contenuta in $|G|$) avente la coppia neutra A_1, perchè i gruppi di una siffatta serie completa passanti per A_1 son compresi fra gli $\infty^{\rho-2}$ gruppi di $|G|$ passanti per A_1. Diremo $|G|_1$ la serie $\infty^{\rho-1}$ trovata.

Similmente c'è una ed una sola serie $|G|_2$, $\infty^{\rho-1}$, contenente G, rispetto alla quale è neutra A_2 ; . . . . ; una ad una sola serie $|G|_{\delta'}$, contenente G, rispetto alla quale è neutra $A_{\delta'}$.

Queste serie (iperpiani dello spazio lineare a ρ dimensioni costituito dai gruppi di $|G|$) s'intersecano per ipotesi in una serie, almeno ∞^1, contenente G, e la dimensione della loro intersezione, che appartiene a γ, ed è una serie lineare (come

[1] La dimostrazione che esponiamo è in sostanza (con qualche ampliamento) quella di pag. 358 della mia Memoria [**76**].

intersezione di iperpiani in uno spazio lineare) soddisfa alla disuguaglianza $r \geq \rho - \delta'$ (valida in senso forte se $\rho \leq \delta'$). La serie trovata è completa ed unica, perchè ogni serie di γ contenente G appartiene necessariamente a $|G|_1$, $|G|_2$, . . . , $|G|_{\delta'}$.

La disuguaglianza $r \geq \rho - \delta'$ vale anche quando $r = \rho$ e quando $r = 0$. Invero, se $r = 0$ è certo $\rho \leq \delta'$, giacchè se $\rho > \delta'$ le serie $|G|_1$, $|G|_2$, ..., $|G|_{\delta'}$ hanno in comune una serie di dimensione $\geq \rho - \delta' > 0$.

Sostituendo δ a δ' la disuguaglianza $r \geq \rho - \delta'$ viene eventualmente rafforzata.

Resta così nuovamente acquisito il *teorema di unicità e di esistenza*; e, ciò che più importa, resta altresì stabilito il modo di costruire la serie $|G|_\gamma$ come intersezione delle serie $|G|_1$, $|G|_2$, . . . , $|G|_{\delta'}$ di struttura ben definita. Inoltre:

Se G è un gruppo indipendente da γ, fra le dimensioni ρ, r delle serie complete $|G|$, $|G|_\gamma$ sussiste la disuguaglianza:

$$(1) \qquad r \geq \rho - \delta \,;$$

sicchè $|G|_\gamma$ esiste certo, come serie infinita, se $\rho > \delta$.

OSSERVAZIONE 1ª. — Della (1), che troverà applicazione nel seguito, si può anche dare la seguente dimostrazione di carattere proiettivo.

Se la serie $|G|$ è semplice, se ne faccia in S_ρ la imagine proiettiva C. Le coppie di γ dànno luogo a δ corde o tangenti di C e gl'iperpiani che passan per δ punti genericamente scelti, uno per ciascuna, sulle δ rette predette, segano su C una serie di γ, di dimensione $\geq \rho - \delta$. Questa serie coincide con $|G|_\gamma$ o è contenuta totalmente in $|G|_\gamma$ eppero $r \geq \rho - \delta$.

Se la serie $|G|$ è composta con un'involuzione ε^1_μ, due punti qualunque presi, uno per ciascuno, sui due gruppi di ε^1_μ individuati dai due punti di quella coppia, costituiscono una coppia neutra di ogni serie di γ composta colla ε^1_μ, cioè quei due gruppi dànno luogo a coppie neutre.

Sieno $\delta' \leq \delta$ le coppie di γ non appartenenti a ε^1_μ (distribuite in gruppi di μ^2 coppie del tipo indicato). Allora sopra una curva D, imagine proiettiva di ε^1_μ, si ha una serie $|\overline{G}|$ imagine di $|G|$ ed una serie $|\overline{G}|_{\overline{\gamma}}$ imagine di $|G|_\gamma$ e appartenente al campo neutro $\overline{\gamma}$, individuato da $\frac{\delta'}{\mu^2}$ coppie neutre, imagini delle δ' coppie predette. Risulta pertanto, su D, $r \geq \rho - \frac{\delta'}{\mu^2}$ e quindi a fortiori, su C, $r \geq \rho - \delta'$.

Osservazione 2ª. — Da notare che, se $\rho \geq 2$, così che $|G|_1, \ldots, |G|_{\delta'}$ hanno la dimensione $\rho - 1$, la serie G_γ ha la dimensione della intersezione di quelli fra gl'iperpiani $|G|_1, \ldots, |G|_{\delta'}$ entro lo spazio lineare $|G|$, che son linearmente indipendenti. Se questi son in numero di $\delta' - \sigma'$ $(\sigma' \geqslant 0)$ è $r = \rho - \delta' + \sigma'$. Aggiungendo a δ', σ' il numero $\delta - \delta'$ delle coppie automaticamente neutre per $|G|$, si ottiene δ e σ, e $\delta - \sigma$ viene ad essere *il numero delle coppie di* γ, *che, imposte come neutre a serie subordinate a* $|G|$, *presentano altrettante condizioni semplici indipendenti*. Così risulta

$$r = \rho - \delta + \sigma \,. \tag{2}$$

L'intero σ (≥ 0) si chiamerà *sovrabbondanza della serie neutra* $|G|_\gamma$.

Osservazione 3ª. — Il generico gruppo $\overline{G}$ di $|G|$ dà luogo ad una serie $|\overline{G}|$, che ha una dimensione $\overline{r}$ ed una sovrabbondanza $\overline{\sigma}$, le quali cangiano soltanto, per eventualmente crescere, per particolari posizioni del gruppo *ordinario* G. Le serie $|G|_\gamma$ son così, entro $|G|$, $\infty^{\rho - \overline{r}}$ e due di esse hanno eventualmente in comune soltanto gruppi singolari.

Osservazione 4ª. — *La disuguaglianza* (1) *è applicabile a gruppi dipendenti da* γ, *ai quali non sieno prescritte che coppie improprie; non è invece applicabile a gruppi ai quali sieno prescritte coppie fisse di* γ.

Invero, se G è un gruppo dipendente da γ, al quale sieno prescritti soltanto, come punti fissi, certi δ_0 punti appartenenti ad altrettante coppie di γ, ma nessuna coppia fissa di γ, a norma del n. 5, bisognerà considerare la serie assoluta individuata da G dal quale sieno tolti quei punti fissi: essa ha la dimensione $\rho_0 \geq \rho - \delta_0$. Sia H il gruppo, indipendente da γ, che la individua. A questa serie si dovrà poi applicare il procedimento di questo n. per ottenere la serie $|H|_\gamma$, che avrà così la dimensione $r \geq \rho_0 - (\delta - \delta_0) \geq \rho - \delta$, uguale alla dimensione di $|G|_\gamma$.

Se invece a G è prescritta qualche coppia fissa di γ, nulla di simile si può concludere, perchè una tal coppia impone generalmente *due* condizioni ai gruppi di $|G|$ che debban contenerla. Tolte da G le coppie fisse e ottenuto in tal guisa il gruppo H, si potrà applicare la (1) alla serie $|H|_\gamma$ che ha la stessa dimensione di $|G|_\gamma$, e scrivere $r \geq \rho_0 - \delta_0$, ove ρ_0 è però la dimensione della serie completa $|H|$ e δ_0 il numero delle coppie di γ non fisse per G.

Osservazione 5ª. — Tornando ad un gruppo G indipendente da γ, supponiamo che esistano gruppi della serie $|G|$ contenenti simultaneamente tutte le coppie di γ. Poichè la serie g da essi formata appartiene alle serie $|G|_1, |G|_2, \ldots, |G|_{\delta'}$, essa è contenuta totalmente in $|G|_\gamma$ e coincide addirittura colla serie dei gruppi di $|G|_\gamma$ passanti per le coppie di γ. La dimensione r' di g è pertanto espressa da:

$$r' = r - \delta + \xi \tag{3}$$

ove $\delta - \xi$ ($\xi \geq 0$) è il numero delle condizioni che le coppie di γ impongono ai gruppi di $|G|_\gamma$. Considerando invece la serie g come proveniente da $|G|$, coll'imposizione delle coppie di γ, il che importa pei gruppi di $|G|$ un certo numero $2\delta - \eta$ (>0) di condizioni, risulta:

$$r' = \rho - 2\delta + \eta. \tag{4}$$

Il confronto delle due espressioni di r' conduce alla relazione

$$r = \rho - \delta + \eta - \xi$$

la quale, paragonata colla (2), porge

$$\sigma = \eta - \xi; \tag{5}$$

cioè:

Se esiste effettiva nel campo assoluto la serie residua delle coppie di γ rispetto alla serie $|G|$, definita da un gruppo G indipendente da γ, la sovrabbondanza della serie neutra $|G|_\gamma$ è espressa dalla (5).

Dalla (5) segue che $\eta \geq \xi$, onde, se $\eta = 0$, è $\xi = \sigma = 0$.

7. Equivalenze in un campo neutro. Operazioni di somma e di sottrazione. — Dal teorema generale d'esistenza e d'unicità discende la seguente definizione d'equivalenza in un campo neutro:

Due gruppi di punti diconsi EQUIVALENTI *in un campo neutro quando son gruppi* ORDINARI *di una medesima serie del campo.*

Tale definizione è conseguenza necessaria di quel teorema, ove si voglia trasportare dal campo assoluto a un campo neutro la relazione d'equivalenza, conservandone la proprietà transitiva, che è quella che la rende fruttuosa. Bisogna cioè rinunciare a parlar d'equivalenza fra gruppi ordinari e gruppi singolari.

Una serie neutra completa risulta pertanto l'insieme dei gruppi equivalenti a un dato gruppo ordinario di γ e dei loro gruppi d'accumulazione (tra i quali rientrano appunto i gruppi singolari).

Fissato il concetto d'equivalenza, si presenta quasi automatica la nozione di *somma* di due serie complete $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$, individuate dai loro gruppi ordinari A, B.

Sieno $\bar{A}$, $\bar{B}$ altri due gruppi ordinari delle date serie. Poichè aggiungendo dei punti fissi a tutti i gruppi di una serie di γ, si ottiene ancora una serie di γ, sussistono in γ le equivalenze:

$$A + B \equiv A + \bar{B} \quad , \quad A + \bar{B} \equiv \bar{A} + \bar{B}$$

e, per la proprietà transitiva:

$$A + B \equiv \bar{A} + \bar{B} \, .$$

Pertanto tutte le somme di coppie di gruppi ordinari di $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$, appartengono ad una medesima serie lineare, che può individuarsi con una qualunque di esse, p. es. con $A+B$.

La serie completa $|A+B|_\gamma$ dicesi *somma* delle $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$. Essa contiene, come elementi di accumulazione, le somme di due gruppi, di cui uno almeno singolare, delle date serie; e li contiene, naturalmente in qualità di gruppi singolari. Sicchè, in definitiva, $|A+B|_\gamma$ contiene tutte le somme di coppie di gruppi di $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$, qualunque essi sieno. Ogni punto di una coppia di γ ha per $|A+B|_\gamma$ carattere uguale alla somma dei caratteri ch'esso possiede rispetto alle $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$.

In base alla nozione introdotta di somma, le equivalenze in γ posson sommarsi a membro a membro, dando luogo a nuove equivalenze.

Passiamo alla differenza di due serie $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$. Suppongasi che un gruppo ordinario A di $|A|_\gamma$ contenga un gruppo ordinario B di $|B|_\gamma$: il che richiede che il carattere d'ogni punto d'una coppia di γ rispetto ad $|A|_\gamma$ sia non minore del carattere dello stesso punto rispetto a $|B|_\gamma$. Consideriamo il gruppo $C = A - B$ e la serie $|C|_\gamma$ individuata da C come gruppo ordinario.

Dico che allora ogni altro gruppo ordinario $\bar{B}$ di $|B|_\gamma$ è contenuto in qualche gruppo ordinario $\bar{A}$ di $|A|_\gamma$ e l'insieme dei resti di $\bar{B}$ rispetto ai gruppi ordinari di $|A|_\gamma$, che contengon $\bar{B}$, sta in $|C|_\gamma$. Intanto i resti predetti, completati coi loro elementi d'accumulazione, costituiscono la serie lineare residua di $\overline{B}$ rispetto ad $|A|_\gamma$; serie di γ della quale son gruppi ordinari tutti i resti di $\overline{B}$ rispetto ai gruppi ordinari di $|A|_\gamma$ contenenti $\overline{B}$. Ora fra questi resti vi è anche C ed ogni altro gruppo ordinario $\overline{C}$ di $|C|_\gamma$, perchè $\overline{B}+C$, $\overline{B}+\overline{C}$ appartengono, in qualità di gruppi ordinari, alla serie $|B+C|_\gamma$, cioè ad $|A|_\gamma$. Dunque la serie residua sopra considerata coincide colla serie *completa* $|C|_\gamma$. Si conclude che:

Se un gruppo ordinario B di $|B|_\gamma$ è contenuto in un gruppo ordinario A di $|A|_\gamma$ e lascia come resto $C=A-B$, la serie completa $|C|_\gamma$ contiene i resti di ogni gruppo ordinario di $|B|_\gamma$ rispetto ai gruppi ordinari (anzi a tutti i gruppi) di $|A|_\gamma$.

È il *teorema invariantivo del resto* relativo a gruppi ordinari di $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$ [1]. Esso consente di definire la serie $|C|_\gamma=|A-B|_\gamma$ come *differenza* delle $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$ in quanto essa contiene tutte le differenze dei gruppi delle due serie che son effettivamente possibili.

Ogni punto d'una coppia di γ ha in $|C|_\gamma$ carattere uguale alla differenza dei suoi caratteri rispetto ad $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$.

Per un gruppo singolare B_0 di $|B|_\gamma$ passano per lo meno tanti gruppi di $|A|_\gamma$ quanti ne passano pel gruppo generico (ordinario) B. La serie dei resti contiene $|C|_\gamma$, e se è più ampia di $|C|_\gamma$, non è detto che appartenga a γ.

8. ESTENSIONE DEL CONCETTO DI DIFFERENZA TRA SERIE NEUTRE. — Che cosa può dirsi quando non esiste in $|A|_\gamma$ nessun gruppo ordinario contenente come parte un gruppo ordinario di $|B|_\gamma$, mentre vi esiste qualche gruppo $\overline{A}$ contenente come parte un gruppo $\overline{B}$ di $|B|_\gamma$, ed uno almeno dei due gruppi $\overline{A}$, $\overline{B}$ sia singolare nella rispettiva serie?

---

(1) Il teorema proiettivo del resto pei gruppi indipendenti da γ, è già stato dato nel n. 3.

Per rispondere occorre un lemma di per sè notevole:

Data una serie neutra completa $|G|_\gamma$, *ogni serie neutra completa individuata in* γ *da un gruppo* QUALUNQUE (*anche singolare*) *di* $|G|_\gamma$ *appartiene interamente a* $|G|_\gamma$.

Il teorema è un ovvio corollario del teorema di unicità e di esistenza, se il gruppo particolare $\bar{G}$, preso comunque in $|G|_\gamma$, è ordinario; ma costituisce una proprietà nuova se $\bar{G}$ è un gruppo singolare di $|G|_\gamma$, che si assume come ordinario per la costruenda serie.

Ci si riduce al solito (fatta astrazione dai punti di coppie di γ, eventualmente fissi per $|G|_\gamma$) ad una serie individuata da un gruppo indipendente da γ (alla quale poi, alla fine del ragionamento, si tornano ad aggiungere i punti fissi). Sieno, come al n. 6, $A_1, A_2, \ldots, A_{\delta'}$, le coppie di γ, non neutre per $|G|$, le altre $\delta - \delta'$ essendo automaticamente neutre per $|G|$ e quindi per ogni serie, la quale, al pari di $|G|_\gamma$ e di $|\bar{G}|_\gamma$, sia contenuta totalmente in $|G|$.

Poichè G è indipendente da γ, le $A_1, A_2, \ldots, A_{\delta'}$, son coppie neutre proprie per $|G|_\gamma$, epperò un gruppo G di $|G|_\gamma$, che contenga un punto di una di queste coppie, li cotiene ambedue. Sieno p. es. A_1, A_2, A_3 le coppie contenute in $\bar{G}$: le altre essendone completamente fuori.

Allora $|G|_\gamma$ appartiene ad ognuna delle serie $|G|_1$, $|G|_2$, $|G|_3$ del n. 6, che contengon rispettivamente tutti i gruppi di $|G|$ passanti per A_1, A_2, A_3. Siccome poi $\bar{G}$ non contiene le coppie $A_4, \ldots, A_{\delta'}$ con esse si posson definire, in relazione a queste coppie, le serie $|\bar{G}|_4, \ldots, |\bar{G}|_{\delta'}$ analoghe alle $|G|_4, \ldots, |G|_{\delta'}$ definite al n. 6 a partire dal gruppo G; e alle serie $|\bar{G}|_4, \ldots, |\bar{G}|_{\delta'}$ appartiene ogni serie di $|G|$, che contenga il gruppo $\bar{G}$ ed abbia come neutre le coppie $A_4, \ldots, A_{\delta'}$. Pertanto le serie $|G|_\gamma$, $|\bar{G}|_\gamma$ stanno nell'intersezione delle $|G|_1$, $|G|_2$, $|G|_3$, $|\bar{G}|_4, \ldots, |\bar{G}|_{\delta'}$.

Poichè inoltre ogni serie di γ contenente G e $\bar{G}$ sta necessariamente in $|G|_1, |G|_2, |G|_3, |\overline{G}|_4, \ldots\ldots, |\overline{G}|_\delta$, l'intersezione di queste serie, che è una serie *lineare* di γ, è completa. E siccome essa contiene G, gruppo indipendente da γ, pel teorema di unicità, coincide con $|G|_\gamma$. La conclusione è, come volevasi, che $|\overline{G}|_\gamma$ sta in $|G|_\gamma$.

Dal teorema dimostrato scende il corollario:

Il gruppo $\overline{B}$ (ordinario o singolare) della serie $|B|_\gamma$ sia contenuto in qualche gruppo di $|A|_\gamma$ e sia $\overline{A}$ il generico gruppo (ordinario o singolare) di $|A|_\gamma$ passante per $\overline{B}$. Allora i gruppi della serie completa $|\overline{A} - \overline{B}|_\gamma$ appartengon tutti alla serie dei resti di $\overline{B}$ rispetto ad $|A|_\gamma$.

Non è però detto che la serie $|\overline{A} - \overline{B}|_\gamma$ esaurisca la serie di tali resti, perchè quest'ultima può non appartenere a γ. Così, se una serie $|G|_\gamma$ ha una sola coppia neutra propria A_1 (il campo γ essendo ridotto a questa coppia), i resti di A_1, rispetto a $|G|_\gamma$ costituiscono una serie che non appartiene a γ, ma il generico di essi definisce una serie completa, che giace tutta nella predetta serie di resti.

L'esistenza della differenza $|\overline{A} - \overline{B}|_\gamma$, quando $\overline{A}, \overline{B}$ non sieno ambedue ordinari in $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$, non implica affatto l'esistenza della $|A - B|_\gamma$. È una *differenza singolare* cui dànno origine le $|A|_\gamma$, $|B|_\gamma$.

Abbiamo segnalato questo tipo di differenze singolari, non perchè abbiano in seguito importanza, ma per illuminare più a fondo la natura delle questioni che si presentano nella teoria delle serie neutre.

Ecco un altro corollario del teorema dimostrato:

I gruppi d'una serie neutra completa $|G|_\gamma$ individuata da un gruppo indipendente da γ, i quali contengon talune coppie di γ, formano nel campo una serie neutra completa (il cui gruppo ordinario contiene come fissi i punti di quelle coppie).

La serie cui s'allude è completa, perchè coincide con quella individuata da un gruppo singolare di $|G|_\gamma$, che è poi il generico dei gruppi di $|G|_\gamma$, che contengon le coppie fissate.

9. Applicazione alle serie segate dalle aggiunte neutre. — Riferiamoci ad un modello proiettivo piano f, d'ordine m, della data curva ed osserviamo che il teorema proiettivo del resto consente agevolmente di affermare che le aggiunte neutre ad f di ordine $l \geq m-3$ segano su f, fuori dei nodi assegnati, una serie neutra completa.

Invero, dal momento che *tutti* i punti doppi di f impongono alle curve di ordine $l \geq m-3$, che debban contenerli, condizioni indipendenti, è sempre possibile costruire un'aggiunta neutra di ordine l, la quale stacchi su f, fuori dei nodi assegnati, un gruppo G *indipendente da* γ. E ciò permette senz'altro di applicare il teorema proiettivo del resto e di trarne la conclusione.

Diverso è il caso per le aggiunte neutre di ordine $l \leq m-4$. È vero infatti che la serie segata su f, fuori dei nodi assegnati, dalle aggiunte neutre di ordine $m-4$ (supposte esistenti) si deduce dalla serie segata dalle aggiunte neutre di ordine $m-3$, imponendo ai suoi gruppi di passare per m punti generici allineati (con che le aggiunte di ordine $m-3$ si spezzano nella retta dei punti e in aggiunte d'ordine $m-4$); ma può accadere che in conseguenza del passaggio imposto le aggiunte di ordine $m-4$ contengano qualcuno dei punti doppi virtualmente inesistenti di f ed allora il generico gruppo da esse staccato fuori dei nodi assegnati, non è più indipendente da γ e non si può senz'altro concludere.

Ma qui soccorre il primo dei corollari segnalati nel n. prec. Chiamato invero H il gruppo degli m punti allineati, poichè esiste qualche G della serie segata dalle aggiunte d'ordine $m-3$, che passa per H, la serie completa $|G-H|_\gamma$ è tutta contenuta nella serie dei resti di H rispetto a $|G|_\gamma$; essa coincide colla serie segata dalle aggiunte d'ordine $m-4$, fuori dei nodi assegnati, anche se il generico gruppo della serie contiene qualche coppia di γ.

Similmente si scende dall'ordine $m-4$ all'ordine $m-5$ e così via e si conclude che:

Le aggiunte neutre di un ordine qualunque segano sopra un modello proiettivo del campo, fuori dei nodi assegnati, una serie neutra completa.

Osservazione. — Secondo il teorema proiettivo del resto resto per costruire la serie lineare neutra $|G|_\gamma$, individuata su f da un gruppo G indipendente da γ, occorre condurre per G una aggiunta neutra φ di un ordine l così alto, ch'essa stacchi su f, fuori dei nodi assegnati, un gruppo H, pure indipendente da γ.

Interessa invero esaminare pel seguito che cosa si può dire di un'aggiunta neutra φ di ordine l, passante per G, la quale seghi ulteriormente f, fuori dei nodi assegnati, *in un gruppo H contenente qualche punto doppio virtualmente inesistente,* cioè qualche coppia di γ. Includiamo i punti doppi virtualmente inesistenti per cui φ passa, fra i punti doppi assegnati, definendo mediante i punti doppi virtualmente inesistenti, che rimangono, un campo neutro γ' (il campo assoluto se contiene addirittura tutti i punti doppi, virtualmente inesistenti, cioè se φ è un'aggiunta assoluta). Sia H' il resto di H, dopo toltene le coppie di γ, che ad esso appartengono. Considerata φ come un'aggiunta neutra del campo γ', le aggiunte neutre d'ordine l di questo campo, passanti per H', che è indipendente da γ', segano su f, fuori dei punti doppi assegnati e del gruppo H', la serie completa $|G|_{\gamma'}$, che (n. 1) contiene totalmente $|G|_\gamma$.

In conclusione, anche quando φ sega su f, fuori di G e dei nodi assegnati, un gruppo H contenente alcune coppie di γ (o tutte), la serie $|G|_\gamma$ è segabile con aggiunte neutre d'ordine l, del campo γ, passanti per H; ma non sono in generale tutte queste aggiunte che staccano $|G|_\gamma$, sibbene un sistema lineare ad esse subordinato.

Ciò è del resto ben d'accordo col fatto che se un'aggiunta neutra φ di ordine l, segante su f, fuori di G e dei nodi assegnati, un gruppo indipendente da γ, tende ad un'aggiunta neutra $\overline{\varphi}$, dello stesso ordine, segante un gruppo $\overline{H}$, che contenga alcuni nodi virtualmente inesistenti di f, il sistema lineare delle φ per $\overline{H}$, cresce generalmente di dimensione, in quanto i punti del gruppo presentano in generale alle aggiunte neutre d'ordine l meno condizioni del gruppo H.

10. Gruppi e serie virtuali neutre. — Se A, B son gruppi di γ, il simbolo $A - B$ denota un *gruppo virtuale* di γ (in particolare un gruppo effettivo). Due gruppi virtuali $A - B$, $A_1 - B_1$, di γ, diconsi *equivalenti* e si scrive

$$A - B \equiv A_1 - B_1 \quad (\text{in } \gamma),$$

se:

$$A + B_1 \equiv A_1 + B \quad (\text{in } \gamma).$$

Anche l'equivalenza fra gruppi virtuali è transitiva; cioè se

$$A - B \equiv A_1 - B_1 \text{ e } A_1 - B_1 \equiv A_2 - B_2 \quad (\text{in } \gamma),$$

risulta

$$A - B \equiv A_2 - B_2 \quad (\text{in } \gamma).$$

Invero, da

$$A + B_1 \equiv A_1 + B, \quad A_1 + B_2 \equiv A_2 + B_1 \quad (\text{in } \gamma),$$

sommando si trae:

$$A + B_2 \equiv A_2 + B, \text{ cioè: } \quad A - B \equiv A_2 - B_2 \quad (\text{in } \gamma).$$

In conseguenza dell'introduzione dei gruppi virtuali, le equivalenze fra gruppi (effettivi o virtuali), considerate nel campo γ, posson comunque sommarsi o sottrarsi a membro a membro.

La totalità dei gruppi virtuali equivalenti a un dato, non è nè algebrica nè dimensionale.

Osservazione. — È superfluo avvertire che come carattere d'un punto d'una coppia di γ rispetto ad un dato gruppo virtuale $A - B$, si deve assumer la differenza fra i caratteri che presentano in quel punto i gruppi effettivi A, B.

Naturalmente può accadere che il carattere di $A - B$ in taluno di quei punti sia un intero negativo.

La serie canonica e il teorema di Riemann-Roch in un campo neutro

11. Serie lineari neutre di ordine $n > 2\pi - 2$. — Dobbiamo ora cercar di determinare la dimensione di una serie neutra completa, analogamente a quanto si fa nella teoria classica nei riguardi delle serie assolute.

Un primo risultato preciso si può facilmente ottenere per le serie lineari neutre di ordine $n > 2\pi - 2$, π essendo il genere virtuale della curva sostegno C.

Sia G un gruppo di $n > 2\pi - 2$ punti, indipendenti da γ e $A_1, A_2, \ldots, A_\delta$ sieno ancora le coppie di γ; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\delta-1}$ i campi neutri definiti rispettivamente dalle coppie A_1; A_1, A_2; ... ; $A_1, A_2, \ldots, A_{\delta-1}$.

Per $\delta \geq 1$, in conseguenza della $n > 2\pi - 2$, risulta $n > 2p$; epperò la serie assoluta $|G|$, di dimensione $\rho = n - p > p \geq 1$, non ha coppie neutre; onde la serie assoluta $|G - A_1|$ ha la dimensione $p - 2 \geq 0$ e la serie congiungente, entro $|G|$, il gruppo G con $|G - A_1| + A_1$ (1), cioè la serie $|G|_\gamma$, ha la dimensione $\rho - 1 \geq 1$.

Per $\delta \geq 2$ è $n > 2p + 2$. La serie $|G - A_1|$, avendo l'ordine $n = 2 > 2p$, non ha coppie neutre e siccome essa consta, astrazione fatta da A_1, dei gruppi di $|G|_{\gamma_1}$ passanti per A_1, così $|G|_{\gamma_1}$

(1) Questo simbolo denota manifestamente la serie dei gruppi G colla coppia fissa A_1.

non può avere coppie neutre accidentali (cioè diverse da A_1). Pertanto i gruppi di $|G|_{\gamma_1}$ passanti per A_2 formano una serie di dimensione $(\rho - 1) - 2 = n - p - 3 > p - 1 \geq 0$ e la serie congiungente G con $|G - A_2|_\gamma + A_2$ cioè la serie neutra $|G|_{\gamma_2}$, ha la dimensione $\rho - 2 \geq 1$.

Così proseguendo, si trova, se $n > 2p + 2(\delta - 1)$, che la serie $|G|_\gamma$ ha la dimensione $\rho - \delta \geq 1$; e, se $n > 2p + 2\delta$, ch'essa non ha coppie neutre accidentali. In conseguenza:

In un campo neutro γ, sopra una curva di genere virtuale π, ogni serie lineare neutra completa di ordine $n > 2\pi - 2$, individuata da un gruppo indipendente dal campo, ha la dimensione $r = n - \pi$; e, se $n > 2\pi$, essa non ha coppie neutre accidentali (e quindi è semplice e priva di punti fissi).

Una serie neutra completa di ordine n e di dimensione $n - \pi$ si dirà fin da ora *non speciale* (ved. il successivo n. 17).

12. Un'altra dimostrazione del teorema proiettivo del resto. — Abbiamo premesso il teorema del n. prec., il quale rientra in altri più generali, che vedremo poi, perchè esso consente di stabilire preliminarmente il teorema proiettivo del resto, senza farlo derivare dal classico teorema algebrico $A f + B \varphi$: il che può esser utile in un'esposizione rapida e geometrica della teoria.

A norma del n. 9 basta invero mostrare soltanto che le aggiunte neutre al solito modello proiettivo f, quando il loro ordine l sia abbastanza grande, segano su f, fuori dei nodi assegnati, una serie neutra completa, perchè da ciò si trae la completezza della serie segate dalle aggiunte neutre di ogni ordine, donde scende infine, come immediato corollario, il teorema proiettivo del resto.

Ora le aggiunte neutre di ordine $l > m - 3$ segano su f, fuori dei nodi assegnati, una serie il cui gruppo generico è indipendente da γ e il cui ordine è maggiore di $2\pi - 2$. Onde la dimensione della serie completa da esse staccata vale

$r = n - \pi$. D'altro canto un facile computo mostra che, essendo indipendenti le condizioni di passaggio offerte dai nodi assegnati, la dimensione della serie segata dalle aggiunte neutre di ordine $l > m - 3$ vale esattamente $n - \pi$. Pertanto questa serie è completa.

13. LA SERIE CANONICA DI UN DATO CAMPO NEUTRO. — Vale il teorema:

Sopra una curva C di genere virtuale π, in un dato campo neutro γ, esiste una ed una sola serie lineare $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ appartenente al campo.

Sieno $A_1, A_2, \ldots, A_\delta$ le coppie di γ e p sia il genere effettivo ($= n - \delta$) di C. Liberiamoci anzitutto dall'ipotesi $p = 0$, che si presenta a sè. Consideriamo all'uopo in $S_{2\delta-2}$, come imagine della curva data, una curva C razionale normale d'ordine $2\,\delta - 2$. Le corde o tangenti di C, che contengon le coppie di γ, son a $\delta - 1$ a $\delta - 1$ linearmente indipendenti, perchè $2\,\delta - 2$ punti scelti comunque su C son sempre indipendenti. Esiste pertanto uno ed uno solo $S_{\delta-2}$ ad esse appoggiato (1) e gli iperpiani per questo $S_{\delta-2}$ staccano su C una $g^{\delta-1}_{2\delta-2}$ per la quale son neutre le coppie considerate. Viceversa, una tal serie deve essere staccata da un sistema $\infty^{\delta-1}$ di iperpiani, cioè dagl'iperpiani passanti per un certo $S_{\delta-2}$ e siccome le coppie date devon esser neutre, le corde o tangenti che le congiungono debbon appoggiarsi a tale $S_{\delta-2}$ Si ricade così nella serie precedentemente trovata, che dunque è unica.

(1) È questa una proprietà elementare, che rientra in formule generali di geometria numerativa, concernenti il problema degli spazi secanti. Nel caso speciale la proprietà si dimostra subito. Dette invero $a_1\ a_2, \ldots, a_\delta$ le rette di cui trattasi ed M il punto ove a_1 incontra l'iperpiano congiungente $a_2, \ldots, a_\delta$, M è fuori degli spazi congiungenti a $\delta-2$ a $\delta-2$ le $a_2, \ldots, a_\delta$ perchè altrimenti uno di questi spazi s'appoggerebbe ad a_1 e si avrebbe un gruppo di $\delta-1$ rette a dipendenti. Perciò [**5**, p. 17] esiste uno ed uno solo $S_{\delta-2}$ per M appoggiato ad $a_2, \ldots, a_\delta$. Viceversa, un $S_{\delta-2}$ appoggiato ad $a_1, \ldots, a_\delta$, avendo $\delta-1$ dei suoi punti indipendenti nello $S_{2\delta-3}$ congiungente $a_2, \ldots, a_\delta$, giace in $S_{2\delta-3}$ e quindi coincide col precedente.

Esaminiamo l'ipotesi $p \geq 1$. Allora è $\pi - 1 \geq \delta$ e, se esiste una $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ di γ, i gruppi di questa serie passanti per le δ coppie neutre, tolte queste coppie, formano una g_{2p-2} di dimensione $\geq \pi - 1 - \delta = p - 1$ epperò, necessariamente, di dimensione $p - 1$; cioè tali resti costituiscon la g_{2p-2}^{p-1} canonica del campo assoluto. La serie di cui si vuol dimostrare l'esistenza va dunqne cercata, nel campo assoluto, fra le serie totalmente contenute nella $g_{2p-2+2\delta}^{p-2+2\delta}$, completa, somma della g_{2p-2}^{p-1} canonica e del gruppo $A_1 + \ldots + A_\delta$.

Muoviamo per ciò da questa $g_{2p-2+2\delta}^{p-2+2\delta}$. Le δ coppie di γ presentano ai suoi gruppi $2\delta - 1$ condizioni indipendenti, invece di 2δ, perchè il resto del gruppo $A_1 + \ldots + A_\delta$ rispetto alla serie stessa è la g_{2p-2}^{p-1} canonica. Pertanto se $\delta = 1$, la serie di cui si parla, che è una g_{2p}^{p} appartiene già a γ; ed essa è unica, in quanto ogni g_{2p}^{p} colla coppia neutra A_1, dà come resto, rispetto ad A_1, la g_{2p-2}^{p-1}.

Essendo così dimostrato il teorema per $\delta = 1$, potremo supporre $\delta \geq 2$. È facile allora vedere che $\delta - 1$ qualunque delle coppie A presentano ai gruppi della $g_{2p-2+2\delta}^{p-2+2\delta}$ esattamente $2\delta - 2$ condizioni indipendenti. Invero, il resto del gruppo $A_2 + \ldots + A_\delta$, rispetto alla predetta serie, è una g_{2p} completa e quindi di dimensione p. Inoltre per essa la coppia A_1 è neutra.

Ciò premesso, dato che la $g_{2p-2+2\delta}^{p-2+2\delta}$ ha l'ordine $n > 2p$, la sua imagine proiettiva sarà una curva C priva di punti multipli in $S_{p-2+2\delta}$. Le rette (corde o tangenti di C) che congiungono le coppie di γ, per quanto precede, stanno in un $S_{2\delta-2}$ e sono a $\delta - 1$ a $\delta - 1$ indipendenti. Esiste pertanto uno ed un solo $S_{\delta-2}$ ad esse appoggiato. Gl'iperpiani per tale $S_{\delta-2}$ segan su C una $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ di γ. Così è dimostrata l'esistenza di una tale $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$.

Bisogna dimostrarne l'unicità. Essa è intanto necessariamente unica entro la $g_{2p-2+2\delta}^{p-2+2\delta}$. Invero, una $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ di γ, formata da sezioni iperpiane di C, è ivi segata dagli iperpiani passanti per un $S_{\delta-2}$, che deve appoggiarsi alle solite δ rette, perchè le coppie di γ son neutre per quella serie. D'altronde già abbiamo provato che una $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ di γ appartiene necessariamente alla $g^{p-2+2\delta}_{2p-2+2\delta}$, epperò essa è unica non soltanto entro questa serie, ma entro γ.

La $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ di γ, di cui si è così dimostrata l'esistenza, chiamasi la *serie canonica (neutra) del campo.*

14. Costruzione proiettiva della serie canonica d'un campo neutro. Conseguenze. — La costruzione cui s'allude si ottiene agevolmente sul solito modello proiettivo piano f, di ordine m, del campo γ. Precisamente:

Le aggiunte neutre d'ordine $m - 3$ ad f segano sulla curva, fuori dei nodi assegnati, la $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ canonica.

Invero, siccome tutti i punti doppi di f presentan condizioni indipendenti alle curve di ordine $m - 3$, una generica aggiunta neutra φ d'ordine $m - 3$, non passa per alcuno dei punti doppi virtualmente inesistenti di f. Un facile computo mostra dopo ciò che la serie neutra (necessariamente completa, n. 9) segata su f, fuori dei punti doppi assegnati, è una $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, la quale, a causa del teorema del n. prec., coincide colla serie canonica del campo.

Sul modello f si dimostra subito che:

La serie canonica del campo γ non ha punti fissi.

Infatti, la $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ di γ non può aver come fisso un punto infinitamente vicino ad un nodo assegnato di f o comunque distinto dai punti doppi virtualmente inesistenti di f, perchè tale punto risulterebbe fisso anche per la g^{p-1}_{2p-2} canonica assoluta; nè può aver come fisso un punto di una coppia di γ, perchè la generica φ non passa per alcun punto doppio virtualmente inesistente di f.

Ne segue il corollario:

Ogni gruppo ordinario della serie canonica di γ è indipendente dal campo.

15. Quand'è che la serie canonica d'un campo neutro è composta. — Per rispondere alla questione di cui vogliamo occuparci in questo n. premettiamo il lemma:

Se la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ canonica di γ possiede una coppia neutra accidentale X, Y, la curva sostegno è iperellittica e X, Y è una coppia indipendente da γ, appartenente alla g_2^1 della curva.

La coppia X, Y, essendo accidentale, è distinta dalle coppie di γ; ma ciò non esclude che X, Y possan esser punti di due distinte coppie di γ o che uno dei punti di X, Y possa appartenere ad una coppia di γ e l'altro essere indipendente dal campo.

Rigettiamo anzitutto la prima eventualità. Nell'ipotesi contraria esisterebbero infatti un paio di coppie di γ presentanti complessivamente una sola condizione ai gruppi canonici neutri, mentre si sa che le coppie di γ presentano ai gruppi stessi δ condizioni indipendenti (n. prec.).

Anche la seconda eventualità è da escludersi. Invero, se p. es è X indipendente da γ, poichè tutte le φ neutre per Y passano per X, così è delle φ assolute: onde X sarebbe fisso per la g_{2p-2}^{p-1} di f, giacchè le φ assolute passan già automaticamente per Y.

In conclusione X, Y è indipendente da γ ed essendo coppia neutra per la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, essa risulta neutra (appunto perchè indipendente da γ, cioè distinta dai punti doppi inesistenti di f) anche per la g_{2p-2}^{p-1} di f. Ne deriva che f è iperellittica e che X, Y è una coppia della g_2^1 di f.

Se $p=1$ il ragionamento precedente non perde significato, perchè non può esistere in tal caso nè un punto fisso nè una coppia neutra, per le φ assolute, fuori dei punti doppi di f, in quanto l'unica φ esistente non sega f fuori dei punti doppi.

Consegue senz'altro dal lemma che la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ di f può esser composta soltanto quando f è iperellittica: la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ è allora composta colla g_2^1 di f.

È anche facile concludere che, quando quest'eventualità si verifica, ognuna delle coppie di γ appartiene alla g_2^1. Invero, se X, Y è una coppia qualunque di γ, il coniugato di X nella

g_2^1 non può esser un punto Z distinto da Y, se no la coppia Y, Z sarebbe neutra per la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, in quanto per essa passerebbero gli $\infty^{\pi-2}$ gruppi canonici neutri per X, Y e per X, Z; onde Y, Z sarebbe coppia neutra accidentale della $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$, non appartenente alla g_2^1 : contrariamente al lemma.

Viceversa, se f è iperellittica e le coppie di γ appartengono alla g_2^1 (cioè la g_2^1 è una serie di γ), indicata con R la curva razionale sulla quale f viene rappresentata doppiamente mediante la g_2^1, alla $g_{\pi-1}^{\pi-1}$ dei gruppi di $\pi - 1$ punti di R risponde su f la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ di γ e la serie canonica neutra risulta così composta colla g_2^1. In conclusione:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ canonica d'un campo neutro γ sia composta, è che la curva sostegno sia iperellittica nel campo γ. In tal caso la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ canonica è composta colla g_2^1 del campo.

Il significato della frase « la curva è iperellittica in γ » è trasparente. Vuol dire non soltanto che f è iperellittica (nel campo assoluto), ma che la g_2^1 appartiene a γ. Se f è iperellittica e la g_2^1 non appartiene a γ, la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ canonica non è composta.

Il lemma permette altresì di dimostrare che:

Quando la serie canonica di γ non è composta essa non possiede alcuna coppia neutra accidentale.

Sia infatti X, Y una coppia neutra accidentale della $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$. Pel lemma essa è indipendente da γ, la curva sostegno è iperellittica e X, Y è una coppia della g_2^1. Ora la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ può considerarsi anche come serie canonica del campo γ' ottenuto da γ col sostituire ad una A_1 delle sue coppie la X, Y, lasciando immutate le altre $\delta - 1$. Rispetto a γ' diviene allora accidentale la coppia A_1 e come tale, pel lemma, appartiene alla g_2^1. Analoga conclusione vale per tutte le coppie di γ. Duuque la g_2^1 appartiene a γ e la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ è composta colla g_2^1. Perciò se la $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ è semplice, non può possedere nessuna coppia neutra accidentale.

Se si fa *l'imagine proiettiva della* $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ *canonica,* quando questa non è composta, si ottiene pertanto una curva C, di ordine $2\pi - 2$, dello $S_{\pi-1}$, dotata di δ punti doppi (nodi o cuspidi ordinari) imagini delle coppie di γ e ulteriormente priva di punti multipli.

16. Teorema di riduzione in un campo neutro. — Per determinare la dimensione di una serie lineare neutra completa, procediamo come nel caso classico delle serie assolute, estendendo anzitutto al campo neutro γ il teorema di riduzione. Ci riferiamo, ora ed in seguito (salvo esplicito avviso in contrario), alle serie individuate da gruppi indipendenti da γ, perchè a questo caso ci si riconduce subito, senza alterare la dimensione da valutarsi (n. 5). Il teorema di riduzione nel campo γ si enuncia come segue:

Sia G un gruppo di punti, indipendente da γ, pel quale passi un gruppo canonico neutro (ordinario o singolare) K, e P un punto della curva, fuori di K, indipendente pur esso da γ: allora per la serie neutra completa $|G+P|_\gamma$ il punto P è fisso.

Ragioniamo al solito sul modello proiettivo piano f, d'ordine m, della data curva e φ sia l'aggiunta neutra d'ordine $m - 3$, che stacca su f, fuori dei punti doppi assegnati, il gruppo K. Quest'aggiunta non passerà per alcuno dei punti doppi virtualmente inesistenti, se K è ordinario; conterrà qualcuno di tali punti, se K è singolare.

Conducasi per P una retta generica a e sia L il gruppo degli $m - 1$ punti ov'essa sega ulteriormente f. La serie neutra completa $|G+P|_\gamma$ è staccata su f da tutte le aggiunte neutre di ordine $m - 2$ che passano pel gruppo $(K - G) + L$, se K è ordinario; da un sistema lineare di aggiunte d'ordine $m - 2$ passanti per $(K - G) + L$ e contenute in un sistema eventualmente più ampio di aggiunte di ordine $m - 2$, neutre rispetto al campo definito dai punti doppi virtualmente inesistenti pei quali φ non passa, se il gruppo K è singolare (n. 9, Oss.).

Ma nell'un caso e nell'altro le aggiunte neutre che staccano su f, fuori dei punti doppi assegnati e del gruppo $(K-G)+L$, i gruppi di $|G+P|_\gamma$ avendo $m-1$ punti allineati, contengon tutte come parte la retta a; epperò P è fisso per $|G+P|_\gamma$.

Il ragionamento (salvo le debite lievi varianti), è il medesimo di quello (di BRILL e NOETHER) valevole per serie lineari assolute.

17. IL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH IN UN CAMPO NEUTRO. — Per giungere a questo teorema non c'è ormai che da ripercorrere la dimostrazione classica relativa alle serie assolute, valendosi del precedente teorema di riduzione ([1]).

Definiamo anzitutto l'*indice di specialità neutro* i di un gruppo G di punti, indipendente da γ, come il numero dei gruppi canonici neutri (ordinari o singolari) indipendenti, passanti per G. Se $i=0$, cioè se G non sta in alcun gruppo canonico neutro (pel che è necessario, ma non sufficiente, che non stia in alcun gruppo canonico assoluto) il gruppo si dirà *non speciale* nel campo neutro γ, *speciale*, nel caso contrario.

Dicansi n ed r l'ordine e la dimensione della serie completa neutra $|G|_\gamma$. Proviamo in primo luogo che sussiste la disuguaglianza:

$$r \geq n - \pi .$$

Tale disuguaglianza può stabilirsi con un facile computo, segando la serie con aggiunte neutre di ordine l conveniente passanti pel resto (indipendente da γ) di uno generico dei suoi gruppi, rispetto alle aggiunte neutre di quell'ordine; ma è più semplice dedurre addirittura la disuguaglianza dalla (1) del n. 6, tenuto conto che $\rho \geq n - p$ e che $\pi = p + \delta$.

Dimostriamo ora che, se $r > n - \pi$, il gruppo G è certamente speciale in γ. Il caso $n \leq \pi - 1$ (nel quale è certo

([1]) [**69**, p. 156].

$r > n - \pi$) si esaurisce subito, perchè per $\pi - 1$ punti di f passa sempre qualche gruppo canonico neutro. Si può dunque supporre $n - \pi \geqslant 0$ epperò $r > 0$ e ammettere inoltre la proprietà asserita per le serie neutre di ordine $n - 1$, a gruppo ordinario indipendente da γ, e dimostrarla per le serie neutre di ordine n.

Sia dunque una $|G|_\gamma$ con $r > n - \pi \geqslant 0$ e P sia un punto di G non fisso per la serie. Vi è certo in G un tal punto, se no sarebbe $r=0$. La serie dei resti di P rispetto a $|G|_\gamma$, tra i quali c'è il gruppo $H=G-P$, indipendente da γ, appartiene a γ ed ha l'ordine $n - 1$ e la dimensione $r - 1$. Essendo per essa $r - 1 > (n - 1) - \pi$, il gruppo H, per la proprietà ammessa, è speciale. Sia K un gruppo canonico neutro contenente H. Un tal gruppo contiene in conseguenza P, cioè tutto il gruppo $G=H+P$, perchè, in caso contrario, pel teorema di riduzione, il punto P sarebbe fisso per $|G|_\gamma$. Dunque $|G|_\gamma$ è speciale, secondo quanto si è asserito.

Siccome è sempre, come abbiamo premesso, $r \geq n - \pi$, la conclusione può enunciarsi in forma negativa dicendo che, se per G è $i = 0$, la serie $|G|_\gamma$ ha la dimensione $r = n - \pi$.

Si vuol ora provare che, se G ha l'indice di specialità neutro i, è $r = n - \pi + i$. Poichè il teorema è vero per $i = 0$, potremo dimostrarlo per induzione da $i - 1$ ad i, supponendo $i \geq 1$. Per G passano dunque, secondo l'ipotesi, i gruppi canonici neutri indipendenti e di questi ne passano $i - 1$ (≥ 0) per un punto generico P della curva; onde, a cagione del teorema ammesso, la serie $|G+P|_\gamma$, individuata dal gruppo $G+P$, indipendente da γ e di indice di specialità neutro $i - 1$, ha la dimensione $n + 1 - \pi + i - 1 = n - \pi + i$. E siccome esiste qualche gruppo canonico neutro passante per G, ma non per P, a norma del teorema di riduzione, la serie $|G+P|_\gamma$ ha il punto fisso P; sicchè essa ha la stessa dimensione r di $|G|_\gamma$. Si conclude pertanto col seguente *teorema di* RIEMANN-ROCH *per le serie neutre*:

La dimensione della serie lineare neutra completa individuata da un gruppo G di n punti, indipendente dal campo neutro fissato γ, di genere virtuale π, è espressa da

$$r = n - \pi + i \,, \tag{6}$$

ove i denota l'indice di specialità neutro di G.

Osservazione. — Se esiste almeno un gruppo canonico neutro ordinario passante per G, il generico dei gruppi canonici neutri contenenti G è ordinario ed $i - 1$ esprime in tal caso *la dimensione del resto di G rispetto alla serie canonica neutra.*

Se invece ogni gruppo canonico neutro contenente G è singolare, la differenza fra la serie canonica neutra $|K|_\gamma$ e la serie $|G|_\gamma$ non esiste nel campo neutro, ma esiste come differenza singolare (n. 8).

Il teorema di Riemann-Roch ci dice che l'indice di specialità neutro di un gruppo G della serie $|G|_\gamma$, il quale sia indipendente da γ, non muta al variar di G nella serie, purchè il gruppo non divenga singolare: il qual fatto consegue pure dal teorema invariantivo del resto se esiste effettiva nel campo neutro la serie $|K - G|_\gamma$.

L'indice di specialità neutro di un gruppo della data serie, indipendente da γ, si potrà perciò anche chiamare *indice di specialità neutro della serie.*

18. Indice di specialità assoluto; sua relazione coll'indice di specialità neutro e colla sovrabbondanza della serie. — Oltre all'indice di specialità neutro i di una serie $|G|_\gamma$ a gruppo ordinario indipendente da γ, si può considerare l'*indice di specialità assoluto j*, che è il consueto indice di specialità di G, in quanto si considerino le serie nel campo assoluto, con riferimento dunque all'ordinaria serie canonica. E questo indice non varia neppure quando G diviene singolare entro $|G|_\gamma$, perchè trattasi di un gruppo variabile in una serie contenuta totalmente in una serie lineare assoluta.

È facile trovare una notevole relazione fra i, j e la sovrabbondanza σ (n. 6, Oss. 2ª) di $|G|_\gamma$. Invero, dalla (2) del n. 6, tenuto conto che

$$\rho = n - p + j$$

segue:

$$r = n - \pi + j + \sigma,$$

e, confrontando colla (6):

$$i = j + \sigma, \tag{7}$$

cioè:

L'indice di specialità neutro d'una serie neutra è la somma dell'indice di specialità assoluto e della sovrabbondanza della serie.

Ne deriva che *una serie speciale neutra è generalmente sovrabbondante,* nel senso che, generalmente, se è speciale, pel suo gruppo ordinario (indipendente da γ) passa un gruppo canonico neutro ordinario e quindi è certo $i > j$.

La sovrabbondanza di una serie speciale neutra è nulla soltanto nel caso eccezionale in cui pel gruppo ordinario della serie non passa alcun gruppo canonico neutro ordinario.

Una serie non speciale è sempre non sovrabbondante, perchè, essendo $i = 0$ son nulli j e σ.

OSSERVAZIONE. — Si ricordi (n. 6, Oss. 5ª) che se esistono gruppi della serie assoluta $|G|$ contenenti le coppie di γ, e queste presentano ai gruppi di $|G|$ esattamente 2δ condizioni, la serie $|G|_\gamma$ non può esser sovrabbondante. Per serie siffatte, anche se speciali, il caso generale è dunque della non sovrabbondanza.

Se $\delta = 1$ una serie $|G|_\gamma$ contenuta in una $|G|$ per cui la coppia data non sia neutra, non è mai sovrabbondante.

LE SERIE NEUTRE COME LIMITI DI SERIE LINEARI ASSOLUTE

19. LE CURVE DI GENERE VIRTUALE π COME LIMITI DI CURVE DI GENERE EFFETTIVO π. — La teoria della serie lineari neutre deve esser considerata da un altro punto di vista, che le conferisce maggiore portata.

Una curva C di genere p, sulla quale siano comunque assegnate δ coppie distinte di punti (distinti o coincidenti), in quanto curva di genere virtnale $\pi = p + \delta$, può considerarsi come limite d'una curva di genere effettivo π. Così il campo neutro γ, definito su C dalle coppie date, si presenta globalmente come limite del campo assoluto delle serie lineari d'una curva di genere effettivo π.

Occorre ginstificare e precisare queste asserzioni. Costruiscasi un modello proiettivo piano f del campo (n. 2) e ne sia m l'ordine. La curva f ha δ punti doppi, imagini delle coppie neutre date (nodi e cuspidi ordinari) ed altri d nodi assegnati. Vi è allora, nello spazio lineare S_N delle curve di ordine m, una falda lineare Φ, di origine f, di curve irriducibili di ordine m con d nodi variabili e nessun altro punto doppio (¹). La generica curva $\bar{f}$ di Φ è di genere effettivo π e facendola tendere, entro Φ, al limite f, essa acquista *ex novo* i δ punti doppi, che debbon riguardarsi virtualmente inesistenti nel definire su f il campo γ.

Vediamo che cosa accade delle aggiunte ad $\bar{f}$ in questo passaggio al limite.

Consideriamo in primo luogo il sistema lineare delle aggiunte $\bar{\varphi}$ ad $\bar{f}$ di un ordine fissato $l \geq m - 3$. Poichè i punti doppi di $\bar{f}$ tendono ai nodi assegnati di f e questi, come i nodi di $\bar{f}$, presentano alle curve di ordine l condizioni indipendenti, il sistema considerato ha per limite l'intero sistema lineare delle aggiunte neutre φ a f, di ordine l. Ogni aggiunta neutra può

(¹) [**67**, p. 317].

così riguardarsi (nello spazio lineare delle curve di ordine l) come un elemento di accumulazione di aggiunte dello stesso ordine alle curve della falda Φ. Si può anzi ottenere che ogni prefissata φ sia *limite* di una $\bar{\varphi}$ variabile, facendo tendere $\bar{f}$ ad f lungo un ramo di Φ coll'origine f e determinando, mediante un numero sufficiente di punti genericamente scelti su φ, una aggiunta $\bar{\varphi}$ alla $\bar{f}$ variabile.

Le considerazioni precedenti non valgono quando $l < m - 3$ e più propriamente quando il sistema delle aggiunte neutre φ ad f, di ordine l, è sovrabbondante (cioè quando i punti doppi assegnati di f non offrono condizioni indipendenti alle curve di ordine l). Può allora avvenire che la dimensione del sistema delle aggiunte neutre ad f, di ordine l, sia maggiore della dimensione del sistema delle aggiunte dello stesso ordine ad $\bar{f}$; in quest'eventualità è possibile tanto che ogni aggiunta neutra sia elemento di accumulazione di aggiunte alla $\bar{f}$ variabile in Φ (in tal caso essa può anche conseguirsi come limite di una aggiunta ad $\bar{f}$, e il sistema variabile al limite aumenta di dimensione), quanto che fra le aggiunte neutre ve ne sieno di quelle che non sono affatto conseguibili come elementi di accumulazione di aggiunte ad $\bar{f}$.

20. Le serie neutre come limiti di serie lineari di un campo assoluto. — Quel che si è esposto nel n. prec. permette già di affermare che *la serie canonica neutra di f è limite dell'ordinaria serie canonica di $\bar{f}$* e che le serie speciali segate su f dalle aggiunte neutre dei vari ordini, maggiori di $m - 3$, son limiti delle analoghe serie segate su $\bar{f}$ dalle aggiunte assolute. Infatti per un dato ordine $l \geq m - 3$ la serie neutra su f e la serie assoluta su f hanno ugual dimensione.

Ciò premesso, mostriamo che *ogni serie lineare neutra non speciale di f può considerarsi come limite di una serie lineare non speciale di $\bar{f}$.*

Sia, invero, su f una $|G|_r$ non speciale, completa, di ordine n (e dimensione $r = n - \pi$). Determiniamo un $l > m - 3$ così grande che esista qualche aggiunta neutra φ, di ordine l, passante per G e segante ulteriormente f, fuori dei nodi assegnati, in un gruppo H, di ν punti, indipendenti da γ. Ciò è sempre possibile (n. 4). Siccome la serie $|G+H|_\gamma$ segata su f, fuori dei nodi assegnati, dalle φ di ordine l, è non speciale e lo stesso accade della serie $|G|_\gamma$, i punti di H impongono ν condizioni indipendenti alle φ di ordine l, che debbon contenerli.

Conducansi genericamente pei punti di H altrettanti rami lineari, aventi le origini in quei punti; e consideriamo il gruppo $\overline{H}$, vicinissimo ad H, staccato da quei rami sopra una curva $\overline{f}$, dell'intorno di f nella falda Φ. Poichè H presenta condizioni distinte alle φ di ordine l, così per *ogni* $\overline{f}$ di un intorno abbastanza piccolo di f in Φ, dovrà accadere che il relativo gruppo $\overline{H}$ presenti pure ν condizioni distinte alle $\overline{\varphi}$ di ordine l. D'altronde tutte le $\overline{\varphi}$ di ordine l segan su $\overline{f}$, fuori dei nodi, una serie non speciale; dunque anche la serie $|\overline{G}|$ segata dalle φ di ordine l, fuori dei nodi e del gruppo H, è non speciale. Pertanto $|\overline{H}|$ ha per limite tutta e sola la serie $|H|_\gamma$ di ugual dimensione.

Possiamo aggiungere che *la varietà $\overline{V}$ delle serie non speciali di dato ordine n della curva variabile $\overline{f}$, ha per limite tutta e sola la varietà V delle serie neutre non speciali dello stesso ordine di f*, perchè le due varietà constano ciascuna di ∞^π serie di ugual dimensione $n - \pi$.

Se $n > 2\pi - 2$, quest'ultima asserzione vale non soltanto per le generiche serie di V e di $\overline{V}$, ma anche per serie qualsiansi, che son sempre non speciali. Se invece $n \leq 2\pi - 2$ (ma ad ogni modo $> \pi$, se no la generica serie di $\overline{V}$ e di V sarebbe speciale) vi sono in $\overline{V}$ e in V serie speciali e si può comunque affermare che ogni serie neutra speciale di V è elemento di accumulazione (epperò anche limite) di serie non speciali di $\overline{V}$, dato che V e $\overline{V}$ come varietà algebriche, contengon tutti i loro elementi di accumulazione.

OSSERVAZIONE 1ª. — Nei riguardi delle serie di ordine $n < \pi$ esistenti su $\overline{f}$, nessuna relazione generale di limite si può indicare, perchè la generica serie lineare o la generica serie neutra di ordine $n < \pi$, esistente su $\bar{f}$ o rispettivamente su f, è speciale.

OSSERVAZIONE 2ª. — Giova osservare pel seguito che *fissati, su f, π gruppi canonici neutri linearmente indipendenti, essi posson considerarsi come limiti di altrettanti gruppi canonici indipendenti di $\bar{f}$, per $\bar{f} \to f$.*

Sieno $\varphi_1, \ldots, \varphi_\pi$ le aggiunte neutre di ordine $m - 3$, che segano su f i gruppi canonici neutri fissati. Poichè nel sistema lineare delle aggiunte di ordine $m - 3$ ad $\bar{f}$ non ve n'è nessuna che contenga qualcuna delle predette φ, per $\pi - 1$ punti generici fissati su ciascuna delle φ, passa una sola aggiunta $\bar{\varphi}$, d'ordine $m - 3$ ad $\bar{f}$. La condizione si verifica certamente quando $\bar{f}$ appartiene ad un intorno abbastanza piccolo di f in Φ, perchè per $\bar{f} \to f$ ogni $\bar{\varphi}$, passante per $\pi - 1$ punti generici di φ_1, ha per elemento di accumulazione una φ passante per quei punti e di tali φ vi è la sola φ_1; sicchè quella $\bar{\varphi}_1$ è certamente unica ed ha per *limite* φ_1. Similmente per le altre φ. Le $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \ldots, \bar{\varphi}_\pi$ così ottenute, son certo indipendenti tra loro, perchè hanno per limiti curve indipendenti.

LE VARIETÀ QUASI ABELIANE SPECIALI

21. LA VARIETÀ DI JACOBI IN UN CAMPO NEUTRO. — Fermiamoci un poco a considerare la varietà V_π dei gruppi di π punti d'una curva C, di genere effettivo p e di genere virtuale $\pi = p + \delta$, sulla quale son fissate δ coppie, individuanti un campo γ di serie neutre.

Questa varietà, che è l'analoga della varietà di JACOBI nel campo assoluto, gode d'una delle proprietà peculiari d'una varietà abeliana di genere π. *Essa possiede cioè un gruppo continuo abeliano ∞^π di trasformazioni birazionali in sè,* che si costruisce con processo analogo a quello classico per una varietà di Jacobi (1). È inutile ripetere questo processo, bastando avvertire solamente che il ragionamento va riferito a gruppi di π punti *indipendenti* da γ, perchè soltanto per essi valgono incon-

(1) Il procedimento cui si allude trovasi in [8]. Vedi pure [69, p. 281].

dizionatamente il teorema di unicità e di esistenza e le operazioni di somma e di sottrazione.

Le operazioni del predetto gruppo abeliano, da applicarsi ad ogni gruppo G di π punti di C, indipendente da γ, sono del tipo $+A - B$, ove A, B son gruppi di π punti indipendenti da γ. Esse s'ottengon tutte tenuto fisso A, al variare di B. L'omologo G' di un gruppo G, indipendente da γ, in una, $+ A - B$, delle trasformazioni del gruppo abeliano, è caratterizzato dall'equivalenza

$$G + A - B \equiv G' \quad (\text{in } \gamma),$$

sicchè G' è individuato se la serie $|G + A - B|_\gamma$ è non speciale; il che accade certo per G, A, B generici.

C'è però una differenza essenziale tra il gruppo abeliano spettante ad un'ordinaria varietà di Jacobi ed il gruppo abeliano dell'analoga varietà in un campo neutro ed è che mentre il primo è *assolutamente transitivo*, il gruppo trovato su V_π è *generalmente transitivo*. Anzitutto ricordiamo che una varietà di Jacobi di genere π diviene del tutto omogenea, così che i suoi punti appariscon equivalenti fra loro rispetto al gruppo abeliano a questa spettante, quando essi s'assumano come imagini delle g_π non speciali, piuttosto che come imagini dei gruppi di π punti della curva data di genere effettivo π. Quest'ultimo modo di considerar le cose si può riferire anche alla V_π, inerente alla curva C di genere virtuale π; ma, nonostante ciò, il gruppo abeliano spettante a V_π non diviene assolutamente transitivo. Esso è generalmente transitivo, nel senso che dati due gruppi *generici* G, G' (cioè due serie complete g_π), esiste sempre una trasformazione $+ A - B$ del gruppo, che porta G in G'. Basta all'uopo assumere

$$B \equiv A + G - G' \quad (\text{in } \gamma),$$

A essendo un gruppo generico di π punti.

Per contro l'operazione perde significato, pur essendo A, G, G' indipendenti da γ, se B risulta dipendente da γ o, peggio ancora, se uno dei due gruppi G, G' è dipendente da γ. In questi casi il modo di operare di una trasformazione del gruppo va studiato a parte. Precisiamo: Per ottenere tutte le operazioni $+A-B$ basta fissare un gruppo generico A_0, di π punti, e far variare B. Suppongasi che, essendo G indipendente da γ, come lo è A_0, per una posizione B_0 di B, pure indipendente da γ, accada che ogni gruppo della serie $|G+A_0|_\gamma$ passante per B_0, contenga qualche punto delle coppie di γ. L'operazione $+A_0-B_0$ applicata a G non ha allora di per sè significato in γ e si potrà chiamare un'operazione del gruppo, *singolare* non in sè, ma rispetto a G. Ebbene, in tal caso si osserverà che le posizioni di B per cui accade il fatto segnalato, sono particolari, cioè formano in V_π una varietà subordinata, perchè quando B va in B_0 il gruppo $G+A_0-B_0$ è indipendente da γ. Si può pertanto considerare in V_π un ramo analitico σ, avente per origine B_0, il quale non abbia, nell'intorno di B_0 che questo gruppo originante l'operazione singolare $+A_0-B_0$.

Quando B tende a B_0, lungo σ, la serie $|G+A_0-B|_\gamma$ tende verso una posizione limite *ben determinata* (in conseguenza di un'osservazione che ho più volte fatto altrove), la quale sarà generalmente un solo gruppo di punti; ad ogni modo *l'insieme dei gruppi limiti, ottenibili al variare di σ, sotto le condizioni poste, è l'ente omologo di G nella trasformazione $+A_0-B_0$, singolare rispetto a G.*

Diversamente procedono le cose se G dipende da γ. Dicasi H il gruppo ottenuto da G sopprimendovi i punti delle coppie di γ, contenuti in G, contando ciascuno colla molteplicità con cui entra in G; e si denoti con γ' il campo definito dalle coppie non impegnate, completamente o parzialmente in G (eventualmente il campo assoluto, se G contiene qualche punto di ognuna delle δ coppie).

Le serie $|G|_\gamma$ ed $|H|_{\gamma'}$, differiscono soltanto pel fatto che ai gruppi della seconda si devono aggiungere come punti fissi quelli soppressi da G. Similmente la serie $|G + A - B|_\gamma$, con A, B indipendenti da γ, differisce dalla $|H + A - B|_{\gamma'}$, per gli stessi punti fissi. Pertanto l'operazione $+ A - B$ muta gruppi dipendenti da γ in gruppi dipendenti da γ, cogli stessi punti fissi.

Se l'operazione $H + A - B$ non ha senso in γ', soccorre la precedente considerazione di limite; ma i punti fissi son sempre i medesimi.

Insomma sulla V_π esistono ∞^1 varietà $U_{\pi-1}$ ciascuna delle quali rappresenta le π-ple con un punto fisso: in particolare vi sono 2δ varietà $U_{\pi-1}$ inerenti ai punti delle coppie di γ (due $U_{\pi-1}$, inerenti ai punti di una coppia, coincidono, se coincidono i due punti). *Le trasformazioni del gruppo abeliano di V_π mutano in sè ciascuna di queste $2\ \delta$ varietà $U_{\pi-1}$* [1].

Resta così precisato il modo di comportarsi del gruppo abeliano di fronte alle anomalie delle operazioni di somma e di sottrazione nel campo neutro.

La varietà V_π, in quanto, come dicemmo, è in certa misura analoga ad una varietà di Jacobi, senza essere nel fatto birazionalmente identica ad una tale varietà, di genere π, si chiamerà una *varietà quasi abeliana* (*di* JACOBI) *di genere virtuale* (*o dimensione*) π *e di genere effettivo* p ($= \pi - \delta$). Essa riducesi all'ordinaria varietà di Jacobi per $\delta = 0$.

Come si sa, la varietà di Jacobi di genere p, per $p > 3$, non è la più generale varietà abeliana: POINCARÉ la chiama una varietà abeliana *speciale*, perchè essa dipende da un numero di moduli, $3\,p - 3$, minor di quello, $\dfrac{p\,(p + 1)}{2}$, da cui dipende una varietà abeliana qualunque.

Le varietà abeliane più generali si ottengono (come risulta da un teorema di CASTELNUOVO-ENRIQUES) a partire da superficie o varietà algebriche e non da curve.

[1] Non è perciò detto che vengan mutate in sè anche le varietà comuni a due o più delle $2\ \delta$ varietà invarianti; e ciò a causa della non assoluta biunivocità delle trasformazioni del gruppo. In seguito vedremo che effettivamente talune delle predette varietà possono non esser mutate in sè.

Dovremmo pertanto aggiungere, anche nel caso della considerata varietà quasi abeliana, l'attributo « speciale »; ma ce ne dispenseremo, fino al momento in cui non avremo da considerare varietà quasi abeliane più generali.

Osservazione 1ª. — I moduli di una varietà quasi abeliana (speciale) di genere π, cioè di una curva C di genere virtuale $\pi = p + \delta$ e di genere effettivo p si contan facilmente. Sono in definitiva i moduli del campo neutro γ, risultante dall'associare la curva C di genere effettivo p alle coppie neutre su essa prescelte [1]. Supponiamo dapprima che ognuna di queste coppie consti di punti distinti. Se $p > 1$, poichè la C a moduli generali non ammette trasformazioni birazionali in sè, il numero dei moduli di γ è uguale al numero τ dei moduli di C aumentato del numero dei parametri delle coppie neutre, cioè a

$$\tau + 2\delta = 3\pi - 3 - \delta.$$

Se $p = 1$ il numero $\tau + 2\delta$ dei moduli di γ va diminuito di 1, perchè vi sono in C ∞^1 gruppi di δ coppie birazionalmente equivalenti a uno dato di essi: onde il numero dei moduli risulta ancora (per $\delta > 0$) $3\pi - 3 - \delta$.

Se $p = 0$, $\delta \geq 2$, il numero $\tau + 2\delta$ va diminuito di 3, perchè vi sono in C ∞^3 gruppi di δ coppie proiettivamente equivalenti a uno dato di essi, e il numero dei moduli continua ad essere espresso da $3\pi - 3 - \delta$.

Infine, se $p = 0$, $\delta = 1$ non vi sono moduli, perchè tutte le coppie di punti C son proiettivamente equivalenti.

Se le δ coppie si suddividono in δ_1 formate ciascuna da punti distinti e in δ_2 costituite da punti coincidenti, invece del numero $\tau + 2\delta$ dei moduli di γ, si perviene al numero

$$\tau + 2\delta_1 + \delta_2 = 3\pi - 3 - \delta - \delta_2$$

[1] Nel n. 48 sarà precisato il valore di quest'identificazione, che costituisce soltanto un primo assaggio d'una questione da considerarsi in seguito nella sua piena generalità (n. 55).

che vale per tutti i casi, salvo che per $p=0$, $\delta_1=1$, $\delta_2=1$ o $\delta_1=0$, $\delta_2=2$ o $\delta=1$, nei quali non vi sono moduli.

Concludendo:

Il numero dei moduli di una curva di genere virtuale $\pi>1$ *e di genere effettivo* $p<\pi$ *è espresso da* $3\pi-3-\delta-\delta_2$, *ove* δ $(=\pi-p)$ *è il numero totale delle coppie neutre e* δ_2 *il numero di quelle, fra esse, che constano di punti coincidenti. La formula non vale per* $\pi=1$: *allora non vi sono moduli. L'unico ulteriore caso in cui non vi sono moduli è quello nel quale* $p=0$, $\delta_1=\delta_2=1$.

La conclusione può altresì stabilirsi tenuto presente il noto procedimento per contare i moduli d'una curva di genere effettivo p (1) ed il fatto che l'imposizione alle curve di un sistema continuo di curve piane di un nuovo nodo o di una nuova cuspide, in un punto non dato del piano, equivale rispettivamente ad 1 o a 2 condizioni semplici.

OSSERVAZIONE 2ª. — È noto che quando si assume a varietà di JACOBI V_p d'una curva di genere $p>1$ la varietà dei gruppi di p punti della curva, invece di quella delle g_p speciali, la varietà viene a contenere una varietà eccezionale E_{p-1} a $p-1$ dimensioni, rappresentante i gruppi speciali; eccezionale nel senso che, passando alla V_p delle g_p essa trasformasi in una E'_{p-2}, imagine delle g_p speciali e ogni punto di E'_{p-2} proviene da una curva razionale di E_{p-1} (2). Per la E'_{p-2} passano le ∞^1 varietà ∞^{p-1}, ognuna delle quali rappresenta le p-ple con un punto fisso.

Queste proprietà trovano riscontro in analoghe proprietà d'una V_π quasi abeliana. Anche su V_π, in quanto varietà dei gruppi di π punti della curva, esiste una varietà eccezionale $E_{\pi-1}$ rappresentante i gruppi neutri speciali di π punti. Ma la trasformazione di questa $E_{\pi-1}$ nella $E'_{\pi-2}$ nelle g_π neutre speciali, dà luogo a circostanze più riposte per l'intervento dei gruppi di π punti dipendenti dal campo γ. Su queste circostanze

(1) [**67**, pp. 155, 321].
(2) [**15**, p. 441], [**69**, p. 284] e più ampiamente in [**75**, p. 140].

ritorneremo nel n. 33 e le illustreremo anche con un esempio alla fine della Memoria (per $\pi = 2$, $p = \delta = 1$).

22. Alcune proprietà delle varietà quasi abeliane. — Una seconda diversità essenziale fra varietà quasi abeliane e varietà abeliane è che, mentre una varietà abeliana, considerata in un modello privo di varietà eccezionali (qual'è quello che s'ottiene per la varietà di Jacobi riguardandola come insieme di serie g_p), non possiede alcuna varietà razionale, invece *una varietà quasi abeliana di genere* $\pi = p + \delta$ *contiene un'involuzione abeliana* ∞^p *di varietà razionali di dimensione* δ.

La generica di esse è l'imagine dell'insieme dei gruppi di punti di una generica g_π^δ completa del campo assoluto. Le ∞^p varietà M_δ, così ottenute, formano un'involuzione, cioè un sistema continuo d'indice 1, appunto perchè per un generico punto di V_π ne passa una sola. Due M_δ non hanno punti comuni.

L'involuzione ∞^p è poi abeliana, essendo birazionalmente equivalente alla totalità delle g_π^δ di C, cioè alla varietà di Jacobi di genere p inerente alla C.

Le M_δ son sistemi d'imprimitività pel gruppo abeliano di V_π e sono inoltre traiettorie delle trasformazioni $+ A - B$, ove A, B denotan due gruppi (indipendenti da γ) non speciali in γ, appartenenti ad una medesima g_π^δ assoluta.

Ma c'è di più. Fissato su C un gruppo H di δ punti generici, gli ∞^p gruppi G di π punti passanti per H, son rappresentati su V_π dai punti di una varietà algebrica W_p *unisecante* delle M_δ. Al variare di H si ottengono ∞^δ varietà W_p, costituenti un sistema algebrico d'indice $\binom{\pi}{\delta}$.

Proviamo che dall'esistenza delle W_p segue l'esistenza sopra V_π di un sistema involutorio ∞^δ di varietà Z_p unisecanti delle M_δ. *Conviene all'uopo considerare* V_π *come imagine birazionale senza eccezioni della totalità dei gruppi di* π *punti di* C

(*anzichè della totalità delle serie neutre* g_π). A questa norma ci atterremo nel seguito. La generica M_δ viene allora ad essere in corrispondenza birazionale senza eccezioni con un ente lineare g_π^δ ed è perciò, essa medesima, *lineare* [1].

Ciò premesso, scegliamo sopra una M_δ genericamente fissata, e sia $\overline{M}_\delta$, un gruppo di $\delta + 2$ punti linearmente indipendenti e consideriamo una W_p per ciascuno di essi. Sieno $W_p{}^1, \ldots, W_p{}^{\delta+2}$ le W_p in tal modo scelte. Esse staccano sulla generica M_δ un gruppo di $\delta + 2$ punti indipendenti, perchè ciò accade sulla particolare $\overline{M}_\delta$. Resta così algebricamente individuata, fra due M_δ generiche, un'omografia, nella quale si corrispondono le intersezioni con una medesima delle $W_p{}^1, \ldots, W_p{}^{\delta+2}$. Le traiettorie di quest'omografia variabile sono ∞^δ varietà Z_p, unisecanti delle M_δ, costituenti un sistema involutorio, perchè pel generico punto di V_π passa una sola Z_p.

Fra le Z_p vi son naturalmente $\delta + 2$ varietà che contengono le $W_p{}^1, \ldots, W_p{}^{\delta+2}$ e ne differiscono per varietà fondamentali del sistema ∞^p delle M_δ, cioè per varietà che

(1) [**78**, p. 21]. È necessario tener presente qualche proprietà delle varietà lineari, che discende quasi automaticamente dal loro stesso concetto. Anzitutto in una M_δ lineare son da distinguere quelle curve algebriche, le quali godon della proprietà di esser segate nel minimo numero di punti da ogni varietà algebrica a $\delta - 1$ dimensioni della M_δ le chiameremo le *rette invariantive* di M_δ. Gl'*iperpiani invariantivi* saranno poi le varietà a $\delta - 1$ dimensioni di M_δ, che godon della proprietà di esser incontrate in un punto dalle rette invariantive. Per intersezione degl'iperpiani invariantivi si generano i *piani*, gli *spazi lineari a* 3 *dimensioni invariantivi*; ecc. In una qualsiasi rappresentazione birazionale senza eccezioni di M_δ in un S_δ, rette, piani, . . . invariantivi, si rappresentano in rette, piani, . . . di S_δ. La geometria proiettiva di S_δ si trasferisce così immutata ad M_δ. Una trasformazione birazionale senza eccezioni fra due M_δ è sempre un'omografia, cioè muta rette, piani, . . . invariantivi, in rette, piani, . . . invariantivi. Essa è individuata quando a $\delta + 2$ punti indipendenti, arbitrariamente scelti sopra una delle due varietà, si fanno ordinatamente corrispondere i punti di una $(\delta + 2)$-pla di punti indipendenti scelti nell'altra. Occorre in ultimo avvertire, a scanso di equivoci, che gli enti lineari invariantivi sopra considerati, non si potrebbero definir puramente e semplicemente come le curve, le superficie, . . . *lineari* contenute in M_δ, perchè di curve, superficie, . . . lineari subordinate ad M_δ ce ne sono ben altre. Così in un S_δ ogni curva razionale priva di punti multipli è un ente lineare ∞^1; ogni superficie razionale rappresentata da un sistema lineare di curve piane senza punti base o curve fondamentali, è un ente lineare ∞^2; ecc.

son contenute in talune M_δ, se $\delta \geq p$, o son composte con infinite M_δ, se $\delta < p$: in ogni caso varietà che non hanno intersezioni colla generica M_δ. Varietà siffatte non posson mancare, perchè le $W_p^1, \ldots, W_p^{\delta+2}$ *da sole* non posson far parte di un sistema irriducibile ∞^p, d'indice 1, posto che già fanno parte da sole di un sistema irriducibile ∞^p d'indice > 1.

Le Z_p, essendo in corrispondenza birazionale colle loro tracce sopra una data M_δ, formano un sistema razionale. Ad una generica coppia di elementi M_δ, Z_p dei sistemi delle M_δ e delle Z_p, corrisponde un sol punto di V_π (l'intersezione delle due varietà), e, viceversa, ad un punto generico di V_π corrisponde una M_δ ed una Z_p (che in esse s'intersecano). In conclusione:

Ogni varietà quasi abeliana di genere virtuale $\pi = p + \delta$, *derivante da una curva C di genere effettivo p, è il prodotto della varietà di Jacobi inerente a C e di uno spazio lineare* S_δ.

Se la curva C è razionale ($p = 0$) la varietà riducesi senz'altro alla varietà razionale ∞^δ dei gruppi di $\delta = \pi$ punti di C.

Si avverta che per $\delta = 1, 2, \ldots$ la V_π viene ad essere la varietà dei gruppi di $p + 1$, $p + 2, \ldots$ punti della C; pertanto si può enunciare, indipendentemente dalla teoria delle serie neutre, che:

Sopra una curva di genere effettivo p la totalità dei gruppi di un numero dato di punti, maggiore di p, è sempre una varietà quasi abeliana (mentre la varietà dei gruppi di p punti è abeliana).

OSSERVAZIONE 1ª. — Come imagine proiettiva di V_π si può assumere addirittura *una varietà abeliana di spazi lineari* S_δ, perchè una tal varietà, che sia birazionalmente equivalente, come totalità di S_δ, alla varietà di Jacobi di una curva C di genere p, è il prodotto di questa varietà e di un S_δ. In particolare, per $\delta = 1$, si ha una varietà rigata di dimensione $p + 1$ e per $p = \delta = 1$ una rigata ellittica.

Le Z_p entro V_π formano un sistema che è di equivalenza, in quanto è razionale (1). Per $\delta = 1$ le Z_p sono addirittura linearmente equivalenti e una Z_p ed una W_p son linearmente equivalenti, a meno di varietà rigate a p dimensioni tracciate sulla V_π.

Osservazione 2ª. — Abbiamo già osservato che una M_δ è mutata in sè dalle trasformazioni del gruppo abeliano di V_π, che proveugono dai gruppi A, B di una medesima g_π^δ assoluta. Queste ∞^δ trasformazioni — le quali sull'ente lineare M_δ non sono che omografie — formano un sottogruppo, che è ovviamente abeliano. Le sue omografie lasciano invarianti le 2δ varietà $U_{\pi-1}$, di cui parlammo nel n. prec.

Nel caso $\delta = 1$ come modello della V_π può assumersi, come s'è detto, una V_{p+1} rigata, sulla quale son tracciate due varietà U_p, unisecanti delle generatrici e corrispondenti ai punti della coppia di γ. Su ogni generatrice il gruppo abeliano di V_{p+1} subordina un sottogruppo abeliano ∞^1, che lascia fissi i due punti segnati dalle predette U_p.

Queste osservazioni precisano sufficientemente anche in generale la struttura del gruppo sopra V_π.

Il teorema d'Abel e il teorema d'inversione in un campo neutro

23. Integrali abeliani di 1ª specie in un campo neutro. — Consideriamo nuovamente la curva di genere virtuale $\pi = p + \delta$, con δ coppie neutre, come limite d'una curva di genere effettivo π e riferiamoci all'uopo ai modelli proiettivi piani f, $\bar{f}$ delle due curve, considerati nel n. 19.

Sulla falda Φ, di origine f, nello spazio S_N, fissiamo una $\bar{f}$, vicinissima ad f e, supposti gli assi x, y generici rispetto alle due curve, segnamo sul piano dove si distende la variabile indipendente x, i punti di diramazione della funzione y di x

(1) [78, p. 112].

definita dalla $f = 0$ e i punti di diramazione della funzione $\bar{y}$ di x definita dalla $\bar{f} = 0$, nonchè i valori di x che spettano ai nodi virtualmente inesistenti di f, non occorrendo di segnare espressamente i valori di x spettanti alle eventuali cuspidi di f, perchè essi figurano già tra le diramazioni.

Fra i punti di diramazione di $\bar{y}$, in numero di $2m + 2\pi - 2$, ve ne sono $2m + 2p - 2 - \delta_2$, vicinissimi ad altrettanti punti di diramazione di y, ove δ_2 rappresenta il numero delle coppie di γ costituite da punti coincidenti, cioè il numero delle cuspidi di f. Vi sono inoltre δ_1 coppie di punti di diramazione di $\bar{y}$, ciascuna delle quali consta di punti vicinissimi alle imagini dei nodi virtualmente inesistenti di f, ove δ_1 $(= \delta - \delta_2)$ è il numero di questi, cioè delle coppie di γ costituite da punti distinti.

Infine vi sono δ_2 terne di punti di diramazione di $\bar{y}$ vicinissimi alle imagini delle cuspidi di f.

Fissiamo π aggiunte neutre linearmente indipendenti, di ordine $m - 3$, della f: denotiamo con φ una generica di esse. Un integrale del tipo:

$$u = \int \frac{\varphi\, dx}{f_y'}$$

si dirà su f un *integrale abeliano neutro di* 1ª *specie*. Prima di precisare il comportamento di quest'integrale nei punti di f, conviene di premettere un'osservazione circa la più opportuna scelta delle φ.

Tra le aggiunte neutre ad f vi sono le aggiunte assolute e quelle che contengono $1, 2, \ldots, \delta - 1$ dei punti doppi virtualmente inesistenti di f. Orbene, per individuare il sistema lineare $\infty^{\pi-1}$ delle φ, sceglieremo:

a) le p aggiunte assolute d'ordine $m - 3$, linearmente indipendenti: sieno $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$;

b) le δ aggiunte neutre d'ordine $m - 3$, $\psi_1\ \psi_2, \ldots, \psi_\delta$, ognuna delle quali contiene $\delta - 1$ punti doppi virtualmente inesistenti, e dall'una all'altra varia il punto doppio escluso.

Precisamente: intenderemo che $\psi_1, \ldots, \psi_{\delta_1}$ sieno le aggiunte neutre ognuna delle quali esclude uno dei δ_1 nodi virtualmente inesistenti e $\psi_{\delta_1+1}, \ldots, \psi_\delta$ le restanti aggiunte, ognuna delle quali esclude una cuspide.

Le π aggiunte neutre φ, ψ, così fissate, son linearmente indipendenti, perchè in un legame lineare

$$(8) \qquad \lambda_1 \varphi_1 + \ldots + \lambda_p \varphi_p + \mu_1 \psi_1 + \ldots + \mu_\delta \psi_\delta = 0$$

non potrebbe esser diversa da zero qualcuna delle μ, in quanto ogni ψ non contiene un punto doppio di f, che invece giace sulle φ e sulle altre ψ; e d'altronde se tutte le μ son nulle, anche le λ devon essere nulle, perchè le φ son linearmente indipendenti. Porremo:

$$(9) \qquad u_h = \int \frac{\varphi_h\, dx}{f'_y} \qquad (h = 1, \ldots, p) ;$$

$$(10) \qquad v_l = \int \frac{\psi_l\, dx}{f'_y} \qquad (l = 1, \ldots, \delta).$$

Il sistema $\infty^{\pi-1}$ delle aggiunte neutre può dunque rappresentarsi colla combinazione (8), al variare delle λ, μ. Per generici valori dei parametri si ottiene un'aggiunta neutra ordinaria.

Poichè gl'integrali (9) sono di 1ª specie nel campo assoluto, per completar lo studio degl'integrali abeliani neutri di 1ª specie basta prendere in esame soltanto gl'integrali (10).

Sia A il punto doppio di f pel quale non passa la ψ considerata. Secondo la teoria elementare degl'integrali abeliani, l'integrale relativo a quella ψ è dovunque finito su f, salvo che in A, ove presenta due singolarità logaritmiche, se A è un nodo; e un polo di 1° ordine, se A è una cuspide.

Invero, se A è un nodo, la funzione razionale $\dfrac{\psi}{f_y'}$ ha in ciascuno dei punti sovrapposti ad A un polo di 1° ordine, donde deriva per integrazione una singolarità logaritmica [1]. Sia invece A una cuspide (ordinaria). Dato che $f_y' = 0$ passa per A, toccando ivi la tangente cuspidale, la funzione $\frac{\psi}{f_y'}$ presenta in A (che è un punto di diramazione semplice per y) un polo di 3° ordine, epperò lo sviluppo di $\frac{\psi}{f_y'}$ nell'intorno del valore $x = a$, imagine di A, ha come potenza negativa di ordine più basso $(x - a)^{-\frac{3}{2}}$, sicchè nello sviluppo dell'integrale attorno ad a c'è un termine in $(x - a)^{-\frac{1}{2}}$ oltre ad un eventuale termine logaritmico proveniente dal residuo di $\frac{\psi}{f_y'}$ in a. Ma in realtà questo residuo è nullo, essendo il solo di $\frac{\psi}{f_y'}$, su tutta la f.

I due periodi polari dell'integrale, provenienti dalle due singolarità logaritmiche, quando A è un nodo, dànno per somma zero, essendo, a meno del coefficiente $2\pi i$, i due residui di $\frac{\psi}{f_y'}$ su tutta la f.

Se si ricorda l'espressione (8) di una qualsiasi aggiunta neutra di ordine $m - 3$, si conclude senz'altro che:

Un integrale neutro di 1ª *specie è dovunque finito sulla curva f, salvo che nelle coppie neutre. In ogni coppia neutra a punti distinti presenta (al più) due singolarità logaritmiche coi periodi polari differenti soltanto nel segno e in ogni coppia neutra a punti coincidenti presenta (al più) un polo di* 1° *ordine.*

24. I PERIODI DEGL'INTEGRALI NEUTRI COME LIMITI DEI PERIODI DI ORDINARI INTEGRALI ABELIANI DI 1ª SPECIE. — Un integrale neutro di 1ª specie ha $2p + \delta_1$ periodi, cioè $2p$

[1] Si sottintende, ora e nel seguito, fino a contrario avviso, una *singolarità logaritmica pura*, cioè non risultante dalla sovrapposizione d'una singolarità logaritmica e d'una singolarità polare.

periodi ciclici, relativi ai cicli lineari della curva f e δ_1 periodi polari relativi alle coppie neutre a punti distinti.

Consideriamo un integrale neutro di 1ª specie u come limite di un ordinario integrale abeliano di 1ª specie della curva $\bar{f}$ (il che è sempre possibile; n. 20, Oss. 2ª). Che cosa accade, per $\bar{f} \to f$, dei 2π periodi ciclici dell'integrale considerato?

Sul piano dov'è distesa x, i cappi che vanno da un'origine O a circondare i punti di diramazione di $\bar{y}$, si posson sempre supporre ordinati alla maniera di LÜROTH-CLEBSCH [1], in guisa che una coppia di punti di diramazione di $\bar{y}$, vicinissimi all'imagine $x = a$ di un nodo virtualmente inesistente di f, sieno quelli che connettono p. es. i primi due fogli della costruenda riemanniana di $\bar{f}$: cosa possibile, perchè quei due punti di diramazione permutan di fatto le medesime due determinazioni di y, qualunque sieno l'origine e i cappi avvolgenti. Vi è pertanto una retrosezione, inerente alla linea di passaggio che congiunge la considerata coppia di diramazione, la quale consta di un ciclo $\bar{\sigma}$ avvolgente, sopra uno dei due fogli, la linea di passaggio e d'un altro ciclo $\bar{\rho}$, incontrante il precedente in un punto e passante dall'uno all'altro foglio, attraverso questa linea.

Quando $\bar{f} \to f$, il ciclo $\bar{\sigma}$ tende ad un ciclo σ tracciato sopra uno dei due fogli della riemanniana di f, combacianti in a, e che avvolge questo punto; e il ciclo $\bar{\rho}$ tende ad un cammino aperto ρ, cogli estremi coincidenti in a, ma su fogli diversi e incontrante ancora σ in un punto. Il cammino ρ torna ad esser chiuso soltanto se il nodo acquistato nel passaggio da $\bar{f}$ ad f, si considera virtualmente inesistente.

Per ciò che concerne gl'integrali $\bar{u}$, u di $\bar{f}$, f, il valore di u lungo ρ è finito, se u è, in via assoluta, di 1ª specie nel nodo, è infinito nel caso contrario; mentre il valore di u sovra σ è il periodo polare dell'integrale attorno ad a, sul foglio a cui σ

(1) [**67**, p. 204].

appartiene; epperò è nullo se u è di 1^a specie nel campo assoluto.

Dunque *l'acquisto di un nuovo nodo della curva limite muta un periodo ciclico dell'integrale variabile* $\bar{u}$ *nel periodo polare relativo al nuovo nodo, mentre un altro periodo ciclico di* $\bar{u}$ *tende all'infinito o ad un valore finito, secondo che l'integrale limite* u *è in via assoluta di* 3^a *o di* 1^a *specie.*

Passiamo a considerare l'effetto sui cicli dell'acquisto su f di una nuova cuspide. Si può supporre (nell'ordinamento alla Lüroth-Clebsch dei cappi relativi alla funzione $\bar{y}$), che i tre punti di diramazione di $\bar{y}$, prossimi all'imagine della cuspide, congiungano due fogli consecutivi della riemanniana di $\bar{f}$, perchè al limite l'unico punto di diramazione (semplice) di y, nel quale i tre punti si fondono, dando luogo alla cuspide, permuta due sole determinazioni di y. E possiamo altresì supporre che due di quei punti sieno estremi d'una linea di passaggio, mentre il terzo sia, con un altro punto di diramazione, congiungente gli stessi due fogli, estremo d'un'altra linea di passaggio. Per constatare quel che avviene al limite dei cicli della riemanniana variabile, basta por mente soltanto ai quattro punti di diramazione che entrano in giuoco. Si può perciò pensare addirittura ad un toro, come riemanniana di una cubica ellittica $\bar{f}$, costruita, con quattro punti di diramazione, mediante una g_2^1, della quale si segua la variazione, mentre $\bar{f}$ tende ad una cubica razionale f con una cuspide. Vi sono nel toro due circoli meridiani, che funzionano da linee di passaggio dall'una all'altra delle due regioni del toro, che rappresentano i due fogli della riemanniana, ognuno dei quali contiene due diramazioni. Quando $\bar{f} \to f$, uno dei circoli meridiani si contrae verso un punto e nello stesso tempo un punto (di diramazione) dell'altro circolo si avvicina al precedente circolo; onde al limite vien fuori una superficie del tipo topologico della sfera, con una specie di schiacciamento a pizzico in un punto. I due cicli della retrosezione del toro si riducono così a due cicli (omologhi a zero), ognuno dei quali passa per l'imagine della cuspide.

Se ora l'integrale di 1ª specie $\bar{u}$ di $\bar{f}$ tende all'integrale u di f e questo ha nella cuspide un polo di 1° ordine, due dei periodi di $\bar{u}$ vanno all'infinito; se invece u è in via assoluta di 1ª specie, due dei periodi di $\bar{u}$ vanno a zero. In conclusione *nell'acquisto di una cuspide della curva limite due dei periodi dell'integrale variabile $\bar{u}$, che abbia per limite un integrale u avente nella cuspide un polo di 1° ordine, tendono all'infinito; se invece l'integrale limite è in via assoluta di 1ª specie i due periodi tendono a zero.*

25. Il teorema d'Abel diretto in un campo neutro. — Che cosa accade della somma dei valori (definita a meno dei periodi polari e ciclici) d'un integrale neutro di 1ª specie nei punti d'un gruppo variabile entro una serie lineare neutra $|G|_\gamma$ (¹)? La questione va esaminata soltanto nei riguardi degli integrali (10), perchè per gl'integrali (9), che son ordinari integrali abeliani di 1ª specie, la risposta è data dal classico teorema di Abel.

Proveremo che anche per un integrale (10) la somma predetta si conserva costante cioè che subisce un incremento infinitesimo nullo, passando da un generico gruppo G ad un gruppo infinitamente vicino della serie stessa.

Conviene all'uopo considerare la serie neutra g_n^1, che congiunge, *entro* $|G|_\gamma$, i due gruppi infinitamente vicini e ridurre così il problema a constatare che cosa accade di quella somma, quando il gruppo varia in una serie lineare neutra ∞^1.

In primo luogo, il punto doppio virtualmente inesistente A di f, per cui ψ non passa, sia un nodo. Una g_n^1 neutra, il cui gruppo ordinario sia indipendente da γ, come quella che stiamo considerando, contiene *un sol* gruppo G_0 al quale appartiene la

(¹) Ci riferiamo al solito a serie a gruppi ordinari, indipendenti da γ.

coppia neutra A, A. Questo è il *fatto essenziale,* che permette di concludere e che d'altronde caratterizza una g_n^1 di γ, a gruppo ordinario indipendente da γ.

Invero, la somma dei valori dell'integrale v, inerente a ψ, nei punti d'un gruppo G variabile in g_n^1, è un integrale abeliano di 3ª specie sulla retta s, su cui può distendersi il parametro λ, che individua linearmente G in g_n^1. Quest'integrale di 3ª specie è dovunque finito, salvo *una sola* singolarità logaritmica, che cade nel punto $\lambda = \lambda_0$, imagine di G_0; epperò questa singolarità deve sparire (cioè il periodo polare relativo deve esser nullo). L'integrale riducesi dunque su s alla 1ª specie, cioè ad una costante.

In secondo luogo, A sia una cuspide e G_0 sia il gruppo di g_n^1 cui appartiene *A come punto doppio.* Allora la somma di v nei punti di G è un integrale di 2ª specie su s, cioè una funzione razionale $\zeta(\lambda)$, avente soltanto un polo di 1º ordine in λ_0. Inoltre per $\zeta(\lambda)$ ogni gruppo di g_n^1 è un gruppo di livello, perchè la somma considerata assume lo stesso valore in tutti i punti di un gruppo G. Pertanto nella trasformazione unirazionale fra s ed f al polo di 1º ordine $\lambda = \lambda_0$ di $\zeta(\lambda)$ corrispondono n poli di 1º ordine della funzione stessa nei vari punti di G_0; ma siccome due di questi punti coincidono in A, ivi la $\zeta(\lambda)$ avrà un polo di 2º ordine: il che è assurdo, perchè invece in A l'integrale v ha un polo di 1º ordine. La singolarità polare deve dunque nel fatto sparire quando si fa la somma, sicchè $\zeta(\lambda)$, essendo priva di poli, riducesi ad una costante.

Resta pertanto dimostrato il seguente *teorema d'Abel diretto,* per le serie neutre:

Nei punti di un gruppo variabile in una serie lineare neutra (a gruppo ordinario indipendente da γ), ogni integrale neutro di 1ª specie (anche se in via assoluta è di 2ª o di 3ª specie) dà una somma costante.

OSSERVAZIONE 1ª. — È opportuno di porre in rilievo che *il teorema cade per le serie a gruppo ordinario dipendente da γ e per le serie assolute.* In verità per una serie a gruppo ordinario dipendente da γ si potrebbe in un certo senso dire che il teorema continua a valere, in quanto la somma variabile cui esso riferiscesi diviene infinita nei gruppi della serie; ma se si fa astrazione dai punti fissi, che cadono nelle coppie di γ, la serie residua riman neutra soltanto rispetto ad un campo γ', contenente alcune delle δ coppie neutre o diviene addirittura una serie assoluta. E son allora rispettivamente gl'integrali neutri di 1^a specie del campo γ' o gl'integrali assoluti di 1^a specie, che dànno somme costanti: tutti gli altri dànno generalmente somme variabili.

OSSERVAZIONE 2^a. — Dal teorema diretto si può trarre una nuova dimostrazione del teorema di Riemann-Roch per le serie neutre, imitando il procedimento da me esposto altrove nel caso classico [1].

26. IL TEOREMA D'INVERSIONE IN UN CAMPO NEUTRO. — Le somme dei π integrali neutri di 1^a specie della curva data in un gruppo di π punti variabili, sono funzioni analitiche (a infiniti valori) del gruppo. In qual modo ed in qual misura queste funzioni posson invertirsi? Nel campo assoluto ($\delta = 0$) è questo il classico problema d'inversione di JACOBI, di cui RIEMANN ha dato la soluzione generale, la quale afferma che il gruppo (ossia ogni funzione razionale simmetrica delle coordinate de' suoi punti) è funzione univoca ($2p$ volte periodica) di quelle somme.

Anche nel campo neutro l'inversione porta a funzioni univoche (più volte periodiche). Il procedimento di RIEMANN non è tuttavia estendibile: occorre perciò cercare altre vie onde conseguire lo scopo. Una di queste è offerta da opportune considerazioni di limite, passando dal modello $\bar{f}$, di genere effettivo π al modello f di genere virtuale π e di genere effettivo p $(= \pi - \delta)$.

---

(1) [67, p. 277].

Sia G un gruppo non speciale di π punti, del campo neutro γ, indipendente dal campo; e gli assi coordinati sieno genericamente disposti rispetto a G (il che può sempre ottenersi con una preventiva trasformazione di coordinate). Nessuna delle diramazioni della funzione y nè della funzione $\bar{y}$ (ricavata dalla $\bar{f}$, vicinissima ad f) cade allora nel gruppo.

Sul piano dove si rappresenta x segnamo le imagini $x_1, x_2, \ldots, x_\pi$ dei punti di G; e fissata un'origine O delle integrazioni, scegliamo i cammini d'integrazione $k_1, k_2, \ldots, k_\pi$ da O ad $x_1, x_2, \ldots, x_\pi$, in guisa che non attraversino le zone descritte dai punti di diramazione di $\bar{y}$, mentre $\bar{f}$ si muove sulla falda Φ, in un intorno abbastanza piccolo di f.

Gl'integrali (9), (10), calcolati lungo i cammini k e sommati, dànno luogo a $p + \delta$ somme, che denotiamo con $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_\delta$.

Vogliamo provare che non esiste su f nessun altro gruppo di π punti, distinto da G e indipendente da γ, in cui gl'integrali (9) (10), calcolati lungo cammini d'integrazione arbitrari p. es., dalla stessa origine O, dieno luogo a somme congrue alle a, b, rispetto ai periodi ciclici e polari degli integrali stessi.

Ragioneremo per assurdo, supponendo che esista su f un gruppo G' di π punti, distinto da G e indipendente da γ, ove gl'integrali $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_\delta$ dieno somme congrue ad $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_\delta$.

La scelta generica degli assi garantisce che i punti di diramazione di y e di $\bar{y}$ (per ogni $\bar{f}$ di un intorno abbastanza piccolo di f) non cadono neppure in G'; sicchè possono scegliersi i cammini d'integrazione $k_1', k_2', \ldots, k_\pi'$ da O ai punti $x_1', \ldots, x_\pi'$ imagini dei punti del gruppo G', in modo da evitare le zone descritte dai punti di diramazione di $\bar{y}$, durante la variazione di $\bar{f}$.

Il nostro scopo immediato è ora di mostrare come, nelle ipotesi fatte, esista in $\bar{f}$ un gruppo $\bar{G}$ *non speciale* dell'intorno di G (nella varietà dei gruppi di π punti del piano), in cui gl'integrali abeliani di 1ª specie di $\bar{f}$, $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p, \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_\delta$, i quali a norma del n. 20 (Oss. 2ª) hanno come limiti rispettivi per $\bar{f} \to f$, gl'integrali neutri $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_\delta$, forniscono, per convenienti cammini d'integrazione, le stesse somme a, b, che gli u, v dànno in G; e che esiste inoltre in $\bar{f}$ un gruppo $\bar{G}'$, dell'intorno di G', in relazione al quale gli integrali $\bar{u}$, $\bar{v}$ dànno somme congrue ad a, b, rispetto ai periodi ciclici di questi integrali.

Una volta raggiunto questo scopo, ne conseguirà subito l'assurdità dell'ipotesi. Invero, i gruppi G, G', appartengono agl'intorni rispettivi dei gruppi *distinti* $\bar{G}$, $\bar{G}'$, sono tra loro distinti; e d'altro canto, siccome $\bar{G}$ è non speciale, a norma del classico teorema d'inversione, non può esistere su $\bar{f}$ nessun altro gruppo in cui gl'intetrali abeliani di 1ª specie della curva dieno somme congrue a quelle ch'essi dànno in $\bar{G}$.

Proviamo dunque, in primo luogo, l'esistenza su $\bar{f}$, del gruppo $\bar{G}$. All'uopo si osservi che in $\bar{f}$ c'è un gruppo $\bar{G}_0$, dell'intorno di G, nel quale gl'integrali $\bar{u}$, $\bar{v}$ dànno somme $\bar{a}$, $\bar{b}$ vicinissime rispettivamente alle a, b. Esso è il gruppo (segato su $\bar{f}$, nelle vicinanze dei punti di G, dalle parallele all'asse y condotte per tali punti), che ha sul piano x la stessa imagine $(x_1, x_2, \ldots, x_\pi)$ del gruppo G. Se, nel fatto, si calcolano gli $\bar{u}$, $\bar{v}$ lungo i cammini $k_1, k_2, \ldots, k_\pi$, come si calcolarono gli u, v., si ottengono certe somme $\bar{a}$, $\bar{b}$; e per $\bar{f} \to f$ il gruppo $\bar{G}_0$ tende a G e le $\bar{a}$, $\bar{b}$ tendono alle a, b di uguali indici. Ora, considerato il punto $\bar{a}$, $\bar{b}$ entro un parallelepipedo dei periodi degl'integrali $\bar{u}$, $\bar{v}$, c'è corrispondenza biunivoca analitica, e quindi continua, tra l'intorno di $\bar{a}$, $\bar{b}$ e l'intorno di $\bar{G}_0$, considerato entro la varietà dei gruppi di π punti di $\bar{f}$. Esiste pertanto su $\bar{f}$ un gruppo $\bar{G}$, vicinissimo a $\bar{G}_0$, ove $\bar{u}$, $\bar{v}$ dànno le somme a, b dell'intorno di $\bar{a}$, $\bar{b}$: somme le quali proverranno naturalmente da cammini d'integrazione vicini a $k_1, k_2, \ldots, k_\pi$. Il gruppo $\bar{G}$ appartiene all'intorno del gruppo G di f, perchè esso tende a G, insieme a $\bar{G}_0$, per $\bar{f} \to f$. Inoltre il gruppo $\bar{G}$ è non speciale, avendo per limite un gruppo neutro non speciale G di f.

Ci rimane da dimostrare l'esistenza su $\bar{f}$ del gruppo G'. Qui occorre introdurre esplicitamente i periodi degl'integrali u, v; $\bar{u}$, $\bar{v}$.

Ricordiamo (n. 24) che tra i cicli lineari di $\bar{f}$ ve ne sono $2p$, che tendono ad altrettanti cicli lineari indipendenti di f; e δ_1 (ove $\delta_1 \leq \delta$ è il numero dei *nodi* virtualmente inesistenti di f) che tendono ad altrettanti cicli (nulli) ciascuno dei quali avvolge, sopra uno dei due fogli di f, uno dei δ_1 nodi predetti. Gl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ non hanno che i periodi (ciclici) relativi ai $2p$ cicli cui si è alluso; sieno

$$\omega_{h1}, \ \omega_{h2}, \ldots, \ \omega_{h2p} \qquad (h = 1 \ldots, p)$$

questi periodi di u_h.

L'integrale v_j ($j = 1, \ldots, \delta_1$) ha i periodi ciclici relativi ai medesimi $2p$ cicli ed un periodo polare θ_j, relativo al nodo di f escluso nel costruire v_j; complessivamente sieno

$$\omega_{p+j,1}, \ldots, \omega_{p+j,2p} \, ; \ \theta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \delta_1)$$

i periodi di v_j.

L'integrale v_l ($l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta$), essendo di 2ª specie, ha i soli $2p$ periodi ciclici relativi ai $2p$ cicli e sieno

$$\omega_{p+l,1}, \ldots, \omega_{p+l,2p} \qquad (l = \delta_1 + 1, 2, \ldots, \delta) \, .$$

Denotiamo infine con

$$\begin{array}{lll} \bar{\omega}_{h1}, \ldots\ldots, \bar{\omega}_{h,2p} & & (h = 1, \ldots, p) \\ \bar{\omega}_{p+j,1}, \ldots\ldots, \bar{\omega}_{p+j,2p} \, ; & \theta_j & (j = 1, 2, \ldots, \delta_1) \\ \bar{\omega}_{p+l,1}, \ldots\ldots, \bar{\omega}_{p+l,2p} & & (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta) \end{array}$$

i periodi rispettivi degl'integrali $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p; \bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{\delta_1}; \bar{v}_{\delta_1+1}, \ldots, \bar{v}_\delta$, aventi per limiti i periodi omonimi degl'integrali u, v.

Secondo l'ipotesi, le somme a', b' degli u, v in G', lungo i cammini k', soddisfanno a relazioni del tipo:

$$
\begin{array}{ll}
a_h' = a_h + m_1 \omega_{h1} + \dots + m_{2p} \omega_{h,2p} & (h = 1, \dots, p) \\
b_j' = b_j + m_1 \omega_{p+j,1} + \dots + m_{2p} \omega_{p+j,2p} + n_j \theta_j & (j = 1, \dots, \delta_1) \\
b_l' = b_l + m_1 \omega_{p+l,1} + \dots + m_{2p} \omega_{p+l,2p} & (l = \delta_1 + 1, \dots, \delta) ,
\end{array}
$$

ove m, n son numeri interi dipendenti soltanto dai cammini d'integrazione.

Il gruppo $\overline{G_0}'$ di $\bar{f}$ rappresentato nel piano x dalla stessa imagine $(x_1', x_2', \dots, x_\pi')$ del gruppo G' di f, fornisce, per gl'integrali $\bar{u}$, $\bar{v}$, lungo i cammini k', le somme a', b', prossime ad $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, perchè, per $\bar{f} \to f$, il gruppo $\bar{G}_0'$ tende a G'.

Formiamoci ora le quantità:

$$
\begin{array}{ll}
\bar{a}_h'' = a_h + m_1 \bar{\omega}_{h1} + \dots + m_{2p} \bar{\omega}_{h,2p} & (h = 1, \dots, p) \\
\bar{b}_j'' = b_j + m_1 \bar{\omega}_{p+j,1} + \dots + m_{2p} \bar{\omega}_{p+j,2p} + n_j \bar{\theta}_j & (j = 1, \dots, \delta_1) \\
\bar{b}_l'' = b_l + m_1 \bar{\omega}_{p+l,1} + \dots + m_{2p} \bar{\omega}_{p+l,2p} & (l = \delta_1 + 1, \dots, \delta)
\end{array}
$$

congrue alle a, b, rispetto ai periodi degl'integrali $\bar{u}$, $\bar{v}$ e caratterizzanti quindi su $\bar{f}$, come somme inerenti a questi integrali, il solo gruppo non speciale $\overline{G}$.

Ebbene, siccome per $\bar{f} \to f$ le $\bar{a}''$, $\bar{b}''$, come le $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, hanno per limiti le a, b, la continuità della univoca corrispondenza fra l'intorno del punto $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, considerato dentro un parallelepipedo dei periodi degli $\bar{u}$, $\bar{v}$, e l'intorno del gruppo $\overline{G_0}'$, o per meglio dire della serie $|\overline{G_0}'|_\gamma$, entro la totalità delle g_π di $\bar{f}$, ci assicura dell'esistenza d'una g_π vicinissima a $|G_0'|_\gamma$ e relativa alle somme $\bar{a}''$, $\bar{b}''$; epperò di un gruppo $\overline{G'}$ di questa g_π, prossimo a $\overline{G_0}'$, ossia a G'. Ciò è assurdo, perchè il gruppo $\overline{G'}$, essendo prossimo a G', è distinto da $\overline{G}$, mentre, essendogli equivalente, dovrebbe coincidere con $\overline{G}$.

Resta così acquisito il seguente *teorema d'inversione nel campo neutro* γ:

In un campo neutro, di genere virtuale π, *un gruppo non speciale di* π *punti (indipendente dal campo) è funzione analitica uniforme delle somme, nei punti del gruppo, dei* π *integrali abeliani neutri di* 1ª *specie.*

OSSERVAZIONE. — È appena necessario osservare che il teorema può riferirsi non soltanto agl'integrali u, v presi in considerazione, ma a π integrali neutri indipendenti di 1ª specie, qualsiansi, perchè si passa dagli uni agli altri (a prescindere da irrilevanti costanti additive) con una sostituzione lineare omogenea a modulo non nullo.

27. IL TEOREMA D'ABEL INVERSO IN UN CAMPO NEUTRO. — Il teorema del n. prec. inverte già il teorema d'Abel nei confronti dei gruppi neutri non speciali di π punti. Ma da esso è altresì facile dedurre l'analoga conclusione in generale, cioè per due gruppi qualunque A, B, di un ugual numero n di punti, indipendenti da γ. Scegliamo invero un gruppo non speciale G, di π punti, indipendente da γ. Poichè, variando G la serie completa non speciale $|A+G|_\gamma$, di ordine $n + \pi$ e di dimensione n, percorre la totalità delle ∞^π serie analoghe $g^n_{n+\pi}$, sicchè il resto $|(A + G) - B|_\gamma$ percorre la totalità dei gruppi di π punti, quando G è generico il resto medesimo riducesi ad un sol gruppo non speciale G', di π punti, *indipendente da* γ. I due gruppi G, G' coincidono allora e soltanto allora che $A \equiv B$ (in γ).

Ora, se u, v dànno in A, B somme congrue (mod. ω, θ), siccome in tutti i gruppi di $|A + G|_\gamma$, indipendenti da γ, gli integrali stessi dànno somme congrue, pel teorema d'Abel diretto, così anche in G, G' gl'integrali u, v dànno somme congrue. Ma allora, essendo G, G' non speciali e indipendenti da γ, pel teorema d'inversione, risulta $G = G'$, epperò $A \equiv B$: il che costituisce la reciproca del teorema di Abel.

Riunendo in un solo enunciato proposizione diretta e inversa, potremo dunque dire che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè in un campo neutro γ, di genere virtuale π, due gruppi di n punti, indipendenti da γ, sieno equivalenti, è che i π integrali neutri abeliani di 1ª *specie dieno in essi somme congrue (rispetto ai loro periodi).*

OSSERVAZIONE. — A norma del teorema precedente, la determinazione della serie $|A|_\gamma$, del campo γ, individuata da un gruppo A di n punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ del modello f, equivale all'integrazione del sistema pfaffiano:

$$\frac{\varphi_h(x_1, y_1)}{f'_{y_1}} dx_1 + \ldots + \frac{\varphi_h(x_n, y_n)}{f'_{y_n}} dx_n = 0 \quad (h = 1, \ldots, p),$$

$$\frac{\varphi_l(x_1, y_1)}{f'_{y_1}} dx_1 + \ldots + \frac{\varphi_l(x_n, y_n)}{f'_{y_n}} dx_n = 0 \quad (l = p + 1, \ldots, p + \delta).$$

Il teorema di unicità e di esistenza per questo sistema cade in difetto soltanto quando il gruppo A sia *dipendente* da γ, perchè allora qualcuno dei coefficienti dei differenziali diviene infinito (con una singolarità logaritmica o polare). Da ciò la necessità, anche dal punto di vista puramente analitico, di individuare la costruenda serie completa con un gruppo A indipendente da γ.

28. ALCUNE PROPRIETÀ DEL SISTEMA LINEARE D'INTEGRALI SEMPLICI VIRTUALMENTE DI 1ª SPECIE SOPRA UNA VARIETÀ QUASI ABELIANA SPECIALE. — Per gli scopi ulteriori occorre a questo punto approfondire le proprietà degl'integrali semplici che sulla varietà quasi abeliana V_π, rappresentante i gruppi di π punti della curva C, di genere effettivo p, sulla quale è fissato il campo neutro γ, provengono dagl'integrali $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_\delta$ di C.

Effettivamente le somme dei valori di questi integrali nei punti di una π-pla variabile su C sono π *integrali di differenziali totali, appartenenti alla varietà quasi abeliana* V_π: si diranno ivi integrali *virtualmente di* 1ª *specie*, iu quanto i π iutegrali abeliani neutri di C si considerano, rispetto a γ, *come se fossero di* 1ª *specie*. In realtà i π integrali semplici di V_π, che indicheremo rispettivamente (per non moltiplicare le notazioni e perchè non c'è pericolo di ambiguità) con $u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_\pi$, sono di 1ª, 3ª e 2ª specie. Precisamente: $u_1, u_2, \ldots, u_p$ son di 1ª specie; $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ son di 3ª specie e $u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ son di 2ª specie. Aggiungasi che, per l'ordinario teorema di Abel, *gl'integrali* $u_1, u_2, \ldots, u_p$ *son costanti lungo ogni* M_δ.

Diciamo A_j, B_j, la coppia di γ dove l'integrale v_j di C presenta le proprie singolarità logaritmiche ($j = 1, \ldots, \delta_1$) ed $A_l = B_l$ la coppia di γ, costituita da due punti coincidenti ($l = \delta_1 + 1, \ldots, \pi$), dove l'integrale v_l presenta il proprio polo di 1º ordine.

Allora l'integrale u_{p+j} ha come varietà logaritmiche le sole varietà, a $\pi - 1$ dimensioni, $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, che rappresentano su V_π le π-ple coi punti fissi rispettivi A_j, B_j; e l'integrale u_{p+l} ha come sola varietà polare di 1º ordine la $\mathfrak{B}_l$, che rappresenta le π-ple col punto fisso A_l.

Il periodo (polare) di u_{p+j} lungo $\mathfrak{A}_j$ è uguale al periodo θ_j ($\neq 0$) di v_j in A_j; perchè l'indeterminazione di u_{p+j} in un punto di V_π è soltanto a meno dei periodi ciclici di v_j (che permangono immutati passando a u_{p+j}) e del periodo polare di v_j in A_j. Del resto il calcolo diretto del valore dell'integrale u_{p+j} lungo un ciclo nullo, semplicemente concatenato con $\mathfrak{A}_j$ (cioè lungo un ciclo riducibile per deformazione ad un punto di $\mathfrak{A}_j$ senza traversare ulteriormente nè $\mathfrak{A}_j$, nè $\mathfrak{B}_l$) dà proprio il valore θ_j. Basta all'uopo assumere come cammino d'integrazione il ciclo lineare orientato di V_π, imagine del luogo di una π-pla di C avente $\pi - 1$ punti fissi e l'ulteriore punto variabile lungo un ciclo nullo orientato circondante A_j. Il periodo di u_{p+j}

lungo $\mathfrak{B}_j$ (a uguale orientazione del ciclo d'integrazione rispetto all'orientazione di $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$) è $-\theta_j$ (¹).

Gl'integrali $u_1, \ldots, u_\pi$ sono tra loro linearmente indipendenti, perchè provengono da integrali indipendenti di C; cioè nessuna loro combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli riducesi ad una costante. Come si può ora definire il sistema lineare Σ, $\infty^{\pi-1}$, determinato da quei π integrali, a prescindere dalla posizione particolare ch'essi occupano entro Σ?

Per rispondere premettiamo taluni concetti e definizioni.

Anzitutto chiamiamo *associate* due varietà logaritmiche di un integrale semplice di 3ª specie di V_π, quando i periodi polari dell'integrale, ad esse relativi, sono opposti di segno. Le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ son associate rispetto a u_{p+j}.

Ricordiamo inoltre che un integrale semplice di 2ª specie, avente una varietà polare di 1° ordine, possiede lungo questa taluni *punti d'indeterminazione* (che son sempre, a norma della teoria delle funzioni di più variabili complesse, *punti singolari essenziali*), i quali formano una varietà caratteristica della data varietà, ossia l'intersezione di questa con una varietà infinitamente vicina del sistema continuo cui essa appartiene (²). Si chiamerà la *varietà d'indeterminazione* dell'integrale considerato di 2ª specie. Essa individua la *funzione residua* dell'integrale lungo la propria varietà polare, a meno di una costante moltiplicativa.

Proviamo che *la varietà d'indeterminazione dell'integrale semplice di 2ª specie u_{p+l} è l'intersezione $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ della varietà $\mathfrak{A}_l$ colla varietà che le è infinitamente vicina nel sistema ∞^1 cui $\mathfrak{A}_l$ appartiene.*

Basta, per dimostrarlo, provare che sopra una *qualunque* curva algebrica D, tracciata su V_π e passante per un punto P

(¹) Il significato del segno di un periodo polare d'un integrale semplice di 3ª specie sopra una varietà algebrica, sarà precisato in generale nel n. 40.

(²) [**59**, p. 34]. Nel testo si applica l'estensione, alle varietà, del teorema fondamentale dimostrato per le superficie nel mio citato lavoro. Questa estensione si troverà in un mio libro di prossima pubblicazione (vol. II dell'Opera [**78**].

della varietà $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$, l'integrale u_{p+l} subordina un integrale abeliano che non è più di 2^a specie, ma assume in P un valore finito. Invero, se così è, P non può essere un polo di u_{p+l}, perchè sopra una *generica* curva per un polo l'integrale subordinato diviene nel polo effettivamente infinito. E se P non è un polo, non può che essere un punto d'indeterminazione, in quanto è punto d'accumulazione di poli e d'altronde u_{p+l} non possiede che singolarità inessenziali.

Consideriamo dunque l'integrale abeliano v_l, di 2^a specie, della curva C, da cui proviene u_{p+l}. La varietà $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ rappresenta le π-ple col punto doppio A_l e la curva D rappresenta una serie ∞^1 algebrica di π-ple, contenente il gruppo G_0 (col punto doppio A_l) che ha per imagine P. Si riprenda il ragionamento del n. 25, adattandolo al caso presente e si chiami u_{p+l} l'integrale considerato sopra D ed s_l la somma dei valori di v_l in un gruppo variabile nella predetta serie ∞^1. Per un gruppo di questa serie e pel punto imagine su D vale la relazione $s_l = u_{p+l}$. Siccome s_l assume lo stesso valore in tutti i punti di un gruppo della serie ∞^1, se u_{p+l} in P ha un polo, s_l diviene infinita in ogni punto di G_0 e quindi ha in A_l un polo di 2^o ordine. Ciò è assurdo, perchè nel far la somma dei valori di v_l nei punti di G_0, l'ordine del polo A_l non può crescere. La conclusione è, come volevasi, che u_{p+l} *sopra* D è finito in P.

Siamo così in possesso di tutti gli elementi atti a rispondere alla domanda posta al principio del presente n. E la risposta è la seguente:

Gl'integrali semplici virtualmente di 1^a *specie, mediante cui si definisce una varietà quasi abeliana* V_π, *formano un sistema lineare* Σ, $\infty^{\pi-1}$, *il quale è determinato dalla condizione che un suo generico integrale è di fatto di* 3^a *specie e possiede coppie di varietà logaritmiche associate nelle* $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ *e varietà polari di* 1^o *ordine nelle* $\mathfrak{A}_l$, *avendo su ciascuna di queste ultime, come varietà d'indeterminazione, l'intersezione colla varietà ad essa infinitamente vicina, nel sistema* ∞^1 *cui appartengono tutte le varietà singolari.*

Sia infatti u un integrale semplice di 3ª specie di V_π soddisfacente alle condizioni dell'enunciato. Poichè u e u_{p+j} hanno le stesse varietà logaritmiche associate $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, esistono delle costanti μ_j (rapporti di periodi polari) tali che $u - \Sigma \mu_j u_{p+j}$ non ha più alcuna varietà logaritmica: è di 2ª specie, colle varietà polari $\mathfrak{A}_l$. Siccome poi $u - \Sigma \mu_j u_{p+j}$ e u_{p+l} hanno sopra $\mathfrak{A}_l$ la stessa varietà d'indeterminazione, esistono altre costanti μ_l tali che

$$u - \sum_{j=1}^{\delta_1} \mu_j u_{p+j} - \sum_{l=\delta_1+1}^{\delta} \mu_l u_{p+l}$$

non ha più alcuna singolarità: è di 1ª specie. Epperò vi sono delle costanti λ_h siffatte che:

$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p + \mu_1 u_{p+1} + \ldots + \mu_\delta u_\pi \;;$$

e ciò dimostra il teorema.

Spingiamo oltre (perchè occorre in seguito) l'analisi delle proprietà del sistema lineare Σ degli $\infty^{\pi-1}$ integrali definiti dal precedente teorema.

Le varietà $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, se $p > 0$, non sono linearmente equivalenti su V_π (mentre sono algebricamente equivalenti). Invero, esse staccano sopra una curva generica di V_π gruppi non equivalenti (equivale a dire che le π-ple di una generica serie algebrica ∞^1 di gruppi di π punti su C, passanti per A_j, B_j, non sono equivalenti). Tuttavia è possibile costruire una funzione razionale del punto di V_π che si annulli del 1° ordine lungo $\mathfrak{A}_j$ e divenga infinita del 1° ordine lungo $\mathfrak{B}_j$. Infatti le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, appartengono come varietà totali ad un sistema ∞^1, staccano sopra ogni M_δ di V_π due varietà $(\mathfrak{A}_j, M_\delta)$, $(\mathfrak{B}_j, M_\delta)$, che son algebricamente, eppero (trattandosi di una varietà razionale) linearmente equivalenti.

Su M_δ resta così definita, a meno di una costante moltiplicativa ,una funzione razionale $\overline{R}_j$ del punto di M_δ, dalle $(\mathfrak{A}_j, M_\delta)$, $(\mathfrak{B}_j, M_\delta)$ assunte rispettivamente come varietà zero del 1° ordine e come varietà polare del 1° ordine di $\overline{R}_j$. La costante moltiplicativa si può poi razionalmente determinare, fissando una unisecante delle M_δ (p. es. una delle W_p definite nel n. 22) e dividendo la $\overline{R}_j$ considerata pel valore ch'essa assume nel punto (W_p, M_δ). Così preparata la funzione razionale $\overline{R}_j$, essa è razionalmente fissata sopra una generica M_δ e quindi, variando questa nella propria involuzione ∞^p, $\overline{R}_j$ genera una funzione razionale R_j del punto di V_π, la quale ha le varietà $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, come varietà zero e infinito del 1° ordine. Naturalmente la completa varietà degli zeri e dei poli di R_j, consta delle $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ e rispettivamente di due altre varietà $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$ che non hanno intersezioni colla generica M_δ, cioè che son composte ciascuna con ∞^{p+1} varietà M_δ dell'involuzione ∞^p.

Poichè su V_π:

$$\mathfrak{A}_j + \mathfrak{A}_j' \equiv \mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_j'$$

come complete varietà degli zeri e dei poli di R_j ed è

$$\mathfrak{A}_j \equiv \mathfrak{B}_j$$

risulta pure

$$\mathfrak{A}'_i \equiv \mathfrak{B}'_j$$

ma non

$$\mathfrak{A}_j' \equiv \mathfrak{B}_j' .$$

Se ora si considera

$$\log R_j = \int \frac{d R_j}{R_j} ,$$

questo è su V_π un integrale semplice di 3ª specie colle varietà logaritmiche associate $\mathfrak{A}_j + \mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_j'$, onde, moltiplicando $\log R_j$ per la costante non nulla k_j, ove sia $\theta_j = 2 \pi i k_j$ il periodo polare di u_{p+j}, l'integrale

$$u_{p+j} - k_j \log R_j$$

non ha più le varietà logaritmiche $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, ma soltanto le $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$ [1]. Ogni integrale u_{p+j} può dunque porsi sotto la forma:

$$u_{p+j} = k_j R_j \log R_j + w_{p+j} \ ,$$

ove w_{p+j} è un integrale semplice di 3ª specie avente le varietà logaritmiche $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$. L'integrale w_{p+j} ha gli stessi periodi *ciclici* dell'integrale u_{p+j}, perchè log R_j non ha alcun periodo ciclico. Il periodo polare di w_{p+j} è quello spettante alla funzione $- k_j \log R_j$.

Vediamo che cosa si può dire di analogo per un integrale u_{p+l}. La varietà $(\mathfrak{A}_l, M_\delta)$, sulla quale sia assegnata come varietà d'indeterminazione per una costruenda funzione razionale R_l del punto di M_δ, la varietà $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l, M_\delta)$, individua, a meno di una costante moltiplicativa, una funzione razionale $\overline{R_l}$ del punto di M_δ [2], e, al solito, questa funzione può essere razionalmente individuata, in modo che non rimanga l'ambiguità della costante moltiplicativa, dividendola pel valore da essa assunto nel punto $(W_p \ , M_\delta)$ staccato su M_δ da una fissata unisecante W_p. Da ciò, il luogo di $\overline{R_l}$ al variare di M_δ, è una funzione razionale R_l del punto di V_π, la quale ha la varietà polare di 1° ordine $\mathfrak{A}_l$, con ivi la medesima varietà d'indeterminazione, che compete all'integrale u_{p+l}. Pertanto esiste una costante conveniente μ_l (rapporto non nullo delle funzioni residue di R_l e di u_{p+l} lungo $\mathfrak{A}_l$, funzioni che differiscono appunto per una costante moltiplicativa) tale che $u_{p+l} - \mu_l R_l$ non ha più la varietà polare $\mathfrak{A}_l$, ma ha invece come varietà polare una varietà $\mathfrak{A}_l'$ non incontrante la generica M_δ e composta quindi con ∞^{p-1} varietà M_δ. La $\mathfrak{A}_l'$, se $p > 0$, non può man-

(1) Se $k_j \log R_j$ ha i periodi polari $2 \pi i k_j$, $-2 \pi i k_j$ in ordine diverso da come si presentano per le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ in relazione ad u_{p+j}, si considererà, invece di R_j, *la funzione razionale* $\dfrac{1}{R_j}$.

(2) Per un integrale di 2ª specie, che riducasi ad una funzione razionale sopra una varietà (anche non razionale) il gruppo d'indeterminazione non è che il gruppo base del fascio delle varietà di livello costante di questa funzione.

care, perchè se no la $(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_l)$ sarebbe varietà base di un fascio lineare contenente totalmente $\mathcal{A}_l$; e, siccome la varietà infinitamente vicina ad $\mathcal{A}_l$ nel sistema ∞^1 delle $\mathcal{A}$ passa pure per $(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_l)$, essa apparterrebbe al fascio, cioè due $\mathcal{A}$ infinitamente vicine sarebbero equivalenti e lo sarebbero perciò tutte le $\mathcal{A}$.

Pertanto scrivendo R_l invece di $\mu_l\, R_l$ (cioè inglobando la costante μ_l nella funzione) si può porre:

$$u_{p+l} = R_l + w_{p+l} \ ,$$

ove w_{p+l} è un integrale di 2ª specie avente la sua varietà polare $\mathcal{A}_l'$ composta colle M_δ .

In conclusione:

Ogni integrale del sistema Σ, $\infty^{\pi-1}$, *di cui all'enunciato precedente, può porsi sotto la forma:*

$$\sum_{h=1}^{p} \lambda_h u_h + \sum_{j=1}^{\delta_1} k_j \log R_j + \sum_{l=\delta_1+1}^{\delta} R_l + \sum_{j=1}^{\delta_1} \nu_j w_{p+j} + \sum_{l=\delta_1+1}^{\delta} \nu_l w_{p+l}$$

ove gl'integrali u_h sono in via assoluta di 1ª *specie e w_{p+l}, w_{p+j}, sono rispettivamente di* 2ª *e di* 3ª *specie, colle varietà singolari composte mediante le M_δ.*

Una conseguenza notevole deriva da quanto precede. Scriviamo la tabella dei periodi degl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ (¹):

$$(T) \qquad \begin{array}{l|llllllll}
u_1 & \omega_{11} & \omega_{12} \ldots\ldots & \omega_{1,2p} \ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
u_2 & \omega_{21} & \omega_{22} \ldots\ldots & \omega_{2,2p} \ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
u_p & \omega_{p1} & \omega_{p2} \ldots\ldots & \omega_{p,2p} \ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
u_{p+1} & \omega_{p+1,1} & \omega_{p+1,2} \ldots\ldots & \omega_{p+1,2p} \ldots & \theta_1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
u_{p+\delta_1} & \omega_{p+\delta_1,1} & \omega_{p+\delta_1,2} \ldots\ldots & \omega_{p+\delta_1,2p} \ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & \theta_{\delta_1} \\
u_{p+\delta_1+1} & \omega_{p+\delta_1+1,1} & \omega_{p+\delta_1+1,2} \ldots & \omega_{p+\delta_1+1,2p} & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\
u_\pi & \omega_{\pi 1} \ldots & \omega_{\pi 2} \ldots\ldots & \omega_{\pi,2p} \ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0
\end{array}$$

(¹) Nella tabella si possono anche assumere senza restrizione le θ_j tutte uguali a $2\pi i$, bastando all'uopo alterare $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ di fattori costanti. Con ciò le k_j risultano tutte uguali ad uno.

Un *periodo* è il vettore che ha per componenti gli elementi d'una verticale di (T) ed è costituito dai valori degl'integrali lungo un medesimo ciclo, non nullo per le prime $2p$ verticali, nullo per le δ_1 verticali restanti, che contengono i periodi polari di $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$. Complessivamente un integrale del sistema lineare Σ ha $2p + \delta_1 = 2\pi - \delta_1 - 2\delta_2$ periodi.

È possibile cangiare gl'integrali con cui s'individua Σ, cioè eseguire una sostituzione lineare omogenea sulle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, in modo da ottenere ancora p integrali in via assoluta di 1ª specie ed altri δ di 3ª specie (o di 2ª) coi periodi ciclici tutti nulli? Una tal riduzione sarebbe importante per la caratterizzazione (di cui poi ci occuperemo) delle funzioni quasi abeliane. Ma le considerazioni precedenti provano che una sostituzione siffatta non esiste. Invero, gl'integrali di 3ª specie si ridurrebbero a logaritmi di funzioni razionali e quelli di 2ª specie a funzioni razionali, il che non è possibile per $p > 0$, perchè due qualunque $\mathfrak{A}$ distinte o infinitamente vicine non sono equivalenti.

Osservazione 1ª. — Si noti che gl'integrali w_{p+j}, w_{p+l} son costanti lungo le M_δ, come gl'integrali u. Invero, sopra una M_δ generica essi son di 1ª specie; e una varietà razionale non possiede integrali semplici di 1ª specie diversi dalle costanti.

Osservazione 2ª. — Prese sopra una varietà di Jacobi imagine delle ∞^p M_δ, p. es., sopra una W_p, $\delta_1 + \delta_2$ funzioni razionali linearmente indipendenti, la sostituzione razionale da W_p a V_π le muta in altrettante funzioni razionali S_j $(j = 1, \ldots, \delta_1)$, S_l $(l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta)$, le cui varietà di livello son composte colle M_δ. Se si assume:

$$w_{p+j} = \log S_j \, , \qquad w_{p+l} = S_l \, ,$$

si hanno complessivamente, cogli u_h, $p + \delta$ integrali semplici indipendenti di V_π (tutti costanti sulle M_δ) ai quali spetta una tabella (T) in cui son nulle tutte le ω degli u_{p+j}, u_{p+l}. Ma una tabella siffatta non ha rapporto col campo neutro γ, il quale richiede che si consideri V_π come varietà delle π-ple di punti di C e non come prodotto di una varietà di Jacobi e di uno spazio lineare S_δ. È invero soltanto da quest'ultimo punto di vista che si presentano gl'integrali $u_1, \ldots, u_\pi$, quali sono stati costruiti nella presente osservazione. La questione sarà chiarita pienamente in seguito da un punto di vista generale (n. 48).

OSSERVAZIONE 3ª. — Se come integrali u_h della curva C si assumon gl'integrali normali di 1ª specie e come integrali u_{p+j}, u_{p+l} rispettivamente gl'integrali normali di 3ª specie relativi alle coppie logaritmiche A_j, B_j e gl'integrali normali di 2ª specie relative ai poli A_l (1), la tabella (T) assume la forma particolare, ma non restrittiva:

$$(T) \qquad \begin{vmatrix} A & \Omega & O \\ O & \Omega_1 & B \\ O & \Omega_2 & O \end{vmatrix} \, .$$

ove le prime due colonne simbolizzano ciascuna p verticali, l'ultima, δ_1 verticali; la prima riga simbolizza p orizzontali, la seconda δ_1 e la terza δ_2. Inoltre A, B sono determinanti di ordini rispettivi p, δ_1 aventi nulli tutti gli elementi salvo quelli delle diagonali principali, che son uguali a $2\pi i$.

Per Ω son soddisfatte le condizioni:

1)

$$(11) \qquad \omega_{hk} = \omega_{kh} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, p) \, .$$

2) Le parti reali delle ω_{hk} $(h, k = 1, 2, \ldots, p)$ son coefficienti d'una forma quadratica definita negativa.

Si possono approfondire ulteriormente le proprietà della

(1) Per ottenere questo bisogna eseguire sugli integrali $u_1, \ldots, u_\pi$ una sostituzione lineare che cangia gli $u_1, u_2, \ldots, u_p$ in certe loro combinazioni lineari e gl'integrali restanti in somme dei primitivi e di convenienti combinazioni lineari degli $u_1, \ldots, u_p$. Ciò non altera le proprietà che c'interessano degli $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$. La sostituzione lineare complessiva ha il proprio modulo uguale al modulo della sostituzione operata sugli $u_1, \ldots, u_p$.

tabella (T'), cercando di penetrare meglio la natura degli integrali ω_{p+j}, ω_{p+l}, che figurano nelle espressioni

$$u_{p+j} = \log R_j + w_{p+j} \ , \qquad u_{p+l} = R_l + w_{p+l}$$

sopra assegnate per gl'integrali u_{p+j}, u_{p+l}.

Fissiamo perciò una delle ∞^δ varietà W_p, unisecanti delle M_δ, tracciate in V_π (n. 22): il che corrisponde a fissare su C un gruppo generico H di δ punti. Le varietà a $p - 1$ dimensioni $(\mathfrak{A}_j, W_p)$, $(\mathfrak{B}_j, W_p)$ rappresentano in W_p i gruppi di π punti di C, che passano rispettivamente pei gruppi $H + A_j$, $H + B_j$; cioè nella W_p, concepita come varietà di JACOBI della curva C di genere p, rappresentano i gruppi di p punti con un punto fissato in A_j e in B_j.

Le M_δ che passano pei punti di $(\mathfrak{A}_j, W_p)$, $(\mathfrak{B}_j, W_p)$ riempiono due varietà a $\pi - 1$ dimensioni, che potremo chiamare $\mathfrak{B}_j'$, $\mathfrak{A}_j'$, perchè proprio esse posson assumersi come varietà logaritmiche di w_{p+j}.

Invero, le varietà $\mathfrak{A}_j + \mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_j'$ segnano su W_p la stessa varietà $(\mathfrak{A}_j, W_p) + (\mathfrak{B}_j, W_p)$ e quindi son linearmente equivalenti (¹).

Nei riguardi di w_{p+l}, il modo più rapido per concludere è di considerare u_{p+l} come limite di un integrale semplice di 3ª specie (u_{p+l}) colle varietà logaritmiche $\mathfrak{A}_l$ e $(\mathfrak{B}_l)$, ove $(\mathfrak{B}_l) \to \mathfrak{A}_l$. L'integrale (w_{p+l}) relativo a questo (u_{p+l}) ha allora come varietà logaritmiche $\mathfrak{A}_l'$ e $(\mathfrak{B}_l')$, ottenute da $\mathfrak{A}_l$, $(\mathfrak{B}_l)$ allo stesso modo che $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$ da $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, e al limite si ottiene l'integrale w_{p+l}, avente come varietà polare del 1º ordine $\mathfrak{A}_l'$ e come varietà d'indeterminazione $(\mathfrak{A}_l' , \mathfrak{A}_l')$, varietà caratteristica di $\mathfrak{A}_l'$ nel sistema ∞^1, corrispondente ai punti di C, a cui $\mathfrak{A}_l'$ appartiene.

Ciò posto, in base alle classiche relazioni che nella teoria

(¹) Qui s'applica l'estensione alle varietà di uno de' miei criteri di equivalenza sulle superficie. Ved [**78**, p. 94]. Due varietà a $\pi - 1$ dimensioni, contenute in una V_π, che stacchino varietà equivalenti sopra una W_p fissata in un sistema continuo che non sia involutorio, son equivalenti.

degli integrali abeliani forniscono i periodi degl'integrali normali di 2ª e 3ª specie ai cicli normali [1], si ha

$$\omega_{p+j,h} \equiv u_h(A_j) - u_h(B_j) \text{ (modd. periodi degli } u), \omega_{p+\delta_1+l,h} = -\frac{\varphi_h(A_l)}{f_y'(A_l)},$$

ove pei secondi membri si son adottate le notazioni del n. 23.

Nei primi membri si sono scritti i periodi ciclici degl'integrali u_{p+j}, $u_{p+\delta_1+l}$ ($l = 1, \ldots, \delta_2$), perchè, come abbiamo già avvertito, u_{p+j} e w_{p+j} hanno gli stessi periodi ciclici e così $u_{p+\delta_1+l}$ e $w_{p+\delta_1+l}$. E d'altronde u_{p+j}, $u_{p+\delta_1+l}$ hanno rispettivamente gli stessi periodi ciclici di v_j, v_{δ_1+l}

Restano così precisati i valori dei periodi ciclici di tutti gli integrali u_{p+j}, $u_{p+\delta_1+l}$.

29. Un'altra via per arrivare al teorema d'inversione: il teorema sopra una varietà razionale. — Non soltanto per l'importanza dell'argomento, ma anche per preparare gli strumenti adatti allo studio, che successivamente faremo, delle funzioni quasi abeliane, indichiamo qui un'altra via onde conseguire il teorema d'inversione.

Occorre all'uopo premettere alcune proprietà fondamentali della varietà quasi abeliana V_π, che corrisponde a $p = 0$ (e quindi a $\pi = \delta$). Essa non è che l'imagine della varietà dei gruppi di δ punti di una curva razionale C, concepiti come gruppi non speciali di un campo neutro γ, di genere virtuale π, definito su C da δ coppie date di punti.

Quando il modello assunto per C sia privo di punti multipli, come supponiamo — e talora ci gioverà tener quale modello

---

[1] [67, pp. 261, 265]. Se il cammino d'integrazione per calcolar la differenza $u_h(A_j) - u_h(B_j)$ si sceglie in modo che non tagli nessuna delle retrosezioni cui riferiscesi la normalizzazione deglintegrali, la congruenza che segue può sostituirsi con una vera e propria uguaglianza. Inoltre nella riemanniana C il verso del ciclo che serve per calcolare il periodo polare $+ 2\pi i$ in A_j è il verso positivo di C.

di C addirittura una retta r — ogni varietà V_δ, che sia in corrispondenza birazionale senza eccezioni colle δ-ple di punti di C o di r, è una varietà non soltanto razionale, ma *lineare*. Ad un modello simile ci riferiremo in quanto segue. La rappresentazione senza eccezione delle δ-ple di punti di C sopra un S_δ si ottiene, com'è noto, assumendo per C una curva razionale normale di S_δ e associando ad ogni δ-pla di punti di C il punto comune agl'iperpiani osculatori a C nei punti della δ-pla. I gruppi di δ punti di C, di cui sia fissato un punto P, son rappresentati dai punti dell'iperpiano osculatore in P.

Dal punto di vista analitico questa rappresentazione equivale ad assumere a coordinate omogenee di punto di S_δ i coefficienti di un'equazione di grado δ, cioè a coordinate non omogenee le funzioni simmetriche elementari delle radici di questa equazione, individuanti un gruppo di δ punti della retta r.

Premesse queste elementari proprietà, consideriamo su r una delle coppie A_j, B_j del campo, costituite da punti distinti ($j = 1, \ldots, \delta_1$) e siano α_j, β_j le ascisse di A_j, B_j [1].

Su C gl'integrali neutri di 1^a specie del campo γ son soltanto gl'integrali $v_1, v_2, \ldots, v_\delta$. Sappiamo che, fra questi, $v_1, v_2, \ldots, v_{\delta_1}$, son in via assoluta integrali di 3^a specie, mentre $v_{\delta_1+1}, \ldots, v_\delta$ $(\delta = \delta_1 + \delta_2)$ sono di 2^a specie.

Designato al solito con v_j l'integrale relativo alla coppia A_j, B_j e con $2\pi i$ l'unico periodo (polare) ch'esso possiede (e che si presenta con segni opposti nei due punti A_j, B_j), poichè la funzione razionale $\dfrac{d\,v_j}{dx}$ (x ascissa variabile su r) si riduce, a meno di un'eventuale costante additiva, a

$$\frac{1}{x-\alpha_j} - \frac{1}{x-\beta_j}$$

[1] Siamo naturalmente nel campo proiettivo: i due punti posson perciò supporsi al finito, portandoveli, se occorre, con una preventiva trasformazione omografica.

se ne deduce, com'è ovvio, che, a meno di una costante additiva, che trascuriamo, è

$$v_j = \log \frac{x - \alpha_j}{x - \beta_j} \quad (i = 1, 2, \ldots, \delta_1) .$$

Diremo che v_j è su r l'*integrale normale neutro di* 1ª *specie,* relativo alla coppia A_j, B_j. Esso è determinato dal fatto di possedere soltanto i due punti logaritmici A_j, B_j.

Sia ora v_l ($l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta$) uno degl'integrali restanti. Se $\alpha_l = \beta_l$ è l'ascissa dal punto ove cade la coppia a punti coincidenti, relativa all'integrale stesso, v_l a meno di una costante additiva, che si può trascurare e inglobando nell'integrale un eventuale fattore costante, riducesi alla funzione razionale:

$$v_l = \frac{1}{x - \alpha_l} \qquad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta) .$$

Lo diremo l'*integrale normale neutro di* 1ª *specie,* relativo alla coppia $A_l = B_l$. Esso è determinato dal fatto di possedere il solo polo di 1º ordine A_l.

Gl'integrali u_{p+j}, u_{p+l} di S_δ, provenienti dagl'integrali v_j, v_l, mediante le loro somme nei punti di una δ-pla variabile sulla retta r, hanno come varietà singolari le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, $\mathfrak{A}_l$, che sono tutti iperpiani (invariantivi) di S_δ (n. 22).

Siccome due coppie di iperpiani di S_δ son sempre omograficamente equivalenti e lo stesso può dirsi di una coppia di iperpiani con due $S_{\delta-2}$ assegnati in essi, uno per ciascuno, così un integrale semplice di 3ª specie di S_δ, con due dati iperpiani logaritmici, può trasportarsi omograficamente, a meno di una costante moltiplicativa, in u_{p+j}; e un integrale semplice di 2ª specie di S_δ, con un dato iperpiano polare e un dato $S_{\delta-2}$ d'indeterminazione, può trasportarsi omograficamente, a meno di una costante moltiplicativa, in u_{p+l}. In tal senso u_{p+j} si potrà assumere come *integrale semplice normale di* 3ª *specie,* caratterizzato da due iperpiani (invariantivi) logaritmici; e u_{p+l} come *integrale semplice normale di 2ª specie*, caratterizzato da un iperpiano (invariantivo) polare del 1° ordine e da un dato $S_{\delta-2}$ d'indeterminazione sovra esso.

Ciò premesso, veniamo al teorema d'inversione in S_δ, cioè in una qualunque varietà lineare.

Applicato il teorema d'inversione, già acquisito in generale, alla varietà S_δ dei gruppi di δ punti di r, possiamo affermare che le equazioni:

$$u_{p+j} \equiv b_j \pmod{2\pi i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \delta_1) \tag{12}$$

$$u_{p+l} = b_l \qquad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta)\ , \tag{13}$$

ove b_j, b_l son costanti generiche, individuano un gruppo (non speciale) di δ punti di r, cioè un punto di S_δ.

Ma a noi interessa ora di stabilire per via autonoma questo risultato, perchè esso costituisce il perno della nuova dimostrazione che vogliamo dare in generale del teorema d'inversione. Le (12) porgono senz'altro:

$$\sum_{s=1}^{\delta} \log \frac{x_s - \alpha_j}{x_s - \beta_j} = b_j + 2 n_j \pi i\ ,$$

con n_j intero; donde:

$$\frac{(x_1 - \alpha_j)(x_2 - \alpha_j)\ldots(x_\delta - \alpha_j)}{(x_1 - \beta_j)(x_2 - \beta_j)\ldots(x_\delta - \beta_j)} = c_j\ , \tag{14}$$

avendo posto:

$$c_j = e^{b_j}\ .$$

Le (13) dànno:

$$\sum_{s=1}^{\delta} \frac{1}{x_s - \alpha_l} = c_l\ , \tag{15}$$

ove si è scritto c_l al posto di b_l.

Le (14), (15), ridotte a forma intera, costituiscono un sistema di δ equazioni lineari nelle δ funzioni simmetriche elementari di $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$, cioè nelle coordinate (non omogenee) di punto in S_δ. Esse pertanto individuano *un punto* di S_δ. Bisogna in verità, per stabilire rigorosamente questa conclusione, provare che quando le costanti b, cioè le c, son generiche, il determinante D dei coefficienti di queste equazioni non è nullo.

Senza rendere esplicita l'espressione di D, poniamo:

$$c_j = \frac{c_j'}{c_j''}, \quad c_l = \frac{c_l'}{c_l''},$$

e riduciamo a forma intera le (14), (15), nei cui coefficienti figureranno in forma intera le costanti c', c''. Se D fosse nullo per generici valori delle c, cioè delle c', c'', sarebbe nullo anche assumendo $c_j'' = 0$, $c_l'' = 0$ per ogni j, l. Ora con tali posizioni le (14), (15) divengono:

$$(x_1 - \alpha_k)(x_2 - \alpha_k) \ldots (x_\delta - \alpha_k) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, \delta)$$

e il determinante di queste δ equazioni lineari, nelle funzioni simmetriche elementari delle x, è, a meno del segno, il determinante di VANDERMONDE delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\delta$. Poichè questi valori delle α son distinti fra loro, il determinante stesso è diverso da zero; epperò D non è nullo per generici valori delle c, cioè delle b. A generici valori delle b corrisponde pertanto su r una sola δ-pla di punti, che non è speciale e indipendente da γ.

Il teorema d'inversione è così dimostrato per $p = 0$. Esso può altresì enunciarsi in relazione ad una varietà lineare, come segue:

Sopra una varietà lineare ∞^δ, *un sistema lineare di* δ $(= \delta_1 + \delta_2)$ *integrali semplici normali, indipendenti, dei quali* δ_1 *di* 3^a *specie e* δ_2 *di* 2^a *specie, è univocamente invertibile.*

Riferito il teorema ad una varietà razionale, esso afferma l'esistenza ivi di sistemi di δ integrali univocamente invertibili.

OSSERVAZIONE. — Le (14), (15), variando i parametri c_j, c_l, dànno δ fasci d'iperpiani invarianti, individuati, per $j = 1, \ldots, \delta_1$, dalle coppie A_j, B_j; e, per $l = \delta_1 + 1, \ldots, p$ dagl'interpiani invarianti A_l, per ciascuno dei quali è segnato lo spazio base del fascio (cioè la varietà d'indeterminazione di u_{p+l}).

L'indipendenza lineare delle (14), (15), per valori generici dei parametri c_j, c_l, equivale ad escludere che gli assi dei δ fasci d'iperpiani passino per un medesimo punto (la cosa è quasi evidente sotto forma duale).

Ognuno degl'iperpiani del fascio A_j, B_j è il luogo dei punti di M_δ, che soddisfanno ad una congruenza del tipo (12); e ognuno degl'iperpiani del fascio cui appartiene A_l è il luogo dei punti di M_δ, che soddisfanno ad un'equazione del tipo (13).

Cioè *le condizioni* (12), (13), *prese ciascuna in sè, sono algebriche, entro M_δ* (*lineari* entro la varietà *lineare* M_δ).

30. CONTINUAZIONE: DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA D'INVERSIONE NEL CASO GENERALE. — Passiamo al campo neutro γ, determinato da δ coppie sopra una curva C di genere $p > 0$. A norma del n. 28 l'integrale u_{p+j} di V_π subordina sopra una *generica* M_δ il log R_j, che ha per varietà singolari $(\mathfrak{A}_j, M_\delta)$ e $(\mathfrak{B}_j, M_\delta)$. Ora queste varietà rappresentano i gruppi della g_π^δ di C, di cui M_δ è immagine, che passano per A_j o per B_j, cioè un ente *lineare* $\infty^{\delta-1}$, il quale, in una rappresentazione senza eccezione, di g_π^δ su un S_δ, qual'è p. es. quella offerta da un sistema lineare segante la serie, vien rappresentato da un iperpiano.

Le varietà $(\mathfrak{A}_j, M_\delta)$, $(\mathfrak{B}_j, M_\delta)$ son insomma, sull'ente lineare M_δ, iperpiani invariantivi. Pertanto u_{p+j} sopra M_δ è un integrale normale di 3ª specie.

È poi evidente che i δ integrali subordinati complessivamente su M_δ dai π integrali semplici di V_π son indipendenti, perchè una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli degli u_{p+j} è essenzialmente di 3ª specie sopra M_δ e non si riduce perciò mai alla 2ª specie; e una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli degli u_{p+l} è essenzialmente di 2ª specie sopra M_δ e non si riduce perciò mai alla 1ª specie, ossia ad una costante.

Si scrivano ora le seguenti congruenze, rispetto alla tabella (T):

$$u_h \equiv b_h \qquad (h = 1, \ldots, p) \tag{16}$$

$$u_{p+j} \equiv b_{p+j} \qquad (j = 1, \ldots, \delta_1) \tag{17}$$

$$u_{p+l} \equiv b_{p+l} \qquad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \pi)\ , \tag{18}$$

ove le b son costanti generiche; e si domandino i punti di V_π che soddisfanno alle (16), (17), (18).

Le (16) da sole son soddisfatte da *un* elemento dell'involuzione ∞^p delle M_δ, ossia da una determinata M_δ, sulla quale $u_1, u_2, \ldots, u_p$ son costanti: il che consegue dal teorema di inversione classico.

Si ricordino qui le relazioni fondamentali

$$u_{p+j} = \log R_j + w_{p+j}, \quad u_{p+l} = R_l + w_{p+l}$$

del n. 28 (dove le k_j si son assunte, senza restrizione, uguali ad 1) e si avverta altresì che sopra la M_δ individuata dagli assegnati valori delle u, gl'integrali w_{p+j}, w_{p+l} sono costanti. Poichè questi integrali hanno gli stessi periodi ciclici rispettivamente di u_{p+j}, u_{p+l}, l'aggiunta al punto $(b_1, b_2, \ldots, b_\pi)$ di un vettore, che sia un periodo ciclico, sì da condurre al punto $(b_1', b_2', \ldots, b_\pi')$, non soltanto non altera la M_δ inerente alle costanti b', ma neppure il valore delle costanti da scriversi nei secondi membri delle

$$R_j = \text{cost.}\,, \quad R_l = \text{cost.}\,,$$

in quanto designati con $\bar{b}_j$, $\bar{b}_l$ e con $\bar{b}_j'$, $\bar{b}_l'$ i valori iniziali di

w_{p+j}, w_{p+l} e quelli che loro competono dopo l'aggiunta del periodo corrispondente allo stesso ciclo, è

$$e^{b_j - \overline{b}_j} = e^{b'_j - \overline{b}_j} \,, \qquad b_l - \overline{b}_l = b_l' - b_l' \;.$$

Pertanto sopra la M_δ fissata si ottiene sempre il medesimo punto, qualunque sia il periodo ciclico aggiunto al complesso delle costanti iniziali. La stessa cosa può dirsi anche di un periodo polare, perchè $e^{u_{p+j} - w_{p+j}}$ si viene in corrispondenza a moltiplicare per $e^{2\pi i \lambda}$, con λ intero.

D'altronde le relazioni $R_j = \text{cost.}$, $R_l = \text{cost.}$ individuano un punto sulla M_δ (n. 29). In complesso dunque in V_π c'è un sol punto che soddisfaccia alle (16), (17), (18).

La conclusione è espressa dal teorema generale d'inversione, già enunciato alla fine del n. 26.

31. LE VARIETÀ SPECIALI TRACCIATE SOPRA UNA VARIETÀ QUASI ABELIANA DI JACOBI. — Fissato un indice j, consideriamo la congruenza (17). Essa è soddisfatta sopra una *generica* M_δ da un iperpiano invariante, che passa per la varietà lineare $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j, M_\delta)$ (n. 29, Oss.); ma per *particolari* posizioni di M_δ può darsi che sia

$$(\mathfrak{A}_j,\ M_\delta) = (\mathfrak{B}_j,\ M_\delta) = (\mathfrak{A}_j,\ \mathfrak{B}_j) \;.$$

Allora, sopra una tale M_δ, l'integrale w_j non ha più singolarità logaritmiche (nè altre singolarità): è una costante. Indicati con $b_1, \ldots, b_p, b_{p+j}$ i valori costanti di $u_1, \ldots, u_p, u_{p+j}$ sopra quella M_δ, le congruenze (16), (17) (con j fissato), che, per generici valori di $b_1, \ldots, b_p, b_{p+j}$ son soddisfatte da una varietà lineare a $\delta - 1$ dimensioni, per quei certi valori son invece soddisfatte da una varietà lineare a δ dimensioni.

Questo accade allora e soltanto allora che la g_π^δ di cui M_δ è imagine, possiede la coppia neutra A_j, B_j; e siccome in tal caso la serie residua di $A_j + B_j$ rispetto a g_π^δ, nel campo assoluto, deve essere una $g_{\pi-2}^{\delta-1}$, ciò richiede che $\delta \leq p$. Effettivamente quando $\delta \leq p$ la g_π^δ $|L + A_j + B_j|$, ove L è un gruppo di $\pi - 2$ punti di C, d'indice di specialità assoluto 1, possiede la coppia neutra A_j, B_j ed è rappresentata da una M_δ su cui $u_{p+j} = \text{cost}$.

Similmente u_{p+l} è costante su una M_δ che rappresenti una g_π^δ avente la coppia neutra $A_l = B_l$.

Più in generale, il teorema di Abel per le serie neutre prova che un certo numero $\nu \leq \delta$ di integrali u_{p+j}, u_{p+l} sono costanti sopra una varietà Q_r di dimensione r, appartenente ad una fissata M_δ, allora e soltanto allora che i gruppi di π punti di C corrispondenti ai punti di Q_r son equivalenti nel campo neutro γ' definito dalle coppie di γ, relative a quei ν integrali. Epperò Q_r è sempre contenuta in una varietà lineare, di M_δ, non ulteriormente ampliabile, godente di analoga proprietà. Supposto che già Q_r sia in questo senso completa e quindi lineare, la serie g_π^r di C, completa in γ', rappresentata da Q_r, è a gruppo generico indipendente da γ', perchè nel punto generico di Q_r i ν integrali considerati assumono valori costanti finiti (per guisa che Q_r non appartiene a nessuna delle varietà $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, $\mathfrak{A}_l$ relative ai ν integrali). Alla g_π^r può dunque applicarsi il teorema di RIEMANN-ROCH nel campo γ' (n. 17) e si conclude che $r \geq \pi - (p + \nu)$ [1], il segno $>$ valendo soltanto quando la serie è speciale nel campo neutro γ'. In conclusione:

Le congruenze (16), *unite a un certo numero* $\nu \leq \delta$ *delle* (17), (18), *son sempre soddisfatte da una varietà algebrica, anzi lineare, tracciata su* V_π, *di dimensione* $r \geq \delta - \nu$. *La differenza* $r - \delta + \nu$ *è l'indice di specialità neutro della serie*

[1] È a priori evidente che $r \geq \pi - (p + \nu)$, in quanto Q_r è un ente definito da $p + \nu$ equazioni analitiche in un campo analitico a π dimensioni. Il teorema di RIEMANN-ROCH dà però di più il significato della differenza $r - [\pi - (p + \nu)]$.

completa rappresentata da quella varietà, nel campo neutro γ' *definito dalle varietà singolari dei* ν *integrali* w *associati a quelli presi in considerazione nelle* (17), (18) *prescelte.*

Una varietà lineare siffatta si chiamerà una *varietà speciale* di dimensione r.

In particolare, se $\delta = \nu$ le (16), (17), (18) individuano un punto di V_π (teorema d'inversione), oppure una Q_r con $r > 0$, quando il gruppo, indipendente da γ, rappresentato da un punto esterno a tutte le $\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, \mathcal{A}_l$, e soddisfacente alle (16), (17), (18), è speciale in γ.

Diremo *speciale* un punto di V_π, esterno alle varietà singolari degl'integrali di Σ, e rappresentante un gruppo speciale in γ. I punti speciali son quelli che rappresentano gli $\infty^{\pi-1}$ gruppi di π punti tolti dai gruppi della $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ canonica neutra di γ. Un punto generico P della loro varietà $E_{\pi-1}$ (alla quale già accennammo alla fine del n. 21), individua una curva razionale (lineare) e, da esso uscente, tracciata su $E_{\pi-1}$ e sulla quale son costanti tutti gl'integrali di Σ.

L'intersezione di $E_{\pi-1}$ con una generica M_δ è una varietà di dimensione $\delta = 1$, costituita da $\infty^{\delta-2}$ rette invarianti e, che son altrettante *curve speciali,* appoggiate alle varietà $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, M_\delta)$, $(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_l, M_\delta)$ per ogni j, l. Una e è una retta invariante, perchè è *lineare* entro la M_δ *lineare* ed è appoggiata alle predette varietà, sia perchè rappresenta una g^1_π di γ e contiene dunque ogni coppia del campo; sia perchè gl'integrali di Σ non posson essere tutti costanti sopra una curva algebrica, s'essa incontra le loro varietà singolari fuori delle varietà d'indeterminazione.

La varietà $(E_{\pi-1}, M_\delta)$ può dunque definirsi come luogo delle rette invarianti appoggiate a certi δ spazi lineari invarianti a $\delta - 2$ dimensioni di M_δ, i quali son appunto le varietà $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j, M_\delta)$, $(\mathcal{A}_l, \mathcal{A}_l, M_\delta)$. È una varietà razionale d'ordine invariantivo relativo $\delta - 1$ [1].

---

[1] Pel concetto di ordine invariantivo, ved. [78, p. 20].

Invero, una corrispondenza birazionale senza eccezioni che muti M_δ in una S_δ, trasforma $(E_{\pi-1}, M_\delta)$ nella varietà delle $\infty^{\delta-2}$ rette appoggiate a certi δ spazi $S_{\delta-2}$ (generici). L'ordine di questa varietà si determina direttamente o applicando formule generali del problema degli spazi secanti [1]. La varietà è razionale. Infatti per un punto generico di uno dei suoi $S_{\delta-2}$ direttori passa una sola retta appoggiata agli altri, in quanto questi si proiettano da quel punto sopra un $S_{\delta-1}$ in $\delta - 1$ iperpiani indipendenti di $S_{\delta-1}$, che hanno un punto comune.

Possiamo riassumendo enunciare:

I punti speciali sopra una M_δ di V_π costituiscono una varietà razionale a $\delta - 1$ dimensioni d'ordine invariantivo $\delta - 1$, luogo di $\infty^{\pi-2}$ curve razionali (speciali).

Il caso $\delta = 1$ va trattato a sè, perchè la $E_{\pi-1}$ non sega la generica M_1 (retta invariantiva) che non contiene alcun punto speciale. Fra le M_1 ve ne sono allora $\infty^{\pi-2}$ speciali e il loro luogo è la $E_{\pi-1}$. L'enunciato conclusivo vale dunque anche in questo caso.

OSSERVAZIONE. — Si potrebbe pensare di eliminare le difficoltà provenienti dalle varietà speciali di V_π (che son poi come vedremo varietà eccezionali di V_π, nel senso della teoria generale delle corrispondenze birazionali fra varietà algebriche prive di punti multipli) considerando per V_π, invece della varietà dei gruppi di π punti di C, la varietà delle g^1_π speciali in γ, come si fa quando si tratta delle ordinarie varietà di JACOBI.

Ma mentre così la varietà $E_{\pi-1}$ si riduce ad una varietà di dimensione $\pi - 2$, ci sono, come si vedrà nel n. 33, talune varietà di $E_{\pi-1}$ che dànno luogo a nuove varietà eccezionali $\infty^{\pi-1}$.

---

(1) [**54**]). Per $\delta = 2$ la varietà cui s'allude riducesi a una retta invariante congiungente i due punti d'indeterminazione di M_2; per $\delta = 3$ si ha una varietà in corrispondenza birazionale senza eccezione con una quadrica di S_3; per $\delta = 4$ una varietà in corrispondenza birazionale senza eccezione coll'ipersuperficie cubica di SEGRE con 10 punti doppi, dello spazio S_4 [**56**, **57**]. Ved. pure [**5**, p. 107].

32. Proprietà delle trasformazioni di 1ª e di 2ª specie della varietà di Jacobi in un campo neutro. — Sia V_π una varietà quasi abeliana di Jacobi di genere virtuale π e di genere effettivo $p < \pi$ ($\delta = \pi - p$) ed $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ sieno π integrali semplici indipendenti virtualmente di 1ª specie del sistema lineare Σ ad essa appartenente (n. 28). Le congruenze

$$(19) \qquad u_h' + u_h \equiv a_h \qquad \text{(modd. periodi)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \pi),$$

a norma del teorema d'inversione nel campo γ, pongono una corrispondenza biunivoca fra i punti di V_π. La diremo una *trasformazione di* 1ª *specie,* estendendo considerazioni e denominazioni relative ad un'ordinaria varietà di Jacobi (¹). Al variare delle costanti a_h la corrispondenza descrive una serie continua ∞^π.

Il teorema d'Abel nel campo neutro γ permette di affermare che la somma dei due gruppi di π punti della curva C, che hanno per imagini due punti omologhi in una data corrispondenza (19), varia in una serie lineare neutra $g^\pi_{2\pi}$. Viceversa, data una tal serie, restan definite le a_h e la trasformazione (19), che dunque è algebrica, epperò birazionale.

Le congruenze

$$(20) \qquad u_h' \equiv u_h + b_h \qquad \text{(modd. periodi)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, \pi)$$

definiscono per ogni scelta delle b una *trasformazione di* 2ª *specie,* la quale descrive al variare delle b una serie ∞^π, che è ovviamente un gruppo continuo di trasformazioni a due a due permutabili e che comprende la trasformazione identica ($b_h \equiv 0$).

Poichè prese due coppie G, G' e H, H' di punti di V_π corrispondenti nella (20), cioè di gruppi di π punti di C, risulta, secondo il teorema di Abel nel campo γ:

$$G + H' \equiv G' + H \ ,$$

(¹) E che trovansi in [8].

le trasformazioni (20) non sono altro che le trasformazioni birazionali del gruppo abeliano ∞^π già considerato nel n. 21.

Esse si ottengono tutte dai prodotti a due a due delle (19); dati due punti generici di V_π c'è una trasformazione di 1ª specie e una di 2ª specie che portino uno prefissato nell'altro. Se i due punti coincidono, la trasformazione di 2ª specie riducesi all'identità; ecc. ecc.

Non sulle analogie con quanto si conosce sulle ordinarie varietà di JACOBI occorre ulteriormente insistere; sibbene sulle divergenze, perchè proprio queste son espressive e fruttuose per la nostra ricerca.

Sieno al solito $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, $\mathfrak{A}_l$ le varietà logaritmiche e polari degli integrali virtualmente di 1ª specie di V_π. Nel n. 21 già abbiamo osservato che le trasformazioni del gruppo abeliano cioè *le trasformazioni di 2ª specie mutano in sè ciascuna delle varietà, che ora sappiamo essere varietà logaritmiche e polari degl'integrali virtualmente di 1ª specie di V_π.*

Si può aggiungere che *le trasformazioni di 1ª specie scambiano fra loro le coppie di varietà logaritmiche associate e mutano in sè ogni varietà polare* (¹).

Invero, se A_j, B_j, è una coppia del campo γ, fissata una generica $g^\pi_{2\pi}$, ogni gruppo di questa che passi per A_j passa in conseguenza per B_j, epperò ad un gruppo G di π punti contenente A_j corrisponde in $g^\pi_{2\pi}$, come resto, un gruppo G' di π punti contenente B_j. Analogamente si ragiona per una coppia $A_l = B_l$ costituita da due punti coincidenti.

Ecco dunque in che cosa consistono le *eccezioni alla transitività* della serie ∞^π e del gruppo ∞^π di trasformazioni di 1ª e di 2ª specie.

Ma c'è di più. Ritorniamo ad assumere come integrali fon-

(¹) Da questa seconda proprietà discende come corollario la prima.

damentali di Σ gl'integrali $u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_\pi$ del n. 28; sicchè le (19), (20) divengono:

$$(21) \qquad \begin{cases} u_h' + u_h \equiv a_h \\ u'_{p+j} + u_{p+j} \equiv a_{p+j} \\ u'_{p+l} + u_{p+l} \equiv a_{p+l} \end{cases}$$

$$(22) \qquad \begin{cases} u_h' \equiv u_h + b_h \\ u'_{p+j} \equiv u_{p+j} + b_{p+j} \\ u'_{p+l} \equiv u_{p+l} + b_{p+l} \end{cases} \qquad \begin{matrix} (h = 1, \ldots, p) \\ (j = 1, \ldots, \delta_1) \\ (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta) \, . \end{matrix}$$

Poichè gl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ son costanti lungo ogni M_δ di V_π (n. 28), così *le trasformazioni di* 1ª *e di* 2ª *specie mutano in sè l'involuzione abeliana delle* M_δ e subordinano su questa, come varietà di JACOBI propriamente detta di elementi M_δ, una trasformazione rispettivamente di 1ª o di 2ª specie. Vi sono pertanto 2^{2p} *varietà* M_δ *mutate in sè da una data trasformazione di* 1ª *specie* (¹), α, e nessuna che sia mutata in sè da una trasformazione di 2ª specie diversa dalla identità.

Sopra una delle M_δ mutate in sè da α, la trasformazione subordina una trasformazione birazionale involutoria rappresentata dalle ultime δ delle (21), cioè una trasformazione di 1ª specie della M_δ in sè, in quanto l'ente lineare M_δ si consideri come una varietà di JACOBI quasi abeliana di genere virtuale $\pi = \delta$ e di genere effettivo $p = 0$.

I punti doppi di questa trasformazione involutoria su M_δ sono punti doppi di α in V_π, e tutti i punti doppi di α si ottengono così dai punti doppi delle trasformazioni di 1ª specie che α subordina sulle 2^{2p} M_δ unite. La ricerca sarà condotta fino in fondo per una V_π corrispondente a $\pi = 2$, $p = \delta = 1$ (n. 62).

Nel caso particolare $\pi = \delta$, $p = 0$ *si ottiene in uno spazio lineare* S_δ *(o in una varietà lineare) un gruppo abeliano* ∞^δ

(¹) [**69**, p. 282].

di trasformazioni birazionali, che muta in sè ciascuno di certi $2\,\delta_1 + \delta_2$ *iperpiani* e che è rappresentato dalle formule (n. 29):

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
&\prod_{s=1}^{\delta} (\alpha_j, \beta_j, x_s, x_s') = e^{b_j} &\qquad (j = 1, 2, \ldots, \delta_1)\\
&\sum_{s=1}^{\delta} \frac{1}{x_s - \alpha_l} = \sum_{s=1}^{\delta} \frac{1}{x_s' - \alpha_l} + b_l &\qquad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta),
\end{aligned}
$$

le b essendo le costanti di una trasformazione del gruppo.

Le coordinate di un punto dello S_δ *di cui trattasi son le funzioni simmetriche elementari di* $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$ *e* $(x_1, x_2, \ldots, x_\delta)$, $(x_1', x_2', \ldots, x'_\delta)$ *dànno luogo a punti corrispondenti nella trasformazione.*

Siccome ciascuna delle precedenti equazioni ridotte a forma intera è lineare nelle funzioni simmetriche elementari di $(x_1, x_2, \ldots, x_\delta)$, e di $(x_1', x_2', \ldots, x_\delta')$, esse son soddisfatte singolarmente dalle coppie di punti reciproci in una reciprocità.

Pertanto *ciascuna delle predette corrispondenze muta una retta generica di* S_δ *in una curva razionale normale* (in quanto generata per intersezione degl'iperpiani corrispondenti di δ fasci proiettivi, omologhi, nelle δ reciprocità, della data retta).

Per $\delta = 1$ si ha un gruppo abeliano ∞^1 di omografie, costituito dalle omografie che hanno due punti uniti distinti (caso di una coppia neutra a punti distinti) o dalle omografie paraboliche con dato punto unito (caso di una coppia neutra a punti coincidenti).

Per $\delta = 2$ si ha *un gruppo abeliano* ∞^2 *di trasformazioni quadratiche piane.*

Sarebbe interessante di approfondire in generale le proprietà del gruppo ∞^δ in S_δ e delle ∞^δ trasformazioni involutorie di 1ª specie:

$$
(24)\qquad
\begin{aligned}
&\prod_{s=1}^{\delta} \frac{(x_s - \alpha_j)(x_s' - \alpha_j)}{(x_s - \beta_j)(x_s' - \beta_j)} = e^{a_j} &\qquad (j = 1, \ldots, \delta_1)\\
&\sum_{s=1}^{\delta} \left(\frac{1}{x_s - \alpha_l} + \frac{1}{x_s' - \alpha_l}\right) = a_l &\qquad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta).
\end{aligned}
$$

Ritornando a p, π qualsiansi, aggiungeremo qualche osservazione, che sarà poi utile, sulle *trasformazioni di 2ª specie periodiche*. È chiaro che trasformazioni siffatte si hanno allora e soltanto allora che il vettore di componenti b sia un *sottoperiodo*, cioè sottomultiplo di un periodo secondo un numero intero.

Una trasformazione di questo tipo genera su V_π, coi propri cicli, un'involuzione I, che, attesa la permutabilità delle trasformazioni di 2ª specie, è mutata in sè dal loro gruppo abeliano ∞^π e quindi è rappresentata da una varietà W_π, la quale possiede anch'essa un gruppo abeliano continuo ∞^π di trasformazioni birazionali in sè. Inoltre i π integrali virtualmente di 1ª specie su V_π, sommati nei punti di un gruppo variabile in I, dànno luogo ad altrettanti integrali virtualmente di 1ª specie (ma in realtà di 3ª specie) sopra l'imagine W_π. La W_π si deve da vari punti di vista, che saranno poi indicati, considerare come una varietà quasi abeliana. Le V_π rientrano fra queste W_π come casi particolari. Si ottiene insomma così una prima estensione della classe delle varietà abeliane. Vi ritorneremo in seguito.

Osservazione. — Per dati valori delle costanti a, b le corrispondenze (23), (24), in quanto la M_δ variabile si ponga *razionalmente* in corrispondenza omografica con un S_δ, anzi colla totalità dei gruppi di δ punti $(x_1, x_2, \ldots, x_\delta)$ di una retta (il che è sempre possibile, n. 22), restan razionalmente fissate su M_δ. *Sicchè V_π possiede anche due altre serie continue ∞^π di trasformazioni birazionali in sè;* esse si ottengono associando alle trasformazioni di 1ª e di 2ª specie dell'involuzione delle M_δ, rispettivamente le trasformazioni di 2ª e di 1ª specie razionalmente fissate sulle singole M_δ.

33. Le varietà eccezionali per le trasformazioni di prima e di seconda specie. — Vediamo come può accadere che venga a mancare per qualche punto o varietà subordinata di V_π (che, si ricordi, è equivalente birazionalmente *senza eccezione*

alla varietà dei *gruppi* di π punti di C) la biunivocità della trasformazione di 1^a specie α, rappresentata dalle (21).

Dobbiamo all'uopo determinare *le coppie di varietà eccezionali* per α della V_π (priva di punti multipli); ossia *le coppie di varietà irriducibili corrispondenti nella data trasformazione birazionale α di V_π, fra le quali α induce una corrispondenza algebrica di indici non ambedue finiti*. E c'interessano sopratutto, anzi in modo esclusivo, *le coppie di varietà eccezionali di dimensioni* $\pi - 1$, cioè tali che una delle varietà della coppia abbia la dimensione $\pi - 1$.

Intanto la varietà $E_{\pi-1}$ dei punti speciali è certo eccezionale, qualunque sia α. Invero, dato un punto generico di $E_{\pi-1}$, vi sono ∞^1 punti dove gl'integrali di Σ prendono gli stessi valori; ed essi riempiono la curva speciale uscente dal punto stesso. La g^1_π rappresentata da tale curva ha, nel campo neutro γ, una determinata π-pla residua rispetto alla $g^\pi_{2\pi}$ di γ, che definisce α; la qual π-pla è unica, perchè, attesa la genericità della g^1_π, essa è non speciale. Pertanto i punti di quella curva son trasformati da α in un sol punto e tutta la $E_{\pi-1}$ è trasformata in una varietà irriducibile $E'_{\pi-2}$, variabile generalmente con α. Le $E'_{\pi-2}$ invadono tutta la V_π, perchè su C un generico gruppo non speciale di π punti sommato con una generica g^1_π di γ, dà luogo ad una serie neutra $g^\pi_{2\pi}$ e quindi ad una α, che muta la curva imagine della g^1_π nel punto imagine della π-pla prescelta.

Si osserverà che $E_{\pi-1}$ passa per le varietà $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$, $(\mathfrak{C}_l, \mathfrak{A}_l)$, e non contiene punti singolari diversi dai punti d'indeterminazione, essendo luogo di curve razionali speciali, le quali appunto non incontrano le varietà singolari fuori dei punti di indeterminazione.

Consideriamo ora un punto generico P della varietà $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$. Poichè esso è punto d'indeterminazione per l'integrale w_{p+j}, nell'intorno di P, entro V_π, l'integrale assume tutti i valori; onde ad un punto infinitamente vicino a P, in direzione generica, corrisponde, mediante α, un punto che dipende dalla direzione stessa, in quanto mutandola cambia il valore di w_{p+j}. Ciò significa che $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ è una varietà, di dimensione $\pi - 2$, eccezionale per α, nel senso sopra espresso (¹). Lo stesso dicasi della varietà $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$.

Viceversa, perchè il coniugato in α di un punto P di V_π possa essere indeterminato, sicchè a P corrisponda in α una curva o varietà algebrica, occorre, se P non appartiene alla varietà invariante K, che sulla varietà omologa di P ciascuno degl'integrali di Σ prenda lo stesso valore finito (a meno dei periodi) che ha in P: onde questa varietà è luogo di gruppi equivalenti speciali del campo γ, cioè appartiene ad $E_{\pi-1}$. Se poi P sta su K e non è un punto d'indeterminazione, ossia non è situato su alcuna delle $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$, $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$, e giace quindi sopra una sola componente $\mathfrak{A}_j$ od $\mathfrak{A}_l$ di K, ad esso (come abbiamo già avvertito nel n. prec.) corrisponde *sempre* un punto della componente coniugata $\mathfrak{B}_j$ o $\mathfrak{A}_l$; ed uno solo (se P è generico dentro quella componente) od anche infiniti, ma sempre giacenti sulla componente coniugata, quando P, senza cadere in una varietà d'indeterminazione, sia eccezionale per la corrispondenza birazionale indotta da α fra $\mathfrak{A}_j$ od $\mathfrak{A}_l$ e la propria coniugata. Di queste eventuali eccezioni alla biunivocità di α, che si limitano a coppie di varietà eccezionali coniugate, ambedue di dimensioni minori di $\pi - 1$, non occorre di tener conto pei nostri scopi.

In conclusione, trovata la coppia di varietà eccezionali $E_{\pi-1}$, $E'_{\pi-2}$, rimane da esaminare di qual tipo sono le coppie di varietà eccezionali di cui fanno parte le $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$, $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$.

Scelto un generico punto P di V_π, vi sono intanto ∞^1 trasformazioni di 1ª specie α, che lo portano in un punto P' di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ [similmente si ragionerà nei riguardi di $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$]. Invero, per trovare una α che porti P in P', bisogna trovare i limiti delle α che mutano P in un punto Q' non singolare, il quale tenda a P' lungo un ramo ε' di origine P'. Se il ramo non

(¹) L'osservazione può esser posta in relazione colle considerazioni del n. 21.

tocca $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ in P', dalla sua tangente resta individuato un $S_{\pi-1}$, tangente in P' a V_π e ad $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$, cioè una faccetta a $\pi - 1$ dimensioni tale che, considerando P' su essa, l'integrale w_j ha in P' un valore finito determinato (a meno dei periodi): il che si conclude, dopo condotta entro V_π una generica varietà algebrica $W_{\pi-1}$, passante per $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ e tangente in P' a quella faccetta, tenuto conto che l'integrale w_{p+j} sopra $W_{\pi-1}$ è di 1ª specie e quindi ha in P' un valore determinato, indipendente dalla direzione della tangente al ramo ε', il quale resta vincolato soltanto alla condizione di toccare in P' la $W_{\pi-1}$.

Pertanto le α che portano P in P' sono ∞^1, quanti gli $S_{\pi-1}$, del fascio Φ individuato entro lo S_π tangente a V_π in P' dallo $S_{\pi-2}$ ivi tangente ad $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$; e costituiscono un ente razionale. Fissata una di queste α, ad ognuno degli $S_{\pi-1}$ del fascio Φ risponde in α un punto P, da assumersi come omologo di P'; e così P', mediante α, si muta in una curva razionale f, uscente dal primitivo punto P.

Qual'è, per una data α, il luogo di queste curve razionali? Fissato P e quindi la f per P, determinata da α, consideriamo un punto $\overline{P}$ mobile sopra un ramo generico ε, di origine P e il punto $\overline{P}'$ corrispondente a $\overline{P}$ in α. Il punto $\overline{P}'$ descrive un ramo ε' di origine P', avente in P' una tangente generica. Interpretiamo le cose sulla curva C. Ivi è dato un gruppo G di π punti, che ha per imagine P; un ramo ε, di origine G, di gruppi di π punti, la cui imagine su V_π è il ramo lineare dello stesso nome; e un gruppo $\overline{G}$ di π punti, variabile in ε. Il gruppo variabile $\overline{G}'$, corrispondente a $\overline{P}'$, è il resto di $\overline{G}$ rispetto alla serie $g_{2\pi}^{\pi}$ di C che dà luogo su V_π ad α. Quando $\overline{G}$ tende su ε a G, il gruppo $\overline{G}'$ tende a G', di cui P' è l'imagine; cioè ad un gruppo contenente la coppia A_j, B_j. Dunque f è imagine di una g_π^1, che appartiene al campo neutro γ' definito dalle $\delta - 1$ coppie di γ, diverse da A_j, B_j e che è residua rispetto alla $g_{2\pi}^{\pi}$ di un gruppo G' di π punti contenente A_j, B_j. La f si appoggia perciò in un punto a ciascuna delle $\delta - 1$ varietà rimanenti d'indeterminazione. Alla stessa conclusione si arriva osservando che su f gli altri integrali u_{p+j}, u_{p+l} di V_π son costanti, dal momento ch'essi assumono nei punti di f valori uguali a quelli ben determinati, finiti, che assumono in P'. Perciò f deve incontrare le altre varietà singolari soltanto in punti d'indeterminazione.

Si vede di più che le f corrispondenti ai punti di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ in α, avendo per imagini i resti dei gruppi del tipo G' rispetto a $g_{2\pi}^{\pi}$, sono $\infty^{\pi-2}$, perchè due gruppi generici di $\pi - 2$ punti di C non sono equivalenti nel campo γ'. Ne deriva che la varietà eccezionale coniugata ad $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ è una varietà $F_{\pi-1}$, di dimensione $\pi - 1$, luogo di $\infty^{\pi-2}$ curve f, corrispondenti ai singoli punti di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$.

Variando α, epperò la $F_{\pi-1}$, le f variano descrivendo un sistema irriducibile, che ha almeno la dimensione $\pi - 1$. Ma siccome tutte le g_π^1 di C, appartenenti al campo γ', sono tante quante il genere virtuale $\pi - 1$ del campo stesso, così le f son esattamente $\infty^{\pi-1}$ e abbracciano quindi la totalità delle imagini delle g_π^1 neutre del campo γ' e in particolare delle g_π^1 speciali. Cioè *il sistema delle f contiene il sistema delle e.*

Il sistema $\infty^{\pi-1}$ delle f è involutorio, cioè *per un punto generico di V_π passa una sola f.* Infatti, un gruppo generico di π punti di C *individua* una g_π^1 del campo γ'. Ma è opportuno ritrovare altrimenti lo stesso risultato, incontrando così altre proprietà che interessa di porre in rilievo. Una f giace nella M_δ passante per uno qualunque de' suoi punti (ciò risulta dal fatto che una g_π^1 giace nella g_π^δ completa da essa individuata o dal fatto trascendente, che equivale a questo); ed è una retta invariantiva di M_δ (perchè rappresenta una g_π^1 della g_π^δ): una retta invariantiva appoggiata ai $\delta - 1$ spazi lineari invariantivi a $\delta - 2$ dimensioni staccati sulla M_δ dalle $\delta - 1$ varietà d'indeterminazione diverse da $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$. Per un punto generico di M_δ passa una sola di queste rette invariantive (è la traduzione, già notata nel n. 31, del fatto che in un S_δ vi è una sola retta passante per un punto generico e appoggiata a $\delta - 1$ $S_{\delta-2}$ generici). E si ritrova così, che per un punto generico P di V_π

passa una sola f. Ne segue che tutte le ∞^1 α che mutano P in un punto P' di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$, mutan P' nella unica f uscente da P; cioè *vi sono* ∞^1 α *che mutano un punto di* $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ *in una medesima curva* f.

Siccome poi tanto le $F_{\pi-1}$ come le M_δ son composte coll'involuzione delle f, l'intersezione di una $F_{\pi-1}$ con una M_δ è composta di $\infty^{\pi-2}$ curve f.

Indichiamo altre notevoli proprietà delle coppie di varietà eccezionali a $\pi - 1$ dimensioni di V_π. Dato che la varietà eccezionale $E_{\pi-1}$, passa per $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$, la varietà $E'_{\pi-2}$ coniugata di $E_{\pi-1}$ in una data α, è contenuta nella $F_{\pi-1}$ coniugata in α di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$. Così ogni α associa ad $E_{\pi-1}$ una $F_{\pi-1}$, ciascuna delle due varietà contenendo la varietà eccezionale coniugata dell'altra. *Restano associate anche le curve e e le curve f relative alle due varietà eccezionali,* nel senso che ciascuna contiene il punto eccezionale corrispondente all'altra. Invero, gli integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ hanno nei punti di una f valori coniugati rispetto ad α, e questi ultimi sono alla loro volta uguali ai valori costanti assunti da quegl'integrali sulla e passante per P'. Le due e, f associate appartengono a due M_δ coniugate nella α. Si noti poi che dalla corrispondenza birazionale tra le e, f associate segue una corrispondenza birazionale tra $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ ed $E'_{\pi-2}$.

Siccome ogni $F_{\pi-1}$ contiene $\infty^{\pi-2}$ curve f e, variando α, quella $F_{\pi-1}$ descrive un sistema irriducibile, che esaurisce tutte le $\infty^{\pi-1}$ curve f, così le $F_{\pi-1}$ sono $\infty^{\pi-1}$; per un punto generico di V_π ne passano $\infty^{\pi-2}$, che hanuo in comune la f per quel punto e *vi sono* ∞^1 *trasformazioni* α, *che portano* $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ *nella stessa* $E_{\pi-1}$: sono le ∞^1 trasformazioni α, che portano un punto P di $F_{\pi-1}$ nel punto P' di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ coniugato di quello in una α che muti $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ in $F_{\pi-1}$.

Tenuto poi conto che una α si può sempre considerare come trasformata di un'altra qualsiasi α rispetto ad una conveniente trasformazione di 1ª o di 2ª specie, si vede che il sistema $\infty^{\pi-1}$ delle $F_{\pi-1}$ è mutato in sè da ogni trasformazione di 1ª o di 2ª specie e che le $F_{\pi-1}$ sono altresì omologhe di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ nelle trasformazioni di 2ª specie. E, naturalmente, anche il sistema ∞^π delle $E'_{\pi-2}$ è mutato in sè dalle trasformazioni di 1ª e di 2ª specie.

Poichè le f rappresentano serie lineari g^1_π di C, esse segano in un punto ciascuna delle A_j, B_j (e ognuna delle altre varietà singolari, però queste ultime in un punto d'indeterminazione). Nella corrispondenza proiettiva che una qualunque α pone fra i punti di f e gli S_π del fascio Φ, attorno al punto P' omologo di f, al punto $(\mathfrak{A}_j, f)$ corrisponde lo $S_{\pi-1}$ tangente in P' a $\mathfrak{B}_j$, e al punto $(\mathfrak{B}_j, f)$ lo $S_{\pi-1}$, tangente in P' ad $\mathfrak{A}_j$. Basta, per veder questo, osservare che nella corrispondenza birazionale che α induce fra le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, scambiandole fra loro, alla varietà $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ considerata sopra $\mathfrak{A}_j$ o sopra $\mathfrak{B}_j$, corrisponde rispettivamente su $\mathfrak{B}_j$ o su $\mathfrak{A}_j$, la varietà $(F_{\pi-1}, \mathfrak{B}_j)$ o la varietà $(F_{\pi-1}, \mathfrak{A}_j)$; sicchè ad un punto infinitamente vicino al punto P' di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ sopra $\mathfrak{A}_j$ o sopra $\mathfrak{B}_j$, corrisponde rispettivamente, su $\mathfrak{B}_j$ o su $\mathfrak{A}_j$ il punto $(f, \mathfrak{B}_j)$ o il punto $(f, \mathfrak{A}_j)$.

Se trattasi della varietà d'indeterminazione $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ si potrà dire soltanto che il punto $(f, \mathfrak{A}_l)$ ha per omologo in α lo $S_{\pi-1}$ del fascio Φ tangente ad $\mathfrak{A}_l$ in P', perchè $\mathfrak{A}_l$ è unita per α.

Se invece β è una trasformazione di 2ª specie, essa muta in sè ciascuna delle $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ e quindi fa corrispondere ad $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$, considerata su $\mathfrak{A}_j$ o $\mathfrak{B}_j$ la $(F_{\pi-1}, \mathfrak{A}_j)$ o rispettivamente la $(F_{\pi-1}, \mathfrak{B}_j)$. Perciò, quando β tende all'identità, la $F_{\pi-1}$ tende a passare per $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ e i due punti d'appoggio sulle $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ delle f con cui $F_{\pi-1}$ è composta, tendono a coincidere, ossia quelle f tendono alle $\infty^{\pi-2}$ curve e; epperò la $F_{\pi-1}$ ha per limite $E_{\pi-1}$.

Il limite della $E'_{\pi-2}$, trasformata mediante β di $E_{\pi-1}$, diviene a priori indeterminato (cioè può dipendere dalla scelta di un sistema analitico ∞^1 su cui far tendere β all'identità), nè interessa di approfondire qui la cosa.

Quando la varietà d'indeterminazione considerata è del tipo $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ ed $F_{\pi-1}$ è ancora la trasformata di $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ mediante β, col tendere di β all'identità, la varietà $(F_{\pi-1}, \mathfrak{A}_l)$ tende ad $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ e le f tendono ad appoggiarsi ad $\mathfrak{A}_l$ nei punti d'indeterminazione ossia tendono a curve e; epperò anche in tal caso il limite di $F_{\pi-1}$ è $E_{\pi-1}$.

Riassumeremo nell'enunciato seguente le proprietà salienti dell'analisi svolta, indicando in modo generico, per brevità di scrittura, con $F'_{\pi-2}$ le varietà d'indeterminazione ed aggiungendo qualche ovvio complemento.

Le varietà eccezionali a π - 1 dimensioni per le trasformazioni di 1ª specie α e per le trasformazioni di 2ª specie β del gruppo continuo Γ esistente su V_π, hanno per omologhe varietà di dimensione π - 2 e non minore. Precisamente le predette varietà eccezionali sono: 1) *la varietà $E_{\pi-1}$ dei punti speciali, la quale contiene tutte le varietà singolari d'indeterminazione $F'_{\pi-2}$ degli integrali inerenti a Γ;* 2) *le trasformate $F_{\pi-1}$ delle $F'_{\pi-2}$ Ognuna delle $F_{\pi-1}$ contiene tutte le varietà d'indeterminazione da cui non proviene. Le $F_{\pi-1}$ trasformate per le α di una data $F'_{\pi-2}$ formano un sistema irriducibile $\infty^{\pi-1}$, mutato in sè dalle α, β, di cui fa parte la $E_{\pi-1}$, il quale è composto con un sistema involutorio $\infty^{\pi-1}$ di curve razionali, che compongono anche le M_δ lineari tracciate su V_π e son su queste rette invariantive. Tali curve son le trasformate dei punti d'indeterminazione ovvero, se incontrano tutte le $F'_{\pi-2}$, si trasformano in punti. Le α, β portano la $E_{\pi-1}$ in un sistema irriducibile $\infty^{\pi-1}$ di varietà $E'_{\pi-2}$, mutato in sè da α, β. Ciascuna delle $E'_{\pi-2}$ è birazionalmente equivalente ad ognuna delle varietà d'indeterminazione* (1). *Rispetto ad una α o ad una β fissata, la $E_{\pi-1}$ e la trasformata $F_{\pi-1}$ di una $F'_{\pi-2}$ son associate nel senso che ognuna contiene la varietà eccezionale corrispondente all'altra.*

Cioè le $E_{\pi-1}$. $F_{\pi-1}$ si comportano come *le curve eccezionali di 2ª specie* di una rigata o di una superficie razionale, perchè la $E_{\pi-1}$ o la $F_{\pi-1}$ non posson mutarsi in una varietà di dimen-

(1) È chiaro, indipendentemente da ciò, che due varietà d'indeterminazione sono birazionalmente equivalenti alla varietà dei gruppi di π — 2 punti di C.

sione inferiore, senza che una loro varietà subordinata si muti in una varietà di dimensione $\pi - 1$.

I δ *sistemi di varietà* $F_{\pi-1}$ *corrispondenti alle singole varietà d'indeterminazione hanno tutti a comune, come varietà totale, la* $E_{\pi-1}$, *e le* $F_{\pi-1}$ *di questi sistemi, che provengono da una medesima* α (*o* β), *passano tutte per la* $E'_{\pi-2}$ *corrispondente ad* $E_{\pi-1}$ *mediante quella* α (*o* β).

I δ sistemi involutori di curve f hanno tutti in comune il sistema delle curve speciali.

PARTE SECONDA

LE FUNZIONI QUASI ABELIANE SPECIALI

34. Loro definizione ed esistenza. — Sia V_π la varietà delle π-ple di punti di una curva C di genere effettivo $p \leq \pi$. La V_π si può considerare come una varietà quasi abeliana, in quanto si fissino comunque su C $\delta = \pi - p$ coppie distinte di punti [delle quali $\delta_1 \leq \delta$ costituite da punti distinti e δ_2 $(= \delta - \delta_1) \leq \delta$ costituite da punti coincidenti] mediante le quali s'intenda definito un campo neutro γ. Quando parliamo di V_π *come varietà quasi abeliana* (*speciale*), intendiamo sempre di far riferimento ad un campo siffatto, prescelto comunque su C. È in questo senso che V_π può considerarsi come limite di un'ordinaria $\ddot{V}_\pi$ di Jacobi (n. 20).

Appena fissato su C il campo γ, restano in conseguenza definiti su V_π certi π integrali semplici indipendenti, quelli che abbiamo finora denotati con $u_1, u_2, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}, u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$, da considerarsi virtualmente di 1ª specie. E sappiamo (n. 28) come può caratterizzarsi globalmente il loro sistema lineare Σ, $\infty^{\pi-1}$.

A norma del teorema d'inversione, il punto di V_π (cioè ogni funzione razionale simmetrica dei punti di una π-pla variabile su C) è funzione analitica uniforme delle π variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ o di altre π, che da esse derivino con una sostituzione lineare a modulo non nullo.

Funzioni siffatte, in quanto servono ad uniformizzare il punto mobile sulla varietà quasi abeliana V_π, si chiameranno *funzioni quasi abeliane* (per ora si sottintende l'attributo *speciali*). Gl'interi π, p si chiameranno rispettivamente il *genere virtuale* e il *genere effettivo* delle funzioni quasi abeliane considerate, le quali costituiscono un *corpo*.

Per $p=\pi$ si ricade nelle funzioni abeliane; per $\pi=1$, $p=0$ si ottengono le *funzioni quasi ellittiche*; per $\pi=2$ e $p=0$ o $p=1$ le *funzioni quasi iperellittiche*.

Una funzione quasi abeliana di genere virtuale π e di genere effettivo p ammette $2\,p+\delta_1=2\,\pi-\ \delta_1-2\,\delta_2$ periodi. Essa ammette cioè meno periodi di quanti non ne spettino ad una funzione abeliana di genere (effettivo) π, di cui essa può pensarsi come limite per $\overline{V}_\pi \rightarrow V_\pi$. I periodi che al limite vengono perduti, divengono infiniti (n. 28).

Se $\delta_2=\delta$ (cioè se le coppie neutre son tutte a punti coincidenti), nel passaggio da $\overline{V}_\pi$ a V_π i periodi si riducono da $2\,\pi$ a $2\,p$: è il minimo numero di periodi di una funzione quasi abeliana di generi π, p.

35. Le funzioni razionali e le funzioni trigonometriche come funzioni quasi abeliane di genere effettivo zero — Consideriamo in modo speciale il caso $p=0$, che occorre approfondire pel seguito.

Sia $\pi=\delta$ il genere virtuale del corpo di funzioni quasi abeliane di genere effettivo zero, che vogliamo studiare.

L'inversione delle congruenze (12), (13), relative a questo caso, è già stata fatta nel n. 29. Le equazioni che determinano il punto della varietà lineare S_δ (modello della varietà quasi abeliana di genere $p=0$), sono le (14), (15) del n. stesso, che possiamo scrivere, ponendo in evidenza le variabili $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_\pi$:

$$\frac{(x_1-\alpha_j)(x_2-\alpha_j)\ldots(x_\delta-\alpha_j)}{(x_1-\beta_j)(x_2-\beta_j)\ldots(x_\delta-\beta_j)}=e^{u_{p+j}} \qquad (j=1,2,\ldots,\delta_1)\ ,$$

$$\frac{1}{x_1-\alpha_l}+\frac{1}{x_2-\alpha_l}+\ldots+\frac{1}{x_\delta-\alpha_l}=u_{p+l} \qquad (l=\delta_1+1,\ldots,\delta)\ .$$

Le funzioni simmetriche elementari di $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$ tratte da queste equazioni si esprimono razionalmente (oltrechè per le α, β) per le quantità:

$$e^{u_{p+j}} \, , \; u_{p+l}$$

cioè, tenuto conto della formula di Eulero, razionalmente per

$$\sin i u_{p+j} \, , \quad \cos i u_{p+j} \, , \quad u_{p+l} \, .$$

Concludendo:

Una funzione quasi abeliana di genere effettivo zero, qualunque sia il suo genere virtuale π, *si riduce sempre, previa una eventuale sostituzione lineare omogenea a modulo non nullo sulle variabili, ad una funzione razionale-esponenziale e quindi ad una funzione trigonometrica in* δ_1 *variabili e razionale in* δ_2 *variabili* ($\delta_1 + \delta_2 = \pi$ [1]).

Vi son funzioni, per cui $\delta_2 = 0$, *ridotte a sole funzioni trigonometriche (o razionali-esponenziali); funzioni, per cui* $\delta_1 = 0$, *ridotte a sole funzioni razionali.*

In particolare *le funzioni quasi ellittiche non sono che funzioni trigonometriche e funzioni razionali.*

36. Alcune proprietà delle funzioni quasi abeliane di genere qualunque. — A norma di quanto precede, la varietà quasi abeliana V_π, di generi π, p ($\pi > p > 0$), si rappresenta parametricamente con funzioni quasi abeliane di $u_1, \ldots, u_2, u_\pi$. S'essa appartiene (com'è lecito supporre, senza restrizioni) ad un $S_{\pi+1}$, nel quale sieno $x_1, x_2, \ldots, x_{\pi+1}$ le coordinate non omogenee di punto, la V_π è data da formule del tipo

$$(25) \qquad x_h = F_h(u_1, u_2, \ldots, u_\pi) \qquad (h = 1, 2, \ldots, \pi + 1) \; ,$$

(1) Per funzione trigonometrica intendiamo ogni funzione razionale di seni e coseni delle variabili, eventualmente moltiplicate per l'unità immaginaria.

ove le F_h son funzioni quasi abeliane, relative alla tabella (T'). Le F_h posson essere anche espresse mediante le variabili ottenute dalle precedenti con una arbitraria sostituzione lineare omogenea a modulo non nullo. Ciò equivale a mutare i π integrali con cui s'individua il sistema lineare Σ.

La rappresentazione (25) ha il *rango* 1 [1], nel senso che ad un generico punto della varietà corrisponde un sol punto d'un campo fondamentale del considerato corpo di funzioni.

Nello spazio reale euclideo $S_{2\pi}$, dove si distendono le π variabili complesse u, *un campo fondamentale è costituito da un qualsiasi prisma indefinito, che ha come figura direttrice il parallelepipedo dei* $2p+\delta_1$ *periodi*.

Invero, ogni punto di $S_{2\pi}$ può esser portato in quel prisma con convenienti traslazioni secondo i periodi e due punti interni al prisma non posson dedursi l'uno dall'altro con trasformazioni siffatte.

Quando una funzione del corpo si concepisce come limite d'una funzione abeliana di genere π, inerente ad una varietà di JACOBI $\bar{V}_\pi$, che tenda a V_π, il campo fondamentale delle funzioni abeliane, cioè il parallelepipedo dei loro 2π periodi, si allunga indefinitamente, perchè $\delta_1+2\delta_2$ de' suoi spigoli tendono all'infinito e si riduce al prisma indefinito sopra indicato.

Dimostriamo in primo luogo che:

Una funzione quasi abeliana è meromorfa (al finito).

Denotiamo con $\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ una generica funzione del corpo e sia P un punto di W_π (che possiamo sempre supporre al finito, considerando le cose proiettivamente). Se in P la Φ diviene infinita, la funzione razionale del punto di V_π a cui essa è uguale, ha in P un polo o un punto d'indeterminazione. Se P è un polo la funzione reciproca ha ivi uno zero, cioè $\frac{1}{\Phi}$ è olomorfa in P come funzione delle $u_1, \ldots, u_\pi$, onde P è un polo per Φ, come funzione delle $u_1, \ldots, u_\pi$. Se P è

(1) [**24**, p. 285]. Ivi il concetto di rango è fissato per le superficie.

per quella funzione razionale punto d'indeterminazione, si può moltiplicare la funzione per un'altra funzione razionale (un polinomio) olomorfa in P, in guisa che P divenga punto di olomorfismo del prodotto. Ciò significa che, nel caso in esame, Φ si può moltiplicare per un'altra funzione quasi abeliana, olomorfa in P, in guisa che il prodotto sia olomorfo; e quindi P è per Φ, come funzione delle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, un punto d'indeterminazione. Il teorema è così dimostrato.

I punti delle varietà singolari $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, $\mathfrak{A}_l$ degl'integrali u_{p+j}, u_{p+l} non si conseguono colla rappresentazione (25) della V_π, perchè in essi qualcuna delle variabili u diviene infinita.

La varietà rappresentata dalle (25) *non è cioè esattamente la varietà quasi abeliana V_π, ma questa varietà alla quale è stato dato come contorno l'insieme dei punti singolari de' suoi integrali semplici virtualmente di* 1ª *specie.*

Il contorno della varietà rappresentata corrisponde all'insieme dei punti all'infinito del prisma dei periodi.

Anche questa è una divergenza notevole rispetto alle varietà abeliane, le quali vengono poste dalla rappresentazione abeliana in corrispondenza biunivoca continua col parallelepipedo dei periodi, ove s'imaginino saldate le coppie di faccie opposte. La varietà abeliana vien data cioè integralmente, *senza alcun contorno,* dalla sua rappresentazione.

Ma vi è un'altra divergenza importante. Consideriamo l'insieme I dei punti al finito di un prisma dei periodi, nel quale si riguardino come un solo due punti del contorno differenti tra loro d'un periodo; e l'insieme $V_\pi - \Sigma\,(\mathfrak{A}_j + \mathfrak{B}_j) - \Sigma\,\mathfrak{A}_l$ dei punti di V_π non singolari per gl'integrali di Σ. Orbene, fra i due insiemi la corrispondenza continua è soltanto generalmente biunivoca.

Infatti le $\infty^{\pi-2}$ curve speciali di V_π (n. 31) vengon ciascuna rappresentata da un sol punto dell'insieme I. E la totalità degli $\infty^{2(\pi-2)}$ punti reali così ottenuti entro I, è ivi l'imagine della $E_{\pi-1}$ eccezionale di V_π.

È opportuno altresì di appurare che cosa accade, passando da V_π alla sua rappresentazione nel prisma dei periodi, delle altre varietà eccezionali delle trasformazioni di 1ª e di 2ª specie [le quali sono le $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$], cioè di quelle altre varietà che mediante una trasformazione di 1ª e di 2ª specie dànno varietà di maggior dimensione, $\pi - 1$; e che cosa avviene di queste ultime, le quali da una trasformazione di 1ª o di 2ª specie vengon invece mutate in varietà di minor dimensione, $\pi - 2$.

A priori si può dire che, sia le une che le altre debbon avere per imagini nel prisma varietà di dimensioni uguali alle loro, perchè le (19), (20) son ivi (al finito) trasformazioni univoche senza eccezioni (1).

Nel fatto, se $F_{\pi-1}$ è la varietà eccezionale trasformata di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ o di $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ mediante una trasformazione di 1ª o di 2ª specie, non essendo essa composta con curve razionali speciali, è rappresentata nel prisma da una varietà reale a $2(\pi - 1)$ dimensioni. Anche la $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ od $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$, nonostante che abbia la dimensione $\pi - 2$, è rappresentata nel prisma da una varietà reale a $2(\pi - 1)$ dimensioni, perchè in ogni suo punto gl'integrali di Σ son funzioni di un medesimo parametro inerente all'indeterminazione e dipendente dalla faccetta tangente scelta, com'è spiegato nel n. 33.

Tanto l'una che l'altra varietà si estendono *entro il prisma* all'infinito (2), perchè, per ciò che concerne la prima, su $F_{\pi-1}$ il generico integrale di Σ resta di 3ª (o di 2ª) specie e vi ha dunque punti d'infinito; per ciò che concerne la seconda, accade che in ogni punto P' di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ o di $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ vi sono rispettivamente due faccette o una faccetta a $\pi - 1$ dimensioni della V_π contenenti la faccetta a $\pi - 2$ dimensioni tangente in P' ad $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ o ad $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$, sovra le quali uno degl'integrali di Σ diviene infinito; sicchè ognuna delle riemanniane ∞^2 che cor-

(1) Nello $S_{2\pi}$ euclideo rappresentativo di $u_1, u_2, \dots, u_\pi$, la (19) è il prodotto della simmetria rispetto all'origine per una traslazione inerente alle costanti a_h (cui va fatta seguire una traslazione secondo un periodo per riportare il punto nel prisma); e la (20) è una traslazione, inerente alle costanti b_h (cui va fatta seguire un'altra traslazione secondo un periodo).

(2) Ch'esse si estendano all'infinito *nello* $S_{2\pi}$ deriva dal fatto che son varietà « caratteristiche ».

rispondono ai punti di $(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j)$ od $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ ha due od un punto all'infinito.

Ecco, riassumendo, come posson descriversi *le eccezioni alla biunivocità della rappresentazione di V_π sul proprio prisma dei periodi*.

Sia I' l'insieme dei punti di V_π non singolari per gl'integrali di Σ ed I l'insieme dei punti al *finito* del prisma, il cui contorno, al finito, sia soppresso riguardando come un solo due punti delle facce differenti di un periodo (1). Allora la corrispondenza biunivoca continua fra I, I' non è un omeomorfismo (come invece accade nel caso abeliano); ma ammette le seguenti eccezioni alla biunivocità.

Vi sono $\infty^{2(\pi-2)}$ punti di I a ciascun dei quali corrisponde in I' una superficie di Riemann di genere zero e il luogo di queste superficie di Riemann è l'immagine reale di una $E_{\pi-1}$ eccezionale di V_π, la quale contiene tutte le varietà d'indeterminazione degl'integrali di Σ. Queste varietà sono alla loro volta eccezionali, essendo ciascuna rappresentata da una varietà reale $\infty^{2(\pi-1)}$, invece che $\infty^{2(\pi-2)}$, di I. Ad un punto generico d'indeterminazione corrisponde su I una superficie di Riemann di genere zero, che ha due punti all'infinito od un solo secondo che l'indeterminazione è relativa ad un integrale di 3ª o di 2ª specie (2).

(1) Nelle proprietà in cui entrano in giuoco valori infiniti delle u, occorre riferirsi alla rappresentazione delle $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ sopra una varietà di SEGRE a 2π dimensioni di un conveniente spazio euclideo [**70**, p. **71**; 71]. Su tale varietà si ha l'imagine del prisma dei periodi, che ha per contorno l'imagine delle facce e l'imagine (proiettiva) dei punti all'infinito del prisma. L'insieme I si ottiene mantenendo quest'ultimo contorno ed eliminando l'altro, coll'associare le coppie di punti differenti di un periodo.

(2) Naturalmente quest'ultima asserzione vale soltanto quando ci si riferisce all'insieme I sulla varietà di SEGRE, di cui alla nota precedente.

PARTE TERZA

LE FUNZIONI QUASI ABELIANE GENERALI

LE VARIETÀ E LE FUNZIONI QUASI ABELIANE GENERALI

37. TRE TIPI DI DEFINIZIONE DELLE FUNZIONI QUASI ABELIANE GENERALI. DIVISORI E RANGO. LA DEFINIZIONE *a*). — Le considerazioni finora svolte offrono varie possibilità d'estensione del concetto di funzioni quasi abeliane *speciali,* alle quali abbiamo limitato fin qui il nostro studio.

Si possono invero proporre le seguenti definizioni:

a) Un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili è un insieme di funzioni analitiche meromorfe (al finito) e periodiche, i cui periodi primitivi son riducibili, con una conveniente sostituzione lineare (a modulo non nullo) sulle variabili, ad una data tabella del tipo T' (n. 28).

È chiaro che, se un tal insieme esiste (ed esiste di fatto, come sappiamo, almeno nel caso delle funzioni speciali) è un *corpo,* nel significato consueto della parola.

b) Un corpo di funzioni quasi abeliane (in particolare abeliane) di π variabili è il corpo delle funzioni razionali del punto mobile sopra una varietà algebrica V_π possedente un gruppo continuo abeliano ∞^π, generalmente transitivo (in particolare assolutamente transitivo), di trasformazioni birazionali.

c) Un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili è il corpo delle funzioni razionali del punto mobile sopra il prodotto di una varietà di PICARD $V_p(p<\pi)$ (1) e di uno spazio lineare S_δ $(\delta=\pi-p)$.

Le funzioni quasi abeliane speciali soddisfanno a ciascuna delle *a*), *b*), *c*). Per esse la V_p è una varietà di JACOBI.

Innanzi di scegliere la definizione più adatta, è opportuna qualche riflessione sulle *a*), *b*), *c*).

Cominciamo dalla *a*). Si sottintendono intanto stabilite, per i periodi che figurano nella T', le condizioni 1), 2) dell'Oss. 3ª del n. 28, in quanto esse assicuran l'esistenza di un corpo di funzioni abeliane relative ad una varietà di PICARD V_p, d'irregolarità superficiale p (2), e aventi come periodi quelli delle prime p orizzontali e delle prime $2p$ verticali della T'.

La sostituzione di una V_p di PICARD alla varietà di JACOBI, da cui prendemmo le mosse per costruire le funzioni quasi abeliane speciali, implica già una notevole (anche se per ora ipotetica) estensione del campo delle funzioni da definire.

Ma questa sostituzione non è completa se non si tien conto altresì dei *divisori* della varietà di PICARD (3). Vi sono invero

(1) Legata alle ricerche classiche di PICARD [**48**, **49**], sulle superficie e varietà algebriche possedenti gruppi continui abeliani di trasformazioni birazionali. Varietà così denominate per $p=2$ da ENRIQUES-SEVERI [**24**] e per p qualunque da CASTELNUOVO [**9**, pp. 546, 593, 655]. Ved. anche [**17**, p. 195 e segg.].

(2) Ved. per es. [**17**, pp. 184, 206].

(3) I *divisori* sono stati considerati per la prima volta, in relazione ai periodi degl'integrali semplici di 1ª specie d'una superficie, cioè della sua varietà di PICARD, in una mia Memoria del 1906 [**62**] e introdotti sistematicamente nello studio delle superficie di PICARD e delle superficie iperellittiche da ENRIQUES-SEVERI. Ved. [**17**, p. 184]. Si deve altresì ricordare una più antica e fondamentale Memoria di FROBENIUS [**25**, p. 33] ove i divisori son considerati nello studio delle relazioni fra i periodi delle funzioni che FROBENIUS chiama Jacobiane, e che son poi quelle aventi un numero di periodi doppio del numero delle variabili.

varietà di PICARD per le quali la tabella dei periodi primitivi (normali) è

$$\begin{matrix} \frac{2\pi i}{d_1} & 0 & \dots 0 & \omega_{11} & \omega_{12} \dots & \omega_{1p} \\ 0 & \frac{2\pi i}{d_2} & \dots 0 & \omega_{21} & \omega_{22} \dots & \omega_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \frac{2\pi i}{d_p} & \omega_{p1} & \omega_{p2} \dots & \omega_{pp} \end{matrix}$$

ove $d_1, d_2, \dots, d_p$ son convenienti interi positivi (¹).

La (T') contiene invece una tabella abeliana a divisori unitari $(d_1 = d_2 \dots = d_p = 1)$.

Nel campo delle funzioni abeliane speciali abbiamo già sostanzialmente introdotto i divisori, nel considerare (n. 32) le involuzioni generate da trasformazioni cicliche di 2ª specie sopra una V_π quasi abeliana di JACOBI (in particolare sopra una V_p di JACOBI). Più generalmente, partendo da gruppi finiti di trasformazioni di 2ª specie (costruiti con convenienti scelte dei sottoperiodi) si ottengono involuzioni le cui varietà rappresentative soddisfano ancora alle definizioni *a*), *b*), *c*) [purchè naturalmente nella *a*) la (T') s'intenda completata coi divisori]. I divisori si posson prescrivere ad arbitrio, compatibilmente coi loro mutui legami aritmetici, e si può sempre in corrispondenza costruire sulla V_p di JACOBI un'involuzione generata da uno conveniente dei predetti gruppi finiti, che dia luogo ad una varietà coi prescelti divisori.

Questo concetto è stato sfruttato, pel caso delle superficie — e la cosa si estende subito alle varietà — da ENRIQUES-SEVERI, i quali hanno anche avvertito (a p. 299 della loro Memoria) che per certe scelte dei sottoperiodi si può benissimo ricadere su varietà a divisori unitari.

(¹) Precisamente $d_1 = 1$ e d_h *divisibile per* d_{h-1} $(h = 2, \dots, p)$. Ved. [**17**, p. 184].

Le stesse cose son da ripetere quando si sostituisce ad una varietà di JACOBI una varietà di PICARD a divisori unitari (¹).

Prima di procedere oltre è opportuno di precisare qui anche il concetto di *rango* (a cui abbiamo fatto allusione nel n. 36) pur esso essenziale nello studio delle varietà abeliane, e che si trasporta alle varietà quasi abeliane colla stessa definizione con cui ENRIQUES-SEVERI l'hanno introdotto nel caso abeliano.

Ampliamo la classe delle varietà quasi abeliane, già allargata (per ora ipoteticamente) colla sostituzione di una varietà di PICARD ad una varietà di JACOBI, considerando come varietà quasi abeliane le involuzioni sulle varietà sopra definite. L'uso della qualifica di « quasi abeliane » anche per le varietà imagini di tali involuzioni, è giustificato dal fatto che il loro punto è funzione razionale del punto variabile sopra una varietà quasi abeliana (a divisori unitari o non unitari) soddisfacente (coi periodi dei propri integrali virtualmente di 1ª specie) alla *a*) e alle *b*), *c*). Eppero quel punto risulta in definitiva funzione quasi abeliana appartenente allo stesso corpo di funzioni a cui dà luogo la varietà sostegno dell'involuzione.

Però può ben avvenire (ed anzi avviene in generale) che nell'interno di un prisma di periodi primitivi d'una delle varietà imagini delle predette involnzioni, si trovi non nn solo, ma nn numero finito r di punti corrispondenti ad un generico punto della varietà: r è allora il *rango della varietà*, la quale risulta così imagine d'un'involuzione di grado r sopra una varietà quasi abeliana di rango 1.

Una varietà quasi abeliana di rango >1 non è necessariamente mutata in sè da nn gruppo abeliano di trasformazioni di dimensione uguale alla dimensione della varietà, la quale può anche avere (come nel caso delle varietà abeliane) irregolarità superficiale nulla. Così è della varietà di rango 2, rappresentante l'involnzione di 2⁰ ordine generata su una V_π quasi abeliana di JACOBI da nna trasformazione di 1ª specie.

Ed ora, continuando a discutere il valore della definizione *a*), domandiamoci se per l'esistenza delle costruende funzioni non

(¹) [**17**, p. 282].

occorra prescrivere qualche altro legame quantitativo o qualitativo ai periodi ω delle ultime δ righe della T' (che d'ora innanzi imagineremo completata coi divisori).

Le ω delle orizzontali dalla $(p+1)$ - esima alla $(p+\delta_1)$ - esima, nel caso di funzioni quasi abeliane speciali, per $p>1$, e *supposto* che sieno da considerarsi distinti due corpi di funzioni quasi abeliane speciali provenienti da campi neutri birazionalmente distinti, dipendono da $2\delta_1$ moduli (n. 21 Oss. 1ª), epperò tra esse dovrebbero correre $(p-2)\,\delta_1$ relazioni. Il caso $p=1$ è eccezionale, in quanto le ω di quelle orizzontali sono in numero di δ_1, mentre i moduli portati dalle δ_1 coppie sono in numero di $2\,\delta_1-1$, sicchè, non soltanto fra le ω non c'è nessuna relazione, ma vi sono ∞^{δ_1-1} varietà birazionalmente distinte, corrispondenti ad una scelta delle ω.

Le ω delle orizzontali dalla $(p+\delta_1+1)$ -esima alla $(p+\delta)$ -esima, sempre nel caso di funzioni quasi abeliane speciali, dipendono, per $p>1$, da δ_2 moduli e quindi vi dovrebbero esser tra esse $(p-1)\,\delta_2$ relazioni. Per $p=1$ le predette ω non contengono alcun modulo e quindi si dovrebbero avere tra esse δ_2 relazioni.

Ma, come vedremo nei nn. 48 e 55 e segnatamente nell'ultimo, questo modo di considerare le cose è ristretto e inadeguato alla natura del problema.

Che cosa si può dire quando la parte abeliana della tabella (T') non è più relativa ad una V_p di JACOBI, ma ad una V_p di PICARD?

Accettata la definizione *a*) senza limitazioni, resta da vedere se le ω delle ultime δ orizzontali di T' sono o non sono del tutto libere. Per la ricerca degli eventuali legami necessari (di cui poi bisognerà riconoscere la sufficienza, onde risolvere la questione esistenziale delle funzioni cercate), si può trarre lume dalle relazioni bilineari tra i periodi di prima e di seconda specie delle funzioni intermediarie con un numero di periodi non superiore al doppio del numero delle variabili e dalle relazioni qualitative fra le stesse quantità, quali trovansi nella Memoria di FROBENIUS ultimamente citata (ved. alle pagg. 17 e 19 della Memoria) e (quando i periodi superino di 2 il numero delle variabili) dai legami lineari fra i determinanti di ordine massimo estratti dalla matrice dei periodi di un corpo di funzioni meromorfe di π variabili a $\pi+2$ periodi, quali trovansi in una Memoria di COUSIN (¹). Nella stessa Memoria si studian le funzioni meromorfe di π variabili a $\pi+1$ periodi e si dimostra che, soddisfatte alcune condizioni qualitative, i $\pi+1$ periodi possono scegliersi ad arbitrio. Lo stesso Autore ritorna in altra Memoria [**19**] sulla questione, nel caso delle funzioni di 2 variabili con tre periodi, approfondendo il caso generale in cui i periodi non sono, come egli li chiama, *periodi eccezionali* (p. 113 della Memoria), ossia tali che i determinanti di 2^0 ordine estratti dalla loro matrice non siano legati da una relazione lineare, omogenea a coefficienti interi non tutti nulli nè i periodi sieno legati da una relazione lineare omogenea a coefficienti *reali* non tutti nulli. Essi possono entro questi limiti essere scelti ad arbitrio sotto una ulteriore condizione qualitativa (²). Lo stesso risultato sarà da noi conseguito nel n. 50; e sarà conseguito altresì, sebbene sotto ipotesi un po' diverse, che preciseremo, e quale corollario del teorema di struttura (n. 53), il risultato principale a cui è dedicata una parte notevole di quell'ampia e importante Memoria.

Ma un'altra via si presenta per cercare le eventuali relazioni necessarie (e sufficienti) fra i periodi di un corpo di funzioni meromorfe di π variabili con non più di 2π periodi. Ne parleremo nel n. 48.

38. CONSIDERAZIONI E TEOREMI PRELIMINARI INERENTI ALLA DEFINIZIONE b). — La definizione b) è la più importante e la più significativa. Essa si riconnette alle fondamentali ricerche

(¹) [**18**, p. 50]. Ivi [p. 52] è dato pure un cenno d'estensione alle funzioni con $\pi+q$ $(q\leq\pi)$ periodi.

(²) I periodi di cui si parla son in conseguenza *indipendenti*.

di Picard [**48**, **49**] e di Painlevé [**47**] sulle superficie e varietà algebriche possedenti gruppi continui di trasformazioni birazionali.

Il risultato culminante dei due grandi analisti è che se una V_π algebrica è mutata in sè da un gruppo continuo ∞^π, abeliano, transitivo, Γ, di trasformazioni birazionali, essa possiede π integrali semplici funzionalmente indipendenti, i quali sono, nel loro insieme, invertibili con funzioni uniformi, meromorfe al finito, e *dipendenti razionalmente dal punto origine delle integrazioni*. Tali funzioni risultano in conseguenza abeliane, proprie o degeneri [**49**, p. 249; **47**, p. 54].

Però nelle ricerche di Picard e di Painlevé ed in quelle che si sono succedute sullo stesso argomento o su argomenti collaterali, non si pone in luce una circostanza importante: che cioè la diversità geometrica essenziale fra le V_π con gruppi ∞^π che dànno origine alle funzioni abeliane propriamente dette (vogliam dire le V_π di Picard) e quelle donde derivano funzioni abeliane degeneri, è che *nel primo caso il gruppo* Γ *è assolutamente transitivo, mentre è soltanto generalmente transitivo nel secondo*.

Di questa diversità non credo vi sieno accenni anteriori a quello contenuto in una mia Nota del 1907 [**63**] dove la caratterizzazione algebrico-geometrica della superficie di Picard (cioè d'ogni superficie iperellittica di rango 1) è ottenuta appunto a partire dalla *assoluta* transitività del gruppo continuo Γ, ∞^2, esistente su tale superficie (1). Si perviene così, per $\pi = 2$ e con semplici mezzi geometrici, al risultato di Picard, che l'acuto esame critico e costruttivo di Painlevé aveva a suo tempo nettamente circoscritto, esteso, e liberato da qualche obiezione.

---

(1) Un cenno d'una via onde dimostrare, per π qualunque, il teorema di Picard, sul fondamento dell'assoluta transitività del gruppo, trovasi a pag. 286 dell'opera [**17**]. Il punto delicato di questo cenno è che sia possibile — attraverso alla nota similitudine « in piccolo » di un gruppo abeliano continuo ad un gruppo di traslazioni — di ottenere una rappresentazione parametrica in grande della varietà: cosa che occorre per poter concludere.

L'assoluta transitività di Γ è in rapporto colla specie dei π integrali semplici $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, di cui il gruppo Γ determina l'esistenza sopra V_π, in conseguenza delle equazioni differenziali del 1º ordine, che lo definiscono. Ne vedremo tosto la ragione.

Intanto osserviamo che, se pur tutti gl'integrali u non sono di 1ª specie, le trasformazioni biunivoche di V_π in sè

$$(26) \qquad u_h' + u_h \equiv a_h \text{ (modd. periodi)} \qquad (h = 1, \ldots, \pi)$$

continuano ad essere algebriche e quindi birazionali, come quando gli u son tutti di 1ª specie e la V_π è addirittura una varietà di PICARD [1]. Lo stesso fatto sappiamo già che si verifica (come conseguenza del teorema di ABEL) quando V_π è una varietà di JACOBI quasi abeliana (n. 32). Nel caso generale esso non è che un modo di esprimere il *teorema di addizione* (nel senso di WEIERSTRASS) per le funzioni abeliane e le loro degenerazioni [**47**, p. 8].

Invero, detti P, P' due punti omologhi nella (26) e $\varphi_h(P) = \varphi_h(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ $(h = 1, 2, \ldots)$ una delle coordinate di P, la funzione $\varphi_h(u_1 + u_1', \ldots, u_\pi + u_\pi')$, cioè $\varphi_h(a_1, a_2, \ldots, a_\pi)$, è, per ogni dato h, algebricamente esprimibile per $\varphi_k(P)$, $\varphi_l(P')$ $(k, l = 1, 2, \ldots)$: il che significa che la corrispondenza (26) è algebrica.

Le (26) che continuiamo a chiamare *trasformazioni di 1ª specie,* formano una serie continua ∞^π. Moltiplicandole a due a due si ottengono le *trasformazioni di 2ª specie:*

$$(27) \qquad u_h' \equiv u_h + b_h \text{ (modd. periodi)} \qquad (h = 1, \ldots, \pi)$$

le quali s'identificano colle trasformazioni di Γ.

Ciò posto, se gl'integrali u son tutti di 1ª specie, il gruppo Γ è assolutamente transitivo. Infatti, in un punto *qualunque* P di V_π le u_h hanno valori finiti (determinati a meno dei periodi) e, fatto variare il punto $(b_1, b_2, \ldots, b_\pi)$ entro un parallele-

(1) Ved. [**9**] pel caso in cui tutti gli u son di 1ª specie.

pipedo dei periodi, le (27) portano P in ∞^π punti distinti, cioè in tutti i punti di V_π, perchè viceversa da uno qualunque di questi si può risalire a P (1).

Viceversa, se Γ è assolutamente transitivo, tutti gli u_h son di 1ª specie; ossia, se vi è fra gli u_h qualche integrale, sia u, di 2ª o di 3ª specie, Γ è generalmente transitivo. Invero, u, come mostran le (27), è mutato in sè (a meno di un'irrilevante costante additiva) da ogni trasformazione di Γ e quindi un punto singolare dello stesso integrale. Onde la varietà algebrica a $\pi - 1$ dimensioni (irriducibile o riducibile, ma certamente riducibile se u è di 3ª specie) luogo dei punti singolari di u è invariante per Γ. Si può anzi osservare che ogni parte irriducibile di quella varietà è invariante, perchè Γ è continuo e contiene l'identità.

Se a ciò si aggiunge l'osservazione che un generico punto P di V_π dove tutti gli u_h sieno finiti vien portato dalle trasformazioni di Γ in ∞^π punti di V_π e precisamente in tutti gli altri punti di V_π dove ogni u_h è finito, si può raccogliere, come segue, un primo semplice risultato dell'esame che stiamo facendo.

Condizione necessaria e sufficiente perchè il gruppo continuo Γ *sia assolutamente transitivo è che gl'integrali* $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ *sieno di 1ª specie. Quando il gruppo è generalmente transitivo la sua varietà (algebrica) invariante* K *è a* $\pi - 1$ *dimensioni e consta di tutti i punti singolari (non d'indeterminazione) degl'integrali predetti.*

Prima di procedere oltre, occorre avvertire che, quando il gruppo Γ è generalmente transitivo, come già risulta dall'esame esposto nel n. 33 pel caso di una V_π quasi abeliana di JACOBI, le trasformazioni di 1ª e di 2ª specie non son biunivoche senza eccezione, nè è possibile scegliere un modello di V_π dove la grave difficoltà sia eliminata. La V_π si trova in generale nelle stesse condizioni in cui trovasi per $\pi = 2$ (caso che sarà esaminato dettagliatamente in seguito), allorchè la sua imagine è una

(1) Nè la conclusione cade per l'eventuale presenza di varietà eccezionali che faccian mancare l'assoluta biunivocità delle trasformazioni del gruppo. D'altronde quando tutti gli u son di 1ª specie, le varietà eccezionali, come ora vedremo, posson eliminarsi.

superficie razionale o una rigata ellittica, sulla quale, qualunque sia il modello, son sempre presenti curve eccezionali (di 2ª specie).

Fra le varietà di V_π, che da una trasformazione di Γ son mutate in varietà di dimensioni maggiori o minori delle varietà di partenza, vanno distinte quelle che hanno posizione fissa, indipendente dalla trasformazione, da quelle che variano con la trasformazione. Le varietà eccezionali fisse son le sole che posson presentarsi quando Γ è assolutamente transitivo; nel qual caso basta la semplice sostituzione di V_π con una V_π', che rappresenti birazionalmente, senza eccezioni, le trasformazioni di Γ, perchè tutte le varietà eccezionali spariscano. Invero, ogni trasformazione del gruppo è portata in un'altra ben determinata da una trasformazione di 1ª specie , sicchè fra le trasformazioni del gruppo quelle di 1ª specie inducono trasformazioni birazionali senza eccezione. Ora la equivalenza birazionale di V_π con V_π' sussiste anche quando Γ è generalmente transitivo, essendo essa conseguenza del fatto che due punti generici P, P' di V_π individuano una trasformazione di Γ che porta P in P'; ma la sostituzione di V' a V non elimina in tal caso tutte le varietà eccezionali. Esamineremo più a fondo la questione nel n. 41.

La presenza della varietà K e delle varietà eccezionali richiede particolari attenzioni nell'esame del modo di trasformarsi di un integrale semplice di V_π di fronte alle trasformazioni di Γ (od anche alle trasformazioni di 1ª specie): esame che ha una importanza essenziale onde determinare la struttura della varietà V_π e delle funzioni ad essa inerenti.

Le attenzioni cui alludiamo son richieste, più o meno direttamente, dalla circostanza che due cicli lineari σ, σ', i quali siano omologhi in V_π, non sono sempre omologhi nella varietà $V_\pi - K - E$ ottenuta dando a V_π come contorno la varietà invariante K e l'insieme E delle varietà eccezionali per una data trasformazione di 1ª e di 2ª specie. La cosa non ha importanza nei riguardi degli integrali di 1ª specie, in quanto essi, finiti come sono anche nei punti di K, continuano a dare periodi uguali lungo due cicli omologhi in V_π, anche se questi non sono omologhi in $V_\pi - K - E$.

Lo stesso non può dirsi neppure per gl'integrali di 2ª specie, i quali hanno, è vero, residui tutti nulli nei punti singolari; ma sopra un ciclo lineare che incontri K (come sarebbe il trasformato mediante una trasformazione di 1ª o di 2ª specie di un ciclo lineare incontrante una varietà eccezionale per tale trasformazione) un integrale di 2ª specie può divenire infinito.

Sottolineando questo aspetto delicato della questione, osserviamo ora che gl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ son linearmente indipendenti, e individuano quindi (in quanto ognuno di essi si consideri definito a meno d'un'arbitraria costante addittiva, come quando son tutti di 1ª specie), un sistema lineare Σ, $\infty^{\pi-1}$, che si dirà il *sistema lineare associato al gruppo continuo* (1). Proviamo che:

Il sistema lineare Σ d'integrali di differenziali totali di V_π, associato al gruppo continuo Γ, può caratterizzarsi invariantivamente come il sistema degl'integrali semplici di V_π ognuno dei quali è mutato in sè da Γ. Al sistema appartengono tutti gl'integrali semplici di 1ª specie di V_π.

Dicendo che un integrale semplice $v(P)$ di V_π è mutato in sè da Γ intendiamo ch'esso sia mutato in sè da ogni trasformazione β di Γ, cioè che sia:

$$v(P') \equiv v(P) + c \quad , \tag{28}$$

ove c è una costante, dipendente soltanto dalla trasformazione β, di cui P, P' rappresenta una coppia generica, e non dal posto P (2).

---

(1) La dipendenza o indipendenza lineare va insomma pensata come dipendenza o indipendenza lineare dei differenziali totali dei considerati integrali e delle loro combinazioni lineari a coefficienti costanti. Osservazione non del tutto inutile, onde evitare equivoci, dato che, quando entrano in giuoco integrali di 2ª o di 3ª specie si soglion considerare distinti alcuni di questi integrali quando nessuna loro combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli, non si riduce mai ad una combinazione razionale-logaritmica (cfr. col. n. 56).

(2) Si potrebbe anche considerare l'effetto di β, anzichè sull'integrale come funzione dell'estremo variabile d'integrazione, sul differenziale dv: il che è cosa diversa. Ma per gl'integrali mutati in sè da β, nel senso espresso, i due aspetti sostanzialmente si identificano.

Le (28) esprimono senz'altro, come già osservammo, l'invarianza degli integrali u_h di fronte alle singole trasformazioni di Γ. Si tratta ora di provare che un integrale v mutato in sè da Γ, nel senso fissato, appartiene a Σ.

La (28) applicata ad una trasformazione infinitesima β di Γ prova che l'incremento

$$dv = \lambda_1\, du_1 + \lambda_2\, du_2 + \ldots + \lambda_\pi\, du_\pi$$

subito da v nel passaggio da P al punto P', corrispondente di P in β, dipende soltanto da $du_1, du_2, \ldots, du_\pi$, cioè da β, e non da P; sicchè le λ son costanti nell'intorno di P. E siccome nell'intorno di P esse son funzioni analitiche olomorfe di $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, risultano costanti dovunque sopra V_π: il che dimostra l'appartenenza di v a Σ.

Ci rimane da constatare che ogni integrale semplice di 1ª specie di V_π, appartiene a Σ, ossia che per esso vale la (28).

Se P descrive un ciclo lineare σ e P' il ciclo lineare σ' corrispondente in una trasformazione β qualunque di Γ, i valori di $v(P)$ e di $v(P')$ lungo σ e σ' son uguali, in quanto in V_π è $\sigma \backsim \sigma'$, perchè per β tendente all'identità, σ tende a σ'. La differenza $v(P') - v(P)$, considerata come funzione di P, riceve un incremento nullo mentre P percorre σ ed è dunque un integrale semplice di 1ª specie senza periodi, cioè una costante e vale la (28) (1).

Donotata con p (≥ 0) l'irregolarità superficiale di V_π, gli ∞^{p-1} integrali di 1ª specie di V_π stanno tutti in Σ; epperò è $p \leq \pi$ il segno $=$ valendo soltanto quando gl'integrali u son tutti di 1ª specie, ossia quando V_π è una varietà di PICARD e il gruppo Γ è assolutamente transitivo. Noi naturalmente consideriamo l'ipotesi $p < \pi$, senza escludere che possa essere $p = 0$,

(1) Lo stesso ragionamento, applicato ad un qualunque integrale v di 2ª o di 3ª specie di V_π prova che $v\ (P)$ è mutato in un integrale $v\ (P')$ che differisce da v per una funzione razionale se è di 2ª specie e per un integrale di 3ª specie privo di periodi ciclici, se è di 3ª specie (ved. a tal proposito il n. 56).

cioè che V_π sia superficialmente regolare. Porremo d'ora in poi $\pi - p = \delta$ e supporremo che i primi p integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ siano i p integrali semplici indipendenti di 1ª specie di V_π: il che si può sempre ottenere con una conveniente sostituzione lineare (a modulo non nullo) sulle u.

L'integrale generico u di Σ potrà essere di 2ª o di 3ª specie: il caso più generale è quello che sia di 3ª specie, in quanto non esclude vi possano essere in Σ integrali di 2ª specie. L'insieme degli integrali di 2ª specie di Σ costituisce ivi un sistema lineare subordinato Σ', perchè una combinazione lineare di due integrali di 2ª specie di Σ appartiene a Σ ed è di 2ª specie. Se $p + \delta_2 - 1$ $(\leq \pi - 1)$ è la dimensione del sistema Σ', si posson trovare in Σ' δ_2 integrali di 2ª specie linearmente indipendenti e tali che una loro combinazione lineare non sia mai di 1ª specie. Essi formeranno un sistema lineare Σ_2, $\infty^{\delta_2 - 1}$, e Σ' sarà il sistema congiungente di Σ_2 e del sistema Σ_0 degl'integrali di 1ª specie. Infine, si potranno trovare in Σ (fuori di Σ') $\delta_1 = \pi - p - \delta_2$ integrali di 3ª specie linearmente indipendenti e tali che una loro combinazione lineare non sia mai di 2ª (o di 1ª specie). Il loro sistema lineare Σ_1 è congiunto a Σ_0 e a Σ_2 dal sistema Σ e i tre sistemi Σ_0, Σ_1, Σ_2 non hanno a due a due integrali comuni. Infine, con una sostituzione lineare conveniente sulle u, potremo ottenere che $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ sieno δ_1 integrali linearmente indipendenti di Σ_1, e $u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ sieno δ_2 integrali linearmente indipendenti di Σ_2.

Le eventualità $\delta_1 = 0$ o $\delta_2 = 0$ si posson nel fatto presentare, com'è dimostrato da una V_π quasi abeliana di JACOBI relativa ad un campo neutro γ definito da δ_2 coppie di punti coincidenti o da δ_1 coppie di punti tutti distinti. Anzi l'esempio d'una varietà quasi abeliana di JACOBI mostra che, dato p, si posson ad esso associare tutti i valori interi di δ_1, δ_2.

I numeri p, δ_1, δ_2 son *tre interi caratteristici del gruppo*, del primo dei quali possediamo il significato geometrico (irregolarità superficiale di V_π), mentre per gli altri due il significato geometrico è per ora conosciuto soltanto nel caso di una V_π quasi abeliana di JACOBI.

OSSERVAZIONE. — Gl'integrali semplici di V_π che non hanno punti singolari fuori di K, formano un sistema lineare, nel senso che una combinazione lineare a coefficienti costanti di due integrali dell'insieme, appartiene all'insieme stesso. Però l'insieme non è dimensionale. Nè si può dire ch'esso sia mutato in sè da Γ, perchè una trasformazione di Γ può benissimo mutare un integrale dell'insieme in un integrale che, oltre alle singolarità di quello, abbia altre singolarità fuori di K, in varietà eccezionali. La questione sarà approfondita in seguito. Per ora ci limitiamo ad avvertire che per gl'integrali di Σ questa circostanza non si verifica mai: il che significa che l'integrale considerato non presenta singolarità nelle varietà eccezionali che nascon da varietà di K.

Qualunque cosa avvenga delle varietà eccezionali per una data trasformazione di 1ª e di 2ª specie sopra V_π, è certo che i punti P pei quali l'omologo è indeterminato nella data trasformazione e nella sua inversa *si distribuiscono in un numero finito di varietà algebriche,* giacchè quando P è generico su V_π, l'omologo è ben determinato sia nella corrispondenza diretta che nell'inversa.

39. DIGRESSIONE INTORNO AD ALCUNE PROPRIETÀ DELLA BASE SOPRA UNA VARIETÀ DI DIMENSIONE QUALUNQUE. — Per approfondire ulteriormente il valore della definizione b) ed i suoi rapporti colle a), c), occorre esaminare più davvicino la distribuzione delle singolarità degl'integrali di 3ª specie del sistema Σ.

I legami, da me scoperti nella teoria generale della base [1], fra gl'integrali semplici di 3ª specie della varietà ambiente V_π

[1] Le Memorie sulla base, che occorre qui tener presenti, sono le [**61**, **66**, **73**]. Talune delle proprietà che occorrono nella presente ricerca sono ovvie estensioni di quelle, contenute in [**61**], relative alle curve di una superficie, tenuto conto del teorema del n. 7 (p. 1138) della Memoria [**66**], secondo cui ogni legame algebrico fra più varietà a $\pi-1$ dimensioni d'una varietà V_π proviene da un legame cogli stessi coefficienti tra le intersezioni di quella varietà con una superficie generica tracciata su V_π. Delle altre, che non siano ovvie estensioni, diremo espressamente.

(che sarà qui una varietà algebrica qualunque) e la totalità delle varietà a $\pi - 1$ dimensioni in essa tracciate, richiedono un ritorno a quella teoria, onde arrecarvi taluni complementi occorrenti alle ulteriori fasi dell'attuale ricerca.

Sieno $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ varietà irriducibili o riducibili, effettive o virtuali, ma pure, a $\pi - 1$ dimensioni, di V_π, tra le quali interceda un legame algebrico:

$$(29) \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\tau C_\tau \equiv 0 \ ,$$

ove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau$ son interi positivi o negativi, non tutti nulli.

Quando e come fra le C posson esistere più legami del tipo (29)? È anzitutto naturale ed ovvio il concetto di *dipendenza* e d'*indipendenza lineare* fra più di questi legami. Sieno

$$\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \ldots, \lambda_{\tau j} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

i coefficienti di r *legami* (29). Gli r legami si diranno linearmente dipendenti se la matrice Λ a r orizzontali e τ verticali formata colle λ è nulla; indipendenti in caso contrario. Ciò equivale a dire che fra le λ, sussistono o no per valori non tutti nulli delle ε, relazioni lineari del tipo:

$$\sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j \lambda_{hj} = 0 \qquad (h = 1, \ldots, \tau) \ .$$

E se $\Lambda = 0$ si posson determinare per le ε valori interi non tutti nulli, appunto perchè gli elementi di Λ son numeri interi.

Vi è un numero finito di legami linearmente indipendenti del tipo (29). Ciò è evidente a priori, quando si pensi che ognuna delle C è algebricamente legata a un numero finito di varietà a $\pi - 1$ dimensioni tracciate su V_π: quelle di una base. Ma conviene di precisare meglio la proprietà.

Sia $(D_1, D_2, \ldots, D_\varrho)$ una base per le curve tracciate su V_π: allora i coefficienti λ di un legame (29) son soluzioni del sistema di equazioni lineari omogenee a coefficienti interi:

$$(30)\quad \lambda_1[C_1, D_s] + \lambda_2[C_2, D_s] + \dots + \lambda_\tau[C_\tau, D_s] = 0 \quad (s = 1, 2, \dots, \rho),$$

donde segue:

$$(31)\qquad \lambda_1[C_1, D] + \lambda_2[C_2, D] + \dots + \lambda_\tau[C_\tau D] = 0 \ ,$$

ove D è una qualsiasi curva algebrica di V_π. Viceversa, se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau$ interi, non tutti nulli, costituiscono una soluzione delle (30) e quindi anche della (31), le $C_1, C_2, \dots, C_\tau$ son aritmeticamente epperò anche algebricamente legate, secondo gl'interi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\tau$, cioè soddisfanno a (29) (¹).

Pertanto, affinchè esista un legame (29) bisogna che la matrice M di ρ orizzontali e di τ verticali, formata cogl'interi $[C_j, D_s]$, abbia la caratteristica $\sigma < \tau$. Viceversa, se $\sigma < \tau$, si possono scegliere ad arbitrio nelle (30) $\tau - \sigma$ convenienti delle variabili λ e calcolare le altre σ, che riusciranno combinazioni lineari a *coefficienti razionali* delle predette.

In particolare, si posson dare alle λ, da scegliersi ad arbitrio, $\tau - \sigma$ gruppi di valori tratti dalle orizzontali di un determinante non nullo di ordine $\tau - \sigma$, a elementi interi, in guisa inoltre che le altre λ riescano numeri interi (pel che basterà preventivamente moltiplicare tutte le orizzontali del predetto determinante per un conveniente intero). Così otterremo complessivamente i coefficienti interi λ di $\tau - \sigma$ legami (29), linearmente indipendenti; e ogni altro legame (29) sarà linearmente dipendente da quelli.

Per precisare maggiormente, suppongasi che nella matrice M sia diverso da zero il determinante comune alle prime σ orizzontali e alle prime σ verticali, cioè:

$$N = \begin{vmatrix} [C_1, D_1] \dots [C_\sigma, D_1] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [C_1, D_\sigma] \dots [C_\sigma, D_\sigma] \end{vmatrix} \neq 0 \,,$$

(¹) [**73**], n. 13, ultimo capoverso di pag. 251 e primo di pag. 252.

e che alle $\lambda_{\sigma+1}, \dots, \lambda_\tau$ si dieno i valori delle orizzontali del determinante di ordine $\tau - \sigma$

$$\begin{vmatrix} N & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & N \end{vmatrix}.$$

In corrispondenza si otterranno per $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma$, $\tau - \sigma$ gruppi di valori interi, coefficienti di $C_1, C_2, \dots, C_\sigma$ in $\tau - \sigma$ legami del tipo:

$$NC_{\sigma+j} + \sum_{r=1}^{\sigma} \lambda_{jr} C_r \equiv 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, \tau - \sigma). \tag{32}$$

Le $C_1, C_2, \dots, C_\sigma$ sono algebricamente indipendenti, perchè per esse la matrice analoga alla M ha la caratteristica σ; e ognuna delle altre $\tau - \sigma$ delle C è dipendente dalle prime σ.

Un'osservazione ovvia è che *ogni soluzione delle* (29), *costituita da numeri complessi qualunque, si esprime linearmente mediante* $\tau - \sigma$ *soluzioni intere, linearmente indipendenti, di quelle equazioni.*

Diremo che la relazione (29) fra le $C_1, C_2, \dots, C_\tau$ *è un legame semplice* o che le τ varietà son *semplicemente legate* quando le $C_1, C_2, \dots, C_\tau$ si riducono a $\tau - 1$ e non meno algebricamente indipendenti, cioè quando la matrice M ad esse relativa ha la caratteristica $\sigma = \tau - 1$.

Allorchè (29) *è un legame semplice, ogni soluzione delle* (30) *è proporzionale ai coefficienti interi del legame,* onde fra le $C_1, C_2, \dots, C_\tau$ non esiste nessun altro legame linearmente indipendente da (29).

Il legame (32), per un dato valore di j, è semplice, perchè vi compaiono $\sigma + 1$ varietà e la caratteristica della matrice M ad esse relativa è σ.

Per $j = 1, 2, \dots, \tau - \sigma$ si ottengono dunque da (32) $\tau - \sigma$ legami semplici fra le $C_1, C_2, \dots, C_\tau$ e tali legami son indipendenti, perchè nella matrice dei loro coefficienti, costituita da $\tau - \sigma$ orizzontali e da τ verticali, è diverso da zero il determinante delle prime $\tau - \sigma$ verticali.

Nè fra le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ posson esistere più di $\tau - \sigma$ legami semplici linearmente indipendenti, giacchè i legami linearmente indipendenti, semplici o no, fra le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$, sono appunto $\tau - \sigma$. La conclusione è espressa dal teorema seguente:

Dato sopra una varietà algebrica irriducibile V_π un certo numero τ di varietà effettive o virtuali, ma pure, $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ a $\pi - 1$ dimensioni, perchè esse sieno algebricamente legate è necessario e sufficiente che la matrice $\|[C_j, D_s]\|$ $(j = 1, \ldots, \tau;\ s = 1, \ldots, \rho)$, ove $D_1, D_2, \ldots, D_\rho$ sia una base per le curve di V_π, abbia caratteristica $\sigma < \tau$. Vi sono allora $\tau - \sigma$ legami algebrici linearmente indipendenti fra le C e si possono scegliere in modo che ognuno di essi sia semplice.

Osservazione. — Quanto precede dà già i complementi che ci occorrono. Aggiungiamo soltanto un'osservazione riguardante la teoria della base, ma estranea agli scopi attuali.

Nel caso $\pi = 2$ delle curve di una superficie la ricerca dei legami (29) fu da me ricondotta, nella [**61**], non alle equazioni (30), ma ad un sistema di τ equazioni lineari omogenee nelle τ incognite λ, avente per matrice il *discriminante* del gruppo considerato di curve (1).

Qui si può procedere in modo analogo e si ha un risultato che ha carattere intrinseco, rispetto al gruppo di varietà; però lo scopo di ottenere i $\tau - \sigma$ legami semplici di cui sopra, si consegue con maggiore complicazione.

Comunque diamo un cenno della cosa che offre interesse a sè, limitandoci al caso delle varietà effettive.

Si seghino virtualmente le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ colle curve virtuali $(C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{\pi-1}})$ (2), *ove* $j_1, j_2, \ldots, j_{\pi-1}$ rappre-

(1) In verità nella Memoria [**61**] si parla della matrice discriminante di $\tau + 1$ orizzontali e di τ verticali, intendendo l'equivalenza algebrica come relazione di appartenenza ad un medesimo sistema algebrico a meno di una medesima curva addizionata alle due che si confrontano. Ved. a tal proposito [**61**, p. 202, oss. 2ª].

(2) [**78**, pp. 9, 13].

senta una qualunque disposizione con ripetizione a $\pi - 1$ a $\pi - 1$ degli indici $1, 2, \ldots, \tau$, avvertendo che tutte le disposizioni derivanti dalla medesima combinazione dànno luogo alla stessa curva virtuale (sicchè, se non fosse per agevolare il calcolo di seguito accennato, si potrebbero addirittura considerare le combinazioni). Ogni legame (29) offre allora una soluzione del sistema di equazioni lineari

$$\begin{aligned}(33) \qquad \lambda_1 [C_1, C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{\pi-1}}] + \lambda_2 [C_2, C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{\pi-1}}] + \ldots + \\ + \lambda_\tau [C_\tau, C_{j_1}, C_{j_2}, \ldots, C_{j_{\pi-1}}] = 0 ,\end{aligned}$$

ottenute al variare della disposizione considerata. Viceversa, ogni soluzione intera (colle λ non tutte nulle) del sistema (33) dà un legame algebrico (29).

Per dimostrarlo, si tenga conto che, essendo le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ varietà effettive, vi sono talune λ positive e altre negative: per es. sieno negative le ultime $\tau - t$:

$$\lambda_{t+1} = - \mu_{t+1}, \ldots, \lambda_\tau = - \mu_\tau .$$

Si considerino allora le due varietà effettive:

$$\mathfrak{A} = \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_t C_t , \quad \mathfrak{B} = \mu_{t+1} C_{t+1} + \ldots + \mu_\tau C_\tau .$$

In virtù delle (33), si deduce, con un semplice calcolo, che sono uguali i numeri:

$$[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{A}], [\mathfrak{A}, \mathfrak{A}, \ldots, \mathfrak{B}], \ldots\ldots, [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B}], [\mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{B}],$$

i cui simboli contengono complessivamente π fra varietà $\mathfrak{A}$ e varietà $\mathfrak{B}$; e se ne trae [1] che le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son aritmeticamente equivalenti, epperò esse o due loro equimultipli son algebricamente equivalenti; donde l'asserto.

[1] [**66**, pp. 1139, 1141].

Ne segue poi che se σ è la caratteristica della matrice dei coefficienti delle (33) fra le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ vi sono $\tau - \sigma$ legami algebrici indipendenti; ecc. ecc.

40. Segno dei periodi polari d'un integrale semplice di 3ª specie sopra una varietà. — Dobbiamo procurarci qualche altro elemento prima di affrontare lo studio dell'insieme delle varietà logaritmiche degl'integrali di Σ.

Ricordiamo che sopra una varietà algebrica qualunque, p. es. la V_π, a norma di un processo topologico elementare, e per ogni varietà algebrica irriducibile, di dimensione qualsiasi da 1 a $\pi - 1$, della V_π, si può definire una faccia positiva, associata all'indicatrice subordinata su questa varietà da un'indicatrice positiva dell'ambiente V_π. Avvertito ciò, si consideri un punto semplice P d'una varietà irriducibile a $\pi - 1$ dimensioni, C, di V_π e una curva algebrica irriducibile D, tracciata su V_π, che passi semplicemente per P, non toccando C. Un piccolissimo ciclo orientato σ, circondante P sulla riemanniana di D, dà luogo ad un'indicatrice o faccia di D, la quale, insieme alla faccia positiva di C, può servire a definire una determinata faccia di V_π. La faccia definita è indipendente da D e dal punto P, perchè ogni punto semplice di C si può raggiungere, da un punto semplice prefissato di C, con un cammino tracciato su C e tutto costituito da punti semplici.

Assumeremo su σ come *positivo* quel verso che, associato alla faccia positiva $+C$ di C, determina la faccia positiva di V_π e denoteremo con $+\sigma$ il ciclo con quel verso.

Fatte queste precisazioni, se C è una varietà logaritmica di un integrale di 3ª specie, u, di V_π, si può definire, in valore e segno, il periodo polare di u lungo C, assumendo p. es. come tale il valore di u lungo il ciclo nullo $+\sigma$ (1).

(1) Nel caso d'una V_π quasi abeliana di Jacobi il segno dei periodi polari degli integrali di 3ª specie di Σ nasceva automaticamente dal segno dei singoli periodi polari degl'integrali di 3ª specie della curva C, da cui quelli derivavano.

41. Le varietà eccezionali per le trasformazioni di 1ª e di 2ª specie della V_π ammettente il gruppo continuo Γ. — L'analisi svolta nel n. 33 per una varietà quasi abeliana di Jacobi, ci serve di guida, nell'analisi analoga, che dobbiamo svolgere per una V_π generale, almeno per ciò che riguarda le varietà eccezionali dei tipi $E_{\pi-1}$, $F_{\pi-1}$. Ma mentre nel n. 33 erano queste le sole eventualità possibili (finchè V_π rappresentava senza eccezione la varietà delle π-ple di punti della curva C), per una V_π generale non può escludersi la presenza di varietà eccezionali luoghi di punti singolari logaritmici o polari, e non già soltanto di punti di indeterminazione.

C'interessano solamente, come nel n. 33, le coppie di varietà eccezionali irriducibili, coniugate in una data trasformazione di 1ª specie α, le quali hanno dimensione $\pi - 1$, cioè contengono una componente di dimensione $\pi - 1$ (e l'altra di dimensione minore).

Esaminiamo anzitutto il caso d'una varietà eccezionale irriducibile $F_{\pi-1}$ a $\pi - 1$ dimensioni, il cui punto generico P non sia singolare per alcuno degl'integrali di Σ, cioè sia esterno a K. A causa della eccezionalità della $F_{\pi-1}$, per P deve passare una ed una sola varietà f_k subordinata a $F_{\pi-1}$, di dimensione $k \geq 1$, che si muta in un punto P', il quale non può essere logaritmico o polare per qualche integrale u di Σ, perchè, in caso contrario, il punto P, ad esso corrispondente, sarebbe logaritmico o polare per l'integrale trasformato di u, che, come si è visto (n. 38), appartiene a Σ; epperò P apparterrebbe a K, contro il supposto. Dunque F' è regolare per ogni integrale di Σ, ossia è esterno a K, oppure è un punto d'indeterminazione per qualche integrale di Σ e regolare per gli altri; insomma appartiene a K giacendo sopra una delle varietà d'indeterminazione, le quali son tutte a $\pi - 2$ dimensioni.

Se P' è regolare per ogni integrale di Σ, la $F_{\pi-1}$ è composta con un sistema $\infty^{\pi-1-k}$ di varietà f_k e su ogni f_k gl'integrali di Σ son costanti, perchè vi assumon valori determinati (a meno dei periodi), i quali son coniugati, in α, dei valori degli stessi integrali nel punto regolare P' corrispondente a quella f_k. Ne segue che la f_k generica, epperò la stessa $F_{\pi-1}$, non incontra K fuori delle varietà d'indeterminazione. Chiameremo $E_{\pi-1}$, piuttosto che $F_{\pi-1}$, una siffatta varietà eccezionale, perchè essa è appunto del tipo della $E_{\pi-1}$ incontrata nel n. 33 e le sue f_k le chiameremo l_k.

Consideriamo il caso in cui P' giace sopra una varietà d'indeterminazione. Vi sarà ancora una f_h (di dimensione $h \geq 1$, non necessariamente uguale alla precedente) uscente da P, i cui punti daranno il medesimo P'. Onde $F_{\pi-1}$ si muterà in una $F'_{\pi-1-h}$ (di dimensione $\leq \pi - 2$) situata sopra una varietà d'indeterminazione.

Ora le varietà eccezionali di una determinata dimensione per una α son portate dalle trasformazioni di 1ª o di 2ª specie di V_π in un sistema continuo di varietà eccezionali per trasformazioni di 1ª e di 2ª specie (in particolare son portate in una varietà fissa, soltanto se questa appartiene a K); e ciò perchè ogni trasformazione di 1ª specie è mutata da ogni trasformazione di 1ª o di 2ª specie in nna trasformazione di 1ª specie e perchè ogni trasformazione di 2ª specie si può riguardare come prodotto di due di 1ª specie.

La $E_{\pi-1}$ è una varietà eccezionale per ogni α, perchè *tutti* gli integrali di Σ son costanti sulle l_k, e la sua trasformata varia con α in un sistema continuo, che contiene le trasformate di $E_{\pi-1}$, rispetto alle trasformazioni di 2ª specie ed è mutato in sè dalle α e dalle β. Le trasformate di $E_{\pi-1}$ invadono l'ambiente, perchè un punto fuori di K è portato dalle trasformazioni di 1ª o di 2ª specie in ogni altro punto fuori di K.

Se una varietà d'indeterminazione è eccezionale per una α ed è portata da questa in una varietà di punti generalmente regolari, lo stesso avviene nei confronti con un'altra α qualunque o con una β; e le trasformate di quella varietà d'indeterminazione invadono l'ambiente.

Una varietà d'indeterminazione per un integrale u di Σ, nei confronti delle singolarità logaritmiche, che son quelle che c'interessano, è del tipo (C_1, C_2), ove C_1, C_2 son varietà logaritmiche irriducibili, su cui u ha periodi polari opposti. E se quella varietà è portata da una α (e quindi da ogni α e da ogni β) in una varietà fuori di K, essa deve esser d'indeterminazione o regolare per ogni altro integrale v di Σ, cioè ogni v di Σ deve avere le C_1, C_2 come logaritmiche coi periodi polari opposti (in particolare nulli). Invero, in caso contrario, in un punto fuori di K, trasformato di qualche punto di (C_1, C_2), l'integrale trasformato di v, cioè, a meno di una costante additiva, $-v$, che appartiene ancora a Σ, avrebbe una singolarità logaritmica, contrariamente al supposto che il punto in questione sia fuori di K.

Insomma *una varietà* (C_1, C_2) *comune a due componenti distinte* C_1, C_2 *di* K *può essere eccezionale per le* α *e le* β *soltanto se è d'indeterminazione per tutti gl'integrali invarianti di* Γ, *che abbiano le* C_1, C_2 *come logaritmiche.*

Riprendendo allora un'argomentazione del n. 33 si vede che (C_1, C_2) mutasi in una varietà $F_{\pi-1}$ composta con $\infty^{\pi-2}$ curve di un'involuzione $\infty^{\pi-1}$ di curve razionali f, corrispondenti nelle varie α, β ai punti di (C_1, C_2) e ciascuna delle quali incontra tutte le altre varietà d'indeterminazione; che le $F_{\pi-1}$ sono $\infty^{\pi-1}$; che tanto il sistema delle f, come il sistema delle $F_{\pi-1}$ son mutati in sè dalle α, β; ecc. ecc.

Dobbiamo ora considerare le eventuali varietà eccezionali di dimensione $\pi - 1$, che sieno componenti di K, ed i cui punti generici non sono per conseguenza d'indeterminazione (giacchè i punti d'indeterminazione son soltanto $\infty^{\pi-2}$).

Ebbene, trattasi di *varietà eccezionali fisse* per tutte le α (e le β). Questo segue dal ricordare che le trasformazioni di 1ª e di 2ª specie mutano ogni α in una α e dal fatto che una variazione continua di α non può consentire lo spostamento di una varietà eccezionale, che sia componente (di dimensione $\pi - 1$) di K. Invece le varietà eccezionali di dimensione $< \pi - 1$ (situate sempre su componenti di K, che è una varietà pura), e tra esse quelle che corrispondono a componenti eccezionali a $\pi - 1$ dimensioni, posson variare sopra componenti di K.

Varietà eccezionali componenti di K posson di fatto esistere; se ne crea subito una, trasformando V_π p. es. col sistema di tutte le quadriche del suo spazio lineare, passanti per un punto di una componente di K, il quale non sia d'indeterminazione. La varietà a $\pi - 1$ dimensioni, che nasce da quel punto, fa allora parte della varietà invariante pel gruppo continuo sulla varietà trasformata di V_π.

Tuttavia è probabile che componenti eccezionali di K, nascano soltanto attraverso trasformazioni birazionali della data V_π e che perciò con una trasformazione birazionale conveniente di V_π in un'altra varietà (priva pure di punti multipli) o nella V_π stessa, si possano fare sparire tutte.

Comunque noi faremo l'ipotesi, eventualmente limitativa, citata in seguito come *ipotesi L, che esista un modello (privo di punti multipli) di V_π, sul quale sieno eliminate le varietà eccezionali a $\pi - 1$ dimensioni, componenti di K.* E ci riferiremo d'ora in poi ad un tal modello, avvertendo ch'esso esiste di fatto (per lo meno in relazione a certi gruppi Γ) nel caso delle V_π quasi abeliane di JACOBI (e quindi per tutte le varietà quasi abeliane quando $p \leq 3$) e più generalmente in quello delle V_π quasi abeliane soddisfacenti alla definizione *c*), nonchè, come constateremo (n. 46), nel caso $\delta = 1$, e nel caso di δ qualunque, ma $\delta_1 = 0$.

Vedremo in seguito (n. 46, Oss. 1ª) che una V_π possedente un gruppo del tipo Γ, non assolutamente transitivo, ne possiede infiniti altri, sicchè potrebbe darsi che L fosse soddisfatta per qualcuno di tali gruppi e non per altri. In questo caso ci riferiremmo ad un Γ per cui L fosse soddisfatta.

Per gli scopi ulteriori è infine importante di esaminare se è possibile che l'intersezione (C_1, C_2) di due componenti irriducibili di K sia mutata dalla generica α in una $F_{\pi-1}$, fuori di K (a punto dunque generalmente regolare), senza che (C_1, C_2) giaccia sulla coniugata di C_1 o di C_2.

Avvertiamo anzitutto che per coniugata C_1' di una componente C_1 di K, distinta da C_1 o coincidente con C_1. si deve in-tendere il luogo, *irriducibile,* dell'omologo del punto *generico* di C_1, tenuto conto che il punto generico P di C_1 non è eccezionale e che quindi la corrispondenza fra l'intorno di P e l'intorno del coniugato P' è biunivoca. Si deve cioè escludere dalla varietà, che assumiamo come coniugata di C_1, la varietà eccezionale a $\pi - 1$ dimensioni che nasce dai punti d'indeterminazione situati su C_1, la qual varietà è del resto fuori di K.

Un punto *generico* P di (C_1, C_2), cioè d'una varietà a $\pi - 2$ dimensioni che consideriamo entro un ambiente a $\pi - 1$ dimensioni, C_1 o C_2, non può essere eccezionale nè per la corrispondenza che α induce fra C_1, C_1' nè per quella che α induce fra C_2 e la sua coniugata C_2'; epperò P, come punto di (C_1, C_2) ha un omologo determinato P' sia su C_1' come su C_2'; ovvero su (C'_1, C'_2). Questo importa che la varietà eccezionale $F_{\pi-1}$ trasformata di (C_1, C_2) passi per (C_1', C_2').

Se α varia con continuità, la $F_{\pi-1}$ varia con continuità (in particolare resta fissa) e la (C_1', C_2') rimane fissa, cioè $F_{\pi-1}$ passa sempre per (C_1', C_2'). Sieno $F_{\pi-1}$, $F'_{\pi-1}$ due posizioni distinte o coincidenti, della varietà eccezionale variabile, corrispondenti a due distinte trasformazioni di 1ª specie α, α'. Si osserverà che siccome α può considerarsi come trasformata di α' mediante una conveniente trasformazione di 1ª specie, sia α_0, e α_0 trasforma (C_1', C_2'), in quanto varietà di C_1', C_2' in (C_1, C_2), così $F_{\pi-1}$, trasformata di una $F'_{\pi-1}$ passante per (C_1', C_2') passerà per (C_1, C_2).

Si aggiunga che le $F_{\pi-1}$ sono anche le trasformate di (C_1, C_2) rispetto alle trasformazioni di 2ª specie, concepite come prodotti di coppie di trasformazioni di 1ª specie. Per questa ragione un punto di (C_1', C_2') come punto della $F_{\pi-1}$ trasformata di (C_1, C_2) mediante una trasformazione di 2ª specie generica β, deve provenire, qualunque sia β, da qualche punto di (C_1, C_2). Facendo tendere β all'identità la conclusione rivelasi assurda, perchè la varietà (C_1', C_2'), *distinta* da (C_1, C_2), rimane fissa. Si può dunque affermare che:

Le sole intersezioni delle coppie di componenti logaritmiche della varietà invariante K, che possono essere eccezionali per le trasformazioni di 1ª (e quindi anche di 2ª) specie, son quelle provenienti dalle coppie di componenti coniugate nelle trasformazioni di 1ª specie.

Ciò significa che non tutti gl'integrali di Σ hanno periodi opposti in C_1, C_2, quando queste varietà non sieno coniugate; altrimenti l'intersezione (C_1, C_2) sarebbe eccezionale.

42. Effetto delle trasformazioni di 1ª specie sulle varietà logaritmiche d'un integrale semplice di 3ª specie invariante pel gruppo continuo Γ. — Per precisare l'effetto cui si allude notiamo, in primo luogo, che sopra V_π le *trasformazioni di 1ª e di 2ª specie son equiverse o dirette,* ossia mutano in sè ognuna delle due faccie di V_π (vogliamo dire della sua riemanniana): trasformano insomma un'indicatrice data in una del medesimo verso (¹). Ciò dipende dal fatto che le predette trasformazioni son analitiche (pseudoconformi) (²).

Ciò premesso e ricordato il n. 40, proviamo che:

Una trasformazione di 1ª specie muta ogni varietà logaritmica irriducibile di un integrale semplice di 3ª specie u, invariante per Γ, in una varietà logaritmica diversa, dello stesso integrale, e i periodi polari lungo le due varietà differiscono soltanto pel segno.

Consideriamo, invero, un punto generico P di una varietà logaritmica irriducibile C di u e teniamo presente che, nelle nostre ipotesi, fra l'intorno di P e l'intorno del punto P' coniugato di P in una α, questa induce una corrispondenza biunivoca analitica. Sia σ un ciclo orientato omologo a zero, semplicemente concatenato con C attorno a P, il quale, associato alla faccia positiva di C dia la faccia positiva di V_π e σ' sia il

(¹) Per le nozioni topologiche occorrenti ved. p. es. [**70**, pp. 382 e segg.].

(²) Ved. p. es. [**71**, n. 26]. Del resto, la rappresentazione di V_π nel prisma dei periodi conduce alla stessa conclusione [ved. la nota (¹) della pag. 141].

ciclo lineare omologo semplicemente concatenato attorno a P' colla varietà C', coniugata di C in α.

Il trasformato $u(P')$ di $u(P)$ mediante α, considerato come funzione di P, ha sul ciclo σ lo stesso valore $\theta \neq 0$ che u possiede sul ciclo lineare σ'.

Supposto ora, per assurda ipotesi, che C coincida con C', poichè la trasformazione ivi subordinata su C è equiversa, resta invariata la faccia $+C$; e siccome deve restar invariata anche $+V_\pi$, ne deriva che σ' è positivo rispetto a $+C$, come σ. Pertanto $\theta' = \theta$, ove θ è il valore di u in σ. Poichè u appartiene a Σ, il trasformato di $u(P)$ mediante α, considerato come funzione di P, *è l'integrale*

$$u(P') \equiv -u(P) + \text{cost.}$$

Dunque $u(P')$, considerato come funzione di P, ha lungo σ' il periodo $-\theta$; il che contrasta colla conclusione precedente. Si perviene così all'assurdo cercato. Vuol dire che C è mutata da α in una altra varietà C' e ripetendo per questa il ragionamento precedente si vede che $u(P)$ ha in σ', lungo C', il periodo $-\theta$.

Qualunque sia α, la C mutasi nella stessa C', perchè al variare di α nella serie continua delle trasformazioni di 1ª specie, C' resta entro la varietà K, la quale non contiene che un numero finito di parti di dimensione $\pi - 1$. Perciò C' non può variare.

OSSERVAZIONE. — Nell'ipotesi L esiston dunque certamente varietà d'indeterminazione per ogni integrale invariante di 3ª specie.

Non tutti gl'integrali semplici di 3ª specie d'una varietà algebrica posseggon punti d'indeterminazione (mentre ne posseggono sempre gl'integrali di 2ª specie). Così p. es. nel piano l'integrale semplice di 3ª specie:

$$\log \frac{x^3}{y^2} = \int \frac{3\,dx}{x} - \frac{2\,dy}{y} ,$$

avente per curve logaritmiche le $x=0$, $y=0$ e la retta all'infinito, coi periodi polari rispettivi $6\pi i$, $-4\pi i$, $-2\pi i$, non possiede punti d'indeterminazione (perchè nei vertici del trilatero delle rette logaritmiche c'è sempre un periodo polare non nullo).

È importante osservare che per la nostra V_π col gruppo Γ, *anche quando non sia soddisfatta l'ipotesi L, ogni integrale semplice di* 3ª *specie u, invariante, possiede (almeno) una varietà d'indeterminazione a* $\pi-2$ *dimensioni.*

Invero, data una α, le singolarità logaritmiche devon potere associarsi in α a coppie (di punti non eccezionali o eccezionali), in modo che sopra la varietà V_π', imagine delle coppie di α, l'integrale $u+u'$ (u' trasformato di u) sia costante; e ciò implica che per ogni varietà, con un dato periodo polare, ce ne sia una col periodo polare opposto. La intersezione delle due varietà è allora una varietà d'indeterminazione per u.

Un'argomentazione più circostanziata, colla quale si constata l'esistenza di varietà logaritmiche a periodi polari opposti è la seguente: Si conduca per un punto generico P d'una varietà logaritmica (a $\pi-1$ dimensioni) $\mathfrak{A}$ di u una curva algebrica D, che passi semplicemente e genericamente per P; sia D' l'omologa di D in α e P' il punto omologo di P *sopra* D'. La α muta $+D$ in $+D'$ epperò un ciclo orientato nullo, σ, circondante P sopra D, in un ciclo orientato nullo, σ' circondante P' sopra D'. Ne segue, come sopra, che P' non può appartenere ad $\mathfrak{A}$, ma ad un'altra varietà logaritmica $\mathfrak{A}'$ e che i periodi di u su σ, σ' sono opposti.

43. Struttura della varietà invariante del gruppo continuo. Legami e gruppi di componenti autoconiugate. — La varietà invariante K, a prescinder dalle varietà eccezionali $F_{\pi-1}$ che nascono dalle sue varietà d'indeterminazione, è mutata in sè da ogni trasformazione α di 1ª specie e da ogni trasformazione β di 2ª specie. Nei riguardi delle trasformazioni β ben poco c'è da dire, perchè una componente C di K non può

esser spostata dalle trasformazioni di 2^a specie, in quanto ogni trasformata di quella componente deve rimanere in K; epperò essa è portata dalle trasformazioni β in una componente fissa, che coincide con C, perchè il gruppo Γ contiene l'identità.

Invece le componenti di K, di fronte ad una, e quindi a tutte le trasformazioni α, possono in parte rimaner fisse ed in parte esser a coppie coniugate. La seconda eventualità si verifica certo quando Σ contiene integrali di 3^a specie (sia pure ridotti a combinazioni razionali-logaritmiche), perchè (n. 42) ogni varietà logaritmica è mutata in una varietà logaritmica distinta.

Consideriamo in K l'insieme (eventualmente subordinato) $\overline{K}$ delle varietà logaritmiche degl'integrali di 3^a specie di Σ. Esse son esaurite dalle varietà logaritmiche $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ degli integrali $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, del sistema Σ_1 (n. 38), perchè ogni integrale di 3^a specie u di Σ differisce da una combinazione lineare dei predetti integrali per un integrale di 2^a (o di 1^a) specie additivo e quindi le sue varietà logaritmiche son comprese fra le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$; e se u è generico queste ultime entrano in giuoco tutte.

Un primo fatto importante, che consegue dal teorema fondamentale dimostrato nella Memoria [**61**] sulla base (teorema III, pag. 209), è che *le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ son algebricamente legate,* che cioè fra esse intercede un legame del tipo (29) colle λ interi non tutti nulli, e non tutti dello stesso segno, perchè le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$, essendo varietà effettive, hanno gli ordini >0.

Legami analoghi sussistono altresì fra alcune C, quando sieno da sole varietà logaritmiche di qualche integrale di Σ. Il teorema ricordato dà invero come condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un integrale di 3^a specie, che abbia certe varietà logaritmiche, l'esistenza di un legame algebrico fra queste.

Riservandoci di ritornare nel n. successivo su questo parallelismo fra legami algebrici e integrali di 3^a specie, indichiamo in questo n. alcune proprietà preliminari che conseguono dal fatto che le curve logaritmiche d'un integrale di 3ª specie, del sistema lineare Σ, son a coppie coniugate.

Una prima conseguenza è che *il numero delle componenti logaritmiche di K è pari* ($\tau = 2t$), com'è pari il numero ζ ($= 2z$) delle componenti di K che son, da sole, logaritmiche per un integrale di Σ.

Un gruppo $C_1, C_2, \ldots, C_z; C_{z+1}, \ldots, C_{2z}$ di $2z$ componenti distinte di K, a coppie $C_1, C_{z+1}; C_2, C_{z+2}; \ldots; C_z, C_{2z}$ coniugate in ogni trasformazione α, *anche se a priori queste coppie non appartengono tutte a K*, si dirà un *gruppo autoconiugato*. Dimostriamo che:

Se le varietà di un gruppo autoconiugato son algebricamente dipendenti, esiste sempre fra esse un legame algebrico in cui i coefficienti di due varietà qualunque del gruppo o son simultaneamente interi opposti od interi uguali.

Sia infatti:

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_z C_z + \lambda_{z+1} C_{z+1} + \ldots + \lambda_{2z} C_{2z} \equiv 0 \tag{34}$$

un legame fra le varietà del dato gruppo (colle λ non tutte nulle).

Se accade che

$$\lambda_h = \lambda_{z+h} \qquad (h = 1, \ldots, z), \text{ oppure: } \lambda_h = -\lambda_{z+h} \qquad (h = 1, \ldots, z),$$

il legame è del tipo enunciato. In caso diverso si applichi a (34) una α. Verrà:

$$\lambda_1 C_{z+1} + \lambda_2 C_{z+2} + \ldots + \lambda_z C_{2z} + \lambda_{z+1} C_1 + \ldots + \lambda_{2z} C_z \equiv 0$$

e sommando e sottraendo a membro a membro colla precedente:

$$(\lambda_1 + \lambda_{z+1})(C_1 + C_{z+1}) + \ldots + (\lambda_z + \lambda_{2z})(C_z + C_{2z}) \equiv 0 \,,$$
$$(\lambda_1 - \lambda_{z+1})(C_1 - C_{z+1}) + \ldots + (\lambda_z - \lambda_{2z})(C_z - C_{2z}) \equiv 0 \,.$$

E questi legami son ambedue effettivi e dei tipi voluti, perchè nè tutte le $\lambda_h + \lambda_{z+h}$ nè tutte le $\lambda_h - \lambda_{z+h}$ son nulle.

Diremo del *primo tipo* o *autoconiugato* un legame (34) in cui per ogni h è $\lambda_h = -\lambda_{h+z}$; e del *secondo tipo* un legame in cui, per ogni h è $\lambda_h = \lambda_{h+z}$. Si osserverà che non si può dedurre dall'ipotesi l'esistenza di un legame autoconiugato del primo tipo *soltanto* quando il legame che si conosce è del secondo tipo.

44. Costruzione degl'integrali di 3ª specie invarianti. Teorema fondamentale. — Dobbiamo finalmente cercar di riconoscer come e da quali legami algebrici fra le componenti di K, nascono gl'integrali di 3ª specie invarianti pel gruppo. A questo scopo riprendiamo il procedimento del n. 4 della [**61**, p. 20], ripetendolo per quella parte che occorre nel caso delle varietà e arrecandovi un complemento attualmente necessario. Si deve dimostrare che:

Ad ogni legame (29):

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\tau C_\tau \equiv 0,$$

fra τ *varietà algebriche effettive irriducibili a* $\pi - 1$ *dimensioni di* V_π, *può associarsi un integrale semplice di* 3ª *specie su* V_π (*non necessariamente invariante*) *che ha lungo le* $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ *periodi proporzionali agl'interi* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau$; *le* C *come varietà logaritmiche pure e nessun'altra singolarità.*

La dimostrazione è un'ovvia estensione di quella data nel caso delle superficie. Tuttavia dobbiamo riprenderla per completarla con l'osservazione che le C son varietà logaritmiche *pure*. Poichè le C son effettive e quindi di ordini >0, le λ non posson avere tutte lo stesso segno; sieno $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ positive e λ_{t+1} $(= -\mu_{t+1}), \ldots, \lambda_\tau$ $(= -\mu_\tau)$ negative. Allora le due varietà

$$\mathfrak{A} = \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_t C_t, \quad \mathfrak{B} = \mu_{t+1} C_{t+1} + \ldots + \mu_\tau C_\tau \tag{35}$$

oppure le:

$$\mathfrak{A} = C + \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_t C_t, \quad \mathfrak{B} = C + \mu_{t+1} C_{t+1} + \ldots + \mu_\tau C_\tau, \tag{36}$$

ove C è una conveniente varietà a $\pi - 1$ dimensioni, appartengono come varietà totali ad un medesimo sistema algebrico irriducibile H, ∞^1, di varietà a $\pi - 1$ dimensioni.

Sia

$$f(x, y) = 0$$

la curva algebrica (irriducibile) i cui punti rappresentano birazionalmente le varietà di H; e $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$ i ν punti di f corrispondenti alle ν varietà di H uscenti dal punto P variabile su V_π. Indichiamo inoltre con A, B i punti di f (che posson supporsi, senza restrizione, semplici) imagini delle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ di H sieno esse, a seconda del caso, le (35) oppure le (36); $\bar{\omega}$ un integrale abeliano di 3ª specie di f, che abbia soltanto le singolarità logaritmiche *pure* A, B (e nessuna singolarità polare), coi periodi polari rispettivi $2\pi i$, $-2\pi i$.

Poichè il gruppo $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu)$ è funzione razionale di P, la somma

$$\bar{\omega}(Q_1) + \bar{\omega}(Q_2) + \ldots + \bar{\omega}(Q_\nu) ,$$

considerata come funzione di P, è un integrale semplice w sulla V_π. Colle argomentazioni del passo citato della mia Memoria si vede che l'integrale w ha le sole varietà logaritmiche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ date dalle espressioni (35), perchè la varietà C, qualora le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ avessero la forma (36), sparirebbe come varietà polare delle funzioni razionali di P, coefficienti del differenziale totale dw; e che lungo le componenti delle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ (per una conveniente scelta del verso positivo sulla riemanniana della curva f) w ha i periodi positivi:

$$2\pi i \lambda_1, 2\pi i \lambda_2, \ldots, 2\pi i \lambda_t, -2\pi i \mu_{t+1}, \ldots, -2\pi i \mu_\tau .$$

Fuori di $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ l'integrale w resta finito. Ci resta da provare che w ha lungo le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ singolarità logaritmiche pure, cioè non sovrapposte a singolarità polari. All'uopo assumasi su f una funzione razionale ψ, che abbia un polo di 1° ordine in A ed uno zero di 1° ordine in B; e si consideri su f l'integrale di

3^a specie $\log \psi$, avente le sue singolarità logaritmiche (pure) nel gruppo dei poli e nel gruppo degli zeri di ψ, e in particolare in A, B, coi periodi polari rispettivi $2\pi i$, $-2\pi i$. La somma

$$\log \psi(Q_1) + \log \psi(Q_2) + \ldots + \log \psi(Q_\nu)$$

è, come funzione di P, l'integrale semplice di 3^a specie su V_π, $\log \Psi(P)$ ove

$$\Psi(P) = \psi(Q_1)\, \psi(Q_2) \ldots \psi(Q_\nu)$$

è funzione razionale del punto P di V_π.

L'integrale $\log \Psi\,(P)$ ha le stesse varietà logaritmiche di w (oltre ad altre, che non c'interessano e che corrispondono agli altri poli e zeri di Ψ) coi medesimi periodi; e inoltre la differenza

$$w(P) - \log \Psi(P)$$

non diviene più infinita nel punto generico di una componente di $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ perchè l'integrale di 3^a specie di f:

$$\bar{\omega}(Q) - \log \psi(Q)\,,$$

da cui proviene l'integrale precedente, resta finito in A, B. Si conclude, come volevasi, che w ha lungo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ singolarità logaritmiche pure.

Dobbiamo ora dimostrare che:

L'integrale semplice di 3^a specie associato colla costruzione precedente ad un legame autoconiugato, è invariante rispetto al gruppo continuo Γ.

Con questo teorema s'inizia il punto cruciale della nostra ricerca, dove confluiscono i concetti e i mezzi posti finora in opera. Sia dunque

$$\lambda_1(C_1 - C_{z+1}) + \ldots + \lambda_z(C_z - C_{2z}) \equiv 0 \tag{37}$$

il legame autoconiugato al quale si accenna nell'enunciato, ove C_h, C_{z+h} $(h = 1, \ldots, z)$, son coppie di componenti di K, coniugate nelle trasformazioni di 1ª specie e le λ son interi tutti diversi da zero (1).

L'integrale w di 3ª specie, costruito in relazione al legame (37) nel modo precedentemente indicato, possiede sulle

$$C_1, C_{z+1}, C_2, C_{z+2}, \ldots, C_z, C_{2z},$$

i periodi polari

$$2\pi i\lambda_1, -2\pi i\lambda_1; \; 2\pi i\lambda_2, -2\pi i\lambda_2; \; \ldots\ldots; \; 2\pi i\lambda_z, -2\pi i\lambda_z$$

e le C son per esso varietà logaritmiche pure; nè, fuori di queste varietà, w possiede altre singolarità.

Applichiamo a $w(P)$ una trasformazione di 2ª specie β. L'integrale trasformato $w(P')$, considerato come funzione di P, ha le stesse singolarità logaritmiche pure di $w(P)$ cogli stessi periodi polari e nessuna nuova singolarità, perchè le sole varietà eccezionali $F_{\pi-1}$ che nascono dalla trasformazione delle varietà d'indeterminazione (C_h, C_{z+h}) sono luoghi di punti non singolari di $w(P')$ (n. 41).

Confrontiamo i periodi ciclici dei due integrali. Una base intermediaria di cicli lineari di V_π può ricondursi, per deformazione continua, ad un sistema di $2p$ cicli, che non incontrano nè K nè le varietà eccezionali di β, e ciò a meno di cicli semplicemente concatenati colle singole varietà singolari, nei quali $w(P)$ e $w(P')$ hanno gli stessi valori.

Ogni ciclo lineare orientato σ della base intermediaria così scelta, si muta, mediante β, in un ciclo lineare orientato σ', e $w(P')$, come funzione di P, ha su σ lo stesso periodo ciclico che $w(P)$ ha su σ'. Ora, se β è abbastanza prossima all'identità, il ciclo σ' è omologo al ciclo σ nella varietà V_π, alla quale si sieno date per contorno le varietà $C_1, \ldots, C_{2z}$ e le varietà eccezionali di β, perchè σ' riducesi per continuità a σ facendo tendere β all'identità, senza che il ciclo variabile incontri il con-

(1) È ovvio che dalle λ nulle si può prescindere, senza che il legame cessi di esser autoconiugato.

torno attribuito a V_π. Pertanto $w(P)$ e $w(P')$, in quanto funzioni di P hanno gli stessi periodi ciclici, come avevano gli stessi periodi polari; e siccome le loro singolarità logaritmiche son pure e non vi sono singolarità polari, ne viene che $w(P') - w(P)$ è un integrale semplice di V_π senza periodi, dovunque finito, cioè una costante c. Insomma:

$$w(P') \equiv w(P) + c\ ;$$

e questa prova che $w(P)$ è mutato in sè da β e quindi dalle trasformazioni infinitesime di Γ, epperò da tutte le trasformazioni del gruppo continuo.

Un corollario importante del teorema dimostrato è il seguente:

Se il legame (37) *è semplice, esiste uno ed un solo integrale di* 3ª *specie invariante per* Γ (*definito a meno di un fattore moltiplicativo costante e di una costante addittiva*), *il quale possiede singolarità logaritmiche pure lungo le varietà* $C_1, \ldots, C_{2z}$ *e nessun'altra singolarità; ed ogni integrale invariante per* Γ, *avente* (*al più*) *le stesse varietà logaritmiche* (*pure od impure*), *differisce dal precedente per un additivo integrale di* 2ª (*o di* 1ª) *specie invariante.*

Infatti ogni integrale u di 3ª specie avente le sole varietà logaritmiche (pure od impure) $C_1, C_2, \ldots, C_{2z}$ ha i suoi periodi polari [in quanto soluzioni delle equazioni analoghe alla (30) del n. 39] proporzionali ai coefficienti delle rispettive varietà nel legame (37), cioè proporzionali ai periodi dell'integrale w sopra costruito; epperò esiste una costante $k \neq 0$ tale che $u - kw$ non ha più periodi polari; è un integrale di 2ª (o di 1ª) specie. D'altronde, se u è invariante per Γ, essendo già kw invariante per Γ, risulta $u - kw$ invariante pel gruppo stesso; e il corollario è dimostrato.

Possediamo a questo punto tutti gli elementi sostanziali per dimostrare il teorema fondamentale; tuttavia è opportuna qualche ulteriore osservazione.

Sieno C_1, C_{t+1}, ; . . . ; C_t, C_{2t} $(2t \times \tau)$ le coppie di componenti di K permutate da ogni trasformazione di 1ª specie e

$$\Gamma_1 = C_1 - C_{t+1}, \ldots, \Gamma_t = C_t - C_{2t}$$

sieno le t varietà virtuali pure, differenze delle varietà irriducibili di ciascuna coppia. Le Γ_1, Γ_2, . . . , Γ_t son mutate nelle varietà opposte $-\Gamma_1$, $-\Gamma_2$, . . . , $-\Gamma_t$ dalle trasformazioni di 1ª specie e ciascuna in sè dalle trasformazioni di 2ª specie.

Fra le $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ ci son le varietà virtuali differenze delle coppie coniugate di varietà logaritmiche di K, cioè le coppie costituenti la varietà $\bar{K}$ di cui al principio del n. 43. Viceversa, le Γ_1, Γ_2, . . . , Γ_t appartengono tutte a $\bar{K}$? È probabile che si debba rispondere affermativamente, ossia che accada (come nel caso di una V_π quasi abeliana di JACOBI), che le varietà di K, le quali son soltanto varietà polari d'integrali invarianti, sieno ciascuna mutata in sè dalle trasformazioni di 1ª specie; ma la risposta a tale questione ci costringerebbe a sviluppare più a fondo la teoria degl'integrali invarianti di 2ª specie, in relazione alle loro varietà d'indeterminazione, il che, per quanto offra di per sè interesse, qui non occorre. Comunque sia di ciò, a noi interessa solamente di considerar le Γ inerenti a $\bar{K}$, che son poi quelle che compaiono complessivamente nei legami fra le Γ di K, perchè, a norma del teorema or ora dimostrato, le varietà che figurano effettivamente in uno di questi legami, son logaritmiche per qualche integrale invariante. Possiamo dunque affermare che *i legami autoconiugati fra le varietà di* $\bar{K}$ *son tutti e soli i legami autoconiugati fra le varietà di* K.

Detto questo, intenderemo che Γ_1, Γ_2, . . . , Γ_t sieno addirittura differenze delle coppie di varietà coniugate di $\bar{K}$, e soltanto di queste.

Applichiamo alle Γ_1, Γ_2, . . . , Γ_t così intese il teorema conclusivo del n. 39. Se la matrice di t orizzontali e di ρ verticali $|[\Gamma_j, D_s]|$ $(j = 1, \ldots, t;\ s = 1, \ldots, \rho)$ ove $D_1, D_2, \ldots, D_\rho$ sia una base delle curve di V_π, ha la caratteristica σ (certamente $<t$, perchè fra le $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ esiste almeno un legame effettivo), si possono trovare tra le $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ $t-\sigma$ legami *semplici* linearmente indipendenti:

$$\lambda_{1j}\Gamma_1 + \lambda_{2j}\Gamma_2 + \ldots + \lambda_{tj}\Gamma_t \equiv 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, t-\sigma)$$

ciascun dei quali contiene soltanto $\sigma+1$ delle Γ in guisa che ogni altro legame

$$\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \ldots + \lambda_t\Gamma_t \equiv 0$$

fra le Γ, sia linearmente dipendente da quelli; sicchè ogni soluzione $k_1, k_2, \ldots, k_t$ delle equazioni lineari nelle λ:

$$(38) \qquad \lambda_1[\Gamma_1, D_s] + \lambda_2[\Gamma_2, D_s] + \ldots + \lambda_t[\Gamma_t, D_s] \equiv 0 \qquad (s = 1, \ldots, \rho)$$

si esprime come combinazione lineare delle soluzioni corrispondenti ai legami semplici. Esistono cioè dei numeri (complessi, non necessariamente interi) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t-\sigma}$ tali che

$$(39) \qquad k_r = \varepsilon_1\lambda_{r1} + \varepsilon_2\lambda_{r2} + \ldots + \varepsilon_{t-\sigma}\lambda_{r,t-\sigma} \qquad (r = 1, \ldots, t)\ .$$

Sieno $w_1, w_2, \ldots, w_{t-\sigma}$ gl'integrali di Σ, definiti ciascuno a meno di una costante moltiplicativa e di una additiva, associati, a norma del teorema ultimamente dimostrato, ai $t-\sigma$ legami semplici costruiti. I periodi polari di w_j, essendo soluzioni delle equazioni

$$\lambda_{1j}[\Gamma_1, D_s] + \ldots + \lambda_{tj}[\Gamma_t, D_s] \equiv 0 \qquad (s = 1, \ldots, \rho)\ ,$$

nelle quali, per ogni j, vi sono un certo numero $t-\sigma-1$ di λ nulle, son proporzionali ai coefficienti interi $\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{tj}$, appunto perchè il legame è semplice [1]; e quindi, alterando eventualmente il fattore moltiplicativo, essi posson ridursi a:

$$2\pi i\lambda_{1j}, -2\pi i\lambda_{1j}; \ldots; 2\pi i\lambda_{tj}, -2\pi i\lambda_{tj}\ ,$$

rispettivamente sulle varietà:

$$C_1, C_{t+1}; \ldots; C_t, C_{2t}\ .$$

[1] [**61**, p. 210].

Sia, dopo questo, u un generico integrale di Σ e

$$2\pi i k_1, \; -2\pi i k_1; \ldots; \; 2\pi i k_t, \; -2\pi i k_t$$

sieno i suoi periodi polari lungo le predette varietà (n. 39). Allora $k_1, \ldots, k_t$ son soluzioni delle (38) e valgon quindi per convenienti ε, indipendenti da r, le (39). Ne segue che l'integrale

$$v = u - (\varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \ldots + \varepsilon_{t-\sigma} w_{t-\sigma})$$

ha periodi polari nulli lungo ciascuna delle $C_1, C_2, \ldots, C_{2t}$; epperò è un integrale di 2ª (o di 1ª) specie appartenente a Σ; mentre $w_1, w_2, \ldots, w_{t-\sigma}$ sono integrali *essenzialmente di* 3ª *specie* nel senso che nessuna loro combinazione lineare

$$\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_{t-\sigma} w_{t-\sigma}$$

a coefficienti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{t-\sigma}$ non tutti nulli, può ridursi mai alla 2ª (o alla 1ª) specie, perchè altrimenti sussisterebbero le:

$$\mu_1 \lambda_{r1} + \mu_2 \lambda_{r2} + \ldots + \mu_{t-\sigma} \lambda_{r,t-\sigma} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, t)$$

e i $t-\sigma$ legami semplici sarebbero linearmente dipendenti. Perciò cogli integrali $w_1, w_2, \ldots, w_{t-\sigma}$ si può individuare il sistema lineare Σ_1, considerato nel n. 38; onde è $t-\sigma = \delta_1$, e possiamo assumere

$$u_{p+1} = w_1, \ldots, u_{p+\delta_1} = w_{t-\sigma} \;.$$

In conclusione abbiamo il

TEOREMA FONDAMENTALE. *Gl'integrali essenzialmente di* 3ª *specie e invarianti pel sistema continuo* Γ *sono tanti, indipendenti, quanti sono i legami (indipendenti) semplici e autoconiugati fra le componenti della varietà invariante* K*; e si possono scegliere in modo che abbiano soltanto singolarità logaritmiche pure. Ogni altro integrale invariante differisce da una combinazione lineare dei precedenti per un additivo integrale di* 2ª *(o di* 1ª*) specie invariante.*

Il teorema ci dà anche *il significato geometrico degli altri due interi* δ_1, δ_2 *caratteristici del gruppo continuo* Γ (il primo dei tre essendo l'irregolarità superficiale p di V_π): invero δ_1 è il numero dei predetti legami autoconiugati e δ_2 risulta definito per differenza $\delta_2 = \pi - p - \delta_1$.

OSSERVAZIONI. — Quando V_π è una varietà quasi abeliana di JACOBI, i δ_1 legami semplici autoconiugati cui allude il teorema sono

$$\Gamma_j = \mathfrak{A}_j - \mathfrak{B}_j \equiv 0 \qquad (j = 1, \ldots, \delta_1) .$$

Tutti gli elementi della matrice $\|[\Gamma_j, D_s]\|$ son nulli, ossia è $\sigma = 0$.

45. LA BASE DEI CICLI LINEARI NELLA VARIETÀ V_π CONTORNATA DALL'INSIEME DEI PUNTI LOGARITMICI. PERIODI PRIMITIVI DEGL'INTEGRALI DI 3ª SPECIE. TABELLA NORMALE. — Per ciascuno dei δ_1 integrali di 3ª specie invarianti $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ si hanno $\sigma + 1$ coppie di varietà logaritmiche coniugate, alle quali spettano $2(\sigma + 1)$ periodi, che si riducono a $\sigma + 1$, perchè i periodi di ciascuna coppia sono opposti. Ma un'ulteriore notevole riduzione è possibile nei periodi di questi integrali, considerati come vettori dello $S_{2\delta_1}$ euclideo, dove si rappresentano le variabile $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, cioè come vettori dello $S_{2\pi}$ euclideo, dove si rappresentano le $u_1, \ldots, u_{p+\delta_1}, \ldots, u_\pi$, nei quali son nulle le componenti relative alle variabili u diverse da $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$. Tali periodi son infatti riducibili nel senso che fra essi passano talune relazioni lineari omogenee a coefficienti interi, che permettono in definitiva di esprimerli come combinazioni di δ_1 periodi convenienti.

Prima di determinare queste relazioni faremo qualche premessa, utile anche in seguito.

a) Sopra una varietà algebrica (irriducibile) M_k d'irregolarità superficiale p, ogni ciclo lineare σ sul quale i p integrali semplici di 1ª specie di M_k dieno periodi nulli, è omologo a zero o è un divisore dello zero.

Sia $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$ una base intermediaria dei cicli di M_k; allora:

$$\sigma \approx m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \ldots + m_{2p} \sigma_{2p}$$

$\approx$ essendo il simbolo di pseudomologia ed $m_1, m_2, \ldots, m_{2p}$ convenienti interi, positivi, negativi o nulli. Sieno inoltre $u_1, u_2, \ldots, u_p$, p integrali semplici indipendenti di 1ª specie di M_k ed ω_{rs} sia il periodo di u_r al ciclo σ_s. Per ipotesi

$$m_1 \omega_{r1} + m_2 \omega_{r2} + \ldots + m_{2p} \omega_{r,2p} = 0 \qquad (r = 1, \ldots, p),$$

e quindi:

$$m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \ldots + m_{2p} \omega_{2p} = 0$$

ove:

$$\omega_s = \sum_{r=1}^{p} \lambda_r \omega_{rs}$$

è il periodo al ciclo σ_s di un qualunque integrale semplice di 1ª specie

$$u = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p$$

di M_k. Posto

$$\omega_s = \omega_s' + i \omega_s'' ,$$

ne segue:

$$m_1 \omega_1' + m_2 \omega_2' + \ldots + m_{2p} \omega'_{2p} = 0 ,$$

il che importa:

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{2p} = 0 ,$$

perchè esiste un integrale semplice di prima specie colle parti reali dei periodi arbitrariamente fissate (1).

(1) [**62**, n. 4, oss. 2ª].

b) Diremo che due cicli lineari τ_1, τ_2 tracciati sulla varietà $V_\pi - \overline{K}$, alla quale sia dato per contorno l'insieme $\overline{K}$ delle coppie di varietà autoconiugate di K (varietà logaritmiche degli integrali di 3ª specie), sono *virtualmente omologhi* e scriveremo:

$$\tau_1 \stackrel{v}{\sim} \tau_2 ,$$

se nei cicli τ_1, τ_2 ogni integrale invariante dà periodi uguali.

Da *a*) segue che due cicli virtualmente omologhi sono pseudomologhi in V_π, perchè su essi dànno uguali periodi i p integrali semplici di 1ª specie di V_π, che son fra gl'integrali invarianti.

Sopra $V_\pi - \overline{K}$ due cicli omologhi, cioè contornanti insieme una superficie che non incontra $\overline{K}$, sono virtualmente omologhi; ma non è vero il viceversa. P. es. due cicli nulli circondanti con versi contrari due punti di due varietà logaritmiche coniugate, sono virtualmente omologhi, ma non omologhi in $V_\pi - \overline{K}$.

Vogliamo trovare la base dei cicli omologhi e di quelli virtualmente omologhi in $V_\pi - \overline{K}$.

Fissiamo una base intermediaria $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$ dei cicli lineari di V_π, la quale sia costituita da $2p$ cicli non incontranti K. Due cicli σ, τ omologhi o pseudomologhi in V_π e quindi espressi dalla stessa combinazione lineare di $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$, non sono necessariamente omologhi (o pseudomologhi) sopra $V_\pi - \overline{K}$, perchè fra le superficie di cui σ, τ o due loro equimultipli costituiscono complessivamente il contorno (orientato), può darsi che non ve ne sia nessuna non incontrante $\overline{K}$. Attraverso ad una tal superficie, incontrante $\overline{K}$, τ (od un suo multiplo) diviene dunque omologo a σ (o ad un suo equimultiplo) coll'aggiunta della somma di alcuni cicli nulli contornanti altrettanti punti semplici di componenti di $\overline{K}$.

Perciò tutto si riduce a determinare una base intermediaria dei cicli nulli e pseudonulli. Una base siffatta, aggiunta a $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$ dà una base intermediaria di tutti i cicli lineari di $V_\pi - \overline{K}$.

Il procedimento è il medesimo, colle debite varianti, di quello che ora indicheremo per le omologie virtuali, che più c'interessano.

Sieno al solito C_1, C_{t+1}; C_2, C_{t+2}; . . . ; C_t, C_{2t} le coppie di varietà logaritmiche coniugate di $\overline{K}$ e $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_t$ le loro differenze. Seghiamo le C con una D_s (n. prec.). La somma dei cicli positivi nulli che circondano sulla riemanniana di D_s le singole intersezioni delle C con D_s, è omologa a zero sulla riemanniana stessa, privata di quei punti, perchè contorna due parti distinte della riemanniana e una di queste non contiene nessuna delle intersezioni. D'altronde i cicli che circondano due intersezioni di D_s con una medesima C son omologhi in $V_\pi - \overline{K}$; perciò, designati con $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2t}$ i cicli relativi ad una intersezione di D_s rispettivamente con $C_1, C_2, \ldots, C_{2t}$, viene:

$$[C_1, D_s]\tau_1 + [C_2, D_s]\tau_2 + \ldots + [C_{2t}, D_s]\tau_{2t} \sim 0 \qquad (\text{mod.}\, V_\pi - \overline{K}),$$

epperò, tenuto conto che:

$$\tau_h \dot{\sim} -\tau_{t+h} \qquad (h = 1, \ldots, t),$$

risulta:

$$[\Gamma_1, D_s]\tau_1 + [\Gamma_2, D_s]\tau_2 + \ldots + [\Gamma_t, D_s]\tau_t \dot{\sim} 0 \qquad (s = 1, \ldots, \rho).$$

Queste omologie virtuali riduconsi a σ linearmente indipendenti, tante quant'è la caratteristica della matrice $|[\Gamma_j\, D_s]|$. Se p. es. è diverso da zero il determinante Δ delle prime σ orizzontali e delle prime σ verticali della matrice, dalle precedenti omologie virtuali si traggono $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \ldots, \Delta\tau_\sigma$ espressi per combinazioni lineari a coefficienti interi di $\tau_{\sigma+1}, \ldots, \tau_t$.

Ora, dato un ciclo nullo τ di V_π, esso è omologo in $V_\pi - \overline{K}$ ad una combinazione lineare a coefficienti interi di $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{2t}$; e lo stesso vale per un multiplo conveniente del ciclo τ, se questo è un divisore dello zero. Pertanto un multiplo conveniente di τ è virtualmente omologo ad una combinazione lineare a coefficienti interi di $\tau_{\sigma+1}, \tau_{\sigma+2}, \ldots, \tau_t$.

I cicli $\tau_{\sigma+1}, \tau_{\sigma+2}, \ldots, \tau_t$ son poi indipendenti dal punto di vista delle omologie virtuali. Infatti, in caso contrario esisterebbe fra essi una omologia virtuale a coefficienti interi non tutti nulli e il determinante dei periodi polari lungo $\tau_{\sigma+1}, \ldots, \tau_t$ degl'integrali $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ costruiti a norma del teorema fondamentale del n. 44, sarebbe nullo. Esisterebbe pertanto una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli dei predetti integrali avente periodi nulli ai cicli $\tau_{\sigma+1}, \ldots, \tau_t$, quindi ad ogni altro ciclo τ: il che è assurdo, perchè $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, son essenzialmente di 3ª specie (n. 44). La conclusione è dunque che $\tau_{\sigma+1}, \ldots, \tau_t$ costituiscono una base pei cicli nulli o pseudonulli di $V_\pi - \overline{K}$, considerati dal punto di vista delle omologie virtuali.

Da questa base si può poi passare ad una base intermediaria, che è anche una base minima dei predetti cicli, perchè nel campo delle omologie virtuali non esistono, per la definizione stessa, che cicli virtualmente nulli, non pseudonulli. Il passaggio ad una base intermediaria si può fare ad esempio col procedimento aritmetico usato da WEIERSTRASS nella ricerca dei periodi primitivi di un corpo di funzioni abeliane (1), sostituendo ai cicli $\tau_{\sigma+1}, \ldots, \tau_t$, convenienti loro combinazioni lineari indipendenti a coefficienti interi. Continueremo a designare i cicli della base minima colle lettere $\tau_{\sigma+1}, \ldots, \tau_t$: varrà allora per ogni ciclo lineare σ di $V_\pi - \overline{K}$ una omologia virtuale del tipo:

$$\sigma \backsim m_1 \sigma_1 + m_2 \sigma_2 + \ldots + m_{2p} \sigma_{2p} + n_1 \tau_{\sigma+1} + n_2 \tau_{\sigma+2} + \ldots + n_{\delta_1} \tau_t ,$$

con m, n interi convenienti; sicchè i periodi *primitivi* degl'integrali invarianti Γ si ridurranno a quelli (ciclici) relativi ai

(1) Monatsberichte, 1875. Il procedimento è riprodotto in PICARD [**50**, pp. 227-28]. Il suo ovvio adattamento ai cicli lineari d'una varietà si vedrà diffusamente nel seguito della mia opera [**78**].

cicli σ e a quelli (polari) relativi ai $\delta_1 = t - \sigma$ (n. 44) cicli nulli o pseudonulli $\tau_{\sigma+1}, \ldots, \tau_t$.

Un passo ancora occorre compiere, onde avere la tabella dei periodi degli u sotto la forma più semplice.

Anzitutto scegliamo per $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$ due gruppi di cicli normali associati [1] $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$; $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{2p}$ (essendo associati σ_h e σ_{p+h}). Una sostituzione lineare non degenere sugli integrali semplici di 1ª specie $u_1, u_2, \ldots, u_p$, riduce i loro periodi alla tabella normale $|A \;\Omega|$, ove A è un determinante d'ordine p avente non nulli, ed uguali a $\frac{2\pi i}{d_1}, \ldots, \frac{2\pi i}{d_p}$ (con $d_1, d_2, \ldots, d_p$ divisori della varietà di Picard di V_π, cioè di V_π) soltanto gli elementi della diagonale principale; ed Ω un determinante simmetrico d'ordine p costituito dai period ω_{hk}, relativi ai cicli $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{2p}$ [2].

Dopo ciò, sottratto da ognuno degl'integrali di 2ª e di 3ª specie un conveniente integrale di 1ª specie, si riducono a zero tutti i periodi degl'integrali di 2ª e di 3ª specie ai cicli $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$. La matrice dei periodi primitivi di $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ si presenta allora sotto la forma

$$(40) \qquad \begin{vmatrix} A & \Omega & O \\ O & \Omega_1 & B \\ O & \Omega_2 & O \end{vmatrix}$$

con significato trasparente dei simboli (in relazione a quanto spiegammo nel n. 28, Oss. 3ª). Ma un'ulteriore riduzione è possibile. Sia

$$B = \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \ldots & \theta_{1\delta_1} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \ldots & \theta_{2\delta_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{\delta_1 1} & \theta_{\delta_1 2} & \ldots & \theta_{\delta_1\delta_1} \end{vmatrix}$$

(1) [**62**, n. 3].
(2) [**62**, n. 5].

ove θ_{rs} è il periodo dell'integrale di 3^a specie u_{p+r} al ciclo $\tau_{\sigma+s}$. Il valore di B è diverso da zero, perchè in caso contrario esisterebbe una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli di $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, avente periodi polari nulli, cioè di 2^a (o di 1^a) specie, contrariamente al fatto che gli $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, come gli originari, continuano ad essere *essenzialmente* di 3^a specie. Si potranno perciò determinare delle costanti $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\delta_1}$ tali che l'integrale $\lambda_1 u_{p+1} + \ldots + \lambda_{\delta_1} \times u_{p+\delta_1}$, abbia il periodo $2\pi i$ al ciclo $\tau_{\sigma+1}$ e periodi nulli sugli altri cicli τ. Similmente si otterrà una combinazione lineare di $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, avente tutti nulli i periodi polari, salvo quello al ciclo $\tau_{\sigma+2}$; ecc. Verremo così a sostituire ad $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, altrettanti integrali di 3^a specie, che designeremo cogli stessi simboli e che saranno indipendenti, in quanto il determinante dei loro periodi polari assumerà la forma

$$B = \begin{vmatrix} 2\pi i & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 2\pi i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 2\pi i \end{vmatrix}.$$

In tal modo giungiamo alla forma più semplice, che desideravamo di conseguire, per la tabella dei periodi degli $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$: la diremo una *tabella normale di periodi primitivi*. E si ricordi che in essa la $|A\ \Omega|$ è una matrice di RIEMANN (cioè abeliana) ridotta a forma normale: la chiameremo *matrice abeliana associata ad ogni corpo di funzioni quasi abeliane su V_π*; e le ω di Ω soddisfano pertanto alle relazioni qualitative e quantitative caratterizzanti una siffatta matrice.

46. CARATTERIZZAZIONE DELLE VARIETÀ ALGEBRICHE POSSEDENTI GRUPPI CONTINUI ABELIANI TRANSITIVI DI DIMENSIONE UGUALE ALLA DIMENSIONE DELLA VARIETÀ AMBIENTE. EQUIVALENZA DELLE DEFINIZIONI B), C). — Dimostriamo in primo luogo che:

Una V_π d'irregolarità superficiale nulla, mutata in sè da un *gruppo continuo Γ, abeliano, ∞^π, transitivo, di trasformazioni birazionali, è razionale.*

L'ipotesi che il gruppo sia « generalmente » transitivo è inutile (per $\pi > 1$), perchè, quando il gruppo è assolutamente transitivo, V_π ha l'irregolarità superficiale π (n. 38).

Essendo $p=0$, non vi sono in Σ che integrali di 3ª (o di 2ª) specie, i quali si riducono a combinazioni razionali-logaritmiche [1]. Riferiamoci a uno generico u degli integrali $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, cioè $u_1, u_2, \ldots, u_{\delta_1}$ $(p=0)$, del teorema fondamentale. Le varietà logaritmiche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ di u, sono linearmente equivalenti sulla attuale V_π, appunto perchè, attesa la regolarità superficiale di questa, ogni sistema algebrico completo di varietà a $\pi - 1$ dimensioni su V_π è un sistema lineare. Vi è dunque una funzione razionale R, del punto di V_π, che s'annulla su $\mathfrak{A}$ cogli ordini $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_z$ lungo le $C_1, C_2, \ldots, C_z$ e su $\mathfrak{B}$ cogli ordini $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_z$ lungo le $C_{z+1}, C_{z+2}, \ldots, C_{2z}$, essendo $C_1, C_{z+1}; \ldots; C_z, C_{2z}$ le coppie di varietà coniugate di K riempite dalle singolarità logaritmiche di u. E siccome l'integrale di 3ª specie $\log R$ ha lungo le predette coppie i periodi polari:

$$2\pi i\lambda_1, -2\pi i\lambda_1; \ldots\ldots; 2\pi i\lambda_z, -2\pi i\lambda_z,$$

si potrà in definitiva assumere $u = \log R$.

Insomma, come integrali fondamentali del sistema Σ di V_π posson assumersi gl'integrali:

$$u_j = \log R_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, \delta_1)$$

ove R_j son funzioni razionali sopra V_π.

Gl'integrali di 2ª specie $u_{\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ riduconsi addirittura a funzioni razionali:

$$u_{\delta_1+l} = R_{\delta_1+l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, \delta_2) .$$

(1) [**61**, p. 213]. La proprietà caratteristica delle superficie regolari, che cioè gl'integrali semplici riduconsi ivi a combinazioni razionali-logaritmiche, estendendosi tal quale alle varietà superficialmente regolari (ved. anche a tal proposito il n. 56).

Pel teorema d'univoca inversione degl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, le equazioni:

$$\log R_j = \text{cost.}\ , \quad R_{\delta_1+l} = \text{cost.}$$

cioè

$$(41) \qquad R_j = c_j\ , \quad R_{\delta_1+l} = c_{\delta_1+l} \qquad (j = 1, \ldots, \delta_1\,;\ l = 1, \ldots, \delta_2)$$

ove c_j, c_{δ_1+l} son costanti generiche, individuano un punto di V_π, le cui coordinate si posson dunque ricavare in modo univoco dalle (41) (unite alle equazioni di V_π nel proprio ambiente). Pertanto queste coordinate risultano funzioni algebriche ad un valore, cioè razionali, dei parametri $c_1, c_2, \ldots, c_\pi$; e, viceversa, le (41) dànno $c_1, c_2, \ldots, c_\pi$ come funzioni razionali del punto di V_π; onde W_π è razionale.

Dimostrato il *teorema di caratterizzazione*, che abbiamo in vista, nel caso $p=0$, passiamo ad enunciarlo e a dimostrarlo per $p>0$ $(p<\pi)$:

Sia V_π una varietà algebrica mutata in sè da un gruppo abeliano, continuo, ∞^π, transitivo, Γ, di trasformazioni birazionali. Essa ha l'irregolarità superficiale $p \leq \pi$. Condizione necessaria e sufficiente perchè sia $p<\pi$, è che Γ contenga un sottogruppo abeliano razionale, la cui dimensione è $\delta = \pi - p$. La V_π è birazionalmente equivalente al prodotto di una varietà di Picard *V_p' e di uno spazio lineare S_δ. Viceversa, ogni tale prodotto soddisfa alle ipotesi.*

Che sia $p \leq \pi$ lo abbiamo già osservato ed abbiamo altresì osservato che quando $p=\pi$ la V_π è una varietà di Picard (prodotto di una varietà di Picard per un punto). Sia dunque $p<\pi$. Allora il sistema Σ degl'integrali invarianti pel gruppo Γ può esser individuato cogl'integrali:

$$u_1, u_2, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}; u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi\ ,$$

di cui alla fine del n. 38 $(\delta_1 + \delta_2 = \delta)$, essendo gli $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ scelti a norma del teorema fondamentale (n. 44). Secondo il teorema con cui s'apre il n. 44, ciascuno di questi integrali, diviso per un'opportuna costante, può ridursi ad avere per periodi polari i prodotti di $2\pi i$ pei coefficienti interi del legame semplice fra le sue varietà logaritmiche.

Le equazioni

$$u_1 = \text{cost.},\ u_2 = \text{cost.}, \dots, u_p = \text{cost.},$$

dato che $u_1, u_2, \dots, u_\pi$, e quindi anche $u_1, u_2, \dots, u_p$, son funzionalmente indipendenti, son soddisfatte su V_π da ∞^δ punti, i quali riempiono una varietà M_δ, che è *algebrica*. Al variare delle costanti dei secondi membri la M_δ descrive un'involuzione algebrica ∞^p, J, poichè per ogni punto di V_π passa una sola M_δ (1).

Il gruppo Γ muta in sè l'involuzione della M_δ, perchè muta in sè ogni u e subordina su J un gruppo abeliano continuo ∞^p assolutamente transitivo di trasformazioni birazionali. Il gruppo subordinato da Γ su J è assolutamente transitivo, perchè in due punti *qualunque* di V_π gl'integrali $u_1, u_2, \dots, u_p$ hanno valori finiti.

Diremo V_p' una varietà i cui punti rappresentino birazionalmente le M_δ, considerate come elementi di J. La V_p' è una varietà di PICARD, perchè ammette un gruppo abeliano continuo, ∞^p, assolutamente transitivo di trasformazioni birazionali. I suoi ∞^{p-1} integrali di 1ª specie, mediante la sostituzione razionale da V_p' a V_π, dànno tutti gl'integrali di 1ª specie di V_π.

Vi sono ∞^δ trasformazioni di Γ, che mutano in sè ogni M_δ: esse si ottengon una per una, facendo corrispondere ad un punto P genericamente fissato su V_π, un punto P' della M_δ passante per P. Queste trasformazioni mutan di fatto in sè ogni M_δ (subordinano su J l'identità) e son rappresentate dalle (27) nelle quali si assuma $b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0$. Esse formano un

(1) L'algebricità delle M_δ e di J consegue p. es. dall'ovvia estensione alle varietà del risultato della mia nota [**64**, p. 685]. Ved. pure la mia Memoria [**65**], ove, al n. 6, è contenuto un teorema, che, applicato al nostro caso, dà l'involuzione algebrica J delle M_δ algebriche.

sottogruppo abeliano Γ_δ di Γ, le cui trasformazioni, considerate come elementi, si posson porre in corrispondenza birazionale con una qualunque M_δ. Il sottogruppo Γ_δ è su M_δ generalmente transitivo e i rispettivi integrali semplici invarianti sono $u_{p+1}, \ldots, u_\pi$ e soltanto questi, giacchè sono δ linearmente (anzi funzionalmente) indipendenti sulla *generica* M_δ. Inoltre sulla M_δ essi son della stessa specie che sull'ambiente V_π.

Poichè M_δ soddisfa alle ipotesi cui soddisfaceva, per $p=0$, la V_π considerata nel teorema premesso, si conclude ch'essa è razionale. E il suo sottogruppo Γ_δ è razionale come M_δ.

Preso ora un generico integrale u fra i δ_1 integrali $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$, e le sue varietà logaritmiche:

$$\mathfrak{A} = \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_z C_z, \qquad \mathfrak{B} = \lambda_1 C_{z+1} + \ldots + \lambda_z C_{2z},$$

intersechiamole colla generica M_δ;

$$(\mathfrak{A}, M_\delta) = \lambda_1 (C_1, M_\delta) + \ldots + \lambda_z (C_z, M_\delta),$$
$$(\mathfrak{B}, M_\delta) = \lambda_1 (C_{z+1}, M_\delta) + \ldots + \lambda_z (C_{2z}, M_\delta).$$

Le $(\mathfrak{A}, M_\delta)$, $(\mathfrak{B}, M_\delta)$ sono algebricamente equivalenti, epperò linearmente equivalenti su M_δ. Esiste pertanto una funzione razionale R, del punto di M_δ che ha per varietà zero la $(\mathfrak{A}, M_\delta)$ e per varietà polare la $(\mathfrak{B}, M_\delta)$. Essa è determinata a meno d'un fattore costante su M_δ, cioè a meno d'una moltiplicativa funzione razionale del punto di V_p'.

Per individuare razionalmente R sopra M_δ, usiamo di un artificio che ho altrove adoperato in circostanze analoghe (1). Consideriamo cioè su V_π una qualunque varietà algebrica Z_p, la quale seghi la generica M_δ in un gruppo (Z_p, M_δ) di un numero finito n di punti, $P_1, P_2, \ldots, P_n$, e assumiamo invece di R la funzione razionale

$$\Phi = \frac{R(P)}{R(P_1) + R(P_2) + \ldots + R(P_n)};$$

(1) [**78**, p. 191]. A p. 197 dalla stessa opera è citata la mia Nota del 1911, dove il procedimento è usato per la prima volta.

ove R (P) è una qualunque delle funzioni razionali che sopra M_δ hanno $(\mathfrak{A}, M_\delta)$, $(\mathfrak{B}, M_\delta)$ come varietà (complete) di zeri e di poli.

La Φ, variando M_δ, dà luogo ad una funzione razionale del punto di V_π, la quale ha le $C_1, C_2, \ldots, C_z$ come varietà di zeri degli ordini $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_z$ e le $C_{z+1}, \ldots, C_{2z}$ come varietà di poli degli ordini $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_z$. Naturalmente queste varietà non esauriscono in generale le varietà di livello zero e infinito di Φ, come funzione del punto di V_π, perchè le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ non sono in generale linearmente equivalenti sopra V_π. Esse lo sono soltanto quando u, che ha già su $C_1, \ldots, C_{2z}$ i periodi polari del log Φ, riducesi a questa funzione. Nel caso generale accade invece che le ulteriori varietà di livello zero e infinito di Φ, diciamole $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, non hanno intersezioni colle M_δ (che, si ricordi, non hanno punti fissi), cioè ognuna delle parti irriducibili di $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ consta di ∞^{p-1} varietà M_δ (le quali si distribuiscono su quella parte in un'involuzione ∞^{p-1}).

Sussiste pertanto su V_π l'equivalenza *lineare*:

$$\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_z C_z + \mathfrak{A}' \equiv \lambda_1 C_{z+1} + \ldots + \lambda_z C_{2z} + \mathfrak{B}' .$$

e l'equivalenza algebrica:

$$\mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B}' ,$$

cosicchè la differenza

$$u - \log \Phi , \tag{42}$$

che è su V_π un integrale semplice senza periodi polari lungo le $\mathfrak{A}$,, $\mathfrak{B}$, ha invece le $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ come varietà logaritmiche, e i periodi polari proporzionali, col fattore di proporzionalità $2\pi i$, ai coefficienti interi del legame

$$\mathfrak{A}' - \mathfrak{B}' \equiv 0 \tag{43}$$

fra le parti irriducibili delle $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$.

Insomma risulta:

$$u = \log \Phi + w \ , \tag{44}$$

ove w è un integrale semplice di 3^a specie (non appartenente più al sistema Σ) trasformato razionale di un integrale semplice di 3^a specie di V_p'. Invero, la differenza (42) subordina su M_δ un integrale senza periodi, che *a priori* potrebbe essere di 2^a specie (cioè ridotto ad una funzione razionale). Ma questa possibilità si deve escludere, perchè u è a varietà logaritmiche pure sia nell'ambiente V_π come sopra M_δ. Dunque la differenza (42) è costante sopra ogni M_δ e riducesi ad un integrale semplice di 3^a specie w appartenente all'involuzione J.

L'integrale w ha soltanto singolarità logaritmiche pure, perchè le sue singolarità lungo le $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ son dello stesso tipo delle singolarità che presenta $\log \Phi$ lungo le medesime varietà e i periodi polari lungo le componenti di $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ si ottengono cambiando segno ai periodi polari di $\log \Phi$ lungo le stesse componenti, perchè $\log \Phi + w$ non ha più le $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ come varietà logaritmiche. Insomma *i periodi polari di w son proporzionali (col fattore di proporzionalità $2\pi i$) ai coefficienti interi del legame algebrico* (43) *fra le componenti irriducibili di $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$.*

Scriviamo la (44) per ognuno degl'integrali di 3^a specie $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$.

Verrà:

$$u_{p+j} = \log R_j + w_{p+j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \delta_1) \ .$$

Similmente potremo scrivere:

$$u_{p+l} = R_l + w_{p+l} \qquad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta) \ ,$$

ove R_l è una funzione razionale conveniente del punto di V_π e w_{p+l} un integrale semplice di 2^a specie di V_π (non appartenente al sistema Σ), costante lungo le M_δ, cioè trasformato di un integrale di 2^a specie di V_p'.

La funzione R_l si costruisce coll'artificio analogo a quello usato per costruire la Φ, dopo aver constatato che u_{p+l} individua sulla generica M_δ un integrale semplice di 2ª specie e quindi una funzione razionale definita su M_δ a meno di un fattore moltiplicativo, dipendente razionalmente dal punto di V_p'.

Poichè su M_δ gl'integrali invarianti pel gruppo Γ_δ sono $\log R_j$ ($j = 1, \ldots, \delta_1$) ed R_l ($l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta$), le equazioni

$$R_j = c_j \,, \quad R_l = c_l \,, \tag{45}$$

ove c_j, c_l son δ parametri generici, unite alle equazioni di una generica M_δ nell'ambiente lineare di V_π, si posson risolvere rispetto alle coordinate di un determinato punto di M_δ. E siccome M_δ dipende razionalmente dal suo punto imagine su V_p', in definitiva le coordinate del punto individuato su M_δ risultano funzioni razionali dei parametri $c_1, c_2, \ldots, c_\delta$, cioè del punto variabile sopra un S_δ e del punto variabile in V_p'.

Viceversa, dato un punto di V_π, esso individua la M_δ per esso e quindi un punto di V_p' e sulla M_δ i valori delle R_j, R_l, ossia dei parametri $c_1, c_2, \ldots, c_\delta$. Perciò V_π è in corrispondenza birazionale colla varietà delle coppie di punti di S_δ e di V_p', com'è affermato dal teorema da dimostrarsi.

Le varietà algebriche N_p che entro V_π hanno le equazioni (45) sono unisecanti delle M_δ: rappresentano le coppie di punti di S_δ, V_p' che hanno un punto fissato su S_δ; mentre le M_δ rappresentano le coppie che hanno un punto fissato su V_p'.

Si badi che le varietà ∞^p definite su V_π dalle:

$$\begin{aligned} u_{p+j} &= \text{cost.} \qquad && (j = 1, \ldots, \delta_1) \\ u_{p+l} &= \text{cost.} \qquad && (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta) \end{aligned}$$

non sono algebriche, nè contengono come parti le N_p (come a prima vista si potrebbe pensare), perchè sopra le N_p gl'integrali u_{p+j}, u_{p+l} si riducono agl'integrali w_j, w_l e non son dunque costanti.

Viceversa, la varietà V_π prodotto di una varietà di PICARD V_p' per uno spazio lineare S_δ possiede un gruppo continuo abeliano ∞^π transitivo di trasformazioni birazionali che si genera nel modo seguente:

Si fissi entro S_δ un gruppo continuo abeliano ∞^δ transitivo, Γ_δ, di trasformazioni birazionali: p. es. il gruppo (23) di trasformazioni, considerato nel n. 32, la cui varietà invariante è costituita in S_δ da certe δ_1 coppie di iperpiani distinti e da certi altri δ_2 iperpiani e che dà luogo alla schiera delle ∞^δ trasformazioni di 1ª specie (26), le quali scambiano fra loro gl'iperpiani di quelle δ_1 coppie e mutano in sè ciascuno dei δ_2 iperpiani isolati.

E dentro V_p' si consideri il gruppo abeliano continuo ∞^p, Γ_p, assolutamente transitivo, di trasformazioni birazionali che mutano in sè V_p'. Fissata una trasformazione β' del gruppo Γ_δ e una trasformazione β'' di Γ_p, la coppia β', β'' definisce una trasformazione birazionale β di V_π in sè, nel senso che, presa una coppia di punti P', P'' di S_δ e di V_p' (cioè un punto di V_π), l'omologo Q' di P' in β' e l'omologo Q'' di P'' in β'', costituiscono una coppia Q', Q'' (cioè un punto di V_π), che è omologa nella β della coppia (o punto) P', P''.

Le ∞^π β formano su V_π il richiesto gruppo Γ e le trasformazioni provenienti dall'associare alle β' l'identità di Γ_p formano un sottogruppo, razionale ∞^δ, del gruppo Γ, che potremo continuare a chiamare Γ_δ; e le trasformazioni β risultanti dall'associare ad ogni β'' l'identità di Γ_δ formano un sottogruppo ∞^p del gruppo Γ, che è birazionalmente equivalente a V_p'. Le traiettorie di Γ_δ sono le M_δ di V_π, imagini dei prodotti dei punti di V_p' per S_δ; e le traiettorie di Γ_p sono varietà abeliane N_p, unisecanti delle M_δ, imagini dei prodotti dei punti di S_δ per V_p'.

Il teorema che avevamo in vista è così completamente dimostrato ed *è stabilita l'equivalenza delle definizioni b), c)*.

OSSERVAZIONE 1ª. — Il gruppo Γ_δ di S_δ non è affatto individuato, neppure quando sono fissati gl'iperpiani che devon esser permutati dalle trasformazioni di 1ª specie associate a Γ_δ e quelli che devono rimaner fissi. Si può prendere in sua vece un qualunque gruppo abeliano ∞^{δ}, transitivo, di trasformazioni birazionali di S_δ in sè: p. es. il trasformato del gruppo Γ_δ considerato, mediante un'arbitraria trasformazione cremoniana ω di S_δ, la quale si ripercuote ovviamente in ∞^p trasformazioni birazionali di V_π in sè, associandola alle ∞^p β''.

Pertanto *quando una V_π contiene un gruppo continuo abeliano ∞^π generalmente (e non assolutamente) transitivo di trasformazioni birazionali, essa contiene addirittura un gruppo continuo infinito di trasformazioni birazionali, le quali trasportano quel gruppo abeliano in infiniti altri isomorfi (in isomorfismi che sono però generalmente e non assolutamente oloedrici).*

OSSERVAZIONE 2ª. — Il teorema di caratterizzazione e l'equivalenza delle definizioni *b*), *c*) sono stati dimostrati sotto l'ipotesi L (n. 48). È chiaro che L è soddisfatta per la varietà V_π rappresentante *senza eccezione* le coppie di punti di una V_p' di PICARD e di uno spazio S_δ, sempre che il gruppo Γ di V_π si costruisca a partire da un gruppo Γ_δ di S_δ, la cui varietà invariante non possegga componenti eccezionali. È appunto questo il caso del gruppo (23), giacchè i δ_1 integrali di 3ª specie e i δ_2 integrali di 2ª specie associati al gruppo stesso, hanno iperpiani logaritmici e polari, che non sono eccezionali per le trasformazioni del gruppo, come risulta anche dal modo con cui questo gruppo prese origine sulla varietà dei gruppi di δ punti di una retta, assunta come imagine, senza eccezione, di un S_δ. Però sulla stessa V_π si posson avere naturalmente (in ordine alla precedente osservazione), gruppi abeliani ∞^π con varietà invarianti eccezionali.

OSSERVAZIONE 3ª. — L'ipotesi L è inutile, come già accennai nel n. 41, quando $\delta = 1$ o quando $\delta_1 = 0$.

Invero, nel primo caso le M_1 riduconsi a curve, le quali son necessariamente razionali, perchè posseggono un gruppo abeliano ∞^1 con punti invarianti (almeno 1 e non più di 2, giacchè sulla M_1, come varietà lineare, le trasformazioni sono omografie).

Quando poi $\delta_1 = 0$ tutti gl'integrali del sistema lineare Σ su V_π sono di 2ª specie e su M_δ si ha un gruppo ∞^δ i cui integrali invarianti si riducono a funzioni razionali, sicchè vale, senza alcuna ipotesi sulla varietà V_π, il ragionamento esposto.

47. Valore dell'ipotesi L e induzioni relative. — Ricapitoliamo anzitutto alcuni dei risultati conseguiti, indipendentemente dall'ipotesi L.

1) Una V_π con un gruppo continuo abeliano ∞^π, Γ, non assolutamente transitivo, di trasformazioni birazionali, contiene sistemi involutori $\infty^{\pi-1}$ di curve razionali f (1) corrispondenti alle varietà d'indeterminazione (n. 42, Oss.), i quali sono ciascuno mutato in sè dalle trasformazioni β di Γ e dalle trasformazioni di 1ª specie α, che esistono su V_π in conseguenza di Γ.

2) La V_π contiene un'involuzione ∞^p, abeliana, mutata in sè dalle α e dalle β, di varietà M_δ superficialmente regolari, traiettorie di un sottogruppo abeliano ∞^δ, Γ_δ, del gruppo Γ (le M_δ risultano birazionalmente equivalenti fra loro e al sottogruppo Γ_δ). Le M_δ son composte con ognuno dei predetti sistemi involutori di curve razionali.

Consideriamo uno di questi sistemi e diciamolo I. Il gruppo Γ induce fra le f di I un gruppo abeliano $\infty^{\pi-1}$, generalmente transitivo, essendovi ∞^1 trasformazioni β, che mutano l'una nell'altra le f; e quindi in particolare ∞^1 trasformazioni β che mutano in sè una f epperò ogni altra f.

Queste ∞^1 trasformazioni costituiscono *un sottogruppo abeliano razionale* ∞^1, Γ_1, *del gruppo continuo* Γ, del quale le f sono traiettorie. Di tali sottogruppi se ne hanno tanti quanti sono i sistemi involutori del tipo I; i quali son per lo meno tanti quante sono le varietà d'indeterminazione (2).

Una varietà $W_{\pi-1}$ i cui punti sieno in corrispondenza birazionale colle f di I è dunque una varietà del tipo della V_π.

(1) Ciò risulta anche implicitamente, in modo del tutto diverso, da Painlevé [47, p. 54].

(2) In realtà sono infiniti, come risulta dall'Oss. 1ª del n. prec. e dal seguito. Che in Γ vi sieno sistemi ∞^1 razionali di trasformazioni consegue pure senz'altro dal fatto che l'ente Γ, come insieme di ∞^π elementi, è birazionalmente equivalente a V_π.

Essa ha manifestamente la medesima irregolarità superficiale di V_π e la stessa varietà di PICARD V_p', che è rappresentativa delle $M'_{\delta-1}$ di $W_{\pi-1}$, analoghe alle M_δ di V_π. E queste $M'_{\delta-1}$ non sono che le imagini dei sistemi involutori di $\infty^{\delta-1}$ curve f, appartenenti alle singole M_δ.

Pertanto, se il teorema di caratterizzazione del n. prec. può acquisirsi indipendentemente dall'ipotesi L, ne deriva che le $M'_{\delta-1}$ son varietà razionali, epperò che *ogni* M_δ *contiene una involuzione razionale* $\infty^{\delta-1}$ *di curve razionali.*

P. es. dal fatto che il teorema vale senza l'ipotesi L per $\pi = p + 1$ ($\delta = 1$), segue che su una V_π con $\pi = p + 2$ le ∞^p superficie M_2 ($\delta = 2$) sono razionali, in base ad un classico teorema di NOETHER. Infatti ognuna di esse contiene un fascio razionale di curve razionali.

L'ipotesi L sarebbe del tutto superflua (almeno per certi tipi di gruppi Γ) *se sopra la generica* f *di un sistema del tipo I fosse possibile di fissare razionalmente un punto.*

Supponiamo, infatti, che così sia e posto che il teorema è acquisito, senza l'ipotesi L, per $\delta = 1$, ammettiamolo per le varietà del tipo considerato, nelle quali la differenza fra la dimensione e l'irregolarità è uguale a $\delta - 1$.

Allora il punto razionalmente fissato sulla generica f descrive un'unisecante delle f e questa genera, mediante le ∞^δ trasformazioni del gruppo razionale Γ_1, un fascio di unisecanti delle f; onde V_π risulta prodotto di $W_{\pi-1}$ e di una retta S_1. E siccome $W_{\pi-1}$ ha l'irregolarità p e quindi è $(\pi - 1) - p = \delta - 1$, per essa il teorema vale per ipotesi: onde $W_{\pi-1}$ è il prodotto di V_p' per un $S_{\delta-1}$; e in definitiva risulta:

$$V_\pi = W_{\pi-1} \times S_1 = V_p' \times S_{\delta-1} \times S_1 = V_p' \times S_\delta ,$$

cioè V_π prodotto di V_p' per un S_δ.

Volendo pertanto dimostrar superflua l'ipotesi L, per l'incondizionata validità del teorema di caratterizzazione, la ricerca deve concentrarsi sulla possibilità o meno di riferire la generica f ad una retta, senza introdurre irrazionalità aritmetiche.

Le considerazioni precedenti dànno anche l'occasione di osservare che *il caso abeliano è caratterizzato non soltanto dalla circostanza che il gruppo* Γ, ∞^π, *su* V_π *è ivi assolutamente transitivo* (n. 38), *ma anche dal fatto che una particolare trasformazione del gruppo, sopra un modello conveniente di* V_π, *è biunivoca senza eccezione.* Insomma, quando ciò accade ogni altra trasformazione di 2ª (o di 1ª) specie è assolutamente biunivoca, e il gruppo è assolutamente transitivo. Invero, se una trasformazione del gruppo (od anche una trasformazione di 1ª specie) è assolutamente biunivoca, non posson esistere punti d'indeterminazione degl'integrali semplici invarianti per Γ; e, se ciò avviene, non possono esistere neppure singolarità logaritmiche o polari. Gl'integrali invarianti son perciò tutti di 1ª specie e la V_π è abeliana (n. 38) [1].

Aggiungeremo qualche altra riflessione sul valore dell'ipotesi L.

In primo luogo la possibilità di ridurre gl'integrali di 3ª specie invarianti (con cui si determina, entro Σ, il sistema $\infty^{\delta_1 - 1}$, Σ_1), ad avere soltanto singolarità logaritmiche pure, non è legata all'ipotesi L, anche se le opportunità della nostra esposizione possano lasciar pensare il contrario. Giustifichiamo brevemente quest'asserzione.

Supposto che sieno $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ le varietà logaritmiche di un integrale u invariante per Γ e $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\tau$ i relativi periodi polari, sicchè le θ son soluzioni del sistema lineare (30), nelle λ, esse possono esprimersi come combinazioni lineari di $\tau - \sigma$ soluzioni intere indipendenti del sistema (30), alle quali corrispondono altrettanti legami algebrici (29) fra le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ e quindi (n. 44) altrettanti integrali semplici di 3ª specie $w_1, w_2, \ldots, w_{\tau-\sigma}$ aventi soltanto singolarità logaritmiche pure sulle curve predette: integrali che, naturalmente, in generale non apparterranno a Σ.

[1] L'esistenza di varietà eccezionali sopra ogni modello di V_π, per qualunque trasformazione di 1ª o di 2ª specie, può costituire dunque un opportuno punto di partenza d'una trattazione algebrico-geometrica delle V_π quasi abeliane.

Esistono inoltre, in conseguenza di quanto precede, certi coefficienti $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\tau-\sigma}$ tali che l'integrale

$$w = \varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \ldots + \varepsilon_{\tau-\sigma} w_{\tau-\sigma}$$

ha nelle $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ *gli stessi periodi* polari di u, ma con singolarità logaritmiche pure.

Proviamo che w appartiene a Σ (pur essendo generalmente fuori di Σ gl'integrali $w_1, w_2, \ldots, w_{\tau-\sigma}$). Sia β una trasformazione di Γ e P' l'omologo del generico punto P di V_π in β. L'integrale $w(P')$, considerato come funzione di P, non può avere singolarità logaritmiche in varietà eccezionali fuori di K, che nascano da punti di $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$, perchè in queste varietà avrebbe singolarità logaritmiche u, che in ogni punto logaritmico possiede lo stesso periodo polare o la stessa indeterminazione di w. Dunque $w(P')$, come funzione di P, ha le stesse singolarità logaritmiche e gli stessi periodi del trasformato di $u(P)$ che è a meno di una costante additiva, $u(P)$; ossia $w(P')$ ha lungo le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ le medesime singolarità logaritmiche di $w(P)$, cogli stessi periodi polari. E queste singolarità logaritmiche sono pure, al pari di quelle di $w(P)$, perchè la trasformazione non può generare singolarità polari se non provengono da singolarità polari.

Quanto ai periodi ciclici, si vede facilmente (ripetendo il ragionamento del n. 38) che, almeno quando β è abbastanza prossima all'identità, i periodi ciclici di $w(P')$, come funzione di P, son i medesimi dei periodi ciclici di $w(P)$; e siccome la differenza $w(P') - w(P)$ non ha singolarità polari nè periodi (nè ciclici nè polari), essa risulta costante. Ciò significa che $w(P)$ appartiene a Σ.

E a Σ appartiene dunque anche $u - w$, che è un integrale di 2^a (o di 1^a) specie. In conclusione: *Si posson sempre assumere gl'integrali di* 3^a *specie del sistema* Σ, *anche se non è soddisfatta l'ipotesi L, in modo che abbiano sole singolarità logaritmiche pure* (e non singolarità polari distinte dalle singolarità logaritmiche o a queste sovrapposte). Ogni integrale di Σ

differisce da una combinazione lineare d'integrali siffatti per un additivo integrale di 2ª (o di 1ª) specie di Σ.

Ma *la difficoltà fondamentale che qui sorge è di sapere se gl'integrali di Σ si possano scegliere in guisa che i loro periodi lungo le varietà logaritmiche sieno proporzionali a numeri interi.*

Se così non è, l'integrale subordinato su una generica M_δ, superficialmente regolare, da un generico integrale u di Σ_1, si riduce bensì ad una combinazione razionale-logaritmica, che in tal caso è una combinazione logaritmica pura, ma una siffatta combinazione è del tipo

$$\Sigma \eta_h \log R_h$$

colle η numeri reali o complessi, non interi [**61**, p. 212].

E le equazioni:

$$\Sigma \eta_h \log R_h = \text{cost.}\,, \quad \text{cioè:} \quad \log \Pi R_h^{\eta_h} = \text{cost.}\,,$$

che occorre considerare per la dimostrazione del teorema preliminare del n. 46, non si trasferiscono così dal campo trascendente al campo algebrico, com'è necessario per quella dimostrazione. Che forse la possibilità stessa del teorema d'inversione a cui deve soddisfare il sistema di equazioni, in parte essenzialmente trascendenti, che vengono a scriversi, implichi senz'altro che debbano esser costanti singolarmente le funzioni razionali, elevate a esponenti non interi? La questione rimane sospesa.

48. Sui moduli di una V_π quasi abeliana generale e sulle relazioni fra i periodi. Identificazione delle funzioni quasi abeliane colle funzioni che ammettono un teorema d'addizione algebrico. — D'ora innanzi *una V_π col gruppo continuo ∞^π, Γ, abeliano, non assolutamente transitivo, si chiamerà varietà quasi abeliana generale di dimensione*

π e di rango 1. E si dirà « di rango 1 » per ricordare ch'essa è in corrispondenza biunivoca col prisma dei periodi. Le funzioni razionali del punto di V_π son le *funzioni quasi abeliane generali,* secondo l'accezione *b*), la quale, nell'ipotesi *L,* concorda (n. 45) colla *c*) ed inoltre assorbe la *a*).

In verità questa definizione delle funzioni quasi abeliane, che abbiamo provvisoriamente accettato nel n. 37, senza approfondirne subito il valore, ha bisogno di esser precisata, giacchè *essa presuppone implicitamente la considerazione della V_π non in sè, ma associata al gruppo abeliano Γ, che si suppone dato sopra V_π*. E infatti soltanto quando è dato Γ, che può considerarsi dato il sistema Σ degl'integrali invarianti $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, e quindi il corpo delle funzioni quasi abeliane associate, le quali son bensì le funzioni razionali del punto di V_π, ma nello speciale atteggiamento di funzioni (meromorfe al finito) di $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, attraverso il teorema d'inversione a cui questi integrali soddisfanno.

Sicchè un altro gruppo continuo del tipo Γ, esistente su V_π, non dà luogo necessariamente allo stesso corpo di funzioni quasi abeliane, relativo alla medesima V_π.

La questione di considerare l'eventuale esistenza di corpi distinti di funzioni quasi abeliane appartenenti a V_π, si pone appunto perchè su V_π esistono infiniti gruppi continui del tipo Γ.

Ma con ciò non si vuol dire che gruppi continui Γ distinti debbano necessariamente dar luogo a corpi distinti di funzioni quasi abeliane.

Per precisare, bisogna in primo luogo fissare *quand'è che due corpi K, K' di funzioni quasi abeliane si considerano coincidenti.*

Intanto è naturale di comprendere in un medesimo corpo tutte le funzioni quasi abeliane che hanno una medesima tabella di periodi. Intendiamo che questi periodi formino un sistema primitivo. Ma essi non sono definiti da tale condizione, perchè, eseguendo sui periodi dati (considerati come vettori a

π componenti) una sostituzione unimodulare a coefficienti interi, si ottiene ancora un sistema di periodi primitivi. Sicchè dovremo considerar come identici due corpi quando si riducano l'uno all'altro *con un cangiamento dei periodi primitivi.* E siccome inoltre gl'integrali u invarianti pel gruppo Γ relativo al corpo considerato di funzioni, non son definiti entro il sistema Σ ed il loro cambiamento importa una sostituzione lineare non degenere a coefficienti qualunque sulle u, così riguarderemo coincidenti due corpi che derivino l'uno dall'altro *con una sostituzione lineare non degenere operata sulle variabili.* È lo stesso di quel che si fa nella teoria delle funzioni abeliane [**17**, p. 28].

Riferendosi alla tabella dei periodi, la quale sia formata scrivendo in una medesima orizzontale i periodi d'uno stesso integrale, il cangiamento dei periodi primitivi si risolve in una sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi sulle colonne della tabella e la sostituzione lineare sulle variabili nella medesima sostituzione lineare sulle orizzontali della tabella.

L'effetto di una trasformazione birazionale ω di V_π in sè, sul corpo K relativo ad un fissato gruppo Γ, di cui sieno $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ gl'integrali invarianti, è quello di mutare in sè K, tanto se ω muta Γ in sè (il che accade sempre nel caso abeliano, in cui vi è un sol gruppo Γ), quanto se ω muta Γ in un altro gruppo Γ'. Invero, detto $P'=\omega\,(P)$ l'omologo in ω del generico punto P di V_π, gl'integrali invarianti per Γ' sono:

$$u_h'(P')=u_h'[\omega(P)]=u_h(P) \qquad (h=1, 2, \ldots, \pi) ;$$

sicchè il corpo K', relativo a Γ', si ottiene da K cambiando semplicemente nome alle variabili; epperò la tabella dei periodi resta immutata.

Che vi sieno effettivamente trasformazioni birazionali di V_π in sè, le quali mutino un Γ in un *altro* Γ, è dimostrato p. es. dal fatto che di tale proprietà gode la trasformazione ω ottenuta su V_π associando, nel senso del n. 46, ad un'omografia generica di S_δ in sè, una trasformazione del gruppo Γ_p di V_p'. Infatti, ω muta il gruppo Γ costruito su V_π a norma del n. 46, in un gruppo analogo distinto da esso (appartenente con Γ ad un sistema continuo di gruppi).

Quando ω muta un gruppo Γ, al quale sia associato il corpo K, nel gruppo Γ' distinto da Γ, è bensì vero che K si muta in sè, ma i periodi delle funzioni quasi abeliane trasformate, considerate come funzioni degli integrali u', *non si posson senz'altro interpretare come periodi degl'integrali* u', definiti in relazione alle componenti della varietà invariante K', trasformata della varietà invariante K; e ciò pel fatto che nel passaggio da K a K' possono nascere componenti (a $\pi - 1$ dimensioni) di K' eccezionali per la corrispondenza ω.

E se tali componenti s'introducono, esse son eccezionali anche per ogni trasformazione di Γ', la quale è la trasformata, mediante ω, d'una trasformazione di Γ. Se invece ci limitiamo a considerare coppie di gruppi continui Γ, Γ' soddisfacenti entrambi all'ipotesi L e corrispondenti in una trasformazione birazionale di V_π in sè, i periodi delle funzioni trasformate si posson effettivamente interpretare come periodi degli integrali trasformati lungo cicli lineari provenienti da quelli che servono a calcolare i periodi degli u. In particolare, ciò vale quando si trasformi V_π in sè con una trasformazione birazionale senza eccezioni.

Dimostriamo ora che, viceversa, *se due gruppi continui* Γ, Γ' *dànno luogo ad un medesimo corpo* K *di funzioni quasi abeliane, esiste una trasformazione birazionale di* V_π *in sè, che muta* Γ *in* Γ' (1).

Sieno $u_1, \ldots, u_\pi$; $u_1', \ldots, u_\pi'$ gl'integrali invarianti pei due gruppi. Possiamo supporre scelti questi integrali e i loro periodi primitivi, per ciascuno dei sistemi lineari Σ, Σ' ine-

(1) Fondati indizi mi fanno ritenere che due gruppi continui del tipo Γ sieno sempre su V_π deducibili l'uno dall'altro con una trasformazione birazionale della varietà in sè: il che ridurrebbe ad un solo il corpo di funzioni quasi abeliane associato a una data V_π, come accade già certamente quando uno dei due interi p, δ ($\pi = p + \delta$) è nullo.

renti a Γ, Γ', in guisa che le tabelle inerenti sieno identiche. Scriviamo le:

$$(46) \qquad u_h'(P') \equiv u_h(P) \quad \text{(modd. periodi)}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, \pi).$$

Ha senso di considerar tali congruenze rispetto ai periodi, perchè questi sono i medesimi pei due integrali (sebbene relativi a cicli lineari eventualmente diversi).

Dato un generico P i valori degli u_h (P) son definiti a meno dei periodi degl'integrali u, che son poi i periodi degl'integrali u'; epperò esiste un sol punto P' che soddisfa alle (46). Similmente se è dato P' si trova mediante le (46) un sol punto P corrispondente. La corrispondenza fra P, P' è (generalmente) biunivoca. Essa è birazionale. Infatti una funzione quasi abeliana del corpo $\overline{K}$ nelle variabili $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_\pi$, riguardata come funzione delle u' $(\bar{u}_h = u_h')$ è come funzione razionale del punto P' e riguardata come funzione delle u $(\bar{u}_p = u_p)$ è una funzione razionale di P. Sicchè il punto P' è funzione razionale di P e viceversa questo di quello.

Per contare dunque i moduli da cui dipende una varietà quasi abeliana di rango 1, cioè un corpo di funzioni quasi abeliane, bisogna contare i moduli da cui dipende la coppia V_π, Γ, perchè è l'associazione di questi due elementi che costituisce propriamente la varietà quasi abeliana e che definisce un corpo, dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.

I moduli di V_π, Γ sono i $\dfrac{p(p+1)}{2}$ moduli da cui dipende V_p' (1) e i moduli da cui dipende *sopra* V_π un gruppo Γ. Limitiamoci in proposito per ora a talune considerazioni preparatorie, rinviando al n. 54 più esaurienti riflessioni.

Richiamiamo anzitutto l'esempio di una V_π quasi abeliana proveniente da una curva C di genere $p < \pi$. Il problema dei

(1) [**17**, pp. 184, 208, 295].

moduli in tal caso è stato già posto (n. 21, Oss. 1ª) non nella presente accezione generale, ma considerando in sostanza l'associazione di V_π col gruppo continuo Γ imagine del gruppo delle trasformazioni di 2ª specie del campo neutro γ, dato su C, e *riguardando come distinti due corpi di funzioni quasi abeliane (inerenti agli stessi* δ_1, δ_2), *che non possano ottenersi l'uno dall'altro con una trasformazione birazionale senza eccezione di* V_π, *la quale muti in sè il sistema* H, ∞^1, *delle varietà a* $\pi - 1$ *dimensioni* $\mathfrak{A}$, *rappresentanti ciascuna le* π*-ple di punti di* C *con un punto fisso.* Ma non è detto che due corpi distinti da questo punto di vista, lo sieno rispetto a *tutte* le trasformazioni birazionali di V_π in sè. Nel fatto si dimostra ch'*essi coincidono sempre quando* $p=0$, *mentre il computo del n.* 21 *ci darebbe in tal caso* $2\,\delta_1+\delta_2-3$ *moduli.*

La coincidenza dei due corpi consegue senz'altro dal fatto che per $p=0$ la tabella (T') del n. 28 riducesi a

$$\begin{vmatrix} O & O & O \\ O & O & B \\ O & O & O \end{vmatrix}$$

ed è quindi indipendente dalla scelta su C delle coppie A_j, B_j; A_l, A_l. Ciò è ben d'accordo col fatto che le funzioni del corpo, qualunque sieno queste coppie, riduconsi a funzioni trigonometriche in δ_1 variabili e razionali in δ_2 variabili.

Del resto si posson anche facilmente *assegnare, nel caso di una* V_π $(\pi=\delta)$ *ridotta ad uno spazio lineare* S_δ, *le trasformazioni cremoniane che mutan l'uno nell'altro i corpi cui s'è accennato.*

Il sistema H è in S_δ il sistema degl'iperpiani osculatori ad una curva C razionale normale. Le trasformazioni birazionali senza eccezione di S_δ in sè omografie; e, fra queste, ∞^3 mutano in sè H. Due gruppi Γ ed i relativi corpi non son equivalenti rispetto a tali omografie non appena le coppie di iperpiani osculatori a C sieno scelti genericamente, per definire i due gruppi.

Ma invece i due gruppi ed i relativi corpi riduconsi l'uno all'altro, come ora vedremo, con trasformazioni cremoniane. Più generalmente, scelte in S_δ (non diciamo neppure fra gl'iperpiani osculatori ad una curva razionale) δ_1 coppie d'iperpiani distinti $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$; e δ_2 coppie d'iperpiani coincidenti $\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{A}_l$, e assegnato su ogni $\mathfrak{A}_l$ un $S_{\delta-2}$, come varietà d'indeterminazione, colla sola condizione che i fasci d'iperpiani così definiti sieno « indipendenti », ossia tali che δ loro iperpiani generici, uno per ciascuno, si taglino in un sol punto di S_δ, gl'integrali di 3^a e di 2^a specie:

$$u_j = \log R_j \qquad (j = 1, \ldots, \delta_1), \qquad\qquad u_l = R_l \qquad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta)$$

ove R_j=cost. sia il fascio definito da $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ ed R_l=cost. il fascio definito dallo $S_{\delta-2}$ dato su $\mathfrak{A}_l$, son integrali invarianti di un gruppo continuo del tipo Γ, che è il gruppo di trasformazioni cremoniane:

$$(47) \qquad R_j(P') = c_j R_j(P) , \qquad R_l(P') = R_l(P) + c_l ,$$

essendo $c_1, c_2, \ldots, c_\delta$ i parametri (dei quali i primi δ_1 non nulli) d'una trasformazione, e P, P' una coppia di punti omologhi. La (47) è effettivamente una trasformazione cremoniana, perchè le equazioni

$$R_j = b_j , \qquad R_l = b_l$$

per valori generici delle b son soddisfatte da un sol punto di S_δ (¹).

Ebbene, se Γ' è un altro gruppo similmente ottenuto da altre coppie $\mathfrak{A}'_j$, $\mathfrak{B}'_j$; $\mathfrak{A}'_l$, $\mathfrak{A}'_l$ di iperpiani (ove gl'interi δ_1, δ_2 restano immutati), le equazioni di Γ' saranno del tipo:

$$R'_j(P') = c_j R'_j(P) , \qquad R'_l(P') = R'_l(P) + c_l ,$$

(¹) Il gruppo (47) è *un gruppo abeliano continuo di trasformazioni cremoniane trasformanti le rette dello spazio S_δ in curve razionali normali.*

e la trasformazione cremoniana:

$$R'_j(P') = R_j(P) \ , \qquad R'_l(P') = R_l(P) \ ,$$

muta l'un gruppo nell'altro.

Più generalmente ancora, considerata in S_δ una qualsiasi trasformazione cremoniana:

$$x_h' = \varphi_h(P) \qquad (h = 1, 2, \dots, \delta) \ , \tag{48}$$

ove $(x'_1, \ldots, x'_\delta)$ son le coordinate del punto P' omologo di P e le φ_h son funzioni razionali di P, tali che le (48), per valori generici delle x', son risolubili razionalmente rispetto a P, si ha in corrispondenza un gruppo continuo del tipo Γ

$$\varphi_j(P') = c_j \varphi_j(P) \ , \qquad \varphi_l(P') = \varphi_l(P) + c_l$$

e un corpo di funzioni, che coincide con quello sopra definito (trattasi sempre di funzioni razionali-trigonometriche) e la trasformazione cremoniana

$$R_j(P') = \varphi_j(P) \, , \qquad R_l(P') = \varphi_l(P) \, ,$$

muta questo gruppo nel primo dei precedenti.

È chiaro che i gruppi cremoniani considerati riduconsi con trasformazioni cremoniane al gruppo di omografie:

$$x_j' = c_j x_j \quad (j = 1, \dots, \delta_1 \, ; \ c_j \neq 0) \, , \qquad x'_l = x_l + c_l \quad (l = \delta_1 + 1, \dots, \delta) \, ,$$

ove $x_1, x_2, \ldots, x_\delta$ sieno coordinate di punto in S_δ.

Circa il delicato problema generale dei moduli di un gruppo del tipo Γ sopra una V_π, per dati δ_1, δ_2, osserveremo quanto segue.

Bisogna in primo luogo sapere come si costruiscono su V_π i gruppi Γ; e ciò implica la conoscenza delle trasformazioni birazionali di V_π in sè.

Consideriamo all'uopo su V_π l'involuzione J_p delle M_δ prodotti dei punti di V_p' per S_δ e l'involuzione J_δ' delle N_p prodotti dei punti di S_δ per V_p'. Una trasformazione birazionale τ di V_π in sè, trasforma in sè il sistema lineare degl'integrali semplici di 1ª specie di V_π e quindi l'involuzione J_p, inducendo fra gli elementi M_δ di J_p una trasformazione birazionale ω. Inoltre τ muta l'involuzione J_δ' di unisecanti delle M_δ, in un'involuzione analoga J_δ'' di unisecanti, eventualmente nella stessa J_δ'. Designata con ρ la trasformazione birazionale indotta da τ fra J_δ' e J_δ'', la τ si ottiene associando ad un generico punto P di V_π, concepito come intersezione della M_δ e della N_p passanti per P, il punto P' intersezione delle varietà trasformate di quelle M_δ, N_p nelle ω, ρ.

La determinazione delle trasformazioni birazionali di V_π in sè si riconduce pertanto alla ricerca delle involuzioni ∞^δ di unisecanti delle M_δ, cioè ad un problema della teoria della base.

Nel n. 46 il gruppo Γ costruito per dimostrare la reciproca del teorema di caratterizzazione, mediante i gruppi Γ_p, Γ_δ, presi rispettivamente su J_p, J_δ', consta di trasformazioni, che mutano in sè J_p ed J_δ'. Il corpo delle funzioni quasi abeliane associate a Γ, normalizzando la tabella dei periodi, il che è sempre possibile quando Γ soddisfa ad L (n. 45), dà luogo alla matrice

$$\begin{vmatrix} A & \Omega & O \\ O & O & B \\ O & O & O \end{vmatrix}$$

sicchè non trattasi di una vera estensione del campo delle funzioni abeliane, ma di funzioni che son separatamente abeliane in p variabili e trigonometrico-razionali delle altre δ (1).

Per ottenere funzioni quasi abeliane non banali bisogna combinare le trasformazioni del gruppo Γ_p di J_p con trasfor-

(1) È l'analogo di quel che accade nel campo abeliano quando si ha da fare colla varietà di PICARD V_π prodotto di due varietà di PICARD V_p', V_δ''. Le funzioni abeliane corrispondenti son separatamente abeliane in p e in δ variabili.

mazioni in sè di un sistema algebrico opportuno di unisecanti delle M_δ. La precisazione richiede ulteriori indagini, delle quali non ci occupiamo in questa Memoria.

Accenniamo invece ad un altro aspetto del problema.

Data una qualunque V_π possedente un gruppo continuo Γ, abeliano, ∞^π, generalmente transitivo di trasformazioni birazionali, consideriamo il corpo K di funzioni quasi abeliane determinato dalla coppia V_π, Γ. Sia T la tabella di un sistema di periodi primitivi delle funzioni di K, le prime p orizzontali contenendo i periodi associati alle variabili che posson interpretarsi come integrali semplici di 1ª specie di V_π e le prime $2p$ verticali contenendo i periodi provenienti da un sistema primitivo di cicli lineari omologicamente indipendenti di V_π. Allora la matrice delle prime p orizzontali e delle prime $2p$ verticali appartiene ad una V_p' di PICARD (n. 46), cioè — ed è questa una prima condizione a cui è sottoposta T — quella matrice deve esser abeliana.

Il problema è di trovare le ulteriori relazioni quantitative e qualitative cui debbon esser sottoposti gli elementi di T, a prescindere dall'ipotesi L. Le prime son le sole che interessano pel computo dei moduli; tutte insieme poi costituiscon la necessaria premessa dei teoremi d'esistenza. Per la ricerca delle une e delle altre conviene tener d'occhio la Memoria di FROBENIUS [**25**] ed una mia Memoria (1) ove si tratta di relazioni fra i periodi d'integrali (semplici e multipli) di 1ª specie sopra una varietà algebrica, ma il cui concetto (estensione di un metodo di HODGE e di KÄHLER) è riferibile con opportuni complementi anche agl'integrali semplici di 2ª e di 3ª specie.

Quando Γ soddisfa ad L, la tabella T può sempre ridursi al tipo normale (40) del n. 45. Allora si devon trovare le eventuali relazioni fra gli elementi delle matrici parziali Ω, Ω_1, Ω_2

(1) [**75**, p. 121].

e i moduli del gruppo son soltanto quelli che figurano nella matrice

$$(49) \qquad \left| \begin{array}{c} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{array} \right| ;$$

mentre i moduli di V_π figurano in Ω.

Giova inoltre in questo caso ricordare le espressioni del periodo $\omega_{p+j,h}$ dell'integrale di 3ª specie u_{p+j} $(j=1, \ldots, \delta_1)$ al ciclo normale σ_{p+h} $(h=1, 2, \ldots, p)$ (n. 45) e del periodo $\omega_{p+\delta_1+l,h}$ dell'integrale di 2ª specie $u_{p+\delta_1+l}$ $(l=1, 2, \ldots, \delta_2)$ al ciclo stesso. Per questi p periodi, che son poi quelli costituenti la matrice (49), valgon le espressioni da me altrove assegnate [1] una delle quali, quella che riguarda gli integrali di 3ª specie, è

$$\omega_{p+j,h} \equiv u_h[\mathfrak{A}_j, D] - u_h[\mathfrak{B}_j, D] \ (\text{mod. } \Omega) \qquad (h=1, \ldots, p),$$

ove $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ son le varietà logaritmiche di u_{p+j} coniugate nelle α, con periodi polari a coppie di segno opposto (n. 44); D è una curva genericamente fissata in V_π e

$$u_p[(\mathfrak{A}_j, D)], \qquad u_h[(\mathfrak{B}_j, D)]$$

indican le somme dei valori dell'integrale di 1ª specie u_h nei punti dei gruppi $(\mathfrak{A}_j, D)$, $(\mathfrak{B}_j, D)$ [2].

Non sto a trascrivere l'espressione del periodo $\omega_{p+\delta_1+l,h}$ dell'integrale di 2ª specie $u_{p+\delta_1+l}$ perchè a spiegarla occorrono varie premesse qui non necessarie. Basta soltanto ricordare che

(1) [**G2**], formule (16) (20). Queste formule [delle quali la (20) va rettificata scrivendovi $\frac{\varepsilon_h}{2\pi i}$ invece di ε_h] riferisconsi alle superficie, ma si trasportano facilmente alle varietà. Sulla curva D il verso di percorrenza dei cicli con cui si calcolano i periodi polari nei punti dei gruppi $(\mathfrak{A}_j, D)$, $(\mathfrak{B}_j, D)$, è quello positivo sulla faccia positiva di D, definita dalla faccia positiva di V_π.

(2) Pel caso d'una varietà abeliana speciale la formula riferita coincide sostanzialmente con quella data nell'Oss. 3ª del n. 28.

il valore di quel periodo è assegnato univocamente dalle somme dei valori, nei punti del gruppo $(\mathfrak{A}_l, D)$, ove $\mathfrak{A}_l$ è la varietà polare di $u_{p+\delta_1+l}$ (irriducibile o riducibile, contando ogni parte colla molteplicità che le compete), di certe funzioni razionali dei punti variabili sulle singole componenti di $\mathfrak{A}_l$ e che queste funzioni son determinate (a meno di una costante moltiplicativa, che è la stessa per tutte) dalla conoscenza della varietà di indeterminazione dell'integrale $u_{p+\delta_1+l}$.

Del resto le formule che troveremo in seguito (nn. 51, 52) esprimenti gl'integrali di 2ª e di 3ª specie d'una varietà di PICARD in funzione degl'integrali di 1ª specie, consentono di ricostruire per altra via le espressioni dei periodi normali degli integrali normali di 2ª e di 3ª specie, in relazione appunto agli integrali di 1ª specie.

Comunque la sola esistenza di queste espressioni attesta che *la determinazione dei termini della matrice* (40) *dipende soltanto dalla scelta delle varietà logaritmiche degl'integrali invarianti di* 3ª *specie e delle varietà polari e d'indeterminazione degli integrali invarianti di* 2ª *specie.*

Nel fatto, la scelta delle $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ importa la determinazione della funzione razionale R_j (di cui al n. 46) e quindi delle varietà $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$ composte colle M_δ e tali che

$$\mathfrak{A}_j + \mathfrak{A}_j' \equiv \mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_j'$$

son le varietà di livello zero e infinito di R_j e per conseguenza dell'integrale w_{p+j}, che ha le $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$ come varietà logaritmiche coi periodi polari $2\pi i$ e $-2\pi i$ e i periodi ciclici nulli ai cicli normali $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$. Pertanto son determinati i periodi di w_{p+j} ai cicli normali del 2° gruppo $\sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{2p}$, i quali sono i periodi stessi dell'integrale u_{p+j}, ossia gli elementi di Ω_1.

La scelta poi di $\mathfrak{A}_l$ e della relativa varietà d'indeterminazione $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$ determina la funzione razionale R_l e la varietà $\mathfrak{A}_l'$ composta colle M_δ e tale che $\mathfrak{A}_l + \mathfrak{A}_l'$ sia la varietà polare di R_l; e quindi l'integrale w_{p+l} è definito dalla propria varietà polare $\mathfrak{A}_l'$, dal gruppo d'indeterminazione subordinato da R_l su $\mathfrak{A}_l'$ [1] e dal fatto che sieno nulli i periodi ciclici inerenti al primo gruppo di cicli normali. Risultan così definiti i periodi ciclici di w_{p+l} ai cicli del 2° gruppo, i quali son gli elementi di Ω_2.

Come debbono infine assumersi le varietà $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, $\mathfrak{A}_l$, in guisa da dar luogo, nel modo accennato, a $\delta_1+\delta_2$ integrali semplici di 3ª e di 2ª specie, i quali aggiunti agl'integrali semplici di 1ª specie di V_π, costituiscano un sistema lineare di $\infty^{\pi-1}$ integrali semplici, soddisfacente al teorema d'inversione? Perchè questa è poi l'unica condizione a cui deve soddisfare tale sistema lineare per originare un gruppo continuo del tipo Γ, rispetto al quale esso sia invariante.

Ebbene, dopo quanto abbiamo detto nel n. 30 (e che vale anche nel caso quasi abeliano generale) è chiaro che le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, $\mathfrak{A}_l$ debbon soddisfare alle condizioni seguenti:

1) Le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ sono algebricamente equivalenti e le $\mathfrak{A}_l$ sono suscettibili di variare in sistemi continui, che le contengono totalmente.

2) le $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$, $\mathfrak{A}_l'$ determinate dalle $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ e dalle $\mathfrak{A}_l$, $\mathfrak{A}_l$ [coppie di varietà infinitamente vicine definite da $\mathfrak{A}_l$ e dalla varietà d'indeterminazione $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l)$] definiscono, aggiunte alle precedenti varietà, δ fasci di varietà a $\pi-1$ dimensioni:

$$R_j = \text{cost.}\,, \qquad R_l = \text{cost.}\,,$$

tali che, al variare delle costanti dei secondi membri, le equazioni di questi fasci rappresentano una varietà N_p, la quale descrive su V_π un'involuzione ∞^δ di unisecanti delle M_δ.

Tutto ciò chiarisce *il problema della determinazione di tutti i possibili gruppi* Γ *sopra* V_π, *ciascun dei quali viene in fondo a dipendere soltanto dalla scelta della propria varietà invariante.*

Termino queste considerazioni sui moduli dei corpi quasi abeliani avanzando la congettura che per ogni corpo di funzioni

[1] La costruzione di quest'integrale si fa trasportando alle varietà la costruzione indicata per le superficie nella mia Nota [**60**].

quasi abeliane sia possibile ottenere una tabella normale (40) e che i legami e le limitazioni fra gli elementi di questa matrice, ai quali abbiamo alluso, e che indicheremo in modo completo nel n. 54, costituiscano in complesso le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di funzioni quasi abeliane del tipo più generale, sicchè si possa, anche per questa via, sgombrare il terreno dall'ipotesi L.

Come le relazioni esprimenti i periodi normali degl'integrali invarianti di 2ª e di 3ª specie possan giuocare nella determinazione dei moduli d'un corpo di funzioni quasi abeliane, sarà constatato, in un caso particolare, nel n. 50 e in generale nel n. 54.

OSSERVAZIONE. — Un complemento essenziale a quanto precede è che *le funzioni quasi abeliane generali cui riferiscesi il nostro studio sono tutte le funzioni di π variabili ammettenti un teorema algebrico d'addizione* (¹). Ciò risulta dalla Memoria [**47**] di PAINLEVÉ. Invero l'insigne analista francese, dimostrando il teorema d'addizione enunciato da WEIERSTRASS, stabilisce che π funzioni funzionalmente indipendenti, che soddisfacciano al teorema, son razionalmente esprimibili per $\pi + 1$ funzioni abeliane proprie o degeneri di un medesimo corpo, diciamole $x_1, x_2, \ldots, x_{\pi+1}$, le quali son sempre algebricamente legate. Si possono inoltre scegliere le $\pi + 1$ funzioni x nel corpo, in modo che sulla V_π algebrica, irriducibile, rappresentata dal loro legame, si abbiano π integrali semplici $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, la cui inversione dia univocamente le funzioni stesse (che son meromorfe, al finito) e che nelle $x_1 (u_1, \ldots, u_\pi)$, $x_2 (u_1, \ldots, u_\pi), \ldots\ldots, x_{\pi+1} (u_1, \ldots, u_\pi)$ l'origine $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_{\pi+1}$ delle integrazioni, entri *razionalmente*. Condizioni queste ultime, le quali assicuran su V_π l'esistenza di un gruppo continuo del tipo Γ, come subito si riconosce.

(¹) Nè, come dicemmo nell'Introduzione, occorre supporre l'analiticità delle funzioni in giuoco, bastando soltanto ch'esse ammettano un teorema d'addizione e sieno continue, a derivate prime continue rispetto alle π variabili, considerate nel campo reale [**47**, p. 5].

Viceversa, se una V_π contiene un Γ, a norma del teorema di PICARD citato nel n. 38, possiede in conseguenza π integrali semplici $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ univocamente invertibili con funzioni analitiche (meromorfe al finito e dipendenti razionalmente dall'origine delle integrazioni), e attesa la forma che le trasformazioni di Γ assumono, espresse per le u, ne segue che le funzioni razionali del punto di V_π considerate come funzioni delle u, cioè come funzioni quasi abeliane definite dalla coppia V_π, Γ, ammettono un teorema d'addizione (algebrico).

Si può infine aggiungere che *se in un corpo K di funzioni periodiche meromorfe (al finito) di π variabili, relative ad una data tabella di periodi, vi sono π funzioni funzionalmente indipendenti* (1), *tali che qualunque altra funzione del corpo sia funzione algebrica di quelle, ogni sistema di π funzioni indipendenti del corpo ammette un teorema di addizione.*

La dimostrazione è quasi ovvia e basta riferirla al sistema di π funzioni:

$$\varphi_1(u_1, \ldots, u_\pi), \ldots\ldots, \varphi_\pi(u_1, \ldots, u_\pi),$$

che si suppone esistente, perchè ogni altro sistema di π funzioni indipendenti del corpo, in virtù dell'ipotesi, si trova nelle stesse condizioni.

Presa una funzione del sistema, p. es. la $\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ [brevemente scriveremo $\varphi_1(u)$] bisogna dimostrare che $\varphi_1(u+u')$ è funzione algebrica di $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_\pi(u)$ e di $\varphi_1(u'), \varphi_2(u'), \ldots, \varphi_\pi(u')$. Supposti *dati* i valori u' e *variabili* gli u, la $\varphi_1(u+u')$ soddisfa alle condizioni che la definiscono come funzione di K, epperò essa verifica ad una equazione algebrica a coefficienti funzioni razionali di $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_\pi(u)$. I coefficienti di queste funzioni razionali, alla lor volta, dipendono dalle u'. Scambiando fra loro le u, u' la $\varphi_1(u+u')$ si muta in sè e lo stesso deve acca-

(1) Il che esclude ch'esse posseggano periodi infinitesimi e quindi che il numero dei periodi sia $>2\pi$ (ved. l'Introduzione).

dere dell'equazione algebrica cui essa soddisfa. Pertanto la $\varphi_1\ (u+u')$ viene in definitiva a soddisfare ad un'equazione algebrica a coefficienti funzionali razionali di $\varphi_1\ (u), \ldots, \varphi_\pi\ (u)$; $\varphi_1\ (u'), \ldots, \varphi_\pi\ (u')$; e questo è il teorema d'addizione per φ_1. Analogamente per $\varphi_2, \ldots, \varphi_\pi$.

Naturalmente, nelle nostre ipotesi, le funzioni di K si esprimono razionalmente per $\pi+1$ di esse e son sempre a $\pi+1$ a $\pi+1$ algebricamente legate.

Rimane tuttavia l'importante problema di sapere, dato un corpo di funzioni meromorfe (al finito) periodiche di π variabili, relative ad una assegnata tabella di periodi, quali son le condizioni necessarie e sufficienti perchè si tratti di funzioni quasi abeliane, cioè perchè $\pi+1$ qualunque di esse sieno algebricamente legate, come accade sempre quando il numero dei periodi è 2π.

49. Relazioni quantitative fra i periodi d'un corpo di funzioni quasi abeliane speciali. — Il problema posto nel n. prec., nei riguardi delle relazioni fra i periodi d'un corpo di funzioni quasi abeliane, può essere ulteriormente approfondito nel caso delle funzioni speciali con un metodo, che, nel suo concetto direttivo, è forse estendibile al caso generale, allorchè le funzioni quasi abeliane si considerino come limiti di funzioni abeliane.

Riprendendo le considerazioni del n. 19, sia

$$\bar{f}\ (x,\ y\ ;\ t) = 0 \tag{50}$$

l'equazione della curva piana $\bar{C}$, irriducibile d'ordine m e di genere π, dotata di soli nodi, in numero di d, a coefficienti funzioni olomorfe di t, attorno a $t=0$, la quale abbia per limite per $t \to 0$ la curva irriducibile C di equazione

$$\bar{f}\ (x,\ y\ ;\ 0) = f\ (x,\ y) = 0 \tag{51}$$

e di genere $p=\pi-\delta_1-\delta_2$ su cui il campo neutro γ è definito dai δ_1 nodi e dalle δ_2 cuspidi che C acquista rispetto alla curva variabile $\bar{C}$. Sieno $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p, \bar{u}_{p+1}, \ldots, \bar{u}_{p+\delta_1}, \bar{u}_{p+\delta_1+1}, \ldots, \bar{u}_\pi$ gl'integrali di 1^a specie di $\bar{C}$ che hanno per limiti (n. 24) gli integrali $u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}, u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ di C dei quali i primi p di 1^a specie, gli ulteriori δ_1 di 3^a specie, ciascuno con due punti logaritmici puri in una coppia neutra sovrapposta a un nuovo nodo di C e gli ultimi δ_2 di 2^a specie, ciascuno con un polo di 1^0 ordine in una cuspide di C.

La (50) rappresenta una superficie analitica dello spazio x, y, t; la quale si può addirittura supporre algebrica, facendo variare C in un ramo di sistema algebrico contenente $\bar{C}$. Pertanto un'indicatrice della faccia positiva di questa superficie definisce su ciascuna curva $t=\text{cost.}$ un verso positivo, il quale ritorna in sè per le circolazioni di t.

Segnamo (come nei nn. 23, 24) sul piano della variabile indipendente x i punti di diramazione delle funzioni $\bar{y}$ (x, t), y (x), ricavate dalle (50), (51) (per una scelta generica degli assi); e, a partire da una generica origine O del piano stesso, ordiniamo i cappii relativi alla $\bar{y}$ al modo del n. 24. La riemanniana C [1] vicinissima a $\bar{C}$ viene costruita coi cappii limiti di quelli fissati per $\bar{C}$, mediante i cicli lineari di C, provenienti da quei cicli lineari di $\bar{C}$, somme dei cappii fissati, che continuano ad esser cicli lineari (non nulli) anche al limite.

Così, a prescindere dai cicli che si perdono per l'acquisto dei nuovi punti doppi (n. 24), le p retrosezioni di C provengono da p fra le retrosezioni di $\bar{C}$. Quando parliamo delle retrosezioni di C intendiamo appunto nel seguito di alludere a quelle che si ottengon come limiti di altrettante di $\bar{C}$.

Su ciascuno dei limiti dei cicli formanti le retrosezioni di $\bar{C}$, i quali, conformemente alle convenzioni classiche, son tutti orientati positivamente su $\bar{C}$, è definito un verso, che coincide con quello positivo di C e che si ottiene sempre come limite del

[1] Denotiamo cogli stessi simboli le curve e le loro riemanniane.

verso positivo di $\overline{C}$, comunque $\overline{C}$ tenda al limite C. Il verso limite, quando un ciclo di $\overline{C}$ al limite *si apre*, non resta naturalmente definito in relazione al verso positivo di C.

Gl'integrali u, limiti degli $\overline{u}$, li supponiamo inoltre normalizzati, ciascuno nella specie cui appartiene.

Premesso questo, portiamo l'attenzione sull'effetto prodotto sui cicli lineari di $\overline{C}$ da una circolazione di t attorno a $t=0$. Per una tal circolazione, quando sia abbastanza piccola attorno a $t=0$, si permutano fra loro i punti delle coppie e delle terne di punti di diramazione della $\overline{y}$, che per $t=0$ coincidono rispettivamente nelle imagini dei nodi e nelle imagini delle cuspidi acquisiti.

Sia anzitutto $x=a$ l'imagine sul piano della variabile x, di un nuovo nodo di C. Vi è allora un *ciclo lineare evanescente* della riemanniana $\overline{C}$ — è quello, circondante i due punti di diramazione prossimi ad a, indicato nel n. 24 con $\overline{\sigma}$ — ed un ciclo lineare $\overline{\rho}$, ad esso associato per dar luogo ad una retrosezione di $\overline{C}$, cioè incontrante $\overline{\sigma}$ soltanto in un punto, in guisa che, dopo la circolazione considerata, il ciclo $\overline{\sigma}$ ritorna in sè (cioè in un ciclo omologo) e il ciclo $\overline{\rho}$ ritorna in un ciclo (omologo alla) somma di $\overline{\rho}$ e di $\overline{\sigma}$ (1).

Sia ora $x=a$ l'imagine sul piano x di una cuspide di C. Vi è (n. 24) una retrosezione $\overline{\sigma}$, $\overline{\rho}$ di $\overline{C}$, che al limite dà una coppia di cicli σ, ρ, omologhi a zero sopra C e passanti per l'imagine della cuspide. Non ci fermeremo ad esaminare l'effetto su $\overline{\sigma}$, $\overline{\rho}$ di una circolazione di t attorno a $t=0$, perchè il caso degl'integrali di 2ª specie verrà poi considerato come limite di quello degl'integrali di 3ª specie.

(1) Occorre qui tener presenti alcune proprietà di topologia e di analisi relative all'accennato effetto sui cicli di una curva algebrica dipendente analiticamente da un parametro t e all'equazione differenziale lineare, E, a punti critici fissi regolari, del tipo di Fuchs, a cui soddisfano i periodi d'un integrale abeliano di quella curva, considerati come funzioni di t. Ved. Fuchs, Crelle's Journal, t. 71 e 73; 1858 e 1860 e inoltre [**51**, t. I, p. 94; t. II, p. 332], [**42**, pp. 23, 59], [**27**, t. II, p. 476].

Ripartiamo le π retrosezioni di $\overline{C}$ nel modo che segue:

p retrosezioni, e sieno quelle di indici

$$1, p+1 \; ; \; 2, p+2 \; ; \; \ldots \; ; \; p, 2p,$$

abbiano per limiti le retrosezioni di C;

δ_1 retrosezioni, e sieno quelle di indici

$$2p+1, 2p+\delta_1+1 \; ; \; 2p+2, 2p+\delta_1+2 \; ; \; \ldots \; ; \; 2p+\delta_1 , 2p+2\delta_1 ,$$

abbiano per limiti le coppie σ, ρ relative ai nuovi nodi di C (ρ è in questo caso un cammino aperto);

δ_2 retrosezioni, e sieno quelle di indici

$$2p+2\delta_1+1, 2p+2\delta_1+\delta_2+1 \; ; \; \ldots \; ; \; 2p+2\delta_1+\delta_2 , 2p+2\delta_1+2\delta_2 ,$$

abbiano per limiti le coppie σ, ρ relative alle cuspidi di C.

Ciò posto, si ricordi che i periodi corrispondenti ai due cicli $\bar{\sigma}$, $\bar{\rho}$, relativi ad un nodo di $\overline{C}$, qualunque sia l'integrale $\bar{u}$ considerato, corrispondono ad una radice doppia dell'equazione determinante dell'equazione differenziale E, cui abbiamo accennato a piè di pagina: uno di essi, $\bar{u}(\bar{\sigma})$, è un periodo $\omega(t)$ di $\bar{u}$, funzione olomorfa di t, attorno a $t=0$, e l'altro, $\bar{u}(\bar{\rho})$, è un periodo $\Omega(t)$, non olomorfo, che si esprime, attorno a $t=0$, con la

$$\Omega(t) = \varphi(t) + \frac{\omega(t)}{2\pi i} \log t ,$$

ove $\varphi(t)$ è olomorfa attorno a $t=0$.

Designeremo con θ_{rs} il periodo di $\bar{u}_r$, al ciclo d'indice s, fra i 2π costituenti le retrosezioni di $\overline{C}$; e supporremo che i cicli $\bar{\sigma}$, $\bar{\rho}$ relativi al nodo considerato, costituiscano, in quest'ordine, la retrosezione $2p+1$, $2p+\delta_1+1$.

La relazione bilineare fra i periodi di due integrali $\bar{u}_h$, $\bar{u}_k$ ai cicli delle retrosezioni positivamente orientate su $\overline{C}$, è

$$(52) \qquad \begin{aligned} &(\theta_{h1}\theta_{k\cdot p+1} - \theta_{h\cdot p+1}\theta_{k1}) + \ldots + (\theta_{hp}\theta_{k\cdot 2p} - \theta_{h\cdot 2p}\theta_{kp}) + \\ &+(\theta_{h\cdot 2p+1}\theta_{k\cdot 2p+\delta_1+1} - \theta_{h\cdot 2p+\delta_1+1} + \theta_{k\cdot 2p+1}) + \\ &+ \ldots + (\theta_{h\cdot 2p+2\delta_1+\delta_2}\theta_{k\cdot 2\pi} - \theta_{h\cdot 2\pi}\theta_{k\cdot 2p+2\delta_1+\delta_2}) = 0 , \end{aligned}$$

ove le θ son funzioni di t e:

$$(53) \qquad \begin{cases} \theta_{h\cdot 2p+\delta_1+1} = \varphi_{h\cdot 2p+\delta_1+1} + \dfrac{\theta_{h\cdot 2p+1}}{2\pi i}\log t \,, \\[2ex] \theta_{k\cdot 2p+\delta_1+1} = \varphi_{h\cdot 2p+\delta_1+1} + \dfrac{\theta_{k\cdot 2p+1}}{2\pi i}\log t \,, \end{cases}$$

epperò:

$$(54) \qquad \begin{aligned} &\theta_{h\cdot 2p+1}\,\theta_{k\cdot 2p+\delta_1+1} - \theta_{h\cdot 2p+\delta_1+1}\,\theta_{k\cdot 2p+1} = \\ &= \theta_{h\cdot 2p+1}\,\varphi_{h\cdot 2p+\delta_1+1} - \varphi_{h\cdot 2p+\delta_1+1}\,\theta_{k\cdot 2p+1} \,. \end{aligned}$$

Analogamente, per ciò che concerne gli altri $\delta_1 - 1$ binomi inerenti ai nuovi nodi restanti di C.

Finchè l'indice s del periodo θ_{rs} percorre la successione $1, 2, \ldots, 2p$, non si hanno che periodi relativi alle prime p retrosezioni di $\overline{C}$; epperò, tenuto conto che gl'integrali u sono normalizzati, viene, per $t \to 0$:

$$\begin{gathered} \lim\ \theta_{rr} = 2\pi i\,(r = 1, \ldots, p)\,; \ \lim \theta_{rs} = 0 \ \ (r \neq s\,;\ r, s = 1, \ldots, p)\,; \\ \lim \theta_{r\cdot p+s} = \omega_{rs}\,(r = 1, \ldots, \pi\,;\ s = 1, \ldots, p)\,; \\ \lim \theta_{rs} = 0 \ \ (r = p+1, \ldots, \pi\,;\ s = 1, \ldots, p)\,. \end{gathered}$$

Supposto poi che i cicli d'indici $2p+1, 2p+2, \ldots, 2p+\delta_1$ nelle δ_1 retrosezioni di $\overline{C}$ successive alle prime p e provenienti dai nuovi nodi di C, sieno quelli evanescenti relativi agli stessi nodi, cioè i cicli $\bar{\bar{\sigma}}$, si avrà:

$$\begin{aligned} &\lim\ \theta_{r\cdot 2p+s} &&= 0 &&(r = 1, \ldots, p\,;\ s = 1, \ldots, \delta_1)\,; \\ &\lim\ \theta_{p+r\cdot 2p+r} &&= 2\pi i &&(r = 1, \ldots, \delta_1)\,; \\ &\lim\ \theta_{p+r\cdot 2p+s} &&= 0 &&(r \neq s\,;\ r, s = 1, \ldots, \delta_1)\,; \\ &\lim\ \theta_{p+\delta_1+r\cdot 2p+s} &&= 0 &&(r = 1, \ldots, \delta_2\,;\ s = 1, \ldots, \delta_1)\,; \end{aligned}$$

Con questi limiti si esaurisce complessivamente la tabella (T') del n. 28.

Cerchiamo di ricavare dalla (52), con passaggio al limite per $t \to 0$, le relazioni quantitative che andiamo cercando. Le dedurremo dapprima nell'ipotesi $\delta_2 = 0$ $(\delta = \delta_1)$. Se anzitutto si scelgono gl'indici h, k nella successione $1, 2, \ldots, p$, sicchè i limiti degl'integrali $\bar{u}_h$, $\bar{u}_k$ sieno due integrali di 1^a specie di C, u_h, u_k, si deve naturalmente ricadere, coll'accennato passaggio al limite, nelle note relazioni

$$\omega_{hk} = \omega_{kh} \qquad (h, k = 1, \ldots, p) \tag{55}$$

fra i periodi normali degl'integrali di 1^a specie di C.

Così è di fatto, perchè, in forza della (54), i limiti dei binomi relativi ai nuovi periodi di C si annullano tutti.

Scegliamo ora h fra gl'interi $1, \ldots, p$ e k fra gl'interi $p+1, \ldots, p+\delta_1$, cosicchè gl'integrali u_h, u_k sono il primo di 1^a ed il secondo di 3^a specie.

Poichè $\theta_{h \cdot 2p+1}$, come periodo di u_h lungo σ è funzione olomorfa di t attorno a $t=0$ ed è nullo in $t=0$, risulta

$$\lim \, (\theta_{h \cdot 2p+1} \log t) = 0 \ ,$$

sicchè il limite del primo termine del binomio (54), riducendosi al limite di $\theta_{h \cdot 2p+1} \, \varphi_{k \cdot 2p+\delta_1+1}$, è nullo. Inoltre, siccome il limite della funzione olomorfa $\theta_{k \cdot 2p+1}$ è uguale a zero o a $2\pi i$, secondo che $k \neq p+1$ o $k = p+1$, viene in definitiva

$$\begin{aligned} \lim \, (\theta_{h \cdot 2p+1} \, \theta_{k \cdot 2p+\delta_1+1} - \theta_{h \cdot 2p+\delta_1+1} \, \theta_{k \cdot 2p+1}) &= \\ = \begin{cases} 0, \ \text{per} \ k \neq p+1 \\ -2\pi i \displaystyle\int_\rho du_h \ , \qquad \text{per} \quad k = p+1 \ , \end{cases} \end{aligned} \tag{56}$$

ove ρ è il cammino aperto, avente per estremi i punti A_1, B_1 della coppia neutra costituita dal primo nodo nuovo di C (quello che dà origine all'integrale u_{p+1}): cammino aperto il quale *non traversa nessuna delle retrosezioni* di C, perchè le retrosezioni di $\bar{C}$ non si tagliavano a due a due.

Pertanto, se $k = p+1$, nel limite del primo membro della (52) si annullano tutti i binomi relativi ai nuovi nodi di C, escluso il nodo ove cadono i punti logaritmici A_1, B_1 dell'integrale u_{p+1}; e quest'ultimo binomio ha per limite il valore (56).

Quanto ai primi p binomi della (52), poichè le rispettive θ tendono ai limiti finiti già indicati, il calcolo dei loro limiti è immediato. Essi son tutti nulli, salvo il binomio h-esimo pel quale:

$$\lim (\theta_{hh}\, \theta_{p+1 \cdot p+h} - \theta_{h \cdot p+h}\, \theta_{p+1 \cdot h}) = \lim \theta_{hh}\, \theta_{p+1 \cdot p+h} = 2\, \pi\, i\, \omega_{p+1 \cdot h} \,.$$

Analogamente, se $k = p + s$.

In conclusione per $k = p + s$ il limite della (52) soppresso il fattore $2\pi i$, comune ai termini del 1° membro, riducesi a:

$$(57) \qquad \omega_{p+s \cdot h} - \int_{\rho_s} d u_h = 0 \qquad (h = 1, \ldots, p\,;\; s = 1, \ldots, \delta_1) \;,$$

ove si è indicato con ρ_s, un cammino (orientato) avente per estremi i punti A_s, B_s della s-esima coppia neutra, il quale non traversa nessuna delle retrosezioni di C.

La (57) coincide colla formula classica che esprime i periodi normali di un integrale normale di 3ª specie su C (1).

Per ora dunque fra i limiti della (52) non troviamo che relazioni — le (55) e le (57) — già indicate (n. 28).

Cerchiamo che cosa accade quando anche h varia da $p + 1$ a $p + \delta_1$, assumendo naturalmente un valore diverso da k; cioè quando ambedue gl'integrali u_h, u_k son di 3ª specie.

I primi p binomi della (52) al limite svaniscono, perchè le $\theta_{h1}, \ldots, \theta_{hp}$; $\theta_{k1}, \ldots, \theta_{kp}$ hanno limiti nulli e le altre θ dei binomi stessi hanno limiti finiti. Prendiamo uno dei restanti binomi: p. es. il binomio (54) e distinguiamo due casi:

1) h, k ambedue diversi da $p + 1$. Allora:

$$\lim\ \theta_{h \cdot 2p+1} = \lim \theta_{k\ 2p+1} = 0 \ \ ,$$

sicchè, a norma della (54), il limite del binomio è zero.

---

(1) [**67**, p. 265], [**13**, p. 119]. Il cammino d'integrazione ρ_s va orientato dal punto dove l'integrale ha il periodo $-2\pi i$ al punto dove ha il periodo $+2\pi i$.

2) $h=p+1$, $k\neq p+1$ (il caso $h\neq p+1$ e $k=p+1$ si riduce a questo scambiando fra loro h, k e mutando il segno del binomio). Allora:

$$\lim \theta_{h \cdot 2p+1} = 2\pi i, \qquad \lim \theta_{k \cdot 2p+1} = 0 \quad ,$$

onde il secondo termine del binomio tende a zero e il primo, epperò tutto il binomio, ha il limite:

$$2\pi i \lim \theta_{h \cdot 2p+\delta_1+1} = 2\pi i \int_{\varrho} du_h \quad .$$

Assunti dunque $h=p+r$, $k=p+s$, il limite della (52), eliminato il fattore $2\pi i$, risulta:

$$\int_{\varrho_r} du_{p+s} - \int_{\varrho_s} du_{p+r} = 0 \,, \tag{58}$$

ove ρ_r, ρ_s sono cammini aperti (orientati) aventi per estremi rispettivamente i punti delle coppie neutre A_r, B_r ed A_s, B_s e non incontranti le retrosezioni di C.

Orbene la (58) coincide col teorema di permutabilità del parametro coll'argomento (1); sicchè neanche stavolta troviamo fra i periodi una relazione che non sia già conosciuta. In conclusione possiamo enunciare:

Sia un campo neutro γ, determinato da δ coppie di punti distinti sopra una curva C di genere p, il quale si consideri come limite del campo assoluto d'una curva $\overline{C}$ di genere $\pi=p+\delta$. Il passaggio al limite per $\overline{C}\to C$ si può disporre in modo che le $\frac{\pi(\pi-1)}{2}$ relazioni bilineari fra i periodi normali degl'integrali abeliani di 1ª specie di $\overline{C}$ abbian per limiti:

a) Le $\frac{p(p-1)}{2}$ relazioni (55) *fra i periodi normali degli integrali normali di 1ª specie di C.*

(1) [**13**, p. 117] Il cammino ρ_r o ρ_s dovrà esser orientato dal punto dove l'integrale u_{p+r}, o rispettivamente u_{p+s} ha il periodo $-2\pi i$ al punto dove ha il periodo $+2\pi i$; oppure in senso contrario per ambedue i cammini ρ_r, ρ_s.

b) Le $p\,\delta$ relazioni (57) esprimenti i periodi normali degli integrali normali di 3ª specie inerenti alle coppie di γ.

c) Le $\frac{\delta(\delta-1)}{2}$ relazioni (58) esprimenti il teorema di permutabilità del parametro coll'argomento nelle coppie di questi ultimi integrali.

Nel caso in cui il campo γ contiene δ_1 coppie di punti distinti e δ_2 coppie di punti coincidenti le relazioni limiti si ottengono riguardando alla sua volta il caso stesso come limite di quello generale in cui γ contiene soltanto coppie di punti distinti. Vediamo come ciò si ottenga.

Scegliamo un modello piano di C, dotato di soli nodi, pel quale le δ coppie di punti distinti del campo γ non cadan sui nodi, ma in coppie di punti semplici di C; e gli assi coordinati sieno generici rispetto a queste coppie. Facciamo tendere su C il punto B_δ della δ-esima coppia neutra A_δ, B_δ al punto fisso A_δ e designamo con ξ_δ, ξ_δ' le ascisse dei punti A_δ, B_δ, con x l'ascissa di un punto mobile su C, cosicchè l'integrale di 3ª specie $u_{p+\delta}$ è una certa funzione analitica $u_{p+\delta}\ (x\ ;\ \xi_\delta')$ delle variabili x, ξ_δ'. Sia inoltre $v_{p+\delta}$ l'integrale normale di 2ª specie avente in A_δ il polo di 1º ordine. Vale allora la relazione [**13**, p. 32]:

(59) $$v_{p+\delta} = \frac{\partial u_{p+\delta}}{\partial \xi_\delta}\ .$$

Scriveremo la (57), per $s=\delta$, sotto la forma

(60) $$\omega_{p+\delta\cdot h} = u_h(A_\delta) - u_h(B_\delta)\ ^{(1)}\ ,$$

ove A_δ è il punto in cui $u_{p+\delta}$ ha il periodo polare $+2\pi i$. Attraverso la (60) $\omega_{p+\delta,h}$ risulta funzione olomorfa di ξ_δ', nulla in $\xi_\delta'=\xi_\delta$; onde, affinchè non svanisca il limite di (60) nella forma d'indeterminazione $0=0$, divideremo i due membri del-

(1) Si sottintende che i valori di u_h in A_δ, B_δ son calcolati sulla superficie di Riemann C resa semplicemente connessa col consueto taglio lungo le retrosezioni collegate a catena.

la (60) per $\xi_\delta' - \xi_\delta$ e passeremo al limite per $\xi_\delta' \to \xi_\delta$. Così viene:

$$\lim_{\xi_\delta' \to \xi_\delta} \frac{\omega_{p+\delta \cdot h}(\xi_\delta')}{\xi_\delta' - \xi_\delta} = - \frac{d\, u_h}{d\, \xi_\delta},$$

D'altronde, essendo $\omega_{p+\delta \cdot h}(\xi_\delta) = 0$, il primo membro di questa relazione è la derivata di $\omega_{p+\delta \cdot h}$ in ξ_δ, epperò:

$$\frac{d\, \omega_{p+\delta \cdot h}}{d\, \xi_\delta} = - \frac{d\, u_h}{d\, \xi_\delta}.$$

Detto c_{p+h} il ciclo (orientato) d'indice $p+h$ della retrosezione h-esima, dalla (59), attesa l'indipendenza del ciclo d'integrazione da ξ_δ', si trae:

$$\int_{c_{p+h}} d\, v_{p+\delta} = \frac{d}{d\, \xi_\delta} \int_{c_{p+h}} d u_{p+\delta} = \frac{d\, \omega_{p+\delta \cdot h}}{d\, \xi_\delta},$$

epperò il limite della (57) risulta in definitiva espresso dalla relazione:

$$\pi_{p+\delta \cdot h} = - \frac{d\, u_h}{d\, \xi_\delta},$$

che è la nota formula [**67**, p. 161] per i periodi normali $\pi_{p+\delta \cdot h}$ di un integrale normale di 2ª specie $v_{p+\delta}$.

Pertanto, se l'avvicinarsi di un punto all'altro avviene per δ_2 delle δ coppie A_j, B_j, e sieno quelle corrispondenti ad $j = \delta_1 + 1, \ldots, \delta$ $(\delta_1 = \delta - \delta_2)$ e continuiamo a designare con $u_{p+\delta_1+s}$ $(s = 1, 2, \ldots, \delta_2)$ gl'integrali normali di 2ª specie che ne risultano, mantenendo le stesse notazioni ω pei periodi di questi integrali sui secondi cicli delle singole retrosezioni di C, avremo:

$$(61) \qquad \omega_{p+\delta_1+s \cdot h} = - \frac{d\, u_h}{d\, \xi_{\delta_1+s}} \qquad (h = 1, \ldots, p;\ s = 1, 2, \ldots, \delta_2),$$

ove ξ_{δ_1+s} sia l'ascissa del punto A_{δ_1+s}.

Vediamo ora a che cosa si riducono le relazioni (58). Ma prima ricordiamo una classica proprietà degl'integrali normali di 3ª specie [**13**, p. 118, teor. IV] secondo cui un integrale di 3ª specie, considerato come funzione dei suoi parametri (cioè dei suoi due punti logaritmici) si annulla identicamente quando questi parametri coincidono. Ciò posto, distinguiamo due casi:

1) u_{p+s} resta un integrale di 3ª specie, mentre u_{p+r} diventa (come derivata rispetto ad uno dei parametri variabili di un omonimo integrale di 3ª specie) un integrale di 2ª specie.

2) u_{p+r}, u_{p+s} divengono ambedue di 2ª specie.

Scritta la (58) sotto la forma:

$$(62) \qquad \begin{aligned} &u_{p+s}(\xi_r\,;\,\xi_s,\xi_s') - u_{p+s}(\xi_r'\,;\,\xi_s,\xi_s') = \\ &= u_{p+r}(\xi_s\,;\,\xi_r,\xi_r') - u_{p+r}(\xi_s'\,;\,\xi_r,\xi_r')\ , \end{aligned}$$

ove ξ_r, ξ_r' ; ξ_s, ξ_s' son le ascisse rispettive di A_r, B_r; A_s, B_s, prima di passare al limite, nel caso 1), aggiungiamo nel 2º membro le quantità nulle

$$-u_{p+r}(\xi_s\,;\,\xi_r,\xi_r),\quad u_{p+r}(\xi_s'\,;\,\xi_r,\xi_r)$$

e dividiamo i due membri della relazione così trasformata per $\xi_r' - \xi_r$, passando poi al limite per $\xi_r' \to \xi_r$. Verrà:

$$-\frac{\partial u_{p+r}}{\partial \xi_r} = \int_{\varrho_s} d v_{p+r}\ ,$$

in cui si è provvisoriamente indicato con v_{p+r} l'integrale di 2ª specie proveniente da u_{p+r} come derivata rispetto al parametro ξ_r' per $\xi_r' = \xi_r$ (1).

Nel caso 2) aggiungiamo anche al primo membro della (62) le quantità nulle:

$$-u_{p+s}(\xi_r\,;\,\xi_s,\xi_s),\quad u_{p+s}(\xi_r'\,;\,\xi_s,\xi_s)$$

(1) Questa formula si trova altresì in [**13**, p. 120].

e divisi i due membri per $(\xi_r' - \xi_r)(\xi_s' - \xi_s)$ passiamo al limite per $\xi_r' \to \xi_r$; $\xi_s' \to \xi_s$. Viene:

$$\frac{\partial v_{p+s}(\xi_r, \xi_s)}{\partial \xi_r} = \frac{\partial v_{p+r}(\xi_r, \xi_s)}{\partial \xi_s} ,$$

ove v_{p+r}, v_{p+s} designano provvisoriamente gl'integrali normali di 2ª specie aventi i poli di 1º ordine in ξ_r, ξ_s: integrali dei quali si considerano i valori rispettivamente in ξ_s ed in ξ_r. È il *teorema di permutabilità per le coppie di integrali abeliani normali di 2ª specie,* quale può vedersi in [**13**, p. 122, formula (17)].

Riferendo il risultato agl'integrali di 2ª specie normali $u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_{p+\delta_1+\delta_2}$, avremo le relazioni:

$$(63) \qquad \frac{\partial u_{p+s}}{\partial \xi_{\delta_1+r}} = -\int_{\varrho_s} du_{p+\delta\ +r} \qquad (s = 1, \ldots, \delta_1 ;\ r = 1, \ldots, \delta_2) ,$$

ove ξ_{δ_1+r} è l'ascissa del polo dell'integrale normale di 2ª specie $u_{p+\delta_1+r}$ e ρ_s è un cammino d'integrazione, non traversante le retrosezioni, diretto verso il punto ove u_{p+s} ha per periodo polare $+2\pi i$; e le relazioni:

$$(64) \qquad \left(\frac{\partial u_{p+\delta_1+s}}{\partial x}\right)_{\xi_{\delta_1+r}} = \left(\frac{\partial u_{p+\delta_1+r}}{\partial x}\right)_{\xi_{\delta_1+s}} \quad (r \neq s;\ r, s = 1, \ldots, \delta_2),$$

essendo x la variabile indipendente e ξ_{δ_1+r}, ξ_{δ_1+s} i poli degl'integrali normali di 2ª specie $u_{p+\delta_1+r}$, $u_{p+\delta_1+s}$.

Concludendo:

Se il campo neutro γ è costituito da δ_1 coppie a punti distinti e da δ_2 coppie a punti coincidenti, alle $\binom{p+\delta_1}{2}$ relazioni risultanti dal teorema precedente, vanno aggiunte le $p\,\delta_2$ relazioni (61), *che dànno i periodi normali dei δ_2 integrali normali di 2ª specie, le $\delta_1\,\delta_2$ relazioni* (63) *fra gl'integrali normali di 2ª e di 3ª specie e le $\binom{\delta_2}{2}$ relazioni* (64) *fra gl'integrali normali di 2ª specie.*

Così si ha il quadro completo delle relazioni limiti fra i periodi o per dir meglio fra i periodi e certi valori degl'integrali e delle loro derivate prime, che discendono quali limiti delle relazioni fra i periodi delle funzioni abeliane speciali (1).

Per $p=0$, $\delta_2=0$ $(\pi=\delta=\delta_1)$ le relazioni (55), (57) svaniscono, perchè tutte le ω sono nulle e mancano gl'integrali di 1ª specie. Le $\frac{\pi(\pi-1)}{2}$ relazioni (58) riduconsi, com' facile riconoscere, alle relazioni:

$$(A_r\, B_r\, A_s\, B_s) = (A_s\, B_s\, A_r\, B_r)$$

cui soddisfano i birapporti delle quaderne formate dai punti logaritmici delle coppie d'integrali di 3ª specie.

Quando $p=0$, $\delta_1>0$, $\delta_2>1$ anche le (63), (64) si riducono automaticamente ad identità, com'è naturale e come può subito verificarsi.

Osservazione 1ª. — Per la determinazione delle eventuali *condizioni qualitative* cui son soggetti i periodi d'un corpo di funzioni quasi abeliane speciali, oltre alla condizione inerente alla matrice parziale $|A\,\Omega|$, che deve esser riemanniana, il concetto precedente condurrebbe a cercare i limiti delle disuguaglianze di Riemann, alle quali soddisfanno le componenti reali dei periodi normali degl'integrali $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_\pi$. Ma questa via non è senz'altro praticabile, perchè non si può escludere *a priori* che la forma bilineare negativa formata colle dette componenti al limite si annulli. La questione del resto non ha importanza, giacchè dimostreremo nel seguito che nel fatto non vi è altra condizione qualitativa all'infuori di quella relativa ad $|A\,\Omega|$.

(1) C'è da presumere che anche le $\frac{(\pi-2)(\pi-3)}{2}$ relazioni incognite fra i $\frac{\pi(\pi+1)}{2}$ periodi degl'integrali normali di 1ª specie di $\bar{C}$ lascino traccia nel passaggio al limite in altrettante relazioni concernenti gl'integrali neutri di 1ª specie di C. Se così fosse, sarebbe questo un metodo per cercar di pervenire a quelle relazioni. Occorre cominciare a sperimentarlo per $\pi=4$, partendo dall'unica relazione, che, come si sa, in questo caso è nota (Schottky).

Osservazione 2ª. — C'è invece un complemento essenziale da aggiungere al risultato concernente le condizioni quantitative, il cui aspetto, integrale o differenziale, non è tale da poterlo apprezzare al suo giusto valore senza opportune riflessioni, che ci limiteremo pel momento ad esporre, sulla base di un lemma topologico, soltanto per ciò che concerne le relazioni (57), rinviando al n. 55 l'esame da altro punto di vista, anche delle restanti relazioni. Ecco il lemma:

Data una superficie di Riemann C e ivi un cammino aperto orientato λ, di estremi A, B, ed un sistema S di retrosezioni che incontri λ, si può sempre sostituire ad S un sistema S' di retrosezioni i cui cicli sieno omologhi uno ad uno a quelli di S e che non incontri più λ.

Si tracci invero su C un cammino λ_0 di estremi A, B non incontrante S. Allora $\lambda - \lambda_0$ è un ciclo di C e si può quindi esprimere come combinazione lineare (a coefficienti interi positivi, negativi o nulli) dei cicli di S. Pertanto basterà dimostrare il lemma per la somma di λ_0 e di un ciclo ρ di S, poichè l'estensione al caso in cui λ è somma di λ_0 e di una combinazione lineare di cicli di S, è immediata.

Si sposti di poco il ciclo ρ, sostituendolo con un ciclo ρ' omologo a ρ, che non incontri nè ρ nè λ_0 nè nessun altro ciclo di S, all'infuori del ciclo associato σ, e questo in un punto O. Si assuma indi su σ un punto O_1, prossimo ad O e da questo si tracci un cammino λ_1 che giri attorno all'arco $A\,O$ di $\lambda_0 + \rho$ (¹), conservandosi a questo vicinissimo e terminando ad un punto O_2 di σ, vicino ad O, dall'altra banda di O_1 rispetto ad O. Poichè $\lambda_1 + O_2O_1$ è omologo a zero, essendo riducibile per deformazione continua all'arco $A\,O$ percorso nei due sensi, così il ciclo $\sigma' \backsim \sigma + \lambda_1 - O_1\,O_2$, omologo a σ, non incontra più $\lambda_0 + \rho$. E l'arco $\lambda_0 + \rho$ non incontra nessuno altro ciclo di S,

(¹) La somma $\lambda_0 + \rho$ si ottiene aggiungendo a λ_0 un cammino percorso in un senso e nell'altro, congiungente un punto generico di λ_0 con un punto generico di ρ. Lo sdoppiamento dei due bordi del cammino aggiunto trasforma $\lambda_0 + \rho$ in un cammino orientato senza archi combacianti, sul quale ha senso preciso l'arco $A\,O$.

perchè così accade di λ_0 e di ρ. Pertanto il cammino aperto orientato $\lambda_0+\rho$, di estremi A, B, soddisfa al lemma rispetto al sistema S' costituito da tutti i cicli di S, salvo i cicli ρ, σ a cui sieno stati sostituiti rispettivamente i cicli omologhi ρ', σ'.

Si riferisca quanto precede all'integrale normale di 3ª specie u_{p+s}, il cui periodo al ciclo d'indice h del 2º gruppo è dato da (57). Sostituito a ρ_s un altro cammino d'integrazione qualunque ρ_s' di uguali estremi A_s, B_s e posto $\rho_s'=\rho_s+\chi_s$ ove χ_s è un ciclo lineare di C, risulta

$$\int\limits_{\varrho_s'} du_h = \omega_{p+s\cdot h} + \Omega_{hs} \ ,$$

in cui Ω_{hs} è il periodo di u_h al ciclo χ_s.

Alle retrosezioni considerate S (limiti di altrettante di $\overline{C}$) se ne sostituiscano altre, S', con cicli omologhi ai cicli degli stessi indici di S, le quali non incontrino ρ_s'. Fatto riferimento alle retrosezioni S', non mutano nè gl'integrali di 1ª nè gl'integrali di 2ª specie, perchè i loro periodi ai cicli di S non variano sostituendo ognuno di questi cicli con un ciclo omologo, in quanto i periodi polari degl'integrali di 1ª e di 2ª specie ai punti A_s, B_s, $A_r=B_r$ son nulli. Mutano invece generalmente gl'integrali normali di 3ª specie, perchè i nuovi cicli di S' non son generalmente omologhi agli antichi di S, sulla riemanniana C privata dei punti singolari.

Costruiti i nuovi integrali normali di 3ª specie $u_{p'+s}$ relativi alle stesse singolarità logaritmiche A_s , B_s, in virtù dell'ultima relazione scritta viene:

$$\omega'_{p+s\cdot h} = \omega_{p+s\cdot h} + \Omega_{hs} \qquad (h=1, \dots, p\,;\ s=1, \dots, \delta_1)\ .$$

Il passaggio dagl'integrali $u_1, \ldots, u_\pi$ primitivi ai nuovi, ove $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ sono stati sostituiti con $u_{p'+1}, \ldots, u_{p'+\delta_1}$, implica una sostituzione lineare (non degenere) sulle u (perchè due integrali di 3ª specie cogli stessi periodi polari negli stessi punti, differiscon tra loro per un integrale di 1ª specie) accompagnata da una sostituzione lineare sui cicli normali (che è identica su C, ma non necessariamente su C privata dei punti singolari). Secondo quanto dicemmo nel n. 48 non si ottiene dunque così un corpo di funzioni quasi abeliane speciali distinto da quello che corrisponde alla primitiva situazione.

Poichè il ciclo χ_s è arbitrario, questo significa che le (57) esprimono solamente che i valori delle $\omega_{p}'{}_{+s \cdot h}$ debbono soddisfare alle congruenze

$$(65) \qquad \omega'_{p+s\cdot h} \equiv \omega_{p+s\cdot h} \qquad (\mathrm{mod.}\ |A\ \Omega|)\ ,$$

ove $\omega_{p+s\cdot h}$ sia una soluzione particolare delle (57) costituita da effettivi periodi normali di certi δ_1 integrali normali di 3ª specie, aventi i punti logaritmici (puri) in A_s, B_s.

Cerchiamo ora un modo particolare di ottenere una soluzione delle (57), posto che tutte le altre soluzioni si posson ricondurre a questa.

Fissiamo all'uopo su C un gruppo G di $p-1$ punti generici e distinguiamo gl'integrali normali di 1ª specie u di C dagl'integrali normali di 1ª specie U, a cui essi dànno luogo (colle loro somme) sulla V_p' di JACOBI inerente a C [1]. Distese le variabili uniformizzanti U della V_p' in uno spazio euclideo S_{2p} e costruito ivi il parallelepipedo P dei periodi $|A\ \Omega|$, avente un vertice nell'origine O ($U_1 = U_2 = \ldots = U_p = 0$), i gruppi (non speciali) $G + A_s$, $G + B_s$ son rappresentati da due punti $\overline{A}_s$, $\overline{B}_s$ del detto parallelepipedo. La riemanniana di V_p' ha per imagine in S_{2p} la regione R ottenuta da P escludendone i punti che appartengono alle faccie (e ai contorni delle medesime) opposte alle faccie di P uscenti da O; o meglio, imaginando di far combaciare i punti stessi coi loro punti « congrui » (rispetto alle traslazioni definite dai periodi), sulle faccie opposte. Poichè A_s, B_s son distinti, i punti $\overline{A}_s$, $\overline{B}_s$ lo sono pure e non cadono in coppie di punti congrui di P.

La riemanniana di C, come imagine delle serie $|G+Q|$, ove Q sia un punto variabile sulla curva, è rappresentata su R

[1] Intesa come varietà delle g_p di C e non come varietà dei gruppi di p punti di C.

da una superficie $\overline{R}$ su cui son tracciate le retrosezioni imagini di quelle fissate su C. I punti $\overline{A}_s$, $\overline{B}_s$ appartengono ad $\overline{R}$ ed il cammino ρ_s, che figura nella (57), è rappresentato su $\overline{R}$ cioè su R da un cammino $\bar{\rho}_s$ di estremi $\overline{A}_s$, $\overline{B}_s$ non incontrante le retrosezioni ottenute su R, e tale che:

$$\int_{\bar{\rho}_s} d\,U_h = U_h(\overline{A}_s) - U_h(\overline{B}_s) = \int_{\rho_s} d\,u_h \ ;$$

sicchè:

$$(66) \qquad \omega_{p+s\cdot h} = a_{hs} - b_{hs} \qquad (h = 1, \ldots, p\,;\, s = 1, \ldots, \delta_1) \ ,$$

ove $(a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sp})$, $(b_{s1}, b_{s2}, \ldots, b_{sp})$ son due punti distinti e incongrui di P, è una particolare soluzione delle (57).

Si applichi ora il vettore $\overline{A}_s - \overline{B}_s$ al punto O; con ciò si ottiene il vettore $N_s - O$, il cui estremo N_s o appartiene ad R o ha in R un punto congruo $\overline{N}_s$ (coincidente con N_s, se N_s è in R) e le coordinate dei punti $\overline{N}_s$ $(s = 1, \ldots, p)$ entro P, essendo uguali o congrue alle $a_{hs} - b_{hs}$, forniscono una soluzione delle (57). Siccome ogni punto al finito di S_{2p} è congruo ad un punto di P, così le $\omega_{p+s\,h}$ posson in definitiva assumere valori arbitrari.

In verità così dicendo si afferma qualcosa di più di quanto non sia lecito dalle argomentazioni, perchè i punti $\overline{N}_s$ son punti di R (diversi da O) e per poter riferirsi a tutti i punti di P occorre consentire che $\overline{A}_s$, $\overline{B}_s$ possano esser coincidenti o congrui e quindi che $\overline{N}_s$ coincida con O o sia congruo ad O, cioè che i punti A_s, B_s di C coincidano, mentre di loro natura sono distinti. Consentire questo significa accettare i valori zero per le $\omega_{p+s\cdot h}$ corrispondenti ad uno o più valori dati di s (magari per tutti i valori di $s = 1, 2, \ldots, \delta_1$).

Tali valori corrispondono a un caso di degenerazione, che si ottiene con ovvia estensione di quello considerato nel n. 48, quando si supposero nulle le matrici parziali Ω_1, Ω_2. Si tratta cioè di assumere come V_π quasi abeliana di JACOBI la varietà dei gruppi di π punti, dei quali $\pi - \delta'_1$, siano presi su C e δ'_1 sopra una curva razionale di genere virtuale δ'_1 (con δ'_1 coppie neutre a punti distinti), ove δ'_1 ($\leq \delta_1$) sieno i valori di s pei quali vogliamo chè risulti $\omega_{p+s\cdot h} = 0$.

Siccome in corrispondenza ai prescelti valori delle ω si possono determinare (non individuare) su C coppie A_s, B_s e retrosezioni tali che gl'integrali normali di 3ª specie relativi a quelle coppie logaritmiche e a quelle retrosezioni, posseggano ai cicli di queste i periodi prefissati, sicchè son automaticamente soddisfatte le relazioni restanti, si conclude che:

Gli elementi della matrice parziale Ω_1, *inerente al costruendo corpo di funzioni quasi abeliane speciali, posson esser scelti ad arbitrio. Le* (57) *esprimono solamente il fatto che attribuendo alle* $\omega_{p+s\cdot h}$ ($h = 1, \ldots, p$; $s = 1, \ldots, \delta_1$), *per ogni dato* s, *valori uguali alle coordinate complesse di un punto qualunque del parallelepipedo dei periodi della matrice riemanniana* $|A\ \Omega|$, *si ottengono i medesimi corpi che si otterrebbero lasciando le* $\omega_{p+s\cdot h}$ *assolutamente libere. Due gruppi di valori* delle $\omega_{p+s\cdot h}$, *soddisfacenti alle congruenze* (65), *conducono allo stesso corpo.*

In verità quest'ultima asserzione si dovrebbe completare colla condizione che, pel confronto dei corpi cui si allude, sia scelta una volta per tutte la coppia A_s, B_s di punti di C, fra le infinite che possan dare origine a quelle ω. Ma la condizione finisce coll'esser superflua, perchè esiste una trasformazione di 2ª specie di V_π in sè che porta $\overline{A_s}$ in O.

I corpi così ottenuti sono distinti, rispetto alle trasformazioni di 1ª *e di* 2ª *specie di* V_π *in sè,* perchè non esiste alcuna di queste trasformazioni che porti l'uno nell'altro due punti di P, lasciando fisso O.

50. PRIMA APPLICAZIONE ALLE FUNZIONI QUASI IPERELLITTICHE. — Ad illustrare quanto precede consideriamo il caso particolare delle *funzioni quasi iperellittiche* (cioè delle funzioni

quasi abeliane di due variabili), che sarà studiato diffusamente nell'ultima parte di questa Memoria.

Ci riferiremo anzitutto a $p=1$, $\delta=\delta_1=1$ $(\pi=2,\ \delta_2=0)$. La tabella dei periodi normali del campo neutro γ definito sulla curva ellittica C dalla coppia A, B di punti distinti, è (cangiando lievemente per comodità le notazioni fin qui usate):

$$\begin{array}{c|ccc} & \rho & \sigma & \varepsilon \\ \hline u & 2\pi i & \omega & 0 \\ v & 0 & \tau & 2\pi i \end{array}\ , \tag{67}$$

ove u è l'integrale ellittico di 1^{a} specie su C e v è l'integrale normale di 3^{a} specie coi punti logaritmici puri A, B; e ρ, σ è la retrosezione scelta su C, ε il ciclo circondante il punto A dove v ha il periodo polare $+2\pi i$. Intendiamo ρ, σ, ε orientati positivamente, rispetto all'indicatrice della prescelta faccia positiva di C.

Porremo inoltre:

$$\omega=\omega_0\, e^{i\varphi}=\omega'+i\,\omega'' \qquad \tau=\tau_0\, e^{i\psi}=\tau'+i\,\tau''\ ,$$

con ω', ω'', τ', τ'' reali.

Con riferimento all'orientazione positiva, la prima condizione qualitativa da soddisfare è $\omega'<0$, caso particolare, per $p=1$, della disuguaglianza riemanniana. Se si lascia indeterminata l'orientazione basta porre la condizione $\omega'\neq 0$, cioè $\omega'^2>0$.

In realtà tanto i segni di u, v, come i segni dei singoli periodi della tabella (67), sono irrilevanti ai fini della determinazione di un corpo di funzioni quasi iperellittiche annesso a quella tabella. Invero, cangiar segno ad uno o ad entrambi gl'integrali, significa operare una particolare sostituzione lineare non degenere sulle orizzontali di (67); cangiar segno al periodo $2\pi i$ della prima colonna, significa cambiare ρ in $-\rho$, lasciando immutati σ, ε, cioè eseguire una sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi sulle colonne della (67); cangiar segno simultaneamente a ω, τ, significa cambiare σ in $-\sigma$; cangiar segno ad ω (o, τ) e non a τ (od ω) significa mutar σ in $-\sigma$ e contemporaneamente v (od u) in $-v$ (o $-u$); infine cangiar segno al periodo $2\pi i$ dell'ultima colonna, significa cambiare ε in $-\varepsilon$. In ogni caso dunque si tratta di sostituzioni lineari non degeneri sulle orizzontali, accompagnate eventualmente da sostituzioni unimodulari a coefficienti interi sulle verticali, cioè di operazioni che, secondo il n. 48, non fanno uscire dal corpo di funzioni quasi iperellittiche, che intendiamo di definire.

Tuttavia, per avere una norma costante, ci si può attenere p. es., per ciò che concerne i versi dei cicli primitivi e i segni delle variabili, alle convenzioni seguenti:

1) I cicli ρ, σ della retrosezione di C son orientati in senso positivo, cosicchè è $\omega' < 0$.

2) Il segno di v è scelto in modo che risulti $\tau' < 0$, senza che cangi il segno del periodo $2\pi i$ dell'ultima colonna: il che significa o il simultaneo cangiamento del verso di ε, o, volendo conservare per ε l'orientazione positiva, la sostituzione del ciclo ε, che circonda A, col ciclo ε' che circonda positivamente B, cioè lo scambio delle veci dei punti A, B. Anche quest'operazione si risolve in una sostituzione lineare unimodulare sui cicli primitivi ρ, σ, ε, perchè $\varepsilon + \varepsilon'$ forma contorno orientato su C, onde $\varepsilon' \backsim -\varepsilon$.

Come riemanniana di C assumiamo il parallelogrammo P dei periodi, applicati all'origine O sul piano dov'è distesa la u, coll'esclusione dei due lati di P (estremi inclusi) opposti a quelli che escon da O. Il parallelogrammo P, privato dei punti indicati, dà luogo alla riemanniana R, come nel caso generale. I cicli ρ, σ hanno per imagini i vettori $2\pi i$, ω, i cui estremi, per ciascuno di essi, si pensino coincidenti in O.

L'unica relazione fra i periodi della tabella (67) $[\binom{\pi}{2} = 1]$, risultante dal n. prec., è la:

$$\tau = \int_B^A du = u(A) - u(B) \;;$$

dove A è il punto in cui v ha il periodo polare $+2\pi i$. Allo scopo di ottenere una particolare soluzione della relazione precedente si può assumere come cammino d'integrazione, orientato da B verso A, sul parallelogrammo P, un cammino che non traversi i cicli della retrosezione, cioè che appartenga a R: p. es. il segmento AB, orientato da B verso A.

Aver fissato il segno di τ' ($\tau'<0$) significa dunque aver prescritto una norma d'orientazione di questo segmento, scegliendo così quello dei due punti che si vuol prendere come punto A, dove il periodo polare è $+2\pi i$.

Da quanto esponemmo in generale nel n. prec. segue che *la sola condizione d'esistenza di un corpo di funzioni quasi iperellittiche corrispondente alla tabella* (67) *è* $\omega'^2>0$.

Poichè le componenti del vettore τ secondo le direzioni dei vettori ω, $2\pi i$ sono rispettivamente

$$\tau_0 \frac{\cos\psi}{\cos\varphi} = \tau' \frac{\omega_0}{\omega'}, \quad \tau_0 \frac{\sin(\varphi-\psi)}{\cos\varphi} = \frac{\tau'\omega''-\tau''\omega'}{\omega'},$$

per ottenere tutti i corpi distinti di funzioni corrispondenti alla tabella (67) *basta scegliere* ω, τ *in modo che sieno soddisfatte le condizioni* $\omega'<0$, $\omega'\leq\tau'\leq 0$, $2\pi\,\omega'\leq\tau'\,\omega''-\tau''\,\omega'\leq 0$, esprimenti che il punto (τ', τ''), appartiene al parallelogrammo dei periodi ω, $2\pi i$ (¹).

Verifichiamo, nel caso in esame, l'equivalenza della matrice (67) alla matrice

$$(68) \qquad \begin{matrix} 2\pi i & \omega & 0 \\ 0 & \tau' & 2\pi i \end{matrix}$$

con $\tau'=\tau+2m\pi i+n\omega$, essendo m, n interi arbitrari (positivi, negativi o nulli). Si esegua all'uopo sulle u, v la sostituzione lineare non degenere

$$u'=u, \quad v'=v+n\,u\ ;$$

(¹) Il valore di $\tau=0$ ($\tau'=\tau''=0$) non è escluso, a norma di quanto dicemmo alla fine del n. prec.

e sui cicli ρ, σ la sostituzione lineare unimodulare a coefficienti interi:

$$\rho' \sim \rho - n\varepsilon, \quad \sigma' \sim \sigma + m\varepsilon, \quad \varepsilon' \sim \varepsilon \; .$$

Si ottiene allora pei periodi degl'integrali di 1^a e di 3^a specie u', v' (il secondo dei quali continua ad avere i punti logaritmici A, B), normali rispetto alla nuova retrosezione ρ', σ', e al ciclo ε', circondante positivamente A, la matrice (68).

I cicli ρ', σ' formano una retrosezione, perchè, ottenuti da ρ, σ con una sostituzione unimodulare, si tagliano in un punto, come i cicli originari ρ, σ.

Il cammino d'integrazione δ' da B ad A per calcolare il periodo ciclico di v' al ciclo ρ' e il cammino d'integrazione δ da B ad A per calcolare il periodo ciclico di v al ciclo ρ differiscono per $m\,\rho + n\,\sigma$.

Nel caso che stiamo esaminando *vi sono due moduli trascendenti* ω, τ, *che posson assumere tutti i valori sotto la condizione* $\omega'^2 > 0$.

Passiamo al caso $p = \delta = \delta_2 = 1$ $(\delta_1 = 0)$. Sia dunque una C ellittica con una coppia neutra di punti coincidenti in A. Anche questo caso sarà esaminato dettagliatamente in seguito dal punto di vista geometrico. La tabella relativa è

(69)

	ρ	σ
u	$2\pi i$	ω
v	0	τ

Si tratta cioè di funzioni quasi iperellittiche con 2 periodi: u è l'integrale normale di 1^a specie; v l'integrale normale di 2^a specie col polo di 1^o ordine A e il residuo 1 (calcolato nel verso positivo). La retrosezione ρ, σ è orientata positivamente (sicchè vale la $\omega' < 0$) e sui segni dei periodi si posson ripeter le osservazioni esposte nel caso di una coppia neutra a punti distinti.

L'unica relazione che vincola, almeno in apparenza, i periodi è ora la

$$\tau = -\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_0},$$

ove (x_0, y_0) son le coordinate del punto A su C. Ridotta la C alla cubica ellittica

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \tag{70}$$

viene:

$$\tau = -\frac{1}{2y_0}; \tag{71}$$

e, al variare di A su C, τ assume tutti i possibili valori (¹). Il valore infinito si presenta quando A va sopra σ; ma questo può evitarsi deformando leggermente σ. Sicchè possiamo dire che τ assume tutti i valori finiti; e ognuno di questi dà luogo a un effettivo corpo di funzioni, perchè per ogni valore di τ vi è qualche punto A di C, il quale, considerato come coppia neutra A, A, origina un corpo di funzioni cui spetta la tabella (69). (Vi sono anzi tre punti di C che soddisfanno al requisito).

Il valore $\tau = 0$ non fa eccezione. O per meglio dire: non si tratta più per $\tau = 0$ di un corpo di funzioni quasi iperellittiche derivanti da un integrale di 1ª specie e da un integrale di 2ª specie su C: chè per $\tau = 0$ l'integrale ridurrebbesi ad una funzione razionale col solo polo di 1° ordine A: ed una tal funzione non esiste sopra una curva ellittica. Però vi è ugualmente un corpo di funzioni relative alla (69) per $\tau = 0$, e nasce sulla V_2 di JACOBI prodotto dalla curva ellittica C e di una curva razionale, prendendo l'integrale u di C e per v una funzione razionale con

---

(¹) È appena necessario avvertire che la (71) vale soltanto per y_0 finito, cioè quando il polo A non cade nel punto di diramazione all'infinito della $y(x)$. Per calcolare τ in questo caso eccezionale bisogna trasformare omograficamente C in modo che il polo venga al finito.

un polo di 1° ordine sulla curva razionale. È un caso degenere di funzioni ellittiche in u e razionali in v. La conclusione è dunque:

Anche per l'esistenza di un corpo di funzioni quasi iperellittiche con due periodi, dati dalla tabella (69), *si richiede soltanto la condizione* $\omega'^2>0$.

Se poi si osserva che due posizioni qualunque di A su C sono sempre birazionalmente equivalenti, si conclude senz'altro che, nel caso $\delta=\delta_2=1$, i corpi costruiti in relazione a una data C, qualunque sia A, coincidono in un solo. Onde *il corpo definito dalla tabella* (69) *possiede il solo modulo trascendente* ω *(con* $\omega'^2>0$). *Per un dato* ω *i corpi corrispondenti ai singoli valori di* τ (con $\tau'^2>0$) *son birazionalmente equivalenti*. È del resto manifesto ch'essi costituiscono un sol corpo, dal punto di vista del n. 48, in quanto si riducono al corpo corrispondente a $\tau=1$, cangiando v in $\frac{v}{\tau}$. *Il caso* $\tau=0$ *dà luogo ad un corpo completamente distinto*.

OSSERVAZIONE. — I risultati precedenti vanno ravvicinati a quelli contenuti nella Memoria di COUSIN [**19**]. A partire da una tabella qualunque

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix},$$

di 3 periodi simultanei, questo Autore (a pag. 114) suppone:

1) che i periodi b non sieno proporzionali agli a: si può allora con una sostituzione lineare non degenere sulle variabili passare ad una tabella (67);

2) che, fatta questa riduzione, non sussista alcuna relazione

$$\lambda\omega+\mu\tau+2\pi\nu i=0\ ,$$

con λ, μ, ν interi non tutti nulli;

3) che una almeno delle ω, τ non sia imaginaria pura: p. es. $\omega'\neq 0$.

Le condizioni 1), 2) sono nel nostro caso ($\delta=\delta_1=1$) automaticamente soddisfatte, perchè già il fatto che la tabella dei periodi possa ridursi al tipo (67) esclude che la 1) non si verifichi; e, nei riguardi della (2), la Memoria di COUSIN [**18**], assicura che una funzione meromorfa al finito, appartenente alla tabella (67), non può ridursi ad una funzione d'una combinazione lineare delle u, v, ossia ad una funzione di una sola variabile [**18**, p. 46]; assicura cioè [**17**, p. 15], [**44**, p. 213], che alla tabella (67) non spettano periodi infinitesimi. E questa esclusione a noi consegue dall'esistenza della superficie quasi abeliana di JACOBI corrispondente al campo neutro e quindi di due funzioni meromorfe, *funzionalmente indipendenti* del corpo.

Infine la 3) non è che la disuguaglianza che garantisce l'esistenza della curva ellittica C.

Le condizioni 2), 3), si posson altresì enunciare nella forma generale indicata nel n. 37 e caratterizzano così i *periodi non eccezionali* di COUSIN.

Ebbene, supposte verificate le 1), 2), 3) e una certa disuguaglianza $I > 0$, ove I è un legame lineare a coefficienti interi, che posson esser dati ad arbitrio, fra i determinanti di 2° ordine delle 6 componenti dei determinanti di 2° ordine estratti dalla matrice dei periodi (considerati come numeri complessi) COUSIN dimostra [**19**, p. 210] che esistono funzioni meromorfe a tre periodi cui spetta la tabella (67).

Le funzioni di COUSIN sono più generali di quelle da noi trovate come funzioni quasi iperellittiche? È possibile, perchè noi abbiamo aggiunto alle 1), 2), 3) un'ipotesi (quella della provenienza da un campo neutro sopra una curva ellittica), che, dal punto di vista analitico, equivale ad ammettere che pel corpo considerato valga un teorema di addizione. Oltre a ciò ci siamo limitati a considerare sulla superficie delle coppie dei punti di C gruppi continui Γ di struttura speciale. Tuttavia l'esistenza di funzioni meromorfe di due variabili triplamente periodiche, diverse dalle funzioni quasi iperellittiche, apparisce meno probabile, ove si rifletta che le nostre ipotesi non hanno ridotto il numero dei parametri variabili con continuità nelle funzioni del corpo. Si tratta in ogni modo di analizzare più a fondo la condizione qualitativa di COUSIN: varrebbe la pena di farlo. Vedremo in seguito i rapporti fra la nostra teoria e le funzioni che COUSIN chiama *semirazionali* e ch'egli considera come casi particolari delle precedenti.

I TEOREMI DI STRUTTURA E D'ESISTENZA

51. GL'INTEGRALI SEMPLICI DI 3ª SPECIE D'UNA VARIETÀ DI PICARD COME FUNZIONI DEGL'INTEGRALI DI 1ª SPECIE. — Per determinare la struttura d'una funzione quasi abeliana in relazione a funzioni conosciute, occorre stabilire qualche lemma. Di uno di essi, relativo agl'integrali di 3ª specie sopra una varietà di PICARD V'_p trattiamo in questo numero; riservandoci di trattare degli altri, relativi agli integrali di 2ª specie, nel numero successivo.

Dimostriamo il teorema:

Un integrale semplice di 3ª specie, sopra una varietà di PICARD, *le cui varietà logaritmiche sieno pure e semplicemente legate, si riduce sempre, a meno di un fattore costante, al logaritmo del quoziente di due funzioni intermediarie aventi gli stessi periodi (di 1ª e di 2ª specie)* (1).

Sieno $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ le varietà logaritmiche irriducibili del dato integrale w di 3ª specie su V'_p; e supponiamo che il legame algebrico che necessariamente le vincola sia un legame semplice (n. 39):

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_\tau C_\tau \equiv 0,$$

sicchè i periodi di w, proporzionali agli interi λ, sono:

$$2\pi i k \lambda_1, \quad 2\pi i k \lambda_2, \ldots\ldots, 2\pi i k \lambda_\tau \qquad (k \text{ costante} \neq 0) .$$

(1) Il teorema estende notevolmente le formule classiche che nella teoria delle funzioni ellittiche e più generalmente abeliane dànno le espressioni degli integrali ellittici di 3ª specie (sotto la forma di WEIERSTRASS o di LEGENDRE) e quelle degli integrali abeliani di 3ª specie mediante serie Θ (ved. le citazioni nel n. 53).

Fra gl'interi λ ce ne sono certamente taluni negativi: siano essi $\lambda_{t+1} = -\mu_{t+1}, \ldots, \lambda_\tau = -\mu_\tau$; e

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_t = 0, \ \varphi_{t+1} = 0, \ldots, \varphi_\tau = 0$$

designino le equazioni delle $C_1, C_2, \ldots, C_t, C_{t+1}, \ldots, C_\tau$, ove le φ son convenienti funzioni intermediarie [1].

Ciò posto, facciamo variare un punto di V'_p sopra un ramo ρ avente l'origine in un punto generico P della varietà C_h $(h = 1, 2, \ldots, \tau)$ e non tangente ivi a C_h; e denotiamo con ζ il parametro che determina biunivocamente i punti del ramo ρ mediante serie di potenze in ζ, convergenti in un medesimo intorno di $\zeta = 0$ (cui corrisponde P). L'integrale $\dfrac{w}{k}$, considerato sopra ρ, assume la foma:

$$\frac{w}{k} = \lambda_h \log \zeta + \alpha(\zeta)$$

ove $\alpha(\zeta)$ è funzione olomorfa di ζ attorno a $\zeta = 0$; epperò sopra ρ è

$$e^{\frac{w}{k}} = \beta(\zeta)\zeta^{\lambda_h},$$

ove $\beta(\zeta)$ è olomorfa attorno a $\zeta = 0$ e non nulla in $\zeta = 0$. Ne deriva che, se $\lambda_h > 0$, il punto P è per $e^{\frac{w}{k}}$ uno zero d'ordine λ_h;

---

(1) [**17**, p. 228]. S'intende che il modello V'_p che stiamo considerando è privo di varietà eccezionali. S'intende inoltre, ora e nel seguito, che quando una varietà a $p-1$ dimensioni irriducibile (semplice) d'una V'_p di PICARD si rappresenta annullando una funzione intermediaria, si scelga questa funzione tra quelle che si annullano *semplicemente* sulla varietà (cioè avendo in un generico punto di questa uno zero semplice); e che quando la varietà è il multiplo secondo l di un'altra varietà irriducibile e semplice, si scelga, per scriverne l'equazione, una funzione intermediaria avente in un punto generico di quella uno zero l-plo (p. es. la potenza l-esima di una funzione intermediaria che si annulli semplicemente sulla seconda varietà). Infine intendiamo che le funzioni intermediarie considerate non siano degeneri, cioè abbiano il determinante non nullo [**17**, p. 187].

mentre se $\lambda_h < 0$ e precisamente $\lambda_h = -\mu_h$ $(\mu_h > 0)$, il punto P è per $e^{\frac{w}{k}}$ un polo di ordine μ_h.

La funzione $e^{\frac{w}{k}}$, analitica nelle $u_1, u_2, \ldots, u_p$ [1], ha dunque le varietà $C_1, C_2, \ldots, C_t$ come varietà di livello zero degli ordini $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ e le varietà $C_{t+1}, \ldots, C_\tau$ come varietà polari degli ordini $\mu_{t+1}, \ldots, \mu_\tau$. Proviamo ch'essa è uniforme per valori finiti delle variabili.

Invero, dati $u_1, u_2, \ldots, u_p$, il cammino di integrazione dall'origine O al punto Q, corrispondente ai valori prescelti, è determinato a meno di un ciclo nullo o pseudonullo addittivo [n. 45, *a*)]. Ora un tal ciclo è omologo ad un ciclo nullo o rispettivamente pseudonullo a cui vanno eventualmente aggiunti cicli nulli avolgenti, attorno a un numero finito di punti semplici, le varietà logaritmiche di w. Perciò il valore di $\frac{w}{k}$ corrispondente ai prefissati valori di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, è determinato a meno d'una combinazione lineare a coefficienti interi di alcuni dei numeri $2\pi i\lambda_1, \ldots, 2\pi i\lambda_\tau$; onde l'indeterminazione non si riflette sul valore di $e^{\frac{w}{k}}$. Lo spostamento dell'origine delle integrazioni da O ad O' non altera la conclusione, perchè un ciclo nullo o pseudonullo che contenga O, Q dà luogo ad un ciclo analogo quando vi si aggiunga il ciclo nullo costituito da uno stesso cammino percorso da O ad O' e da O' ad O.

In conclusione $e^{\frac{w}{k}}$ è funzione meromorfa di $u_1, u_2, \ldots, u_p$ nel parallelepipedo dei periodi.

Ne deriva che in questo parallelepipedo il prodotto

$$\varphi_{t+1}^{\mu_{t+1}} \varphi_{t+2}^{\mu_{t+2}} \cdots\cdots \varphi_\tau^{\mu_\tau} e^{\frac{w}{k}} \tag{72}$$

[1] L'analiticità di questa funzione risulta sostituendo nel differenziale di w, espresso per le coordinate del punto mobile in V'_p, le funzioni abeliane di $u_1, u_2, \ldots, u_p$ a cui tali coordinate son uguali.

non ha ∞^{p-1} poli, ma soltanto (al più) ∞^{p-2} punti singolari (inessenziali); e ciò contrasta con una fondamentale proprietà delle funzioni analitiche di più variabili ([1]). Pertanto quel prodotto è una trascendente intera, che si annulla colle molteplicità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t$ sulle varietà $C_1, C_2, \ldots, C_t$.

Facciamo ora percorrere al punto variabile su V'_p un ciclo lineare qualunque. Per la proprietà caratteristica delle funzioni intermediarie, dopo una tal circolazione ognuna di queste funzioni riproducesi moltiplicata per e elevato ad un polinomio lineare (generalmente non omogeneo) in $u_1, u_2, \ldots, u_p$ [**17**, p. 75].

Siccome il prodotto (72) gode evidentemente di questa proprietà, esso è alla sua volta una funzione intermediaria. Ma tale funzione ha le stesse varietà di livello zero, cogli stessi ordini di zero, della funzione intermediaria $\varphi_1^{\lambda_1} \varphi_2^{\lambda_2} \ldots \varphi_t^{\lambda_t}$, epperò differisce da questa per un esponenziale, il cui esponente è un conveniente polinomio (non necessariamente omogeneo) di 2^0 grado $g(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ [**17**, p. 166]. Se si scrive φ_1 al posto del prodotto:

$$e^{\frac{g(u_1, \ldots, u_p)}{\lambda_1}} \varphi_1 ,$$

che è ancora una funzione intermediaria, si trova, in definitiva:

$$\varphi_{t+1}^{\mu_{t+1}} \varphi_{t+2}^{\mu_{t+2}} \ldots \varphi_\tau^{\mu_\tau} e^{\frac{w}{k}} = \varphi_1^{\lambda_1} \varphi_2^{\lambda_2} \cdots \varphi_t^{\lambda_t} ;$$

epperò:

$$w = k \log \frac{\varphi}{\psi} , \tag{73}$$

([1]) Nello S_{2p} rappresentativo delle u, ∞^{p-2} punti singolari sarebbero rappresentati da una varietà reale a $2p-4$ dimensioni, la quale sarebbe segata in punti isolati da un generico S_4 caratteristico; onde la funzione analitica di 2 variabili subordinata su quello S_4 avrebbe punti singolari isolati, contrariamente ad un teorema di HURWITZ [**71**, p. 16].

ove:

$$\varphi = \varphi_1^{\lambda_1} \dots \varphi_t^{\lambda_t}\ , \qquad \psi = \varphi_{t+1}^{\mu_{t+1}} \dots \varphi_\tau^{\mu_\tau}$$

son funzioni intermediarie.

Il fatto che le varietà $\mathfrak{A} = \lambda_1\ C_1 + \dots + \lambda_t\ C_t$, $\mathfrak{B} = \mu_{t+1}\ C_{t+1} + \dots + \mu_\tau\ C_\tau$ siano algebricamente equivalenti, implica che, coll'aggiunta eventuale ad entrambe di una varietà $(p-1)$ - dimensionale C, si ottengano due varietà di uno stesso sistema continuo. Detta $\varphi_0 = 0$ l'equazione di C su V'_p (ove φ_0 è un'altra funzione intermediaria), ne deriva che le funzioni intermediarie $\varphi_0\varphi$, $\varphi_0\psi$, e perciò anche le funzioni φ, ψ, hanno uguali non soltanto i periodi di 1ª specie, ma anche i periodi di 2ª specie (1). I periodi di 1ª specie son quelli spettanti alle funzioni abeliane della varietà e i parametri delle due funzioni sono generalmente diversi; sono i medesimi soltanto quando le due varietà siano linearmente equivalenti, cioè quando $\dfrac{w}{k}$ si riduca al logaritmo d'una funzione abeliana, o, ciò che è lo stesso, d'una funzione razionale del punto di V'_p [**17**, p. 165].

Poichè il sistema continuo completo di ∞^p sistemi lineari ∞^{D-1} individuato dalla varietà di livello zero di una data funzione intermediaria $\varphi\ (u_1, u_2, \dots, u_p)$, di determinante $D > 0$, si ottiene dall'equazione

$$\varphi\ (u_1 + c_1,\ u_2 + c_2,\ \dots,\ u_p + c_p) = 0,$$

colle c costanti arbitrarie [**17**, p. 232], così l'integrale w può scriversi sotto la forma:

$$w = k \log \left[e^g \frac{\varphi(u_1 - a_1, \dots, u_p - a_p)}{\varphi(u_1 - b_1, \dots, u_p - b_p)} \right], \tag{74}$$

(1) [**17**, p. 232]. Donde poi discende — e lo notiamo incidentalmente — che sopra una varietà di Picard due varietà algebricamente equivalenti appartengono sempre allo stesso sistema continuo.

ove a, b sono costanti tali che le equazioni

$$\varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0 \ , \quad \varphi(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p) = 0$$

rappresentino le varietà logaritmiche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in cui w ha i periodi $2\pi i$, $-2\pi i$ (¹), ed e^g è un esponenziale, con g conveniente polinomio di 2^0 grado nelle u, che dipende dall'indeterminazione delle funzioni intermediarie, nulle lungo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Proviamo che viceversa:

Sopra una varietà di PICARD *il logaritmo del quoziente di due funzioni intermediarie di uguali periodi di* (1^a *e di*) 2^a *specie è uguale ad un integrale semplice di* 3^a *specie della varietà, avente soltanto singolarità logaritmiche pure.*

Consideriamo la funzione

$$\log Q(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \log \frac{\varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)}{\varphi(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p)} \ .$$

colle a, b costanti, ove il numeratore e il denominatore di Q, come funzioni intermediarie di uguali periodi di 2^a specie, posson farsi derivare da una medesima $\varphi\ (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ cangiando soltanto le u nelle $u - a$ o nelle $u - b$.

Sieno inoltre $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ le varietà algebriche di equazioni

$$\varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0. \qquad \varphi(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p = 0) \ .$$

Per metterci nelle condizioni più generali, supporremo che le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ possano anche essere riducibili e con componenti multiple:

$$\mathfrak{A} = \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_t C_t \, , \quad \mathfrak{B} = \mu_{t+1} C_{t+1} + \ldots + \mu_\tau C_\tau \ ,$$
$$(\lambda_{t+1} = -\mu_{t+1}, \ldots, \lambda_\tau = -\mu_\tau) \ ;$$

(¹) Così dicendo intendiamo che ciascuno di questi periodi sia moltiplicato per l'intero che denota la molteplicità di una componente di $\mathfrak{A}$ o di $\mathfrak{B}$ entro la rispettiva varietà, allorchè il periodo sia riferito ad un punto di tale componente.

sicchè il numeratore e il denominatore di Q si scindono in grande rispettivamente nei prodotti di t, $\tau - t$ funzioni intermediarie elevate ai rispettivi esponenti λ, μ.

Considerato un ramo ρ di V'_p uscente da un generico punto P di C_h $(h = 1, \ldots, \tau)$, ma non tangente a questa, e designato con ζ il parametro che individua analiticamente e biunivocamente i punti di ρ, il punto P corrispondendo a $\zeta = 0$, si ha sopra ρ:

$$Q = \zeta^{\lambda_h} \beta(\zeta) \ ,$$

ove $\beta(\zeta)$ è olomorfa e non nulla in $\zeta = 0$. Sicchè risulta sopra ρ:

$$\log Q = \lambda_h \log \zeta + \alpha(\zeta),$$

ove $\alpha(\zeta) = \log \beta(\zeta)$ è olomorfa attorno a $\zeta = 0$. Ne segue che il periodo polare di $\log Q$ attorno al punto generico di C_h è $2\pi i \lambda_h$.

Ciò premesso, dato che le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son algebricamente equivalenti, perchè rappresentate dall'annullarsi di due φ cogli stessi periodi di 2ª specie, si può costruire nel modo ricordato (n. 44) l'integrale semplice w di 3ª specie, normale, avente le C_h come curve logaritmiche pure $(h = 1, \ldots, \tau)$ col periodo polare $2\pi i \lambda_h$ e nessun'altra singolarità. Consideriamo sopra V'_p, la funzione analitica uniforme e^w degli argomenti $u_1, u_2, \ldots, u_p$ e ricordiamo quanto si è detto di questa funzione nella dimostrazione del teorema diretto (ove si ponga $k = 1$). Il prodotto $T = e^w \varphi(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p)$, per la ragione già addotta, è una trascendente intera, avente gli stessi zeri, colle stesse molteplicità, di $\varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - b_p)$. Supponiamo che le φ considerate sieno relative alla tabella normale $|A\ \Omega|$ (cosa sempre possibile, perchè si suppongono non degeneri) e verifichiamo che $T(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ è una funzione intermediaria relativa alla stessa tabella.

Nulla ci vieta di assumer per la φ, donde abbiamo preso le mosse (moltiplicandola eventualmente per un conveniente esponenziale elevato ad un polinomio di 2° grado nelle u)

una $\theta_{ldp}\,(u_1,, u_2, \ldots, u_p)$ [**17**, p. 166], cosicchè la φ è caratterizzata dalle condizioni funzionali: (1)

$$\varphi\left(u_1, \ldots, u_{h-1}, u_h + \frac{2\pi i}{d_h}, \ldots\ldots, u_p\right) = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p) \;,$$

$$\varphi(u_1 + \omega_{1h}, u_2 + \omega_{2h}, \ldots\ldots, u_p + \omega_{ph}) =$$

$$= e^{-\frac{1}{2} l d_p \omega_{hh} - l d_p u_h} \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_p) \;,$$

di cui d_p è l'ultimo divisore di V'_p (il più grande di tutti) ed l è un intero caratteristico di φ (2).

Continuando a considerare w come funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_p$ e non, pel momento, come funzione del punto di V'_p, si constata senz'altro che:

$$T\left(u_1, \ldots, u_{h-1}, u_h + \frac{2\pi i}{d_h}, \ldots, u_p\right) = T(u_1, u_2, \ldots, u_p) \;,$$

$$T(u_1 + \omega_{1h}, u_2 + \omega_{2h}, \ldots, u_p + \omega_{ph}) =$$

$$= e^{\Delta_h - \frac{1}{2} l d_p \omega_{hh} - l d_p (u_h - b_h)} \; T(u_1, u_2, \ldots, u_p)$$

ove Δ_h denota l'incremento di w corrispondente all'applicazione del vettore $(\omega_{1h}, \omega_{2h}, \ldots, \omega_{ph})$ ad $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, cioè, quando si riguardi w come funzione del punto di V'_p, il periodo di w al ciclo h-esimo del 2° gruppo.

D'altronde, siccome T ha gli stessi zeri (colle stesse molteplicità) della varietà $\varphi\,(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)$, viene:

$$T(u_1, u_2, \ldots, u_p) = e^{g(u_1, u_2, \ldots, u_p)} \varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)$$

(1) [**17**, p. 163]. Si ricordi che bisogna operare i cangiamenti dipendenti dalla diversità della nostra tabella normale rispetto a quella di CONFORTO.

(2) Legato al determinante D di φ dalla relazione $D = \dfrac{l^p d_p}{d_1\, d_2 \ldots d_p}$, ove $d_1, d_2, \ldots, d_p$ sono i divisori di V'_p [**17**, p. 164].

con g polinomio di 2° grado nelle u:

$$g = 2\pi i \left[\sum_{r,s=1}^{p} \alpha_{rs} u_r u_s + \sum_{s=1}^{p} \nu_s u_s + \nu \right] \qquad (\alpha_{hs} = \alpha_{sr}) \ .$$

Risulta dunque:

$$(75) \qquad e^w = Q e^g \ .$$

Consideriamo ora i due membri di questa relazione come funzioni del punto di V'_p, attraverso alle u; e facciamo descrivere a questo punto lo h-esimo ciclo normale del 1° e del 2° gruppo.

In corrispondenza al ciclo del 1° gruppo o ad un ciclo omologo, e^w, Q si riproducono; onde l'esponente dell'esponenziale, che nasce come fattore di e^g, deve essere un multiplo intero di $2\pi i$, *qualunque sieno le* u; ossia deve essere:

$$\frac{4\pi^2 i}{d_h} \left(2 i \sum_{s=1}^{p} \alpha_{hs} u_s - 2\pi \frac{\alpha_{hh}}{d_h} + i \nu_h \right) = 2 m_h \pi i \ ,$$

con m_h intero conveniente (positivo, negativo o nullo). E siccome la precedente è, per ogni h, un'identità nelle u, ne deriva che:

$$\alpha_{hs} = 0 \ \ (h, s = 1, \ldots, p) \ , \qquad \nu_h = \frac{m_h d_h}{2\pi i} \quad (h = 1, \ldots, p) \ .$$

Pertanto:

$$(76) \qquad g = \sum_{s=1}^{p} m_s d_s u_s + 2\pi i \nu \ .$$

In corrispondenza al ciclo del 2° gruppo, si ottiene invece, uguagliando i fattori per cui si moltiplicano i due membri della (75):

$$e^{\Delta_h} = e^{\Sigma m_s d_s \omega_{sh} + l d_p (a_h - b_h)} \ ,$$

epperò:

$$\Delta_h = l d_p (a_h - b_h) + \Sigma m_s d_s \omega_{sh} + 2 n_h \pi i \qquad (h = 1, \ldots, p) \,, \tag{77}$$

ove n_h è un intero conveniente (positivo, negativo o nullo).

Le relazioni (76), (77) *son fondamentali per varie deduzioni successive.*

Dalle (75), (76) si trae anzitutto:

$$e^w = e^{\Sigma m_s d_s u_s + 2\pi i \nu} \frac{\varphi(u_1 - a_1 \,, \ldots, u_p - a_p)}{\varphi(u_1 - b_1 \,, \ldots, u_p - b_p)} \tag{78}$$

e quindi:

$$\log \frac{\varphi(u_1 - a_1 \,, \ldots, u_p - a_p)}{\varphi(u_1 - b_1 \,, \ldots, u_p - b_p)} = w - \Sigma m_s d_s u_s - 2\pi i \nu \text{ [1]} \quad ; \tag{79}$$

e ciò dimostra il teorema inverso, che volevamo stabilire.

Ma varie riflessioni si affacciano a questo punto. In primo luogo è chiaro, viceversa, che se g ha la forma (76), l'espressione

$$\log \left[e^g \frac{\varphi(u_1 - a_1 \,, \ldots, u_p - a_p)}{\varphi(u_1 - b_1 \,, \ldots, u_p - b_p)} \right]$$

è un integrale semplice di 3ª specie di V'_p colle varietà logaritmiche pure $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ e i relativi periodi polari $+2\pi i$, $-2\pi i$, cosicchè in definitiva gl'interi m, n, cangiando l'integrale, possono essere scelti ad arbitrio.

---

(1) Il termine $2\pi i \nu$ si potrebbe anche trascurare, perchè w è definito a meno di una costante additiva arbitraria.

In secondo luogo le Δ_h son nulle, cioè w si riduce al logaritmo di una funzione razionale e le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ risultano linearmente equivalenti, soltanto allora che sia:

$$a_h - b_h = -\frac{\Sigma m_s d_s u_s + 2n_s \pi i}{l d_p}, \tag{80}$$

il che è noto (¹).

C'è infine una sorta di paradosso da sottolineare, molto importante pel seguito.

Il log Q, come funzione di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, oltre ai periodi polari $+2\pi i$, $-2\pi i$, provenienti dalle varietà logaritmiche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ha soltanto i periodi $l d_p (a_h - b_h)$ $(h = 1, 2, \ldots, p)$ corrispondenti all'applicazione dei vettori $(\omega_{1h}, \omega_{2h}, \ldots, \omega_{ph})$ $(h = 1, \ldots, p)$ ad $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, giacchè i periodi corrispondenti all'applicazione dei vettori $\left(0, \ldots, 0, \dfrac{2\pi i}{d_h}, 0, \ldots, 0\right)$ $(h = 1, \ldots, p)$ son nulli. A prima vista si direbbe perciò che log Q è già l'integrale normale di 3ª specie relativo alle varietà logaritmiche pure $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, coincidente dunque con w. Ma in verità in questo modo si dimenticherebbe che le funzioni da confrontare sono polidrome e che un confronto non è fra esse possibile se non riportandosi a funzioni uniformi, cioè passando agli esponenziali corrispondenti.

È quello che abbiamo fatto procurandoci la (78), dalla quale la (79) non può che esser dedotta a meno di multipli interi di $2\pi i$.

Nel n. 54 vedremo che nel fatto anche log Q può esser direttamente considerato come un integrale *normale* di 3ª specie, senza la previa aggiunta di un integrale di 1ª specie; però *la sua normalità vale rispetto ad un altro sistema di cicli normali che son omologhi a quelli del sistema primitivo sulla varietà*

(¹) [**17**, p. 235, relazione 13-*b*].

di PICARD, *ma che non lo sono sulla varietà stessa, da cui siano soppresse le* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

La considerazione del log Q come funzione del punto di V'_p, fa in sostanza smarrire ogni periodo $\pm 2\pi i$, il quale resta assorbito dalla indeterminazione medesima della funzione.

OSSERVAZIONE. — *Se l'integrale semplice di* 3ª *specie, della varietà di* PICARD, *possiede singolarità logaritmiche impure e le sue varietà logaritmiche sono più che semplicemente legate, esso è, a meno di un additivo integrale di* 2ª *specie* (*che può comprendere in sè alla sua volta un integrale di* 1ª *specie e una funzione razionale*), *una combinazione lineare a coefficienti costanti di logaritmi di quozienti di funzioni intermediarie.*

Invero, fra le sue varietà logaritmiche $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ si possono trovare (n. 39) certi $\tau - \sigma$ legami algebrici *semplici* linearmente indipendenti (in guisa che ogni altro legame algebrico fra le C sia linearmente dipendente da quelli), e i periodi polari di w lungo le C si esprimono linearmente nei coefficienti interi dei $\tau - \sigma$ legami. Considerati allora gl'integrali semplici di 3ª specie di V'_p, con sole singolarità logaritmiche pure, diciamoli $w_1, w_2, \ldots, w_{\tau-\sigma}$, inerenti a quei legami semplici ed aventi perciò i periodi polari proporzionali ai coefficienti interi dei rispettivi legami, esistono delle costanti $k_1, k_2, \ldots, k_{\tau-\sigma}$ tali che l'integrale $k_1 w_1 + k_2 w_2 + \ldots + k_{\tau-\sigma} w_{\tau-\sigma}$ ha lungo le $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ i medesimi periodi polari di w, epperò $w - k_1 w_1 - \ldots - k_{\tau-\sigma} w_{\tau-\sigma}$ è di 2ª specie. Applicando a ciascuno degl'integrali $w_1, w_2, \ldots, w_{\tau-\sigma}$ il teorema principale di questo n. si conclude nel modo enunciato.

52. GL'INTEGRALI SEMPLICI DI 2ª SPECIE D'UNA VARIETÀ DI PICARD COME FUNZIONI DEGL'INTEGRALI DI 1ª SPECIE. — Una indagine preventiva occorre nei riguardi degl'integrali di 2ª specie, onde preparare la soluzione della questione analoga a quella trattata nel n. prec. per gl'integrali di 3ª specie. Si tratta anzitutto di estendere ad una varietà algebrica qualunque la proprietà (di cui abbiamo fatto uso nel n. 49), che permette di

considerare un integrale abeliano normale di 2ª specie sopra una curva, come derivata, rispetto ad un parametro, di un integrale abeliano normale di 3ª specie.

Ricordiamo [1] che un integrale di 2ª specie sopra una varietà algebrica V'_p, che pel momento possiamo supporre qualunque, il quale abbia una data varietà polare del 1° ordine $\mathfrak{A}$ irriducibile, è individuato, a meno di una costante moltiplicativa e di una costante additiva, dalla conoscenza di $\mathfrak{A}$ e della varietà d'indeterminazione ivi.

E quest'ultima è poi una varietà $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$, ove il simbolo s'intenda nell'accezione fissata nelle mie Lezioni citate sui sistemi d'equivalenza [**78**, p. 15]. Nel definire il simbolo, poichè $\mathfrak{A}$ è una varietà a $p-1$ dimensioni, si può riferirsi all'equivalenza lineare, come già feci fino dal 1904 per le curve d'una superficie. Su $\mathfrak{A}$ il sistema lineare $|(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})|$ è il *sistema lineare caratteristico.*

Suppongasi che $\mathfrak{A}$ non sia algebricamente isolata [2] e sia H un sistema algebrico ∞^1 di varietà di un sistema continuo completo $\{\mathfrak{A}\}$, cui $\mathfrak{A}$ appartenga. Tenuta fissa $\mathfrak{A}$, si consideri in H una varietà $\mathfrak{B}$, distinta da $\mathfrak{A}$, che poi faremo variare, tendendo ad $\mathfrak{A}$. Sia, come nel n. 44,

$$f(x, y) = 0$$

una curva algebrica irriducibile, i cui punti rappresentino birazionalmente le varietà di H ed A, B i punti di f rappresentanti $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, punti che possiamo, senza restrizione, supporre semplici e in posizione generica rispetto agli assi, così che il punto di f variabile nell'intorno di A o di B è funzione olomorfa di x. Allora l'espressione

$$w = \bar{\omega}(x_1) + \bar{\omega}(x_2) + \dots + \bar{\omega}(x_\nu),$$

(1) Ved. citazioni in proposito al n. 28.

(2) Le ultime ricerche sulla serie caratteristica di una curva sopra una superficie (SEVERI, ZAPPA) hanno accertato che una tal curva può possedere la serie caratteristica *effettiva* ed esser algebricamente isolata. Analoga cosa sulle varietà a p dimensioni, per ciò che concerne le loro varietà a $p-1$ dimensioni.

ove $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ son le x dei ν punti di f, che rappresentano le ν varietà di H passanti per un punto generico di V'_p ed $\bar{\omega}$ è su f l'integrale normale di 3ª specie relativo ai punti logaritmici A, B, dà luogo su V'_p ad un integrale semplice di 3ª specie, avente le sole varietà logaritmiche (pure) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ coi periodi polari annessi $+2\pi i$, $-2\pi i$. L'integrale w è definito su V'_p a meno di una costante additiva, perchè così è di $\bar{\omega}$ su f ($d\,\bar{\omega}$ e $d\,w$ sono *individuati* rispettivamente su f e su V'_p).

Ciò premesso, diciamo a l'ascissa di A e t l'ascissa di B e supponiamo B in un intorno di A ove sia lecito considerare il punto di f come funzione olomorfa di x. Allora le funzioni razionali del punto di V'_p, che compaiono in $d\,w$ come coefficienti dei differenziali delle variabili indipendenti, al variar di t sono funzioni olomorfe di t, attorno a $t=a$, e $\bar{\omega}$ e w sono in quest'intorno funzioni analitiche di t (definite a meno di costanti additive). Ricordato che (n. 49) $\left(\frac{d\bar{\omega}}{dt}\right)_a$ è su f l'integrale normale di 2ª specie ε relativo al polo A, siccome

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d\bar{\omega}(x_1)}{dt} + \ldots + \frac{d\bar{\omega}(x_\nu)}{dt} \;,$$

risulta,

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_a = \varepsilon(x_1) + \ldots + \varepsilon(x_\nu) \;.$$

Ora la somma al secondo membro non è che un integrale semplice di 2ª specie di V'_p avente $\mathfrak{A}$ come varietà polare del 1º ordine e

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = \lim_{t \to a} (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}),$$

come varietà d'indeterminazione [**60**, n. 1]. Pertanto, per un integrale v di 2ª specie avente $\mathfrak{A}$ come varietà polare di 1º ordine ed $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ come varietà d'indeterminazione, vale la relazione

$$(81) \qquad v = \left(\frac{dw}{dt}\right)_a ,$$

ove s'è inglobato in w una conveniente costante moltiplicativa non nulla.

Questa relazione è applicabile ad ogni v la cui varietà di indeterminazione entro il sistema caratteristico di $\mathfrak{A}$, sia conseguibile come limite della varietà comune ad $\mathfrak{A}$ e ad un'altra varietà $\mathfrak{B}$ di un sistema completo $\{\mathfrak{A}\}$ contenente totalmente $\mathfrak{A}$, perchè, se ciò è possibile, la variazione di $\mathfrak{B}$ verso $\mathfrak{A}$ si può fare entro un sistema algebrico ∞^1 contenuto in $\{\mathfrak{A}\}$.

La conclusione può quindi riferirsi ad *ogni* integrale semplice di 2ª specie avente la varietà polare di 1º ordine $\mathfrak{A}$, se il sistema completo $\{\mathfrak{A}\}$ possiede su $\mathfrak{A}$ il sistema caratteristico completo, come accade per quasi tutti i sistemi continui completi di varietà a $p-1$ dimensioni in V'_p e precisamente per tutti quelli che contengono ∞^q sistemi lineari distinti, q essendo l'irregolarità superficiale di V'_p (nel caso di una varietà di PICARD è $q=p$). La conclusione vale in particolare se $\mathfrak{A}$ appartiene a un multiplo abbastanza elevato del sistema delle sezioni iperpiane di V'_p nello spazio in cui la varietà è immersa; anzi in tal caso $\{\mathfrak{A}\}$ o meglio $\{|\mathfrak{A}|\}$ è individuato da $\mathfrak{A}$ [**79**, p. 554].

Stabilita la relazione (81) per un integrale di 2ª specie avente una sola varietà polare di 1º ordine irriducibile, appartenente totalmente ad un sistema continuo completo a sistema caratteristico completo, si può estendere alle varietà (come si vedrà nella seconda parte delle mie Lezioni sui sistemi di equivalenza) un teorema da me stabilito per gl'integrali semplici di 2ª specie sopra una superficie [**59**, p. 47, teor. VI]. Il teorema cui alludo afferma che ogni integrale semplice di 2ª specie d'una varietà algebrica si riduce a meno di una conveniente funzione razionale additiva, ad un integrale semplice di 2ª specie avente una varietà polare del 1º ordine $\mathfrak{A}$, la quale soddisfaccia alla condizione di genericità ultimamente considerata. Si può pertanto enunciare il teorema:

Sopra una varietà algebrica qualunque un integrale semplice di 2ª specie può sempre esprimersi con una relazione del tipo:

$$v = u + R + \left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} , \tag{82}$$

ove u è un integrale semplice di 1ª specie, R una funzione razionale (del punto della varietà) e w un determinato integrale semplice di 3ª specie avente due varietà logaritmiche pure $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, *delle quali la prima, fissata una volta per sempre entro un prescelto sistema continuo a sistema caratteristico completo e valevole per ogni integrale v, e la seconda funzione olomorfa di un parametro t, attorno al valore* $t=0$, *talchè:*

$$\lim_{t \to 0} \mathfrak{B} = \mathfrak{A} .$$

Ogni varietà caratteristica $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$, come varietà d'indeterminazione dell'integrale $\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0}$, il quale viene a dipender in sostanza soltanto dalla scelta della varietà medesima, si ottiene assumendo opportunamente le funzioni di t, che caratterizzano la variabilità di $\mathfrak{B}$ entro $\}\mathfrak{A}\{$; e così si perviene a tutti i possibili integrali semplici di 2ª specie della varietà.

Stabilito ciò, facciamone applicazione alla V'_p di PICARD. Si vuole dunque, scelta $\mathfrak{A}$ su V'_p, trovare la forma particolarmente notevole che in questo caso assume un integrale semplice di 2ª specie di V'_p, considerato come funzione degl'integrali di 1ª specie, $u_1, u_2, \ldots, u_p$. La scelta di $\mathfrak{A}$ non è vincolata ora ad alcuna condizione (si ricordi che il modello considerato di V'_p non possiede varietà eccezionali), perchè essa individua sempre un sistema continuo completo $\}\mathfrak{A}\{$ costituito da ∞^p sistemi lineari $|\mathfrak{A}|$, e ottenuto da uno di questi mediante le trasformazioni di 2ª specie di V'_p in sè.

Sieno

$$\varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0, \qquad \varphi(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p) = 0$$

le equazioni di $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ [$\varphi\ (u_1, \ldots, u_p)$ essendo una Θ_{ldp}]. Assumiamo l'integrale di 3ª specie

$$w = \log \left[e^g \frac{\varphi(u_1 - b_1, \ldots, u_p - b_p)}{\varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)} \right]^1 ,$$

ove g è della forma (76), con m interi fissati in modo arbitrario; e poniamo per le b funzioni olomorfe qualunque di t, assumenti i valori a per $t=0$, cioè:

$$(83) \qquad b_h = a_h + c_h t + \ldots \qquad (h = 1, \ldots, p).$$

Quanto all'esponenziale e^g, il termine $\Sigma\, m_s\, d_s\, u_s$ di g si conserva inalterato nella variazione continua di $\mathfrak{B}$ verso $\mathfrak{A}$, perchè i coefficienti $m_s\, d_s$ son interi; mentre il termine $2\pi i \nu$ adduce una indeterminazione nella scelta di w. Occorre eliminar questa indeterminazione affinchè w varii con continuità insieme a $\mathfrak{B}$; condizione indispensabile per poterne ricavare, come limite, un determinato integrale di 2ª specie. Porremo dunque

$$\nu = \nu_0 + \nu' t + \ldots\ldots .$$

Dopo ciò l'integrale w è pienamente determinato per ogni t attorno a $t=0$ e risulta:

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\sum_{h=1}^{p} c_h\, \varphi'_{a_h}(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)}{\varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)} + 2\pi i \nu' .$$

(1) Per semplificare il calcolo, conviene ora di supporre che $\mathfrak{A}$ sia la varietà dove il periodo polare di w è $-2\pi i$.

Ma siccome l'integrale di 2ª specie ottenuto è determinato a meno di una costante additiva, così può assumersi addirittura:

$$(84) \qquad \left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=0} = \frac{\sum_{h=1}^{p} c_h \varphi'_{a_h}(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)}{\varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)} .$$

L'esponenziale e^g, la cui presenza specifica l'indeterminazione nella scelta di due funzioni intermediarie alle quali si prescriva soltanto di annullarsi (semplicemente) in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, non lascia alcuna traccia nell'integrale di 2ª specie; e non può non esser così, perchè già, assumendo per w l'espressione senza il fattore esponenziale, si perviene a p integrali semplici di 2ª specie linearmente indipendenti, infiniti del 1° ordine sulla varietà $\mathfrak{A}$, cioè a tutti gl'integrali dotati di questa proprietà [**62**, n. 6]; epperò anche in presenza del fattore esponenziale non possono che ottenersi i medesimi integrali. In conclusione:

Un integrale semplice di 2ª specie, sopra una varietà di Picard V'_p, *si riduce, a meno di una funzione razionale e di un integrale di 1ª specie additivi, ad una combinazione lineare del tipo* (84), *ove* $\varphi\,(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p)$ *sia una funzione intermediaria su* V'_p, *comunque prefissata (per es. una* Θ_{ldp}*); sicchè* $\varphi = 0$ *è l'equazione della varietà polare del 1° ordine* $\mathfrak{A}$ *dell'integrale tipico* (84) *e*

$$\Sigma c_h \varphi'_{a_h}(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0, \qquad \varphi(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0$$

sono le equazioni della varietà d'indeterminazione $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$, *a* $p-2$ *dimensioni, dello stesso integrale* (1).

Il sistema lineare

$$\Sigma c_h \varphi'_{a_h}(u_1 - a_1, \ldots, u_p - a_p) = 0$$

(1) Il teorema ne estende amplissimamente uno classico della teoria delle funzioni ellittiche (ved. n. 57, Oss.) e della teoria degl'integrali abeliani di 2ª specie (v. le citazioni nel n. successivo).

stacca su $\mathfrak{A}$ un sistema lineare ∞^{p-1}, contenuto totalmente nel sistema caratteristico completo $|(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})|$ di $\mathfrak{A}$; ed esso ha la massima dimensione fra i sistemi caratteristici parziali, che non contengono alcuna varietà caratteristica del sistema lineare $|\mathfrak{A}|$ di deficienza p.

Dalle condizioni funzionali (richiamate nel n. prec.) che caratterizzano $\varphi\ (u_1, u_2, \ldots, u_p)$, si traggono poi subito i valori dei periodi normali dell'integrale (84). Così trovasi che l'integrale ha periodi nulli ai cicli normali del 1° gruppo (sicchè esso è normale) e che il suo periodo Δ'_h al ciclo normale h-esimo del 2° gruppo è espresso da:

$$\Delta'_h = l d_p c_h \quad (h = 1, \ldots, p) \,. \tag{85}$$

Posto che l'integrale (84) è la derivata di w rispetto a t, per $t=0$, il suo periodo Δ'_h è la derivata rispetto a t, per $t=0$, del periodo Δ_h di w allo stesso ciclo. Effettivamente, derivando i due membri della (77) rispetto a t, dopo aver scambiato fra loro le a, b ed aver posto le (83), si ottiene, per $t=0$, la (85).

Osservazione. — L'espressione (85) dei periodi Δ'_h mostra che *l'integrale di 2ª specie generico di V'_p, dato dalla* (82), *riducesi ad una funzione razionale, a meno di un integrale di 1ª specie additivo, soltanto quando $c_h = 0$ $(h = 1, \ldots, p)$*. Questa funzione razionale è poi, alla sua volta, uguale ad una funzione abeliana di $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

D'altronde il fatto che (84) non sia mai una funzione razionale (anzi una costante) quando qualcuna delle c_h è diversa da zero, equivale alla proprietà già segnalata circa le varietà caratteristiche $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ degl'integrali ottenuti da (84) al variare delle c_h.

Pertanto *se due integrali* (84) *hanno la stessa varietà d'indeterminazione essi differiscono soltanto per una costante moltiplicativa* (*e per una costante additiva*): il che rientra in una proprietà già osservata per una varietà algebrica qualunque (n. 28). Moltiplicando uno di quei due integrali per una costante conveniente e sottraendolo dall'altro, si ottiene dunque un integrale di 1ª specie, che è una costante, perchè ha periodi nulli ai cicli normali del 1⁰ gruppo.

53. Dimostrazione del teorema di struttura. — Possediamo così tutti i mezzi per dimostrare il seguente teorema di struttura delle funzioni quasi abeliane:

Sia K un corpo di funzioni quasi abeliane di π *variabili* $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, *derivante dall'associare ad una varietà* V_π *possedente un gruppo continuo abeliano* ∞^π, *transitivo, ma non assolutamente, di trasformazioni birazionali in sè, uno* Γ *degli infiniti gruppi analoghi, ch'essa in conseguenza possiede* [1]*; e sieno* p, δ_1, δ_2 $(p \geq 0, \delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0, \pi = p + \delta_1 + \delta_2 > p)$ *gl'interi caratteristici di* Γ *ed* $|A\ \Omega|$ *la matrice di* Riemann, *di genere* p, *relativa a* V_π, $d_1, d_2, \ldots, d_p$ *i suoi divisori. Con una preventiva sostituzione lineare omogenea non degenere sulle variabili, che son poi gl'integrali dei* π *differenziali invarianti per* Γ, *ogni funzione di K riducesi ad una funzione razionale* Φ *degli argomenti*

$$e^{v_{p+1}}, \ldots, e^{v_{p+\delta_1}}, \; v_{p+\delta_1+1}, \ldots, v_{p+\delta_1+\delta_2} \,.$$

ove:

$$v_{p+j} = u_{p+j} - w_{p+j} = \log R_j \quad (j = 1, \ldots, \delta_1) \,,$$
$$v_{p+k} = u_{p+k} - w_{p+k} = R_k \quad (k = \delta_1 + 1, \ldots, \delta_1 + \delta_2) \,,$$

$\log R_j$, R_k *essendo i* $\delta_1 + \delta_2$ *integrali dei differenziali totali invarianti pel sottogruppo razionale abeliano* $\infty^{\delta_1+\delta_2}$, *necessariamente contenuto in* Γ *(sicchè* R_j, R_k *son funzioni razionali). I coefficienti di* Φ *son funzioni abeliane delle prime p variabili* $u_1, u_2, \ldots, u_p$, *spettanti alla matrice* $|A\ \Omega|$.

---

(1) Γ soddisfa naturalmente ad L.

Viceversa, ogni tale Φ *origina una funzione di* K, *da cui posson eliminarsi le variabili sussidiarie* w, *sostituendo alle prime* δ_1 *di esse le espressioni:*

$$w_{p+j} = \log\left[e^{g_j} \frac{\varphi^{(j)}(u_1 - a_{1j}, \ldots, u_p - a_{pj})}{\varphi^{(j)}(u_1 - b_{1j}, \ldots, u_p - b_{pj})}\right] \qquad (j = 1, \ldots, \delta_1)$$

ove g_j *è del tipo:*

$$g_j = \sum_{s=1}^{p} m_{sj} d_s u_s + 2\pi i \nu_j \ (m_{sj} \text{ interi; } a, b, \nu \text{ costanti});$$

alle ulteriori δ_2 *le espressioni:*

$$w_{p+k} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{p} c_{sk} \varphi'^{(k)}_{a_{sk}}(u_1 - a_{1k}, \ldots, u_p - a_{pk})}{\varphi^{(k)}(u_1 - a_{1k}, \ldots, u_p - a_{pk})} \qquad (k = \delta_1 + 1, \ldots, \delta_1 + \delta_2),$$

le $\varphi^{(k)}$, $\varphi^{(j)}$ *essendo funzioni intermediarie inerenti ad* $|A\ \Omega|$. *Così ottiensi* Φ *quale funzione meromorfa (al finito) di* $u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_\pi$ *a* $2p + \delta_1$ *periodi (tanti quanti sono appunto i periodi del corpo).*

Riguardiamo la V_π, cui riferiscesi il corpo K, come prodotto $V'_p \times S_\delta$ $(\delta = \delta_1 + \delta_2)$. Sia

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}) = 0 \tag{86}$$

l'equazione della varietà di PICARD V'_p, che possiamo senza restrizione supporre immersa in un S_{p+1}, ed $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\delta$ sieno le coordinate di un punto di S_δ. Il punto di V_π è una funzione razionale di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\delta$ sotto la condizione (86); e, viceversa, le ξ, η son funzioni razionali del punto di V_π.

Entro V_π le ξ, soddisfacenti alle (86), son le « coordinate » di una M_δ dell'involuzione ∞^p, J; e le η, in quanto funzioni razionali determinate di un punto di V_π, sono, per ogni posizione di questo punto, le coordinate interne della M_δ che vi passa.

Ciò premesso, eseguiamo sulle variabili indipendenti di ogni funzione del corpo, la sostituzione lineare omogenea a modulo non nullo occorrente per passare alle variabili:

$$u_1\ ,\ u_2\ ,\ \ldots,\ u_p\ ,\ u_{p+1}\ ,\ \ldots,\ u_{p+\delta_1}\ ,\ u_{p+\delta_1+1},\ \ldots,\ u_\pi\ ,$$

essendo questi integrali scelti a norma del n. 45.

Avremo allora (n. 46):

$$u_{p+j} = \log R_j + w_{p+j} \quad (j = 1, \ldots, \delta_1)\ ,$$
$$u_{p+k} = R_k + w_{p+k} \qquad (k = \delta_1 + 1, \ldots, \pi)\ ,$$

ove w_j, w_k son trasformate razionali di integrali di 3ª specie e di 2ª specie del punto variabile su V'_p. Dalle precedenti si ricava:

$$(87) \qquad R_j = e^{u_{p+j}-w_{p+j}}\ , \quad R_k = u_{p+k} - w_{p+k}\ .$$

E poichè $\log R_j$, R_k sono i $\delta_1+\delta_2$ integrali invarianti del sottogruppo razionale di Γ, che muta in sè ogni M_δ, sicchè le equazioni:

$$R_j = c_j\ , \qquad R_k = c_k\ ,$$

per valori generici dei secondi membri son risolubili razionalmente rispetto alle coordinate interne $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\delta$ di un punto di una data M_δ, così le (87) son risolubili razionalmente rispetto ad $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\delta$ e i coefficienti delle funzioni razionali dei secondi membri, cioè di $e^{u_{p+j}-w_{p+j}}$, $u_{p+k} - w_{p+k}$, che dànno le espressioni di $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\delta$, dipendon razionalmente dal punto di V'_p.

Ne deriva che le coordinate del punto di V_π, in quanto alla loro volta dipendon razionalmente dal punto di V'_p, e dal punto di S_δ, son funzioni razionali delle η precedentemente trovate, cioè di $e^{v_{p+j}}$ e di v_{p+k}, e i coefficienti di queste funzioni razionali, come funzioni razionali del punto di V'_p, sono funzioni abeliane di $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Lo stesso avviene di ogni funzione razionale del punto di V_π, la quale diviene una funzione razionale Φ di $e^{v_{p+j}}$, v_{p+k}, a coefficienti funzioni abeliane di $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Viceversa, ogni funzione razionale Φ di $e^{v_{p+j}}$, v_{p+k} a coefficienti funzioni abeliane di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, in quanto $e^{v_{p+j}}$ v_{p+k}, come funzioni razionali del punto di V_π, hanno periodi nulli su tutti i cicli lineari di V_π, si riproduce inalterata quando il punto di V_π descrive un ciclo lineare qualunque, epperò è una funzione quasi abeliana del corpo, perchè, come ora subito vedremo, le variabili w_j, w_k che, in essa formalmente compaiono, si posson eliminare, esprimendole con opportune funzioni meromorfe di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, sicchè, in definitiva, essa risulta funzione meromorfa di $u_1, u_2, \ldots, u_p, \ldots, u_\pi$ a $2p+\delta_1$ periodi.

Ricordiamo all'uopo (n. 46) che w_j è un integrale di 3ª specie di V_π trasformato d'un integrale semplice di 3ª specie, diciamolo $\overline{w}_j$, della V_p', mediante la trasformazione unirazionale da V_p' a V_π; e che $\overline{w}_j$ ha per varietà logaritmiche pure due varietà a $p-1$ dimensioni $\overline{\mathfrak{A}}_j'$, $\overline{\mathfrak{B}}_j'$ (algebricamente equivalenti), le quali si trasformano nelle varietà logaritmiche pure $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$ di w_j. D'altronde, in quanto w_j si comporta in $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$ come $\log R_j$, i suoi periodi polari lungo $\mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j'$ sono $+2\pi i$ e $-2\pi i$; e così accade di $\overline{w}_j$ nei rapporti con $\overline{\mathfrak{A}}_j'$, $\overline{\mathfrak{B}}_j'$. Sicchè il fattore k di cui alla (74), nei riguardi di $\overline{w}_j$, è 1, cioè $\overline{w}_j$ eguaglia sopra V_p' un'espressione del tipo della (74) (n. 51). E la medesima espressione vale per w_j sopra V_π, sol che le $u_1, u_2, \ldots, u_p$ s'interpretino appunto su questa varietà, giacchè w_j ed $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sono costanti sulle M_δ corrispondenti ai punti di V_p'.

Quanto all'integrale di 2ª specie w_k, esso è trasformato unirazionale, da V_p' a V_π, di un integrale di 2ª specie $\overline{w}_k$ di V_p', che ha periodi ciclici nulli ai cicli del 1º gruppo, perchè gl'integrali u_{p+k} sono normalizzati; epperò (n. 52, Oss.) esso uguaglia un'espressione del tipo (84); ove naturalmente le $u_1, u_2, \ldots, u_p$ s'interpretino su V_π anzichè su V_p'.

Si conclude così col teorema di struttura.

OSSERVAZIONE 1ª. — La varietà quasi abeliana V_π, in quanto prodotto $V'_p \times S_\delta$, può rappresentarsi coll'equazione (86) nello spazio lineare $S_{\pi+1}$, ove $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1}, \eta_1, \ldots, \eta_\delta$ si assumano a coordinate di punto. Cioè *una varietà quasi abeliana di dimensione π può sempre rappresentarsi sopra un cilindro abeliano avente per vertice un $S_{\delta-1}$ all'infinito, in uno spazio lineare $S_{\pi+1}$*.

Però questa rappresentazione introduce più varietà eccezionali di quante non sieno strettamente necessarie in conseguenza della peculiare natura del gruppo continuo Γ. Per es., nel caso delle varietà quasi abeliane speciali, le eccezioni non eliminabili che sono cioè naturalmente connesse colla natura delle funzioni considerate, son quelle che indicammo nel n. 36 quando demmo la rappresentazione della V_π quasi abeliana di JACOBI sul proprio prisma dei periodi. Insomma: la V_π quasi abeliana di JACOBI, riguardata (come si deve dal punto di vista della teoria delle funzioni quasi abeliane speciali) quale varietà delle π-ple di punti di una curva di genere p, *non può porsi in corrispondenza birazionale senza eccezione con un cilindro abeliano*, ossia col prodotto $V_p' \times S_\delta$. E dicendo ciò facciamo naturalmente astrazione dalle singolarità che il cilindro possiede, imaginandole già risolute in un modello privo di punti multipli di $V_p' \times S_\delta$. I due enti: varietà delle π-ple di punti di una curva C di genere p, prodotto della varietà di JACOBI di C per un S_δ ($\delta = \pi - p$) per quanto birazionalmente equivalenti, *non sono topologicamente equivalenti* e quindi non posson essere posti in corrispondenza birazionale senza eccezioni. Ce ne renderemo conto in un caso particolare nel n. 60.

OSSERVAZIONE 2ª. — Consideriamo le funzioni quasi abeliane speciali, costruite mediante una V_π quasi abeliana di JACOBI, inerente ad una curva C di genere p colle coppie neutre

A_j, B_j; A_l, A_l. Allora (n. 51) gl'integrali normali di 3ª specie w_{p+j} $(j = 1, \ldots, \delta_1)$ si esprimono colla formula:

$$(88) \qquad w_{p+j} = \log \frac{\vartheta(u_1 - a_{1j}, \ldots, u_p - a_{pj})}{\vartheta(u_1 - b_{1j}, \ldots, u_p - b_{pj})} \qquad (j = 1, \ldots, \delta_1) \text{ (1)}$$

ove:

$$\vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\sum_1^p{}_{h,k}\,\omega_{hk}\, n_h n_k + \sum_1^p{}_h\, u_h n_h} \text{ (2)},$$

in cui le n son interi variabili da $-\infty$ a $+\infty$; e le

$$\vartheta(u_1 - a_{1j}, \ldots, u_p - a_{pj}) = 0\,, \quad \vartheta(u_1 - b_{1j}, \ldots, u_p - b_{pj}) = 0$$

son le equazioni di $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ (3). Le ϑ $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ son indipendenti dall'indice j, perchè le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ appartengono, qualunque sia j, allo stesso sistema continuo.

In verità il ragionamento del n. 51 non conduce senz'altro all'espressione sopra scritta di u_{p+j} ma soltanto alla conclusione che $e^{u_{p+j}}$ differisce dal rapporto delle due theta del 1⁰ ordine per un esponenziale del tipo e^g ove g è un conveniente poli-

(1) Considerato sulla C un gruppo di p punti di cui $p-1$ restino fissi, il primo membro della (88) diviene un integrale abeliano normale di 3ª specie su C e si esprime così l'integrale stesso, considerato come funzione di uno degli estremi d'integrazione, mediante funzioni ϑ, le quali pel tramite delle $u_1, u_2, \ldots, u_p$, riduconsi a funzioni di una variabile. Analoga espressione risulta considerando quello integrale come funzione dell'altro estremo d'integrazione e, sottraendo a membro a membro le due espressioni, se ne ricava una formula data da Clebsch-Gordan [**13**, p. 201, formula (5)] per gl'integrali normali di 3ª specie sopra una curva. Veggasi pure [**7**, p. 114].

(2) [**17**, p. 160]. Siccome abbiamo assunto i periodi non nulli del primo gruppo uguali a $2\pi i$, invece che a πi, nella relazione 47. 1 del loc. cit. bisogna porre u_k in luogo di $2\,u_k$ e $\frac{1}{2}\,\omega_{hk}$ in luogo di ω_{hk}. La funzione ϑ riproducesi moltiplicata per $e^{\frac{1}{2}\omega_{ss} - u_s}$ quando il complesso delle u aumenta del periodo $(\omega_{1s}, \omega_{2s}, \ldots, \omega_{ps})$ e resta immutata quando il complesso delle u aumenta di un periodo a componenti tutte nulle, salvo una uguale a $2\pi i$.

(3) [**24**, p. 316]. Ivi si considera il caso $p = 2$, ma l'asserzione (fondata sopra un teorema di Appel-Humbert-Lefschetz) ha valore generale.

nomio di 1⁰ grado del tipo (76) in $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Vediamo come la conclusione si perfezioni nel caso indicato.

A norma del n. 51, il secondo membro della (88), che ha i periodi polari $+2\pi i$, $-2\pi i$ lungo $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, resta immutato quando $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ s'incrementa di un periodo ciclico del 1° gruppo degl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p$ e presenta il periodo $a_{sj} - b_{sj}$ quando $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ s'incrementa di un periodo ciclico del 2⁰ gruppo $(s = 1, 2, \ldots, p)$.

Ciò posto, si tenga conto della classica condizione perchè un punto A_j della curva C di genere p appartenga ad un gruppo G di p punti variabili su C [1] cioè perchè il punto P di V_p', che rappresenta G, dia luogo, in $V_p' \times S_\delta$, ad un punto di $\mathfrak{A}_j$. Designato con $\bar{u}_h$ l'integrale abeliano di 1ª specie di C, la cui somma, in un gruppo variabile di p punti di C, fornisce l'integrale u_h di V_p', e quindi l'integrale omonimo di V_π, la condizione cui alludiamo è espressa da

$$\vartheta[u_1(P) - \bar{u}_1(A_j) - k_1, \ldots, u_p(P) - \bar{u}_p(A_j) - k_p] = 0 ,$$

ove $k_1, k_2, \ldots, k_p$ son costanti assolute inerenti a C, indipendenti cioè dal punto A_j considerato. Questa è dunque la equazione di $\mathfrak{A}_j$; epperò:

$$a_{sj} = \bar{u}_s(A_j) + k_s .$$

Similmente:

$$b_{sj} = \bar{u}_s(B_j) + k_s ,$$

e quindi:

$$a_{sj} - b_{sj} = \bar{u}_s(A_j) - \bar{u}_s(B_j) ,$$

il che significa (n. 49) che

$$\omega_{p+j,s} = a_{sj} - b_{sj} , \tag{89}$$

---

(1) [**23**, p. 191]. Colgo l'occasione per indicare altri trattati moderni sulle funzioni theta e abeliane, oltre al già citato di CONFORTO, e cioè [**3**], [**4**], [**14**], [**37**].

ove $\omega_{p+j,s}$ è il periodo di u_{p+j} al ciclo lineare considerato. Ne deriva che gl'interi m della relazione (76), che definisce g, e la costante ν sono nel caso attuale nulli; sicchè vale la (88).

Quanto agli integrali normali di 2ª specie w_{p+k} $(k=\delta_1+1, \ldots, \pi)$, si hanno le formule:

$$(90) \qquad u_{p+k} = \frac{\sum\limits_{s=1}^{p} c_{sk}\,\vartheta'_{a_{sk}}(u_1 - a_{1k}, \ldots, u_p - a_{pk})}{\vartheta(u_1 - a_{1k}, \ldots, u_p - a_{pk})},$$

ove le $\vartheta\ (u_1, \ldots, u_p)$ son indipendenti dall'indice k, perchè le varietà polari $\mathfrak{A}_k$ appartengono allo stesso sistema continuo, che è quello contenente le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ (¹).

Pertanto *nel caso delle funzioni quasi abeliane speciali in luogo delle funzioni intermediarie, che compaiono nel teorema di struttura, si posson assumere funzioni theta del* 1⁰ *ordine.*

Se fra gl'integrali invarianti per Γ mancano integrali di 2ª specie, le funzioni quasi abeliane speciali corrispondenti risultano funzioni razionali delle $e^{v_{p+1}}, \ldots, e^{v_\pi}$ a coefficienti funzioni razionali delle ξ; e siccome le ξ si posson alla lor volta esprimere con quozienti di funzioni theta del 1⁰ ordine, in definitiva *le funzioni quasi abeliane speciali inerenti ad un gruppo continuo fra i cui integrali invarianti non se ne trovino di 2ª specie, son razionali in* $e^{v_{p+1}}, \ldots, e^{v_\pi}$ *a coefficienti prodotti di* ϑ *del* 1⁰ *ordine,* cioè funzioni Θ (di ordine superiore).

Si ha così l'estensione a p e δ qualunque delle *funzioni semirazionali* di COUSIN (corrispondenti al primo caso particolare $p=\delta=\delta_1=1$ di funzioni a tre periodi). L'eminente analista francese, nella seconda parte della sua Memoria citata del 1910 (pagg. 169 a 219), dimostra in sostanza la prima parte del teorema di struttura per le funzioni di due variabili u, v triplamente periodiche relative alla tabella (67) del nostro n. 50,

(¹) Dalla (90) si può trarre come caso particolare [analogamente a quanto indicammo per gl'integrali di 3ª specie, nei riguardi della (88)], un'espressione conosciuta per gl'integrali di 2ª specie d'una curva [**7**, p. 114].

le quali soddisfacciano alle condizioni 1), 2), 3) dell'Oss. finale del n. 50 e inoltre *alla condizione* 4) *di esser algebricamente legate alle loro derivate parziali prime* (pag. 178 della citata Memoria). Le condizioni 1), 2), 3), 4) sono abbracciate dalla condizione fondamentale che le funzioni di cui trattasi ammettano un teorema d'addizione (e ve ne siano dunque due funzionalmente indipendenti). È invero agevole dimostrare che le funzioni semirazionali di COUSIN ammettono un teorema d'addizione, cosicchè esse coincidono colle nostre per $p=\delta=\delta_1=1$.

Il teorema di COUSIN (pag. 219) afferma che le funzioni di cui parliamo son razionali in e^v, a coefficienti serie Θ di u: e questo teorema coincide appunto colla prima parte del nostro teorema di struttura nel caso particolare $p=\delta=\delta_1=1$.

54. I TEOREMI D'ESISTENZA. COSTRUZIONE EFFETTIVA DI TUTTI I CORPI DI FUNZIONI QUASI ABELIANE. — Le ampie conoscenze acquisite sull'oggetto del nostro studio e il teorema di struttura, che ne sintetizza una parte notevole, consentono ormai di affrontare le questioni di esistenza e d'indicare i modi per costruire effettivamente i corpi di funzioni quasi abeliane.

Dimostriamo anzitutto il

I TEOREMA D'ESISTENZA. — *Sia V_p' una varietà di* PICARD. *Scelgansi comunque su V_p' δ_1 integrali semplici di* 3^a *specie linearmente indipendenti a varietà logaritmiche pure e semplicemente legate e δ_2 integrali semplici di* 2^a *specie linearmente indipendenti* (¹). *Con una sostituzione lineare non degenere operata entro il sistema lineare dei $\pi=p+\delta_1+\delta_2$ integrali semplici, linearmente indipendenti, formato dai p integrali di* 1^a *specie di V_p' e dai $\delta=\delta_1+\delta_2$ integrali di* 3^a *e di* 2^a *specie scelti, è possibile ridurre la matrice dei periodi di quei π integrali al tipo normale* (40). *Esiste allora un corpo K di funzioni quasi*

(¹) Dicendo che più integrali di 2^a (o di 3^a) specie sono *linearmente indipendenti* s'intende che una loro combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli non è mai di specie inferiore.

abeliane di π variabili, i cui $2\,p+\delta_1$ periodi hanno per componenti gli elementi delle verticali della matrice (40).

Assunti su V_p' $2p$ cicli normali, con una conveniente sostituzione lineare non degenere entro il sistema lineare ∞^{p-1} dei p integrali semplici di 1ª specie di V_p' questi si normalizzano rispetto a quei cicli; sieno $u_1, u_2, \ldots, u_p$ gl'integrali normalizzati ed $|A\ \Omega|$ la matrice (di RIEMANN) dei loro periodi normali.

Con una seconda sostituzione lineare non degenere entro il sistema lineare $\infty^{\pi-1}$ dei π integrali di cui nell'enunciato, la quale opera identicamente su $u_1, u_2, \ldots, u_p$, si riducono gli integrali scelti di 2ª e di 3ª specie ad aver periodi nulli ai cicli normali del 1º gruppo.

Siccome infine ogni integrale di 3ª specie è per ipotesi a varietà logaritmiche pure e semplicemente legate, si può, col processo indicato alla fine del n. 45, il quale consiste sempre in una sostituzione lineare non degenere, operante stavolta soltanto nel sistema lineare degl'integrali di 3ª specie, ridurre questi a δ_1 integrali $w_{p+1}, \ldots, w_{p+\delta_1}$ aventi la tabella di periodi $|O\ \Omega_1\ B|$.

Allora la matrice complessiva dei periodi normali degl'integrali $u_1, u_2, \ldots, u_p, w_{p+1}, \ldots, w_{p+\delta_1}$ e degl'integrali di 2ª specie $w_{p+\delta_1+1}, \ldots, w_{p+\delta}$ è la tabella normale (40).

Ciò premesso, introdotte δ *nuove variabili*

$$u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}, \ u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi ,$$

consideriamo il corpo delle funzioni ognuna delle quali, Φ, è definita dalle condizioni:

α) Φ è razionale negli argomenti

$$(91)\quad e^{u_{p+1}-w_{p+1}}, \ldots, e^{u_{p+\delta_1}-w_{p+\delta_1}}, u_{p+\delta_1+1}-w_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_{p+\delta}-w_{p+\delta} ;$$

e i coefficienti son funzioni abeliane di $u_1, u_2, \ldots, u_p$ spettanti alla matrice $|A\ \Omega|$.

β) Al posto delle $w_{p+1}, \ldots, w_{p+\delta_1}, w_{p+\delta_1+1}, \ldots, w_\pi$ s'intendono sostituite, negli argomenti di Φ, le espressioni degli integrali omonimi, considerati come funzioni di $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Espressioni che sono esponenziali-logaritmiche nei riguardi degli integrali di 3ª specie (n. 51) e funzioni meromorfe (al finito) nei riguardi degl'integrali di 2ª specie (n. 52) (1).

Vediamo l'effetto sulla funzione $\overline{\Phi}(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ che così risulta da Φ, dell'applicazione al punto $(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ di un vettore-periodo della (40).

Sia, in modo generico $(\theta_{1s}, \theta_{2s}, \ldots, \theta_{\pi s})$, $(s = 1, 2, \ldots, 2p+\delta_1)$ il vettore-periodo le cui componenti son gli elementi della colonna s-esima della matrice (40). Sul complesso delle variabili $u_1, u_2, \ldots, u_p, w_{p+1}, \ldots, w_\pi$ (le w considerandosi come funzioni di $u_1, u_2, \ldots, u_p$) quel vettore-periodo di $(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ agisce aumentando il complesso di un proprio vettore-periodo. Pertanto il valore di ciascun coefficiente di $\overline{\Phi}$, che è una funzione abeliana di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, ammettente il periodo $(\theta_{1s}, \theta_{2s}, \ldots, \theta_{ps})$, non s'altera; nè s'altera la differenza $u_{p+h} - w_{p+h}$ $(h = 1, 2, \ldots, \delta)$, perchè ognuno dei due termini della differenza aumenta di $\theta_{p+h,s}$. Onde anche le funzioni $e^{u_{p+j}-w_{p+j}}$ $(j = 1, \ldots, \delta_1)$, $u_{p+l} - w_{p+l}$ $(l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta)$ ammettono il periodo $(\theta_{1s}, \theta_{2s}, \ldots, \theta_{ps})$.

In conclusione: $\overline{\Phi}$ ammette ciascuno dei periodi della (40). Essa è poi una funzione quasi abeliana di $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, perchè è meromorfa (al finito), essendo razionale in certe funzioni abeliane di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, che son meromorfe, ed in certi esponenziali, che son trascendenti intere. Il teorema I è così dimostrato.

OSSERVAZIONE 1ª. — Nel caso delle funzioni quasi abeliane speciali la V_p' è la varietà di JACOBI di una curva C di genere p e gl'integrali di 3ª e di 2ª specie si posson addirittura assumere

(1) La conclusione che qui si applica non richiede tutti gli sviluppi dei nn. 51, 52, ma soltanto la constatazione del fatto che e^w o w (a seconda che w è un integrale di 3ª o di 2ª specie) sono funzioni uniformi meromorfe (al finito) di $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

ad arbitrio su C, sotto la condizione che le singolarità logaritmiche degl'integrali di 3^a specie sieno pure, perchè ogni integrale semplice di V_p' proviene da un integrale abeliano di C. La scelta degl'integrali neutri nel campo γ, finisce così coll'essere un aspetto particolare del concetto generale di questo n.

OSSERVAZIONE 2^a. — *Come funzioni fondamentali del corpo K (per comporre razionalmente con esse ogni altra funzione di K) si possono assumere $p+1$ funzioni abeliane a p a p indipendenti relative alla tabella $|A\ \Omega|$ e le funzioni* (91), cioè complessivamente $\pi+1$ funzioni, le quali sono a π a π indipendenti, perchè per ipotesi le prime $p+1$ sono a p a p indipendenti e ognuna delle altre contiene una variabile, che non figura in nessuna delle restanti. Invero, colle $p+1$ funzioni abeliane scelte si può razionalmente comporre ogni altra funzione abeliana, cioè ogni coefficiente di una Φ; e, dopo ciò, la Φ si compone razionalmente coi suoi coefficienti e colle funzioni (91).

OSSERVAZIONE 3^a. — Il I teorema d'esistenza è stato conseguito considerando le funzioni quasi abeliane sotto l'aspetto *a*), senza porle in relazione colle definizioni *b*), *c*) (n. 37). La dimostrazione non presuppone invero, di tutto quanto precede, che i teoremi seguenti:

1) Se δ_1 integrali semplici di 3^a specie di una V_p' di PICARD, linearmente indipendenti, hanno ciascuno varietà logaritmiche pure, semplicemente legate, i loro periodi polari si possono ridurre a δ_1 distinti. Per questa conclusione bastano gli sviluppi dei nn. 44, 45.

2) Se w è un integrale semplice di 3^a specie di V_p', e^w è funzione uniforme degl'integrali di 1^a specie $u_1, u_2, \dots, u_p$ di V_p'; e se w è di 2^a specie, la conclusione vale addirittura per l'integrale stesso (nn. 51, 52). Acquisite le 1), 2), il ragionamento non richiede neppure la normalizzazione dei periodi dei considerati integrali.

Nessuna traccia dunque nella dimostrazione nè nell'ipotesi L *nè del teorema di struttura.* Però l'uno e l'altra intervengono, in connessione col corollario che ora stabiliremo ,quando si voglia concludere che le funzioni alle quali riferiscesi il I teorema d'esistenza non costituiscono soltanto un elegante esempio d'un tipo di funzioni quasi abeliane, ma (sotto l'ipotesi L) le comprendono tutte.

Il corollario a cui alludiamo è il seguente:

Un corpo K costruito a norma del primo teorema d'esistenza, può ottenersi pure coll'associare la V_π quasi abeliana prodotto della V_p' di PICARD *considerata e di uno spazio lineare S_δ, ad uno degli infiniti gruppi continui abeliani Γ che mutano in sè V_π.*

Così le funzioni quasi abeliane del primo teorema d'esistenza soddisfano non soltanto alla a), ma anche alle definizioni b), c).

Assumansi invero in K, a norma dell'Oss. 2ª, le $p+1$ funzioni abeliane (appartenenti alla matrice $|A\ \Omega|$) che esprimono le $p+1$ coordinate del punto generico $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p+1})$ di V_p', supposta immersa in S_{p+1} e di equazione (86):

$$(92) \qquad \xi_1 = \xi_1(u_1, u_2, \ldots, u_p), \quad \xi_2 = \xi_2(u_1, u_2, \ldots, u_p), \ldots$$
$$\ldots, \xi_{p+1} = \xi_{p+1}(u_1, u_2, \ldots, u_p).$$

Aggiungiamo a queste le funzioni (91):

$$(93) \qquad \eta_1 = e^{u_{p+1}-w_{p+1}}, \ldots, \eta_{\delta_1} = e^{u_{p+\delta_1}-w_{p+\delta_1}},$$
$$\eta_{\delta_1+1} = u_{p+\delta_1+1} - w_{p+\delta_1+1}, \ldots, \eta_\delta = u_\pi - w_\pi.$$

Nello spazio $S_{\pi+1}$ $(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}, \eta_1, \ldots, \eta_\delta)$ *le* (92), (93) *costituiscono la rappresentazione parametrica del cilindro abeliano* (86), *che apparisce come varietà quasi abeliana di rango* 1, *modello proiettivo della V_π quasi abeliana inerente a K* (n. 53, Oss. 1ª).

Questo cilindro ha gli spazi generatori S_δ, uscenti dai punti della V_p' di PICARD (86) (situata nello spazio $\eta_1 = \eta_2 = \ldots = \eta_\delta = 0$), e paralleli agli assi $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\delta$.

Resta così associata a K la varietà V_π (86) e Φ è una funzione razionale del punto di questa, sicchè è soddisfatta la definizione c). Dalle (93) si trae poi:

$$u_{p+1} = w_{p+1} + \log \eta_1, \ldots, u_{p+\delta_1} = w_{p+\delta_1} + \log \eta_{\delta_1},$$
$$u_{p+\delta_1+1} = w_{p+\delta_1+1} + \eta_{\delta_1+1}, \ldots, u_\pi = w_\pi + \eta_\delta.$$

Ora $w_{p+1}, \ldots, w_{p+\delta_1}$, interpretati sopra V_π mediante la trasformazione unirazionale da V_p' a V_π, forniscono su V_π δ_1 integrali semplici indipendenti di 3^a specie a varietà logaritmiche pure e semplicemente legate (composte cogli S_δ) e costanti sugli S_δ; similmente $w_{p+\delta_1+1}, \ldots, w_\pi$ forniscono su V_π δ_2 integrali semplici indipendenti di 2^a specie costanti sugli S_δ; e $\log \eta_1, \ldots, \log \eta_{\delta_1}, \eta_{\delta_1+1}, \ldots, \eta_\delta$ son rispettivamente integrali di 3^a e di 2^a specie su V_π. In conseguenza $u_{p+1}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ son in definitiva su V_π integrali semplici di 3^a specie (a varietà logaritmiche pure semplicemente legate) e $u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ integrali semplici di 2^a specie.

Infine le equazioni $u_h = \text{cost.}$ $(h = 1, \ldots, \pi)$ son soddisfatte, come mostrano le (92), (93), da un sol punto di V_π e le trasformazioni

$$u_h' = u_h + a_h \qquad (a_h \text{ costanti}, \ h = 1, \ldots, \pi)$$

sono algebriche (epperò birazionali), perchè le prime p agiscono algebricamente fra gli S_δ generatori e le ultime δ si riducono sopra un S_δ alle equazioni lineari:

$$\eta_s' = \eta_s + b_s \qquad (b_s \text{ cost.}),$$

che definiscono un gruppo abeliano ∞^δ di traslazioni. È dunque soddisfatta anche la definizione *b*) e il corollario è dimostrato.

II Teorema di esistenza. *Sulla V_π quasi abeliana, prodotto della V_p' di* Picard *per un S_δ lineare, esistono infiniti gruppi continui abeliani Γ, che associati a V_π dànno luogo al medesimo corpo K di funzioni quasi abeliane, costruito a norma del primo teorema di esistenza, ed essi dipendono dalla scelta di una arbitraria trasformazione cremoniana in uno spazio lineare S_δ.*

In un S_δ $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\delta)$ scegliamo ad arbitrio una qualunque trasformazione cremoniana (n. 48):

$$(94) \quad R_j = \eta_j' \quad (j = 1, \ldots, \delta_1), \qquad R_l = \eta_l' \quad (l = \delta_1 + 1, \ldots, \delta)$$

ove le R son funzioni razionali invertibili delle η; e consideriamo la $V_\pi = V_p' \times S_\delta$, essendo V_p' la varietà di PICARD annessa alla tabella $|A\ \Omega|$.

Le varietà zero e infinito di R_j son rappresentate su V_π da due varietà $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, composte da $\infty^{\delta-1}$ varietà N_p (ove N_p sieno i prodotti dei punti di S_δ per V_p') e linearmente equivalenti. Il loro fascio costituisce l'insieme delle varietà di livello della funzione R_j che può addirittura interpretarsi come funzione razionale del punto di V_π, ove si prenda come modello di V_π il cilindro abeliano (86). Similmente dicasi della R_l, di cui indicheremo con $\mathfrak{A}_l$ la varietà polare.

Interpretati gl'integrali w di V_p', come integrali di V_π e posto

$$u_{p+j} = \log R_j + w_{p+j}, \qquad u_{p+l} = R_l + w_{p+l}\ ,$$

l'integrale di 3ª specie u_{p+j} di V_π ha per varietà logaritmiche pure, semplicemente legate, $\mathfrak{A}_j + \mathfrak{A}_j'$, $\mathfrak{B}_j + \mathfrak{B}_j'$ coi periodi polari $+2\pi i$, $-2\pi i$, ove $\mathfrak{A}_j'$ $\mathfrak{B}_j'$ son le varietà composte colle M_δ, che corrispondono su V_π alle varietà logaritmiche $\overline{\mathfrak{A}}_j'$, $\overline{\mathfrak{B}}_j'$ di w_{p+j} su V_p'. E similmente l'integrale di 2ª specie u_{p+l} ha come varietà polare $\mathfrak{A}_l + \mathfrak{A}_l'$, colla varietà d'indeterminazione somma della varietà base del fascio $R_l = \text{cost.}$, della varietà di indeterminazione di w_{p+l} e della varietà $(\mathfrak{A}_l, \mathfrak{A}_l')$ (contata 2 volte).

D'altronde le equazioni $u_h = \text{cost.}$ $(h = 1, 2, \ldots, \pi)$ son soddisfatte su V_π da un sol punto. Invero, le prime p di queste equazioni definiscono una M_δ e le altre si riducono ad

$$R_j = \text{cost.}, \qquad R_l = \text{cost.},$$

e quando le costanti sieno generiche, a causa dell'invertibilità delle (94), son soddisfatte da una sola N_p, che sega in un punto la precedente M_δ: è l'unico punto soddisfacente alle $u_h = \text{cost.}$

Le trasformazioni $u_h' = u_h + \text{cost.}$ $(h = 1, \ldots, \pi)$ son perciò (generalmente) biunivoche su V_π e sono algebriche, cioè birazionali, perchè tali sono le trasformazioni ch'esse definiscono separatamente, fra le M_δ, le prime p di esse, e fra le N_p, le ultime δ. Si ottiene così il gruppo Γ da associarsi a V_π.

Il corpo K costruito a norma del primo teorema d'esistenza coincide con quello delle funzioni quasi abeliane inerenti alla coppia V_π, Γ; che è quanto volevasi provare.

Osservazione. Non è detto che i gruppi continui Γ associati a V_π per ottenere K, a norma dei teoremi precedenti, soddisfacciano all'ipotesi L.

III Teorema d'esistenza. *Condizione necessaria e sufficiente perchè esista un corpo K di funzioni quasi abeliane di $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, i cui interi caratteristici p, δ_1, δ_2 sieno arbitrariamente prescelti ed i cui periodi formino la matrice* (40), *è che la matrice parziale $|A\ \Omega|$ sia abeliana. Le altre matrici parziali Ω_1, Ω_2 della* (40) POSSON ESSERE SCELTE ASSOLUTAMENTE AD ARBITRIO.

Il terzo teorema d'esistenza dal punto di vista costruttivo analitico è il più significativo, perchè risolve senz'altro anche la questione delle relazioni qualitative e quantitative fra i periodi; e nel modo più inaspettato. Ma è questo il teorema pel quale occorre il maggior numero di premesse, che, appunto a questo scopo, sono state preparate nella presente Memoria.

La necessità che $|A\ \Omega|$ sia abeliana, perchè possa esistere K, è conseguenza ovvia del fatto che il corpo K è relativo ad una varietà V_π, la quale possiede $p<\pi$ integrali di 1ª specie, le cui varietà di livello costante M_δ sono algebriche [**65**, n. 6, teor. IV], sicchè le prime p righe della tabella (40) costituiscono la matrice di Riemann della V_p' di Picard rappresentante l'involuzione delle M_δ.

Passiamo alla sufficienza. Si deve dimostrare che esiste un corpo K le cui tabelle Ω_1, Ω_2 son arbitrarie, sotto la condizione che $|A\ \Omega|$ sia abeliana.

Proveremo all' uopo che, considerata la $V_\pi = V_p' \times S_\delta$ $(\delta = \delta_1 + \delta_2)$, esistono su questa π integrali semplici indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, dei quali i primi p di 1ª specie, gli ulteriori δ_1

di 3ª specie, a varietà logaritmiche pure e semplicemente legate, e gli ultimi δ_2 di 2ª specie, i cui periodi (normali) formano la tabella (40); essendo le Ω_1, Ω_2 arbitrarie. Da ciò la conclusione, a norma del primo teorema d'esistenza.

La tabella $|A\ \Omega|$ è intanto costituita dai periodi di p integrali semplici normali di 1ª specie $u_1, u_2, \ldots, u_p$ sopra V_p', ai cicli normali $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2p}$ (ove σ_h e σ_{h+p}, per $h = 1, 2, \ldots, p$ son associati). Poichè non c'è possibile ambiguità, continueremo ad usare le lettere $u_1, u_2, \ldots, u_p$ per gl'integrali di V_π trasformati dagli omonimi di V_p' colla sostituzione razionale di V_p' a V_π e le lettere $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2p}$ pei cicli lineari normali di V_π, che posson supporsi situati sulla varietà prodotto di V_p' per un punto fissato in S_δ.

Ciò posto, cominceremo a costruire su V_π δ_2 integrali di 2ª specie, i cui periodi ciclici formino la tabella $|O\ \Omega|$. All'uopo ci procnreremo δ_2 integrali linearmente indipendenti $w_{p+\delta_1+1}, \ldots, w_\pi$ di 2ª specie di V_p', relativi alla tabella $|O\ \Omega_2|$, sapendosi ormai (ved. le dimostrazioni dei teoremi d'esistenza I e II) come si passi dai w agl'integrali corrispondenti u di 2ª specie di V_π.

Scelta ad arbitrio Ω_2, ne sia ρ ($\leq p$) la caratteristica. Fissata, come nel n. 52, una varietà algebrica qualunque $\mathfrak{A}$, a $p-1$ dimensioni, sulla V_p' (che supponiamo priva di varietà eccezionali) gl'integrali semplici di 2ª specie di V_p' linearmente indipendenti fra loro, dagl'integrali di 1ª specie e dalle funzioni razionali, cioè *essenzialmente trascendenti,* si riducono tutti, a meno di una funzione razionale e di un integrale di 1ª specie addittivi, agli ∞^{p-1} espressi dalla formula (84), ove le c sono costanti arbitrarie. Se $\rho > 0$ (cioè se non tutti gli elementi di Ω_2 son nulli), prendiamo ρ orizzontali linearmente indipendenti di Ω_2: sieno p. es. le prime ρ:

$$\omega_{p+\delta_1+h,1}\ ,\ \omega_{p+\delta_1+h,2}\ , \ldots ,\ \omega_{p+\delta_1+h,p} \qquad (h = 1, \ldots, \rho)\ .$$

Posto:

$$c_{hk} = \frac{\omega_{p+\delta_1+h,k}}{ld_p} \qquad (h = 1, \ldots, \rho\ ;\ k = 1, 2, \ldots, p)\ .$$

ove l è un intero dipendente soltanto da $\mathfrak{A}$ e d_p l'ultimo divisore della matrice abeliana $|A\ \Omega|$, a norma delle (85), gl'integrali di 2ª specie di V_p':

$$(95) \qquad w_{p+\delta_1+h} = \frac{\sum_{k=1}^{p} c_{hk}\varphi'_{a_k}(u_1 - a_1, \dots, u_p - a_p)}{\varphi(u_1 - a_1, \dots, u_p - a_p)}$$

posseggono come periodi ai cicli normali del 2º gruppo quelli delle orizzontali considerate di Ω_2 e periodi nulli ai cicli normali del 1º gruppo, ove φ è una funzione intermediaria (in particolare una Θ_{ld_p}) che si annulla del 1º ordine lungo $\mathfrak{A}$. Così abbiamo ottenuto ρ dei δ_2 costruendi integrali w di 2ª specie e precisamente quelli da associarsi alle prime ρ orizzontali della Ω_2.

Prendiamo ora una qualunque delle $\delta_2 - \rho$ righe restanti di Ω_2; sia in modo generico:

$$(96) \qquad \omega_{p+\delta_1+r,1}\ ,\ \omega_{p+\delta_1+r,2}\ , \dots,\ \omega_{p+\delta_1+r,p} \qquad (r = \rho + 1, \dots, \delta_2)\ .$$

Essendo ρ la caratteristica di Ω_2, questa riga è linearmente dipendente dalle prime; esistono cioè ρ costanti $\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \dots, \lambda_{\rho r}$ tali che:

$$\omega_{p+\delta_1+r,k} = \lambda_{1r}\,\omega_{p+\delta_1+1,k} + \dots + \lambda_{\rho r}\,\omega_{p+\delta_1+\rho,k}$$
$$(k = 1, \dots, p;\ r = \rho + 1, \dots, \delta_2)$$

e le costanti sono tutte nulle quando è nulla la (96).

Se la (96) non è nulla e quindi non son nulle tutte le λ, posto

$$c_{rk} = \frac{\omega_{p+\delta_1+r,k}}{ld_p} \qquad (r = \rho + 1, \dots, \delta_2;\ k = 1, \dots, p)$$

con queste c si costruisce un integrale $\overline{w}_{p+\delta_1+r}$ [fornito dalla formula (95) collo scambio di h in r], il quale è essenzialmente trascendente, ma linearmente legato ai ρ costruiti. Precisamente risulta:

$$\overline{w}_{p+\delta+r} = \lambda_{1r}\, w_{p+\delta_1+1} + \dots + \lambda_{\rho r}\, w_{p+\delta_1+\rho} \,.$$

Si assumerà allora invece di questo, come integrale w_{p++r}, l'integrale:

$$w_{p+\delta_1+r} = \overline{w}_{p+\delta_1+r} + H_{p+\delta_1+r}\,,$$

ove $H_{p+\delta_1+r}$ è un'arbitraria funzione razionale del punto di V_p'.

Se invece l'orizzontale (96) è nulla si prenderà addirittura:

$$w_{p+\delta_1+r} = H_{+d\ \delta_1+r} \,.$$

L'arbitrarietà nella scelta delle funzioni razionali $H_{p+\delta_1+r}$ $(r = \rho + 1, \dots, \delta_2)$ assicura che gl'integrali di 2^a specie $w_{p+\delta_1+r}$ $(r = \rho + 1, \dots, \delta_2)$, sono linearmente indipendenti fra loro e dai ρ prima costruiti. D'altronde l'integrale $w_{p+\delta_1+r}$ ha nulli i periodi ciclici del 1^o gruppo ed uguali agli elementi della r-esima riga di Ω_2 quelli del 2^o gruppo.

In conclusione si sono ottenuti δ_2 integrali di 2^a specie $w_{p+\delta_1+h}$ $(h = 1, \dots, \delta_2)$ i cui periodi ai cicli del 1^0 gruppo son nulli e quelli ai cicli del 2^0 gruppo formano la matrice Ω_2. E il risultato vale anche se $\rho = 0$, cioè se la matrice Ω_2 è nulla, perchè allora i predetti integrali $w_{p+\delta_1+h}$ si riducono a δ_2 funzioni razionali del punto di V_p', scelte genericamente.

Passiamo alla matrice Ω_1 e agl'integrali di 3^a specie. Qui il ragionamento diviene particolarmente delicato per la indeterminazione che gl'interi m, n lasciano nell'espressione (77) dei periodi, ai cicli del 2^0 gruppo, di un integrale semplice di 3^a specie di V_p' avente due varietà logaritmiche pure (algebricamente equivalenti) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Ma le considerazioni dell'Oss. 2^a del n. 49, relative alle funzioni quasi abeliane speciali e la loro illustrazione nel caso delle funzioni quasi iperellittiche (n. 50), nonchè le considerazioni già esposte (nel n. 51) illuminano la via che dobbiamo percorrere in generale.

Per aver da fare con integrali di 3ª specie con periodi ciclici della forma

$$(97) \qquad \Delta_h = l d_p \ (a_h - b_h) \ ,$$

eliminando dunque gl'interi m, n, che figurano nella (77), occorre passare ad integrali del tipo $\log Q$, considerato nel n. 51. Dicemmo allora che anche gl'integrali di 3ª specie di questo tipo posson considerarsi normali (e noi proprio di integrali normali abbiamo bisogno per poter far capo alla matrice $|O\ \Omega_1|$, ma rispetto ad un sistema di cicli diverso da quello di partenza. È il momento di stabilire quest'asserzione.

Dicansi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{\delta_1}$ i cicli (nulli) che dànno i periodi polari dei costruendi integrali di 3ª specie, mediante i quali si forma la matrice parziale B della (40), che ha nulli tutti gli elementi, salvo quelli della diagonale principale, uguali a $2\pi i$. E sia

$$(98) \qquad \omega_{p+j.1}\ , \ \omega_{p+j.2}\ , \ldots , \ \omega_{p+j.p} \qquad\qquad (j = 1, 2, \ldots, \delta_1)$$

la j-esima orizzontale della matrice Ω_1; orizzontale alla quale va associato il ciclo ε_j, lungo cui il costruendo integrale w_{p+j} deve dare il periodo $2\pi i$. Ad j supponiamo assegnato un valore fisso, che però continueremo a chiamare j, per semplicità di notazione.

Se la riga (98) è nulla si assumerà un'arbitraria funzione razionale K_{p+j}, avente le varietà zero e polare $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, e si porrà

$$w_{p+j} = \log K_{p+j} \ .$$

Come ciclo ε_j si prenderà un ciclo nullo circondante un punto generico di $\mathfrak{A}$. E così si saranno soddisfatte le condizioni in ordine all'orizzontale fissata.

Se la riga (98) non è nulla, si scelgano due gruppi di numeri a_{hj}, b_{hj} (il gruppo b_{hj} si può p. es. assumere tutto di zeri), tali che

$$(99) \qquad a_{hj} - b_{hj} = \frac{\omega_{p+j,h}}{l\,d_p} \qquad (h = 1, \dots, p\,;\; j = 1, \dots, \delta_1)\;;$$

e si ponga:

$$Q_j = \frac{\varphi(u_1 - a_{1j}, \dots, u_p - a_{pj})}{\varphi(u_1 - b_{1j}, \dots, u_p - b_{pj})}\;,$$

ove φ è una generica funzione intermediaria su V_p' (p. es. una Θ_{ldp}), il numeratore e il denominatore di Q_j annullandosi semplicemente sulle varietà algebricamente equivalenti distinte $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$. Si assuma inoltre come ciclo ε_j un ciclo nullo circondante un punto generico di $\mathfrak{A}_j$. Si può allora costruire (nel modo indicato nel n. 44) un integrale semplice di 3^a specie w_{p+j} di V_p', avente le varietà logaritmiche pure $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$, coi periodi polari $+2\pi i$, $-2\pi i$ e coi periodi nulli ai cicli del 1^o gruppo, tale che, designato con $\overline{\omega}_{p+j,h}$ il periodo di w_{p+j}, al ciclo σ_h, risulta, in virtù delle (77), (99):

$$(100) \qquad \overline{\omega}_{p+j,h} = \omega_{p+j,h} + \sum_{s=1}^{p} m_{sj}\, d_s\, \omega_{sh} + 2\, n_{hj}\, \pi\, i\,^{(1)} \qquad (h = 1, \dots, p)$$

ove gli m, n son interi dipendenti dalla φ prescelta e dalla costruzione di w_{p+j}.

Sugl'integrali

$$u_1\,, u_2\,, \dots, u_p\,, w_{p+j}\,, w_{p+\delta_1+1}\,, \dots, w_{p+\delta}$$

---

(1) Non è escluso che le $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ possano essere linearmente equivalenti e quindi che log Q_j possa ridursi, a meno di un integrale di 1^a specie, al logaritmo d'una funzione razionale; ciò accade quando $\overline{\omega}_{p+j,h}$ risulta nullo [ved. la formula (80) del n. 51].

finora costruiti, si esegua la sostituzione lineare non degenere:

$$(101) \qquad u_h' = u_h \ (h = 1, \dots, p), \ w'_{p+\delta_1+k} = w_{p+\delta_1+k} \ (k = 1, \dots, \delta_2),$$

$$w'_{p+j} = w_{p+j} - \sum_{s=1}^{p} m_s d_s u_s .$$

Con ciò, a norma della (79), risulta:

$$w'_{p+j} = \log Q_j ;$$

ma il nuovo integrale di 3ª specie w'_{p+j} ha sul ciclo σ_h $(h=1, \dots, p)$ il periodo che vi possiede $-\Sigma m_{sj} d_s u_s$ cioè $-2\pi i \, m_{hj}$, sicchè, sostituendo a σ_h il ciclo $\sigma_h + m_{hj} \varepsilon_j$, l'integrale w'_{p+j} ha periodo nullo nel nuovo ciclo. Sul ciclo σ_{p+h} associato a σ_h l'integrale w'_{p+j} ha il periodo:

$$\bar{\omega}_{p+j.h} - \sum_{s=1}^{p} m_{sj} d_s \omega_{sh} = \omega_{p+j.h} + 2\pi i n_{hj} ;$$

onde sostituendo a σ_{p+h} il ciclo $\sigma_{p+h} - n_{hj} \varepsilon_j$, l'integrale w'_{p+j} ha il periodo $\omega_{p+j,h}$ al nuovo ciclo.

Ora la sostituzione lineare a coefficienti interi

$$(102) \quad \sigma_{hj} \sim \sigma_h + m_{hj} \varepsilon_j, \ \sigma'_{h+p\,j} \sim \sigma_{h+p} - n_{hj} \varepsilon_j \ (h = 1, \dots, p), \ \varepsilon_j' \sim \varepsilon_j ,$$

essendo unimodulare, muta il sistema di cicli normali $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2p}$ in un sistema $\sigma_1', \sigma_2', \dots, \sigma_{2p}'$ di cicli normali, ove σ'_{p+h} è associato a σ_h' come σ_{p+h} a σ_h.

Gl'integrali $u_1, u_2, \dots, u_p, w_{p+\delta_1+1}, \dots, w_\pi$ continuano ad esser normali anche rispetto ai cicli σ' (e questo è essenziale), perchè essi hanno valori nulli su ε_j.

La conclusione è che, date due varietà algebricamente equivalenti $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ su V_p', è possibile costruire un tal integrale semplice di 3ª specie w_{p+j} colle varietà logaritmiche pure $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ e i periodi polari relativi $2\pi i$, $-2\pi i$, avente inoltre periodi nulli ai cicli normali del 1º gruppo, che, mediante una sostituzione lineare non degenere (101) sulle u, w finora considerate e una sostituzione, lineare unimodulare a coefficienti interi (102) sui cicli σ, si passi ad un integrale semplice di 3ª specie $w'_{p+j} = \log Q_j$ godente di tutte le proprietà indicate per w_{p+j}, col solo scambio dei cicli σ coi nuovi cicli σ'. L'integrale $\log Q_j$ ha sui cicli σ' del 2º gruppo i periodi che avevamo prefissato, assumendoli uguali alla riga j-esima di Ω_1. Inoltre gl'integrali restanti u, w, non toccati dalla sostituzione, continuano ad esser normali rispetto ai σ'. Il nuovo integrale w'_{p+j} si chiamerà nel seguito w_{p+j} e i nuovi cicli σ' si chiameranno σ.

Dopo aver soddisfatto alle volute condizioni nei riguardi di una riga di Ω_1, per un dato valore j_1 di j, si passi ad un altro valore j_2 di j. E si ripeta il procedimento: cioè se la riga j_2-esima è nulla, si assumerà $w_{p+\delta_1+j_2}$ uguale al logaritmo di una funzione razionale. Però, onde esser sicuri che l'integrale di 3ª specie che si costruisce è linearmente indipendente dal precedente, si assumeranno le varietà logaritmiche del nuovo completamente distinte da quelle del precedente, cosicchè il nuovo ciclo ε_{j_2}, che s'introduce in relazione alla varietà logaritmica dove il costruendo integrale ha il periodo $2\pi i$, è irriducibile al ciclo ε_{j_1}, prima costruito, entro la varietà V_p', da cui sieno esclusi i punti delle varietà logaritmiche.

Se invece la riga j_2-esima non è nulla, si costruisca un integrale di 3ª specie w_{p+j_2} colle due varietà logaritmiche $\mathfrak{A}_{j_2}$ $\mathfrak{B}_{j_2}$ distinte dalle $\mathfrak{A}_{j_1}$, $\mathfrak{B}_{j_1}$, il cui periodo $\bar{\omega}_{p+j,h}$ sia legato agli elementi della orizzontale j_2-esima dalle relazioni (100), nelle quali si ponga $j=j_2$. S'intende che le $\mathfrak{A}_{j_2}$ $\mathfrak{B}_{j_2}$ son varietà logaritmiche pure per w_{p+j} che quest'integrale ha periodi nulli ai cicli σ' del 1º gruppo e che ha periodi $2\pi i$, $-2\pi i$ lungo $\mathfrak{A}_{j_2}$, $\mathfrak{B}_{j_2}$; infine che ε_{j_2} è un ciclo nullo circondante il punto generico di $\mathfrak{A}_{j_2}$. Dopo ciò si esegua la sostituzione seguente sugl'integrali:

$$(103)\qquad \begin{aligned} &u_h' = u_h \ (h = 1, \dots, p), \quad w'_{p+\delta_1+k} = w_{p+\delta_1+k} \ (k = 1, \dots, \delta_2) \\ &w'_{p+j_1} = w_{p+j_1} \ (= \log Q_{j_1}), \quad w'_{p+j_2} = w_{p+j_2} - \sum_{s=1}^{p} m_{sj_2} d_s u_s \,, \end{aligned}$$

e la sostituzione seguente sui cicli:

$$(104)\quad \sigma'_{hj_2} = \sigma_{hj_1} + m_{hj_2}\varepsilon_{j_2},\ \sigma'_{h+p,j_2} \sim \sigma_{h+p,j_1} - n_{hj_2}\varepsilon_{j_2}\ (h = 1, \ldots, p)\ .$$

$$\varepsilon_{j_1}' = \varepsilon_{j_1},\quad \varepsilon_{j_2}' = \varepsilon_{j_2}\ .$$

Così si passa ad un nuovo sistema di cicli normali σ', rispetto al quale continuano ad esser normali non soltanto gl'integrali di 1ª e di 2ª specie u, w, ma anche l'integrale di 3ª specie prima costruito w_{p+j_1}, perchè quest'integrale ha periodo nullo lungo il ciclo nullo ε_{j_1}, che non è concatenato colle varietà logaritmiche di w_{p+j_2}.

Si può in tal modo proseguire passando ad una terza orizzontale di Ω_1. Tutte le argomentazioni sono già dette. Basta soltanto aver cura che per ogni integrale di 3ª specie che s'introduce in relazione ad un'orizzontale di Ω_1, le nuove varietà logaritmiche sieno distinte dalle precedenti. Con ciò si ottengono δ_1 cicli nulli $\varepsilon_{j_1}, \varepsilon_{j_2}, \ldots, \varepsilon_{j\delta_1}$ tali che ognuno si può ridurre per continuità ad un punto senza traversare le varietà logaritmiche relative agli altri cicli, così che i periodi ai nuovi cicli ε, degl'integrali costruiti, formano la matrice B, che si voleva, e i δ_1 integrali di 3ª specie costruiti risultano linearmente indipendenti fra loro (perchè $B \neq 0$), dagli integrali di 2ª specie w (perchè hanno varietà logaritmiche pure) e dagli integrali di 1ª specie u (perchè hanno periodi nulli ai cicli normali del 1º gruppo).

Il terzo teorema d'esistenza è in tal modo dimostrato.

OSSERVAZIONE 1ª. — Percorrendo a ritroso le sostituzioni operate sugl'integrali e sui cicli si vede che *alla tabella* Ω_1, *si può sostituire una tabella i cui elementi* ω *sieno dati dalla* (100), *con* m, n *interi arbitrari, senza che muti il corpo* K *di funzioni quasi abeliane definito dalla matrice* (40).

OSSERVAZIONE 2ª. — Le varietà logaritmiche $\mathfrak{A}_j$, $\mathfrak{B}_j$ occorrenti per costruire l'integrale w_{p+j} ($j = 1, \ldots, \delta_1$), non sono individuate dagli elementi della riga j-esima di Ω_1, perchè restano arbitrarie le costanti a_{hj}, b_{hj} [sottoposte soltanto alle condizioni (99)] e la scelta della funzione intermediaria φ. La $\mathfrak{B}_j$, p. es., può essere scelta ad arbitrio; dopo ciò è individuato il sistema continuo completo $\}\mathfrak{B}_j\{$ a cui deve appartenere $\mathfrak{A}_j$ ed è determinata a meno di un esponenziale di 2^0 grado una $\varphi\ (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ che si annulli del 1^0 ordine sopra $\mathfrak{B}_j$, sicchè l'equazione di $\mathfrak{A}_j$ diviene:

$$\varphi\ (u_1 - a_{1j}, \ldots, u_p - a_{pj}) = 0\ ,$$

essendo così nulle tutte le b, epperò determinate le a_{hj} e quindi le $\mathfrak{B}_j$ attraverso le (99).

OSSERVAZIONE 3ª. — In base all'Osservazione 1ª si può imaginare che ogni vettore $(\omega_{p+j.1}, \omega_{p+j.2}, \ldots, \omega_{p+j.p})$, le cui componenti costituiscono la orizzontale j-esima di Ω_1, in quanto applicato all'origine O $(u_1 = u_2 = \ldots = u_p = 0)$ nello spazio S_{2p} rappresentativo delle variabili complesse $u_1, u_2, \ldots, u_p$, sia ricondotto, con sostituzioni lineari sulle variabili e sui periodi, le quali non mutano il corpo K, ad avere l'estremo N_j sul parallelepipedo P, dei periodi (anzi sulla regione R di P, che rappresenta la riemanniana di V_p'). Cioè:

Tutti i possibili corpi K relativi alla (40) *si ottengono anche limitando la variabilità degli elementi della matrice* Ω_1, *in guisa che ogni vettore rappresentante un'orizzontale di* Ω_1, *applicato all'origine, appartenga al parallelepipedo dei periodi di* $|A\ \Omega|$.

OSSERVAZIONE 4ª. — Il terzo teorema d'esistenza sembra a prima vista contraddire i risultati del n. 49, i quali lasciavano presumere che esistessero legami fra gli elementi delle matrici Ω_1, Ω_2. Ma in realtà contraddizione non v'è, perchè i legami che nel n. 49 trovammo come limiti delle relazioni fra i periodi degl'integrali di 1ª specie della curva $\overline{C}$, per $\overline{C} \to C$, per Ω_1, Ω_2 arbitrarie, sono tutti automaticamente soddisfatti (all'infuori beninteso di quelli fra i periodi degl'integrali di 1ª specie di C), atteso il modo di far derivare gl'integrali di 2ª e di 3ª specie dai loro periodi.

Invero, le relazioni (57) del n. 49 sono assorbite dalle relazioni (66) dello stesso n. 49 (Oss. 2ª), nel caso delle funzioni quasi abeliane speciali, e dalle (77) (n. 51) nel caso generale. E le (77) son appunto le relazioni sulle quali ci siamo poggiati per dimostrare l'arbitrarietà nella scelta di Ω_1.

Le (61) del n. 49 sono assorbite dalle (85) del n. 52, donde è derivata l'arbitrarietà nella scelta di Ω_2. Quanto al teorema di permutabilità (58), anch'esso è automaticamente soddisfatto; cioè si riduce ad un'identità, allorchè (come appunto si fa nel caso delle funzioni quasi abeliane speciali) si assumono a coppie di varietà logaritmiche di due integrali di 3ª specie $\log Q_r$, $\log Q_s$ le varietà $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{A}_{r}$; $\mathfrak{B}_s$, $\mathfrak{B}_s$ di uno stesso sistema continuo. Il sistema continuo di queste varietà si può infatti individuare (qualunque esso sia) annullando una φ, che sia una Θ_{ldp}, pari (p. es., nel caso delle funzioni speciali, una Θ di 1º ordine) (¹).

Allora il teorema di permutabilità riducesi all'identità:

$$\frac{\varphi(a_{1s}-a_{1r}, a_{2s}-a_{2r}, \ldots, a_{ps}-a_{pr})}{\varphi(b_{1s}-b_{1r}, b_{2s}-b_{2r}, \ldots, b_{ps}-b_{pr})}=$$

$$=\frac{\varphi(a_{1r}-a_{1s}, a_{2r}-a_{2s}, \ldots, a_{pr}-a_{ps})}{\varphi(b_{1r}-b_{1s}, b_{2r}-b_{2s}, \ldots, b_{pr}-b_{ps})}.$$

Quanto alle (63), (64) del n. 49, siccome esse si ottengono dal teorema di permutabilità con opportuni passaggi al limite, è chiaro senz'altro che conseguono della precedente identità.

OSSERVAZIONE 5ª. — Tutto quanto precede è relativo alla ipotesi $p>0$. Se $p=0$ le funzioni quasi abeliane si riducono puramente e semplicemente a funzioni razionali di $e^{u_1}, \ldots, e^{u_{\delta_1}}, u_{\delta_1+1}, \ldots, u_\pi$ e le matrici $|A\,\Omega|$, $|\Omega_1|$, $|\Omega_2|$ svaniscono.

(¹) [**17**, p. 166]. Il sistema continuo individuato dalla varietà di livello zero di una funzione intermediaria qualsiasi si può infatti determinare colla varietà zero di una Θ_{ld_p} corrispondente a $\mu_1=\mu_2=\ldots=\mu_p=0$; e questa è pari.

OSSERVAZIONE 6ª. — *La dimostrazione del terzo teorema d'esistenza è del tutto indipendente dall'ipotesi L.* Essa è vincolata soltanto all'ipotesi che la tabella dei periodi del dato corpo sia equivalente alla tabella normale (40). Pertanto, se negli sviluppi ulteriori della teoria si riescirà a dimostrare *a priori* che la tabella dei periodi primitivi di un corpo di funzioni quasi abeliane (sia pure sotto l'ipotesi ch'esse ammettano un teorema d'addizione) è sempre equivalente ad una matrice normale (40), tutta la teoria resterà svincolata dall'ipotesi *L*.

OSSERVAZIONE 7ª. — Il numero $2p+\delta_1$ dei periodi d'un corpo di funzioni quasi abeliane non supera il numero $\pi=p+\delta_1+\delta_2$ delle variabili allora e soltanto allora che $\delta_2 \geq p$. In particolare ciò accade sempre per $p=0$. Per $\delta_2=p$ il numero dei periodi è π.

Per $p=0$, il numero π delle variabili può assumere un valore qualunque ed il numero dei periodi può prendere uno qualsiasi dei valori da zero (funzioni razionali) al massimo π $(\delta_2=0)$.

Il numero dei periodi supera di q unità il numero delle variabili quando $\delta_2=p-q$.

OSSERVAZIONE 8ª. — Preso un determinante qualunque non nullo di ordine π come matrice dei periodi di un corpo di costruende funzioni di π variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ *a* π periodi, un'ovvia sostituzione lineare non degenere sulle u, riduce il determinante dei periodi ad un determinante avente diversi da zero, ed uguali a $2\pi i$, soltanto gli elementi della diagonale principale. Ne deriva che al costruendo corpo di funzioni appartengono le $e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots, e^{u_\pi}$, sicchè, se ci limita, come noi facciamo, alle funzioni ammettenti un teorema d'addizione, si cade nelle funzioni quasi abeliane corrispondenti a $p=\delta_2=0$. Nel caso generale, si ha da fare con tipi di funzioni considerate da COUSIN nella Memoria già citata del 1902 (p. 21).

Se poi il determinante ha la caratteristica $\rho<\pi$, una conveniente sostituzione lineare non degenere sulle u lo riduce al tipo (106) (n. 55); ma funzioni quasi abeliane di π variabili con π periodi corrispondenti a quest'ipotesi esistono soltanto quando $\rho = p$ e la matrice $|C\, \Omega_2'|$ è abeliana.

55. Determinazione dei moduli d'un corpo di funzioni quasi abeliane. Ulteriore riduzione della tabella normale dei periodi. — Nella matrice (40) appariscono come parametri variabili con continuità, per determinare un corpo di funzioni quasi abeliane, ammettente una tabella di periodi equivalente alla (40), i $\frac{p(p+1)}{2}$ periodi distinti della Ω, i $p\,\delta_1$ periodi arbitrari della Ω_1, e i $p\,\delta_2$ periodi arbitrari della Ω_2. A prima vista si direbbe dunque che il numero ν dei moduli del corpo K è uguale a

$$\frac{p(p+1)}{2} + p\delta \;. \tag{105}$$

Ma una tal conclusione presupporrebbe che ad un dato corpo K non possan corrispondere infinite matrici (40) costituenti un continuo. Dobbiamo dunque proporci prima il problema di cercare quali sono le possibili tabelle (40) equivalenti ad una genericamente data dello stesso tipo.

Una risposta parziale è stata data a questo problema nella dimostrazione del terzo teorema d'esistenza, ove abbiamo constatato (com'è stato avvertito dall'Oss. 1ª del n. prec.) che una data tabella (40) è equivalente a quella in cui gli elementi di Ω_1 son sostituiti dagli elementi espressi dalle (100), in quanto si passa alla nuova tabella con sostituzioni non degeneri sulle variabili e con sostituzioni unimodulari a coefficienti interi sui periodi.

Tali sostituzioni mutano la tabella *normale* di partenza in una tabella che è ancora *normale*; ed è questo l'essenziale, di fronte al nostro problema. Però le tabelle Ω_1 ottenute da una prefissata colle accennate operazioni *non costituiscono un con-*

tinuo. Invero, l'espressione di $\bar{\omega}_{p+j,h} - 2n_{hj}\pi i$ tratta dalle (100) si ottiene dal valore prefissato $\omega_{p+j,h}$ $(h = 1, \ldots, p)$ aggiungendo combinazioni lineari a *coefficienti interi m, indipendenti dall'indice h,* di p quantità complesse ed i determinanti di ordine p formati colle parti reali e colle parti imaginarie di queste quantità sono diversi da zero [**62**, pag. 257], sicchè i valori che se ne ricavano per gli elementi dell'orizzontale corrispondente a quel prescelto valore di j, al variare degli m, costituiscono un insieme privo di accumulazioni (al finito) (1) e l'aggiunta del numero $2n_{hj}\pi i$, dipendente dall'intero n_{hj} all'elemento h-esimo, conduce a p elementi $\bar{\omega}_{p+j,h}$, costituenti un insieme privo esso pure di accumulazioni.

Ma un'altra evidente sostituzione lineare sulle variabili trasforma la (40) in una tabella normale ed è quella che muta in sè ogni integrale di 1ª o di 3ª specie e opera una sostituzione lineare arbitraria non degenere sui soli integrali di 2ª specie. Infatti in questo modo gl'integrali normali di 2ª specie, caratterizzati dall'aver periodi nulli ai cicli normali del 1º gruppo, restano integrali normali di 2ª specie. La sostituzione indicata introduce nella tabella (40) δ_2^2 parametri variabili con continuità (gli elementi del modulo della sostituzione) sicchè intanto per questo solo fatto bisognerebbe ridurre di δ_2^2 unità il numero (105). Occorre però tener presente che (come risulta dalla dimostrazione del terzo teorema d'esistenza) fra i δ_2 integrali di 2ª specie ve ne sono soltanto $\rho(\leq p)$ essenzialmente trascendenti, ove ρ è la caratteristica della matrice Ω_2 e che, considerati ρ di questi integrali, tali che la caratteristica della matrice (di ρ orizzontali e di ρ verticali) formata dai loro periodi abbia

(1) Se una matrice a q verticali e $q' \geq q$ orizzontali è a elementi reali ed ha la caratteristica q, le combinazioni lineari a coefficienti interi delle sue colonne non possono rendersi infinitesime. Ciò dipende dal fatto che, preso un determinante d'ordine q non nullo della matrice e costruito in S_q il parallelepipedo i cui spigoli, uscenti dall'origine, hanno per componenti gli elementi delle verticali di quel determinante, i vertici della rete di parallelepipedi (congrui) da quello definita, non hanno accumulazioni (al finito). Se invece fosse $q' < q$ le combinazioni lineari predette potrebbero rendersi infinitesime [**13**, p. 130].

il valor massimo ρ, gli altri differiscono da funzioni razionali per combinazioni lineari dei precedenti. Ne segue che con una conveniente sostituzione lineare non degnere eseguita sugl'integrali di 2ª specie, $\delta_2 - \rho$ di essi riduconsi a funzioni razionali e con ciò $\delta_2 - \rho$ orizzontali della Ω_2 relativa alla nuova tabella (40) vanno a zero, mentre le altre formano una matrice parziale di caratteristica ρ.

Si osserverà a questo punto che *l'intero ρ è un nuovo carattere del corpo K cui spetta la matrice* (40) *o una matrice equivalente, ed è un carattere invariante per trasformazioni birazionali, come p, δ_1, δ_2, perchè esso denota il numero degl'integrali semplici di 2ª specie essenzialmente trascendenti, che sono invarianti pel gruppo continuo* Γ *annesso a K.*

Non è restrittivo supporre che la matrice non nulla di ρ orizzontali di Ω_2 sia quella delle prime ρ e che il determinante formato dalle prime ρ verticali di essa sia diverso da zero. Allora si posson determinare ρ combinazioni lineari, linearmente indipendenti, di $u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_{p+\delta_1+\rho}$, e sieno $u'_{p+\delta_1+1}, \ldots, u'_{p+\delta_1+\rho}$, tali che il determinante C dei loro periodi ai primi ρ cicli normali del 2^0 gruppo abbia nulli tutti gli elementi, tranne quelli della diagonale principale, che sieno uguali a $2\pi i$. Mediante la sostituzione lineare non degenere, che lascia immutate tutte le u, salvo le predette, le quali si mutano nelle u', la (40) vien sostituita da una tabella dello stesso tipo ove la matrice corrispondente ad Ω_2 (e che così continueremo a designare) è del tipo:

$$\Omega_2 = \begin{vmatrix} C & \Omega_2' \\ O & O \end{vmatrix}, \tag{106}$$

in cui Ω_2' è una matrice di ρ orizzontali e di $p-\rho$ verticali, ed Ω_2 riducesi alla

$$\Omega_2 = \begin{vmatrix} C \\ O \end{vmatrix} \tag{107}$$

quando, essendo $\delta_2 \geq p$ e $\rho = p$, viene a mancare la matrice Ω_2'.

Poichè la Ω_2', di ρ orizzontali e $p-\rho$ verticali, contiene $\rho\,(p-\rho)$ elementi (zero, quando ρ raggiunge il suo valore massimo p ed è perciò $\delta_2 \geq p$) così il numero ν dei parametri variabili con continuità nella (40), dopo la riduzione indicata, diviene non maggiore della somma dei numeri degli elementi di Ω, Ω_1, Ω_2, cioè

$$\nu \leqslant \frac{p\,(p+1)}{2} + p\,\delta_1 + \rho(p-\rho) \ .$$

In questa disuguaglianza vale il segno $=$ allora e soltanto allora che la tabella equivalente ad una data tabella (40) con Ω_2 ridotta (a seconda del caso) al tipo (106) o (107) non contenga parametri variabili con continuità. Dimostriamo che così è di fatto.

Ragioneremo per assurdo, supponendo dunque che le ω figuranti in Ω, Ω_1, ed eventualmente in Ω_2' (quando è $\delta_2 < p$) sieno funzioni continue di un parametro t [1], che diano per limiti gli elementi di T per $t \to 0$. Diciamo $\sigma_1, \ldots, \sigma_p, \sigma_{p+1}, \ldots, \sigma_{2p}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\delta_1}$ i $2p$ cicli normali e i δ_1 cicli nulli relativi alla tabella T data e alle variabili u; sieno $\sigma_1', \ldots, \sigma_p', \sigma'_{p+1}, \ldots, \sigma_{2p}'$, $\varepsilon_1', \ldots, \varepsilon'_{\delta_1}$ i cicli normali e i δ_1 cicli nulli relativi alla tabella T', funzione di t, equivalente alla T e tale che $\lim\limits_{t \to 0} T' = T$. Inoltre u' sieno le nuove variabili, inerenti alla T'.

Le u' son combinazioni lineari delle u (e viceversa queste di quelle); ma siccome le prime p delle u' hanno periodi nulli ai cicli ε' e periodi non tutti nulli ai cicli σ' normali del 1^0 gruppo, esse son integrali di 1^a specie di V_π epperò combinazioni lineari delle prime p delle u. Le ultime δ_2 delle u' son pure combinazioni lineari delle u, nelle quali non posson comparire gli integrali u di 1^a specie, perchè quelle u' hanno periodi nulli

(1) Se la cosa è possibile, si tratta di funzioni analitiche di un parametro complesso t, perchè le operazioni che fanno passare da una matrice normale alle matrici normali equivalenti sono analitiche, in quanto sostituiscono alle ω certe loro combinazioni lineari.

ai cicli σ' del 1^0 gruppo; nè vi posson comparire gl'integrali u di 3^a specie, perchè quelle u' hanno periodi polari nulli.

La sostituzione che porta le u nelle u' muta quindi integrali di 1^a e di 2^a specie in integrali di 1^a e di 2^a specie; e quindi essa agisce separatamente anche sugl'integrali di 3^a specie; cioè le u' di posti $p+1, \ldots, p+\delta_1$ son combinazioni lineari delle sole u occupanti i posti corrispondenti.

Esaminiamo la natura della sostituzione unimodulare a coefficienti interi dai cicli σ, ε ai cicli σ', ε'. Intanto i coefficienti di questa sostituzione devon esser funzioni continue di t e, siccome son numeri interi, restano costanti mentre $t \to 0$. Ma per $t=0$ si ottiene T: dunque la sostituzione da σ, ε a σ', ε' è l'identità. Sicchè ogni σ si muta in un ciclo lineare ad esso omologo in V_π ed ogni ε in un ciclo lineare ad esso omologo in $V_\pi - \overline{K}$, ove $\overline{K}$ sia l'insieme delle varietà logaritmiche degli u (e degli u').

Ne deriva che la sostituzione lineare da $u_1, u_2, \ldots, u_p$ ad $u_1', u_2', \ldots, u_p'$ è l'identità, perchè restano immutati i σ; e i cicli normali, dopo che si è fissato il valore dei periodi normali del 1^0 gruppo, costituenti in T, T' la stessa matrice A, individuano gl'integrali normali di 1^a specie. Si conclude che le matrici Ω sono identiche tanto in T che in T' (1).

È identica anche la sostituzione lineare da $u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots, u_{p+\delta_1}$ ad $u'_{p+1}, u'_{p+2}, \ldots, u'_{p+\delta_1}$. Invero, ogni ciclo ε resta immutato a meno di un'omologia in $V_\pi - \overline{K}$ e siccome esso è concatenato con una sola delle componenti di $\overline{K}$ e queste nel loro complesso restano inalterate, restano invariate, nella sostituzione dalle u alle u', le singole componenti di $\overline{K}$ (se no, un ε si muterebbe in un ciclo non omologo ad esso). Ma i singoli integrali normali di 3^a specie son individuati dai σ del 1^0 gruppo, dalle coppie (associate) di varietà

(1) Ciò costituisce un'altra dimostrazione del fatto già invocato che i moduli d'un corpo di funzioni abeliane a p variabili sono $\frac{p(p+1)}{2}$.

logaritmiche e dai periodi polari $+2\pi i$ e $-2\pi i$ in queste: dunque anche rispetto ad essi la sostituzione lineare considerata riducesi all'identità e le matrici Ω_1, son identiche in T, T'.

Rimangono gl'integrali di 2ª specie. Se son tutti funzioni razionali, la matrice Ω_2 svanisce identicamente nella T originaria e nella T', perchè la sostituzione lineare fra le u, u' muta integrali di 2ª specie in integrali di 2ª specie e quindi funzioni razionali in funzioni razionali. In questo caso dunque le matrici Ω_2 son identiche in T, T'. Se vi è qualche integrale normale di 2ª specie essenzialmente trascendente fra le u, vi è anche fra le u'; e viceversa. Sia $u'_{p+\delta+1}$ essenzialmente trascendente e denoti

$$u'_{p+\delta_1+1} = \lambda_1 u_{p+\delta_1+1} + \lambda_2 u_{p+\delta_1+2} + \dots + \lambda_{\delta_2} u_{p+\delta}$$

l'espressione dell'integrale u' considerato come combinazione lineare degli u di 2ª specie. Poichè $u'_{p+\delta_1+1}$, $u_{p+\delta_1+1}$ hanno il periodo $2\pi i$ al ciclo σ_{p+1}, mentre gli altri integrali di 2ª specie hanno ivi periodi nulli, risulta $\lambda_1 = 1$. Inoltre, siccome $u'_{p+\delta_1+1}$ e tutti gl'integrali $u_{p+\delta_1+1}, \dots, u_{p+\delta}$ hanno periodi nulli in σ_{p+2}, salvo $u_{p+\delta_1+2}$, che vi ha il periodo $2\pi i$, sarà $\lambda_2 = 0$. Similmente si vede che son nulle le altre λ sino a λ_ρ.

Esaminiamo che cosa accade delle altre λ. Risulta intanto:

$$u'_{p+\delta_1+1} = u_{p+\delta_1+1} + \lambda_{\rho+1} u_{p+\delta_1+\rho+1} + \dots + \lambda_{\delta_2} u_{p+\delta} \,,$$

ove gli ultimi $\delta_2 - \rho$ integrali $u_{p+\delta_1+\rho+1}, \dots, u_{p+\delta}$ son funzioni razionali.

Ma allora basta operare sulle u' la sostituzione lineare

$$u''_{p+\delta_1+1} = u'_{p+\delta_1+1} - \lambda_{\rho+1} u_{p+\delta_1+\rho+1} - \dots - \lambda_{\delta_2} u_{p+\delta} \,,$$

perchè si abbia:

$$u''_{p+\delta_1+1} = u_{p+\delta_1+1} \,,$$

senza che si alteri la matrice T'. Similmente pei successivi integrali di 2ª specie. Dunque le due matrici Ω_2 sono identiche in T, T'.

La conclusione è che se una matrice T' normale, del tipo fissato, è equivalente alla matrice T ed è funzione continua di un parametro, essa coincide addirittura con T. Si può pertanto enunciare il

TEOREMA DEI MODULI. *Sia K un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili, i cui interi caratteristici valgano p, δ_1, δ_2, ρ ($\pi = p + \delta_1 + \delta_2$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$, $\rho \leq p$) e la cui tabella dei periodi sia equivalente alla tabella normale* (40). *Allora K dipende da*

$$\nu = \frac{p(p+1)}{2} + p\delta_1 + \rho\,(p-\rho)$$

moduli variabili con continuità. Il corpo dipende anche naturalmente dai p interi d_1 ($=1$), d_2, . . . , d_p, divisori elementari della matrice abeliana $|A\ \Omega|$.

Inoltre:

La matrice normale (40) *è equivalente ad un tipo più circoscritto, in cui Ω_2 ha la forma* (106) *oppure* (107), *a seconda che $\delta_2 < p$ o $\delta_2 \geq p$.*

Si osserverà che *i moduli di K* (*e gl'interi da cui K dipende*) *sono moduli anche dal punto di vista delle trasformazioni birazionali,* perchè (n. 48) due corpi di funzioni quasi abeliane birazionalmente equivalenti coincidono.

Si osserverà inoltre che *i corpi che contengono il maggior numero di moduli, per p, δ_1, δ_2 dati, son quelli per cui* $\rho = E\left(\frac{p}{2}\right) = q$ se $\delta_2 < p$ *e* $\rho = p$ *se* $\delta_2 \geq p$. *Per tali corpi è rispettivamente:*

$$\nu = \frac{p(p+1)}{2} + p\delta_1 + p(p-q)\ , \qquad \nu = \frac{p(p+1)}{2} + p\delta_1\ .$$

Si avverta infine che anche il numero ρ' degl'integrali di 3^a specie le cui combinazioni lineari non si riducono mai prive di periodi ciclici [cioè (n. 56) la caratteristica della matrice Ω_1] è invariante per trasformazioni birazionali; però ρ' non figura nella formula che dà ν, perchè una sostituzione lineare omogenea non degenere sugl'integrali normali di 3^a specie muta questi in integrali normali soltanto s'essa muta in sè il determinante B, ossia s'essa medesima è identica. Ma, naturalmente, i corpi per cui ρ' è minore del suo valore massimo, che è δ_1 per $\delta_1 < p$ e p per $\delta_1 \geqslant p$, dipendono da meno di ν moduli e precisamente da $\nu - (p - \rho')(\delta_1 - \rho')$, essendo appunto $(p - \rho')(\delta_1 - \rho')$ il numero delle condizioni indipendenti che si pongono fra gli elementi di una matrice di p verticali e di δ_1 orizzontali volendo che abbia la caratteristica ρ' [**74**, p. 61].

56. Digressione sopra una riduzione degl'integrali semplici d'una varietà qualunque. — Per quanto non necessaria nel seguito, esponiamo qui, pei suoi collegamenti con alcuni risultati della presente Memoria, un'interessante riduzione degl'integrali semplici d'una varietà algebrica W_n, d'irregolarità superficiale p.

Vicino al concetto d'integrali semplici di 2^a o di 3^a specie *linearmente indipendenti*, indicato nel n. 38, si pone anzitutto il concetto di *integrali distinti* delle medesime specie.

Più integrali di 2^a specie si dicono *distinti* quando son linearmente indipendenti e inoltre una loro combinazione lineare a coefficienti costanti, non tutti nulli, non è mai una funzione razionale.

Più integrali di 3^a specie si diranno similmente *distinti* quando son linearmente indipendenti ed una loro combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli non è mai priva di periodi ciclici.

Non esiste un limite (finito) pel numero degl'integrali linearmente indipendenti di 2^a specie. Invero, un numero k qualunque di integrali di 2^a specie, che abbiano poli di 1^0 ordine in k punti distinti di una curva (per $n = 1$) o sopra k varietà irriducibili distinte (appartenenti ciascuna ad un sistema continuo almeno ∞^1) ad $n-1$ dimensioni di una W_n (per n qualunque), sono fra loro indipendenti, perchè una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli di quegl'integrali possiede sempre almeno una varietà polare epperò non si riduce ad un integrale di 1^a specie (o in particolare a una costante). Similmente non esiste un limite (finito) pel numero degli integrali di 3^a specie linearmente indipendenti, giacchè k integrali di 3^a specie aventi le singolarità logaritmiche nelle coppie A, B_1; A, B_2; ... ; A, B_k, ove $A, B_1, B_2, \dots, B_k$ sieno $k+1$ punti ($n=1$) o $k+1$ varietà ad $n-1$ dimensioni distinte, ma algebricamente equivalenti di una W_n, sono linearmente indipendenti, in quanto una combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli di quegl'integrali possiede sempre almeno una coppia di varietà logaritmiche e non si riduce quindi alla 2^a specie.

Per gl'integrali di 1^a specie il concetto d'integrali linearmente indipendenti coincide con quello d'integrali distinti ed esiste un limite pel numero degl'integrali linearmente indipendenti, che è l'irregolarità superficiale di W_n.

La stessa limitazione, se non vale per gl'integrali linearmente indipendenti, vale per gl'integrali distinti di 2^a specie ([1]). Nulla è noto in proposito per gl'integrali distinti di 3^a specie. È la questione che risolviamo in via preliminare qui.

Cominciamo dal caso d'una curva C di genere p, sulla quale sieno $u_1, u_2, \dots, u_p$ gl'integrali abeliani di 1^a specie, normali rispetto ad un prescelto sistema S di retrosezioni e $A, B_1, B_2, \dots, B_p$ $p+1$ punti distinti comunque fissati. Prendiamo ad arbitrio un determinante d'ordine p, non nullo, del quale sia $c_{h1}, c_{h2}, \dots, c_{hp}$ la h-esima orizzontale.

([1]) Ved. p. es. per le curve [**2**, p. 388], [**67**, p. 261] e per le superficie (e quindi anche per le varietà) [**59**, p. 47].

Se $p>1$, esistono certamente sulla riemanniana di C, p cammini d'integrazione da A a $B_1, B_2, \ldots, B_p$, tali che

$$(108) \qquad \int_A^{B_s} du_h = c_{hs} \qquad (h, s = 1, \ldots, p)\ ^{(1)}\ .$$

Se $p=1$, sicchè il determinante si riduce ad una costante c, fissato su C soltanto il punto A si può determinare B_1 in modo che

$$\int_A^{B_1} du = c\ ;$$

il che è lecito, a causa del teorema d'inversione, per una conveniente scelta del cammino d'integrazione.

Tanto per $p>1$, che per $p=1$, abbiamo dunque su C p cammini d'integrazione da A a $B_1, B_2, \ldots, B_p$, soddisfacenti alle (108).

Ciò posto, se le retrosezioni S incontrano qualcuno dei p cammini, il lemma di cui all'Oss. 2^a del n. 49, opportunamente esteso, consente di affermare l'esistenza di un sistema S' di retrosezioni, omologhe a quelle di S, che non incontrino nessuno dei p cammini predetti.

Gl'integrali u restano normali anche rispetto alle S' e non cambiano neppure i loro periodi normali. Costruiti, rispetto alle S', i p integrali normali di 3^a specie, $w_1, w_2, \ldots, w_p$ colle coppie di punti logaritmici puri A, B_1; A, B_2; $\ldots$; A, B_p, i loro periodi al ciclo normale h-esimo del 2^0 gruppo, in virtù delle (57), sono espressi dall'orizzontale h-esima del determinante dato. Ne deriva che nessuna combinazione lineare $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_p w_p$ degl'integrali costruiti, a coeffi-

(1) Ciò consegue dalla nota proprietà [**13**, p. 134] di un integrale abeliano di 1^a specie, sopra una curva di genere $p>1$, di assumere ogni valore finito, per dati estremi d'integrazione e per una conveniente scelta del cammino che li congiunge.

cienti λ non tutti nulli, può ridursi a non avere periodi ciclici; chè, in caso contrario, risulterebbe:

$$\lambda_1 c_{h1} + \lambda_2 c_{h2} + \dots + \lambda_p c_{hp} = 0 \qquad (h = 1, \dots, p) \ ,$$

in quanto la combinazione stessa avrebbe periodi nulli ai cicli normali del 2^0 gruppo. Di più gl'integrali $w_1, w_2, \dots, w_p$ son linermente indipendenti, per l'osservazione sopra fatta.

Se ora si considera un altro integrale normale di 3^a specie w, avente i punti logaritmici puri P, Q (disposti comunque rispetto agli A, B), e sono $c_1, c_2, \dots, c_p$ i suoi periodi ai cicli normali del 2^0 gruppo (inerenti alle retrosezioni S'), poichè le equazioni:

$$\lambda_1 c_{h1} + \lambda_2 c_{h2} + \dots + \lambda_p c_{hp} = c_h \qquad (h = 1, \dots, p)$$

posseggono soluzioni univocamente determinate $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ (non tutte nulle), l'integrale di 3^a specie, avente periodi nulli ai cicli normali del 1^0 gruppo

$$w - \lambda_1 w_1 - \lambda_2 w_2 - \dots - \lambda_p w_p \ .$$

ha periodi nulli anche ai cicli normali del 2^0 gruppo, epperò non possiede periodi ciclici.

Il ragionamento esposto prova, nel caso $n = 1$, che *esistono p, ma non $p + 1$ integrali abeliani distinti di 3^a specie.*

La condizione necessaria e sufficiente perchè p integrali di 3^a specie sieno distinti è che la matrice dei loro periodi ciclici e quella dei loro periodi polari abbian separatamente la caratteristica p.

Invero, il fatto che esista una combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli dei p integrali, avente periodi ciclici nulli ed il fatto che la matrice dei $2p$ periodi ciclici abbia caratteristica $< p$ si equivalgono; come si equivalgono il fatto che esista una combinazione lineare a coefficienti costanti non tutti nulli dei p integrali, avente periodi polari nulli (cioè ridotta ad un integrale di 2^a specie) ed il fatto che la matrice dei periodi polari abbia caratteristica $< p$.

Avviciniamo ora queste osservazioni ai teoremi classici secondo cui:

a) p integrali abeliani indipendenti di 1ª specie insieme a p integrali di 2ª specie aventi ciascuno un polo di 1° ordine in un punto di un gruppo non speciale di p punti di C, formano un sistema fondamentale per la totalità degl'integrali di 2ª specie di C, ossia ogni tal integrale uguaglia una combinazione lineare dei precedenti, a meno di una eventuale funzione razionale addittiva (1);

b) preso un qualunque integrale abeliano (di 3ª specie) w di C, le cui singolarità logaritmiche cadano nei punti distinti $A_1, A_2, \ldots, A_q$ e costruiti $q-1$ integrali normali di 3ª specie aventi singolarità logaritmiche pure nelle coppie di punti $A_1, A_q; A_2, A_q; \ldots; A_{q-1}, A_q$ esso differisce da una combinazione lineare di questi $q-1$ integrali e dei precedenti $2p$, di 1ª e di 2ª specie, per un'eventuale funzione razionale additiva (2).

Il teorema *b*) è scarsamente significativo, perchè, mentre in *a*) gl'integrali della combinazione lineare sono indipendenti dall'integrale di 2ª specie che si vuol mediante essi esprimere, in *b*) gl'integrali di 3ª specie della combinazione lineare, per semplici che sieno, dipendono nella posizione delle loro singolarità e nel loro numero, dall'integrale da esprimersi.

Le considerazioni sviluppate in questo numero consentono di determinare maggiormente il teorema *b*) come segue:

Un integrale abeliano qualunque sopra una curva C di genere p, a meno di un additivo integrale privo di periodi ciclici, si esprime sempre con una combinazione lineare a coefficienti costanti di $3p$ integrali prefissati di C, dei quali p (indipendenti o distinti) di 1ª specie; p (distinti) di 2ª specie e p (distinti) di 3ª specie (3).

---

(1) Ved. per es. [67, p. 262].

(2) Ved. p. es. [2, p. 342].

(3) Se $p=0$ ogni integrale abeliano è privo di periodi ciclici ed è allora elementare che si riduce ad una combinazione razionale-logaritmica.

Invero, se w è il dato integrale e si tien conto di b) i $q-1$ integrali di 3ª specie si posson esprimere ciascuno con una combinazione lineare dei p integrali di 3ª specie $w_1, w_2, \ldots, w_p$ sopra costruiti e ne segue senz'altro il teorema.

La condizione necessaria e sufficiente perchè i 3 p integrali servano allo scopo, è che il determinante dei periodi ciclici dei 2 p integrali di 1ª e di 2ª specie, la matrice dei periodi ciclici dei p integrali di 3ª specie e la matrice dei periodi polari di questi ultimi, sieno diversi da zero.

Ciò consegue immediatamente da quanto si è finora detto.

L'osservazione che gioca in modo essenziale nelle predette deduzioni è in fondo soltanto quella che concerne l'esistenza di p integrali di 3ª specie distinti su C.

Come preparazione all'estensione alle varietà, che si presenterebbe non facile per la via seguita nel caso $n=1$, mostriamo in qual modo si possa stabilire altrimenti l'osservazione fondamentale, a partire dall'analoga proprietà della varietà di Jacobi V_p inerente a C.

Su V_p si assumano p integrali w_{p+j} semplici di 3ª specie del tipo (88), ove sia $j=1, 2, \ldots, p$ e le a_{sj}, b_{sj} sieno costanti generiche tali che le $\omega_{p+j.s}$, date dalle (89), formino un determinante non nullo di ordine p ($j, s=1, 2, \ldots, p$) (n. 53, Oss. 2ª). Le $\omega_{p+j.s}$ sono allora periodi normali degl'integrali w_{p+j} rispetto ai cicli del 2º gruppo, di un conveniente sistema di cicli normali di V_p, che si può supporre costruito sopra una curva $\overline{C}$ di genere p di V_p, birazionalmente equivalente alla data (p. es. sopra la imagine delle p-ple di punti di C con un punto fisso) (n. 49, Oss. 2ª; n. 53, Oss. 2ª). Dopo ciò gl'integrali subordinati da w_{p+j} su $\overline{C}$ sono fra loro linearmente indipendenti (perchè hanno singolarità logaritmiche diverse l'uno dall'altro) e distinti, perchè i loro periodi normali del 2º gruppo formano un determinante non nullo.

Il ragionamento si estende ad una V_p di Picard considerando ivi p integrali semplici di 3ª specie del tipo (79) (n. 51), tenuto conto delle argomentazioni che nel n. 54 si riferiscono ai periodi normali di integrali di questo tipo [ved. la formula (97) e la sua interpretazione].

Così sopra una V_p di PICARD esistono p integrali semplici di 3ª specie normali distinti $w_1, w_2, \ldots, w_p$, le cui varietà logaritmiche sono p coppie di varietà a $p-1$ dimensioni tolte da un medesimo sistema continuo [p. es. quello rappresentato dall'uguagliare a zero la $\Theta_{ldp}(u_1+c_1, u_2+c_2, \ldots, u_p+c_p)$, al variare dei parametri c]. Anzi, siccome i valori delle costanti $b_1, b_2, \ldots, b_p$ che figurano nella (79), posson essere fissati una volta per sempre, p. es. coll'assumerli tutti uguali a zero, e si posson poi identificare le $a_1, a_2, \ldots, a_p$ colle righe di un determinante non nullo di ordine p, cosicchè, a sensi della (97), i periodi normali del 2^0 gruppo spettanti ai p integrali considerati, differiscono dagli elementi di quelle righe pel coefficiente intero costante ld_p, ne viene che le coppie di varietà logaritmiche pure dei p integrali distinti $w_1, w_2, \ldots, w_p$ posson assumersi in guisa che contengano una varietà fissa $\mathfrak{A}$ del sistema continuo prescelto $\{\mathfrak{A}\}$, l'altra varietà $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p$ delle singole coppie appartenendo allo stesso sistema.

A questo punto ricordiamo un teorema, da me dato altrove [**65**, p. 211], secondo cui una varietà algebrica qualunque W_n d'irregolarità superficiale $p>0$ o contiene un sistema involutorio ∞^{n-h} $(1\leq h\leq n-1)$ di irregolarità superficiale p, costituito da varietà ad h dimensioni (e ciò accade sempre, se $p<n$), oppure essa o una sua involuzione di gruppi di punti è birazionalmente identica ad una varietà Φ_n tracciata sulla V_p di PICARD, inerente a W_n.

Nel caso in cui W_n è birazionalmente equivalente a una Φ_n di V_p, poichè un sistema di $2p$ cicli normali di V_p si può costituire mediante un sistema di $2p$ cicli normali di Φ_n, gli integrali $w_1, w_2, \ldots, w_p$ ottenuti su V_p, subordinano sopra Φ_n altrettanti integrali semplici di 3ª specie, i cui periodi ai cicli normali del 1^0 gruppo formano un determinante non nullo.

Le varietà logaritmiche pure di questi integrali sopra Φ_n sono le coppie di varietà $(\mathfrak{A}, \Phi_n)$, $(\mathfrak{A}_1, \Phi_n)$; ... ; $(\mathfrak{A}, \Phi_n)$,

$(\mathfrak{A}_p, \Phi_n)$. Gl'integrali risultan linearmente indipendenti, perchè una loro combinazione lineare a coefficienti non nulli ha sempre almeno una varietà logaritmica; e sono distinti, perchè è diverso da zero il predetto determinante. Se ora si prende un qualunque integrale (di 3ª specie) w di Φ_n — cioè di W_n — si può, in primo luogo, determinare una combinazione lineare $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_p u_p$ di p integrali di 1ª specie $u_1, u_2, \ldots, u_p$ di Φ_n, che abbia sui cicli normali del 1º gruppo gli stessi periodi di w, sicchè $w - \lambda_1 u_1 - \ldots - \lambda_p u_p$ ha periodi nulli ai cicli normali del 1º gruppo; eppoi si può determinare una combinazione lineare $\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_p w_p$ degl'integrali di 3ª specie $w_1, w_2, \ldots, w_p$ sopra Φ_n, che abbia gli stessi periodi ciclici di $w - \lambda_1 u_1 - \lambda_2 u_2 - \ldots - \lambda_p u_p$ sui cicli normali del 2º gruppo, sicchè $w - \lambda_1 u_1 - \ldots - \lambda_p u_p - \mu_1 w_1 - \ldots - \mu_p w_p$ non ha periodi ciclici.

E si giunge così sopra Φ_n, cioè sopra W_n, al teorema analogo a quello dimostrato per gl'integrali abeliani di una curva.

Se Φ_n è birazionalmente equivalente ad un'involuzione di gruppi di punti su W_n, la trasformazione razionale da Φ_n a W_n muta gli integrali distinti di 3ª specie subordinati da $w_1, w_2, \ldots, w_p$ su Φ_n in altrettanti integrali distinti di 3ª specie di W_n e si conclude ancora come sopra.

Se infine W_n contiene un sistema involutorio ∞^{n-h} d'irregolarità superficiale p, gl'integrali semplici di W_n son costanti lungo le varietà del detto sistema; cioè son trasformati razionali degli integrali semplici di una varietà W'_{n-h}, di dimensione minore, ma di uguale irregolarità superficiale. Ammesso il teorema che abbiamo in vista per le varietà di dimensione $< n$ (cosa lecita, perchè è già stato dimostrato per $n = 1$), ne segue che in W'_{n-h} posson costruirsi p integrali semplici di 3ª specie distinti (in modo analogo a quanto si è fatto sopra per Φ_n), i quali dànno luogo a p integrali semplici di 3ª specie distinti sopra W_n. In conclusione:

Sopra una varietà algebrica W_n, di dimensione n e d'irregolarità superficiale p, ogni integrale semplice si riduce ad un *integrale privo di periodi ciclici, aumentato di una combinazione lineare a coefficienti costanti di $3p$ integrali, fissati una volta per sempre: p integrali indipendenti di 1ª specie, p integrali distinti di 2ª specie, p integrali distinti di 3ª specie.*

Se $p = 0$, cioè se la varietà è superficialmente regolare, ho dimostrato fin dal 1906 [**61**, p. 210] (per le superficie, ma con ragionamento d'immediata estensione alle varietà), che ogni integrale semplice della varietà, il quale è in questo caso privo di periodi ciclici, riducesi ad una combinazione razionale-logaritmica (proprietà stabilita più tardi altrimenti da PICARD). Nel caso $p > 0$, già per $n = 1$ si presenta il problema di riconoscere quand'è che un integrale privo di periodi ciclici riducesi ad una combinazione razionale logaritmica.

Un complemento notevole possiamo arrecare alla questione, per ciò che concerne le varietà di dimensione $n \geqslant 2$, provando che:

Sopra una qualunque varietà algebrica W_n ($n \geq 2$) un integrale semplice di 3ª specie privo di periodi ciclici, le cui varietà logaritmiche sieno semplicemente legate, si riduce ad una combinazione razionale-logaritmica (e precisamente alla somma di una funzione razionale e del logaritmo d'una funzione razionale, moltiplicato per un'eventuale costante).

Invero, se le varietà logaritmiche $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ del dato integrale w sono semplicemente legate ed è

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_t C_t \equiv \mu_{t+1} C_{t+1} + \ldots + \mu_\tau C_\tau$$

il loro legame algebrico, colle λ, μ interi positivi non tutti nulli, i periodi polari di w inerenti a $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ son rispettivamente proporzionali a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t, -\mu_{t+1}, -\mu_{t+2}, \ldots, -\mu_\tau$ (n. 39). Sia $2\pi ik$ ($k \neq 0$) il coefficiente di proporzionalità.

Scelta in W_n una curva (generica) D costruiamo su essa un sistema di cicli normali di W_n [**62**, p. 262]. Poichè w ha periodi nulli ai cicli normali del 1º gruppo, i suoi periodi ω_h ai cicli normali del 2º gruppo son dati dalla formula (n. 48)

$$\omega_h \equiv u_h\ [(\mathfrak{A}, D)] - u_h\ [(\mathfrak{B}, D)] \qquad (h = 1, \ldots, p),$$

ove si sono indicate con $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ le varietà costituenti il primo ed il secondo membro della precedente equivalenza algebrica ed

$$u_h[(\mathfrak{A}, D)], \; u_h[(\mathfrak{B}, D)]$$

son le somme dei valori che l'integrale normale di 1ª specie u_h di W_n assume nei punti dei gruppi $(\mathfrak{A}, D)$, $(\mathfrak{B}, D)$. Siccome per ipotesi $\omega_h = 0$, risulta:

$$u_h[(\mathfrak{A}, D)] \equiv u_h[(\mathfrak{B}, D)] \qquad (h = 1, \ldots, p).$$

Tanto basta per affermare, in base ad una proprietà da me dimostrata per le superficie [**62**, n. 9] con procedimento estensibile alle varietà, che esiste un intero d (≥ 1) tale che le varietà $d\mathfrak{A}$, $d\mathfrak{B}$ risultano linearmente equivalenti.

Consideriamo la funzione razionale ψ, del punto di W_n, che ha le varietà $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ come varietà polari e zero di ordine d. I periodi polari di $\log \psi$ lungo $C_1, C_2, \ldots, C_t, C_{t+1}, \ldots, C_\tau$ son allora rispettivamente uguali a

$$2\pi i\lambda_1 d, \; 2\pi i\lambda_2 d, \ldots, 2\pi i\lambda_t d, \; -2\pi i\mu_{t+1} d, \ldots, -2\pi i\mu_\tau d;$$

epperò l'integrale semplice $w - \frac{k}{d}\log\psi$ non ha più alcuna singolarità logaritmica; onde esso non possiede più alcun periodo, nè ciclico nè polare e riducesi pertanto ad una funzione razionale.

Ecco ora un altro contributo al problema [1] di riconoscere quand'è che un integrale privo di periodi ciclici riducesi ad una combinazione razionale-logaritmica.

Sia $n \geq 1$. Fissata in W_n la curva (generica) D, come sopra (D coincide con C, se $n = 1$) e designati con $u_1, u_2, \ldots, u_p$

[1] Del quale alcuni contributi trovansi già in [**2**, p. 354 e segg.].

gl'integrali di prima specie di W_n normalizzati rispetto ai cicli normali della varietà, scelti su D, diremo che un gruppo di interi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\tau$ positivi, negativi o nulli, ma non tutti nulli, è un *gruppo intero di periodi* inerente alle varietà $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$, quando son soddisfatte le condizioni

$$(109) \quad \lambda_1 u_h[(C_1, D)] + \lambda_2 u_h[(C_2, D)] + \ldots + \lambda_\tau u_h[(C_\tau, D)] \equiv 0 \qquad (h = 1, \ldots, p).$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè un integrale semplice di terza specie w di una qualunque varietà algebrica W_n ($n \geq 1$) riducasi ad una combinazione razionale-logaritmica, è che il gruppo dei suoi periodi polari sia combinazione lineare di un numero finito di gruppi interi di periodi inerenti alle stesse varietà logaritmiche.

La condizione è necessaria. Invero se è

$$w = R + k_1 \log R_1 + k_2 \log R_2 + \ldots + k_s \log R_s ,$$

ove $R_1, R_2, \ldots, R_s$ son funzioni razionali del punto di W_n e $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ son complessivamente le loro varietà logaritmiche, designati con $\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \ldots, \lambda_{j\tau}$ gli ordini di R_j in $C_1, C_2, \ldots, C_\tau$ (1), i periodi polari di R lungo le varietà stesse sono

$$(110) \quad 2\pi i \lambda_{j1}, 2\pi i \lambda_{j2}, \ldots, 2\pi i \lambda_{j\tau} \qquad (j = 1, \ldots, s),$$

epperò i periodi di w vengono espressi da

$$(111) \quad \theta_h = 2\pi i \sum_{j=1}^{s} k_j \lambda_{jh} \qquad (h = 1, \ldots, p).$$

(1) Se λ è positivo o negativo, vuol dire che R_j nella corrispondente C diviene rispettivamente nulla d'ordine λ o infinita d'ordine $-\lambda$; se $\lambda = 0$ sulla corrispondente C la R_j non si annulla nè diviene infinita.

Di più essendo sopra D:

$$\lambda_{j1}[C_1, D] + \lambda_{j2}[C_2, D] + \ldots + \lambda_{j\tau}[C_\tau, D] \equiv 0 ,$$

sono soddisfatte dalle λ le condizioni (109).

La condizione è sufficiente. Supposto invero soddisfatte per i periodi di w le (111), ove le λ di dato indice j sono interi verificanti le (109), pel criterio di equivalenza sopra ricordato risulta

$$\lambda_{j1} C_1 + \lambda_{j2} C_2 + \ldots + \lambda_{j\tau} C_\tau \equiv 0 \qquad (j = 1, \ldots, s) ,$$

Esiste cioè una funzione razionale R_j (definita a meno di un fattore costante, qui irrilevante), tale che $\log R_j$ ha i periodi polari (110), epperò

$$w - \sum_{j=1}^{s} k_j \log R_j$$

non ha nè periodi ciclici nè periodi polari e si riduce ad una funzione razionale.

Esistono effettivamente integrali di 3ª *specie privi di periodi ciclici e non ridotti a combinazioni razionali-logaritmiche.* Un esempio si costruisce subito sopra una curva ellittica C. Scelgansi su C i punti A_1, A_2, A_3, ove l'integrale ellittico di 1ª specie u assume valori uguali o congrui ad 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e sieno $2\pi i$, $\omega = \omega' + i\omega''$ i periodi di u. Poichè variando C nella classe delle curve ellittiche, ω può assumere un valore arbitrario sotto la sola condizione $\omega' \neq 0$, potremo per es. prendere $\omega' = \omega'' = 1$. Dico, dopo ciò, che i punti A_1, A_2, A_3, non possono essere legati da nessuna equivalenza lineare

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 \equiv 0$$

colle λ interi non tutti nulli ($\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$). Invero, una tale equivalenza darebbe

$$\lambda_1 + \lambda_2 \sqrt{2} + \lambda_3 \sqrt{3} = 2 m \pi i + n \omega ,$$

con m, n interi, e tenuto conto che $\omega = 1 + i$, viene:

$$2m\pi + n = 0 \;; \quad \text{e quindi} \quad m = n = 0 \;;$$

epperò supposto p. es. $\lambda_3 \neq 0$, risulta

$$\sqrt{3} = r + s\sqrt{2}$$

con r, s razionali: il che è assurdo. Dunque $\lambda_3 = 0$ e similmente $\lambda_2 = 0$, epperò $\lambda_1 = 0$.

La conclusione è che non esiste alcun gruppo intero di periodi inerenti ai punti A_1, A_2, A_3, e perciò non può esistere nessuna combinazione razionale-logaritmica avente come soli punti singolari questi tre.

Ciò posto, costruiti gl'integrali normali di 3ª specie w_1, w_2 relativi alle coppie logaritmiche A_1, A_2; A_1, A_3, i periodi di questi integrali al secondo ciclo normale saranno non congrui a $1-\sqrt{2}$, $1-\sqrt{3}$ e quindi l'integrale

$$w = (\sqrt{3} - 1)w_1 + (\sqrt{2} - 1)w_2$$

ha i punti logaritmici A_1, A_2, A_3, e periodi ciclici nulli, senza ridursi ad una combinazione razionale-logaritmica.

57. Problemi e osservazioni collegati colle teorie precedenti. — *a*) Un primo problema è quello di costruire una teoria dei *sistemi lineari neutri* sopra una varietà algebrica qualunque V_p. Riferiamoci per brevità alle superficie. Sia $\overline{F}$ una superficie di S_n priva di singolarità, la quale sia suscettibile di variare con continuità fino ad acquistare una curva doppia (ordinaria), raggiungendo una posizione limite F. Allora per la generica proiezione F' di F sopra S_3 vale il teorema proiettivo del resto in relazione alle *aggiunte neutre*, cioè alle superficie che passano pel limite della curva doppia della superficie $\overline{F'}$ variabile, proiezione generica di $\overline{F}$. Si può quindi par-

lare (in un primo momento dal punto di vista proiettivo) di sistemi lineari completi neutri rispetto alla linea doppia acquisita da F', la quale invariantivamente è una curva (generalmente irriducibile), possedente un'involuzione di 2^0 ordine, tale che ogni coppia di quest'involuzione è neutra rispetto ai sistemi lineari del campo neutro definito.

Curve siffatte sono necessariamente particolari sull'ente astratto F [ved. in proposito le successive considerazioni e)]; e non si esclude che trattisi di curve spezzate ciascuna in due componenti, in corrispondenza birazionale tale che le coppie di punti omologhi costituiscano le coppie neutre.

Circa una teoria dei sistemi lineari collegata coll'acquisto di punti doppi isolati da parte di una superficie variabile $\bar{F}$, priva di singolarità, veggasi quanto si dice alle fine di e).

b) Per una varietà quasi abeliana di JACOBI V_π, coppie di varietà a $\pi - 1$ dimensioni, in corrispondenza birazionale fra loro, rispetto alle quali si può costruire una teoria dei sistemi lineari neutri, ve ne sono senz'altro. Basta p. es. assumer come tali un numero finito di coppie di varietà appartenenti al sistema continuo ∞^π che contiene le varietà di V_π rappresentanti le π-ple di C con un punto fisso.

Anche sopra una V_π quasi abeliana qualunque si ottengono coppie analoghe di varietà mediante le trasformazioni di 1^a (o di 2^a) specie.

c) Le superficie tracciate sopra una V_p di PICARD, al variare di questa, sono praticamente tutte le superficie algebriche. Che cosa invece si può dire delle superficie tracciate sulle varietà quasi abeliane di rango 1?

d) È possibile aggiungere ai p integrali semplici di 1^a specie d'una superficie F ($p \geq 0$), δ_1 integrali semplici di 3^a specie e δ_2 integrali semplici di 2^a specie (δ_1, δ_2 interi arbitrari ≥ 0), in guisa che per certi sistemi lineari di curve di F valga, in relazione ai $p + \delta_1 + \delta_2$ integrali fissati, un teorema d'ABEL analogo a quello che dimostrai nel 1905 per tutti i sistemi lineari di F, in relazione agl'integrali di 1^a specie? Sembra probabile.

Se sì, ecco un altro modo molto interessante (e di cui bisogna determinare il significato geometrico) d'introdurre i sistemi lineari neutri. La questione va collegata colla *c*). Si veggan anche in proposito le successive considerazioni *e*).

e) Riguardiamo l'irregolarità (superficiale) delle superficie e varietà algebriche come analoga del genere d'una curva, in quanto l'una e l'altra uguagliano il numero degli integrali semplici di 1ª specie appartenenti all'ente considerato.

Come si sa, le superficie dello S_r e le ipersuperficie algebriche di dato ordine di un S_r, prive di punti multipli, hanno l'irregolarità nulla, onde superficie e ipersuperficie irregolari si presentano quali casi limiti di varietà regolari, in relazione all'acquisto, da parte di queste, di più o meno complesse singolarità [1].

Per le curve piane invece si verifica il fatto opposto: cioè quelle senza singolarità hanno genere massimo e via via che la curva, restando irriducibile, acquista nuove singolarità, il genere si abbassa fino ad annullarsi.

Il parallelismo tra le curve piane da una parte e superficie di S_3 e ipersupeficie di S_r dall'altra, si ristabilisce, fino ad un certo punto, assumendo come analogo del genere della curva il genere geometrico della superficie o varietà, col passare dunque agl'integrali di 1ª specie, di massima molteplicità.

La considerazione delle varietà quasi abeliane consente invece, pur restando nel campo degl'integrali semplici, di ristabilire in certa misura un'analogia fra curve da un lato e superficie e varietà dall'altro, nel senso che le varietà quasi abeliane offrono esempi di famiglie di varietà nelle quali quelle di minor irregolarità o addirittura regolari si presentan come limiti di enti di maggiore irregolarità, e la diminuzione dell'irregolarità avviene attraverso l'acquisto di nuove singolarità, come nel caso delle curve.

---

[1] A vero dire l'acquisto di singolarità può anche non introdurre irregolarità: anzi da un certo punto di vista questo è da considerarsi come il caso generale.

Una varietà quasi abeliana speciale V_π di genere effettivo p e di genere virtuale π, si presenta invero come limite di una varietà di JACOBI $\overline{V}_\pi$, d'irregolarità maggiore $(\pi > p)$. Che la particolarizzazione di V_π, quale limite di $\overline{V}_\pi$, consista, quando ci si riferisce a convenienti modelli proiettivi, nel mero acquisto di nuove singolarità, lo verificheremo, pel caso delle superficie, sopra un esempio.

Consideriamo la varietà ∞^2 delle coppie di punti di una quartica piana C e vediamo che cosa accade della varietà quando da una quartica C senza nodi, cioè di genere $p=3$, si passa ad una quartica C con un nodo $(p=2)$ o ad una C con due nodi $(p=1)$ o infine ad una C con 3 nodi $(p=0)$.

Come modello della varietà ∞^2 assumeremo la superficie F o rispettivamente F_1 o F_2 o F_3, che la rappresenta sul modello minimo M della varietà delle coppie di punti del piano: modello che si realizza nello S_5, assumendo i punti di S_5 a imagini delle coniche-inviluppo del piano. La M è l'ipersuperficie del 3^0 ordine di S_5, riempita dai piani tangenti (e dalle corde) della superficie di VERONESE Φ, imagine delle coniche-inviluppo ridotte ai punti del piano contati due volte [**5**, Cap. XVI]. La dimostrazione delle proprietà proiettive sotto indicate, di cui godon le superficie F, F_1, F_2, F_3, si ottiene ovviamente tenuto conto che un iperpiano di S_5 è imagine delle coniche-inviluppo di un sistema lineare d'inviluppi (p. es. delle coniche tangenti ad una retta data); che un S_3 è imagine delle coniche-inviluppo di un sistema lineare ∞^3 d'inviluppi (p. s. delle coniche tangenti a due rette date); ecc.

Così trovasi che le F (si sottintende, in particolare, anche le F_1, F_2, F_3), costituenti entro M un sistema di equivalenza (razionale) ∞^{14}, son superficie di 16^0 ordine; che una qualunque di esse non è segata da un piano tangente generico di Φ; mentre ogni F sega Φ (luogo di punti doppi cuspidali per M) lungo una curva dell'8^0 ordine birazionalmente equivalente a C (o C_1, C_2, C_3) e i piani tangenti di Φ che incontrano F, secondo quartiche piane, son soltanto quelli tangenti a Φ punti di quella curva; ecc.

La F relativa a C, non ha punti multipli, il suo genere geometrico vale $p_g = 3$, il genere aritmetico $p_a = 0$ e quindi l'irregolarità 3 (1). Essa non è quasi abeliana. Invece le F_1, F_2, F_3 son iperellittiche o quasi iperellittiche; F_1 è la superficie di Jacobi della curva C_1, di genere 2; F_2 è quasi abeliana di genere virtuale $\pi = 2$ e di genere effettivo $p = 1$; F_3 è quasi abeliana di genere virtuale $\pi = 2$ e di genere effettivo $p = 0$. Orbene, F_1 ha il genere geometrico $p_g = 1$, il genere aritmetico $p_a = -1$ e l'irregolarità 2; F_2 è birazionalmente equivalente ad una rigata ellittica (n. 50) ed ha perciò il genere geometrico $p_g = 0$, il genere aritmetico $p_a = -1$ e l'irregolarità 1; F_3 è razionale ed ha perciò $p_g = 0$, $p_a = 0$ e l'irregolarità 0.

Sicchè, nel sistema d'equivalenza delle F, la superficie generica ha l'irregolarità 3 e nei casi limiti F_1, F_2, F_3 l'irregolarità scende ai valori 2, 1, 0.

Orbene, *questo successivo abbassarsi dell'irregolarità corrisponde all'acquisto di nuove linee doppie*. Precisamente: la superficie F_1 ha come doppia la curva delle imagini delle coppie con un punto fisso nel nodo di C_1 ed un punto variabile su C_1: curva del 4^0 ordine (situata nel piano che tocca Φ nell'imagine del nodo); la superficie F_2 ha come doppie le quartiche piane analoghe, relative ai due nodi; la superficie F_3 le quartiche piane analoghe relative ai tre nodi.

Da osservarsi altresì che *il genere geometrico si abbassa di due unità per l'acquisto della prima quartica doppia; di una unità per l'acquisto della seconda; e rimane immutato per l'acquisto della terza; invece il genere aritmetico si abbassa di un'unità per l'acquisto della prima quartica doppia; non si abbassa ulteriormente per l'acquisto della seconda e cresce di una unità per l'acquisto della terza!*

---

(1) Ved. Severi, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti d'una curva algebrica* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. 38, 1903).

Un'ultima osservazione relativa alle superficie F_1, F_2, F_3 è che le linee doppie corrispondenti ai singoli nodi delle curve C_1, C_2, C_3, dal punto di vista della geometria nell'ente, risultano dalla sovrapposizione di due curve distinte (birazionalmente equivalenti) origini di due diverse falde: sono due curve del sistema continuo ∞^1 che su ogni superficie è costituito dalle imagini delle coppie con un punto fisso in C_1 o rispettivamente in C_2, C_3 (1).

Gl'integrali semplici di 1ª specie, che successivamente si perdono nel passaggio da F ad F_1, F_2, F_3, divengono, sulla superficie limite, integrali semplici di 3ª specie con coppie di curve logaritmiche nelle linee doppie, a mano a mano nascenti. I sistemi lineari sulle superficie limiti vanno considerati in relazione alle predette coppie di curve, come luoghi di coppie neutre; i sistemi lineari neutri restan caratterizzati dal fatto che nei loro gruppi caratteristici dànno somme costanti gl'integrali semplici neutri di 1ª specie, che son gl'integrali di 1ª specie in via assoluta e gl'integrali di 3ª specie indicati; ecc.

Un'altra considerazione da sottolinearsi circa il cangiamento delle proprietà d'una superficie $\overline{F}$ quando questa, variando con continuità, acquista una nuova linea doppia, è quella già accennata che sulla superficie limite F, considerata dal punto di vista della geometria sull'ente, la linea doppia non è imagine di una curva qualunque di F, sibbene d'una curva possedente un'involuzione di 2° ordine (2). Non si può pertanto costruire su F un campo neutro di sistemi lineari, il quale sia il limite del campo dei sistemi lineari d'una superficie variabile, assegnando

(1) In generale, come si è ricordato, ad una linea doppia di una superficie corrisponde, sul modello privo di singolarità, una sola curva irriducibile con un'involuzione di 2° ordine, imagine della linea doppia e avente come punti doppi le imagini dei punti cuspidali della superficie. Nel nostro caso si hanno invece due curve distinte aventi in comune l'imagine di un punto cuspidale della superficie e i punti della linea doppia hanno per imagini le coppie di una corrispondenza birazionale fra le due curve. Ciò va posto in relazione col problema *a*).

(2) A proposito delle particolarità di questa curva dal punto di vista della geometria sull'ente, ved. [**78**, p. 264].

ad arbitrio su F una curva « neutra » irriducibile o riducibile; mentre invece si posson assegnare ad arbitrio (n. 2) le coppie neutre, sopra una curva C. La impossibilità segnalata dipende appunto da ciò, che la totalità delle coppie neutre sulla curva neutra deve costituire un'involuzione di 2^0 ordine.

D'altronde, dal punto di vista del cangiamento dell'irregolarità, nessuna influenza posson avere punti doppi conici (isolati) che la $\overline{F}$ acquisti passando al limite F, perchè essi da soli non alterano il genere geometrico della superficie variabile [**78**, p. 366], nè la dimensione dell'aggiunto al sistema delle sezioni piane o iperpiane. Ciò non esclude che questi caratteri possano cangiare, perchè, se p. es. la F d'ordine m è in S_3, con linea doppia, non può escludersi che al limite diminuisca la postulazione di questa rispetto alle superficie d'ordine $m-4$: nel qual caso aumenta il genere geometrico, rimane immutato il genere aritmetico e quindi aumenta l'irregolarità. Comunque sia, le superficie che hanno modelli con punti doppi conici, sono particolari, in quanto contengono curve razionali di grado virtuale -2.

f) Nella Memoria di Painlevé più volte citata si dimostra [**47**, p. 54] che se le funzioni inverse di un sistema lineare di integrali semplici, indipendenti, di una varietà algebrica V_π sono uniformi e contengono razionalmente le coordinate dell'origine delle integrazioni, esse sono funzioni abeliane proprie o degeneri. Le funzioni quasi abeliane son dunque funzioni abeliane degeneri. Questo vuol dire che *ogni varietà quasi abeliana V_π può concepirsi quale limite d'una varietà abeliana $\overline{V}_\pi$*. Quali enti geometrici nascon su V_π per effetto di tale passaggio al limite? La presente Memoria dà risposta in proposito soltanto nel caso delle varietà quasi abeliane speciali.

PARTE QUARTA

LE FUNZIONI E LE SUPERFICIE QUASI IPERELLITTICHE

58. LE SUPERFICIE QUASI IPERELLITTICHE DI JACOBI. IL TEOREMA DI PAINLEVÉ. — In quest'ultima parte della Memoria illustreremo la teoria generale coll'esempio notevole delle *funzioni quasi abeliane di due variabili u, v.*

In primo luogo gioverà tener presente che una V_π quasi abeliana d'irregolarità superficiale $p<\pi$, quando $p\leq 3$, è una V_π quasi abeliana di JACOBI relativa ad una curva C di genere p, ovvero è birazionalmente equivalente ad un'involuzione generata su una varietà siffatta da una trasformazione di 2^a specie ciclica (n. 32), quest'ultima circostanza presentandosi quando la varietà di PICARD associata a V_π ammette divisori maggiori dell'unità (n. 37). Tale identificazione della V_π con una V_π di JACOBI o con un'involuzione ivi esistente, consegue da ciò che i $\frac{p\,(p+1)}{2}$ periodi normali distinti degl'integrali di 1^a specie di una curva di genere $p\leq 3$ non son legati da alcuna relazione quantitativa.

Lo studio delle V_2 quasi abeliane, epperò delle funzioni quasi abeliane di due variabili, che abbiamo anche chiamato *funzioni quasi iperellittiche,* si esaurisce dunque limitandosi alle funzioni inerenti ad una superficie quasi iperellittica F di rango 1, concepita quale superficie delle coppie di punti di una curva C di genere p, ove sia dato un campo neutro γ di genere virtuale

$\pi=2$. E siccome per $\pi=2$ non posson presentarsi che le alternative:

$$\text{I. } p=0,\ \delta_1=0,\ \delta_2=2;\quad \text{II. } p=0,\ \delta_1=\delta_2=1;$$
$$\text{III. } p=0,\ \delta_1=2,\ \delta_2=0;\quad \text{IV. } p=1,\ \delta_1=0,\ \delta_2=1;$$
$$\text{V. } p=1,\ \delta_1=1,\ \delta_2=0$$

e la varietà di PICARD corrispondente non ha in nessuno dei cinque casi alcun divisore maggiore di uno, la ricerca vien limitata soltanto ad F e non ad involuzioni appartenenti a questa superficie.

In verità ai casi considerati devono aggiungersi i *casi degeneri,* che son relativi ad una F superficie delle coppie di punti di una curva ellittica e di una curva razionale, concepita, mediante una coppia neutra su essa data, come curva di genere virtuale 1 (nn. 46, 48). I casi cui alludiamo sono due:

VI. Curva ellittica e curva razionale con 1 coppia di punti coincidenti.

VII. Curva ellittica e curva razionale con 1 coppia di punti distinti.

Ed ecco ora le superficie e le tabelle di periodi inerenti a questi casi, che derivano da particolarizzazioni di proprietà esposte in generale e da ciò che abbiamo detto nel n. 50 dei casi IV e V. Avvertiamo che, assegnando i modelli di superficie inerenti ai possibili corpi di funzioni quasi iperellittiche, ci riferiamo a superficie rappresentanti birazionalmente *senza eccezione* la varietà delle coppie di punti di una curva o di due curve, nei casi degeneri, che rispettivamente intervengono. La importanza di questa precauzione è già dimostrata da quanto dicemmo nel n. 48; ma più sarà accentuata nello studio che faremo dei modelli.

I. Piano, come modello senza eccezione della varietà delle coppie di punti d'una curva razionale; modello ottenuto particolarizzando il concetto del n. 29; cioè come luogo delle intersezioni delle coppie di tangenti di una conica. *Non vi sono pe-*

riodi, perchè la curva C $(p=0)$ non possiede integrali di 1^a specie e i due integrali neutri su essa e quelli u, v che ne derivan sul piano, son di 2^a specie.

II. Modello come sopra. *Vi è un solo periodo* $(2\pi i,\ 0)$ proveniente dall'integrale normale di 3^a specie dato su C $(p=0)$ e che dà luogo all'integrale u di F.

III. Modello come sopra. Si ha la tabella

$$\begin{array}{c|cc} u & 2\pi i & 0 \\ v & 0 & 2\pi i \end{array},$$

inerente ai due integrali normali di 3^a specie u, v di F provenienti da quelli dati su C $(p=0)$.

IV. Rigata ellittica *astratta,* scegliendone un modello senza eccezione come varietà delle coppie di punti di una curva ellittica. (Ritorneremo su ciò nel n. 60). Si ha la tabella (n. 50)

$$\begin{array}{c|cc} u & 2\pi i & \omega \\ v & 0 & \tau \end{array},$$

ove u, v sieno integrali normali rispettivamente di 1^a e di 2^a specie su F.

V. Modello come nel caso IV. Si ha la tabella (n. 50)

$$\begin{array}{c|ccc} u & 2\pi i & \omega & 0 \\ v & 0 & \tau & 2\pi i \end{array},$$

ove u, v sieno gl'integrali normali rispettivamente di 1^a e di 3^a specie su F.

VI. Rigata ellittica astratta, scegliendone un modello senza eccezione come prodotto di una curva razionale e di una curva ellittica. La tabella relativa è (n. 48):

$$\begin{array}{c|cc} u & 2\pi i & \omega \\ v & 0 & 0 \end{array},$$

ove u, v sieno gl'integrali normali rispettivamente di 1ª specie (proveniente dalla curva ellittica) e di 2ª specie (proveniente dalla curva razionale).

VII. Modello come nel caso VI. La tabella relativa è (n. 48):

$$\begin{array}{c|ccc} u & 2\pi i & \omega & 0 \\ v & 0 & 0 & 2\pi i \end{array},$$

ove u, v sieno gl'integrali normali rispettivamente di 1ª specie (proveniente dalla curva ellittica) e di 3ª specie (proveniente dalla curva razionale).

Un corpo qualunque di funzioni quasi iperellittiche ha una tabella equivalente ad una di quelle sopra indicate: intendendosi l'equivalenza delle tabelle nel senso fissato nel n. 48.

Si hanno dunque *funzioni senza periodi e funzioni con* 1, 2, *oppure* 3 *periodi.*

Le tre funzioni fondamentali di ciascuno dei sette tipi di corpi, mediante le quali si posson esprimere razionalmente tutte le altre e che, eguagliate alle coordinate x, y, z di un punto in S_3, forniscono la rappresentazione parametrica di un modello di rango 1 (*non necessariamente senza eccezione*) *di ciascun corpo sono*:

I. $x = w$, $y = v$, $z = 0$,
II. $x = e^u$, $y = v$, $z = 0$,
III. $x = e^u$, $y = e^v$, $z = 0$,
IV. $x = \wp(u)$, $y = \wp'(u)$, $z = v - w$.

Qui $\wp(u)$ è la nota funzione $\wp$ di WEIERSTRASS, inerente ai periodi $2\pi i$, ω (1) e

II 2
$$w = -\frac{\vartheta'\left(u + \pi i + \dfrac{\omega}{2}\right)}{\vartheta\left(u + \pi i + \dfrac{\omega}{2}\right)}; \quad \tau = 1,$$

V. $x = \wp(u)$, $y = \wp'(u)$, $z = e^{v-w}$,

(1) Ved. ad es., oltre alla citata opera [**23**], le opere [**6**], [**81**, p. 19].

ove:

$$(113) \qquad w = \log \frac{\vartheta\left(u + \pi i + \frac{\omega}{2}\right)}{\vartheta\left(u + \tau + \pi i + \frac{\omega}{2}\right)}.$$

VI. $x = \wp(u),\ y = \wp'(u),\ z = v.$

VII. $x = \wp(u),\ y = \wp'(u),\ z = e^v.$

La conclusione enunciata consegue senz'altro dalla costruzione effettiva delle funzioni quasi abeliane esposta nel n. 54. Occorre soltanto aggiungere qualche parola sulle formule (112), (113), le quali, del resto, sono anch'esse casi particolari delle formule (90), (88) del n. 53.

Muoviamo prima dalla (88). Designate nel caso V con

$$\vartheta(u-a) = 0 \quad , \quad \vartheta(u-b) = 0$$

le equazioni dei punti A, B della coppia neutra di punti distinti dati sulla curva ellittica C, ove

$$\vartheta(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}\omega n^2 + nu} \quad (1) \quad ,$$

e con u_a, u_b i valori di u corrispondenti ad A, B, risulta (n. 50):

$$\tau = u_a - u_b$$

e:

$$a = u_a - \pi i - \frac{\omega}{2} \quad , \quad b = u_b - \pi i - \frac{\omega}{2} \quad :$$

(1) La $\vartheta(u)$ si annulla, com'è ben noto, dentro al parallelogrammo dei periodi, nel semiperiodo $\pi i + \frac{\omega}{2}$. La ϑ del testo va a coincidere con una delle quattro theta fondamentali di Jacobi e precisamente colla $\vartheta_3(v)$ (ved. p. es. [**81**, p. 128]), ove nella $\vartheta(u)$ si ponga $u = 2\pi i v$, $\omega = 2\pi i \tau$).

onde spesso, com'è lecito, $u_a = 0$ (potendosi portare A in un punto qualunque di C con una trasformazione di 1ª o di 2ª specie della C in sè, senza che il corpo di funzioni muti), si conclude colla (113).

Siccome il valore $u_a = 0$, sul particolare modello di WEIERSTRASS

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \ , \tag{114}$$

che è stato implicitamente fissato, una volta posto $x = \wp(u)$, $y = \wp'(u)$, caratterizza, entro il parallelogrammo dei periodi, il punto di diramazione all'infinito della $y(x)$ (¹), così, colla scelta fatta, il punto logaritmico A è all'infinito.

Quanto alla (112), per ottenerla si deve, nel quoziente

$$\frac{\vartheta(u-b)}{\vartheta(u-a)} \ ,$$

porre b uguale ad una arbitraria funzione olomorfa di un parametro t, che assume il valore a in $t=0$ (p. es. $b = a + t$) e prendere la derivata logaritmica. Si ha così:

$$w = \left[\frac{d}{dt} \log \frac{\vartheta(u-b)}{\vartheta(u-a)}\right]_{t=0} = - \frac{\vartheta'(u-a)}{\vartheta(u-a)} \ ;$$

e quindi, posto uguale a zero il valore di u nel punto A dove coincidono i due punti della coppia neutra data su C, sicchè, è ancora una volta

$$a = -\pi i - \frac{\omega}{2}$$

e il polo A cade all'infinito nella diramazione di $y(x)$, si ottiene la (112).

(¹) Si tenga presente che $\wp(u)$ e $\wp'(u)$ hanno rispettivamente un polo di 2° e di 3° ordine in $u = 0$. Ved. p. es. [**81**, pp. 20, 22].

Pel calcolo del periodo τ non si può usufruire della formula (71) del n. 50, perchè A è all'infinito; ma il valore di τ si ottiene subito tenuto conto della relazione funzionale

$$\vartheta(u+\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega-u}\,\vartheta(u)\ ,$$

che caratterizza $\vartheta\,(u)$. Così trovasi

$$-\frac{\vartheta'(u-a+\omega)}{\vartheta\,(u-a+\omega)} = -\frac{\vartheta'(u-a)}{\vartheta\,(u-a)}+1\ ,$$

cioè $\tau=1$.

Il risultato ottenuto quale applicazione dei nostri teoremi generali, circa la classificazione dei corpi di funzioni quasi iperellittiche e la determinazione delle funzioni fondamentali di questi corpi, costituisce il punto di arrivo della penetrante analisi a cui PAINLEVÉ ha sottoposto la ricerca delle funzioni di due variabili che ammettono un teorema d'addizione [**47**, p. 40].

Il nostro punto di partenza differisce soltanto apparentemente da quello di PAINLEVÉ. Noi siamo partiti, è vero, da superficie con un gruppo continuo abeliano ∞^2, generalmente transitivo, di trasformazioni birazionali; ma questa proprietà, in base all'equivalenza (stabilita dallo stesso Autore) tra il teorema di addizione di WEIERSTRASS e il teorema d'inversione degl'integrali con funzioni univoche dipendenti *razionalmente* dall'origine delle integrazioni, equivale all'esistenza del gruppo continuo.

Il quadro di PAINLEVÉ non coincide col nostro, per ciò che concerne i casi IV e V, pei quali, secondo il citato Autore, è rispettivamente (salvo lo scambio del nome delle lettere x, y, z, u, v):

$$z = v-\zeta(u)\ , \qquad z = e^{v}\,\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)}\ ,$$

ove ζ e σ son le note funzioni di WEIERSTRASS.

Vi è un apparente divario anche per ciò che concerne i casi degeneri VI e VII; ma in verità PAINLEVÉ li fa rientrare rispettivamente nei casi IV e V, colla particolarizzazione di opportune costanti. Lo stesso possiamo far noi, anteponendo all'integrale w del caso IV il moltiplicatore η, che vale 1 nel caso IV e zero nel caso VI; e, per ciò che concerne il caso VII, assumendolo quale particolarizzazione del V, per $\tau=0$.

Anche pei casi IV e V il divario fra il nostro risultato e quello di PAINLEVÉ è (come non può non essere) più di forma che di sostanza e dipende sia dalla relativa arbitrarietà nella scelta delle tre funzioni fondamentali del corpo, sia dalla tabella dei periodi a cui si fa riferimento.

Vediamo come si possano ottenere dal nostro punto di vista espressioni identiche a quelle di PAINLEVÉ.

Per ciò che concerne il IV caso assumiamo, invece della tabella normale, la tabella

$$\begin{array}{c|cc} u & 2\omega & 2\omega' \\ v & 2\eta & 2\eta' \end{array}, \tag{115}$$

usando notazioni consacrate dall'uso nella teoria delle funzioni ellittiche.

Scelgasi per w sulla cubica ellittica (114) l'integrale di 2^a specie di LEGENDRE

$$w=-\int\frac{x\,dx}{y}=-\int\wp\ (u)\,du=\zeta(u)\quad (^1).$$

Quest'integrale ha il proprio polo di 1^0 ordine nel punto di diramazione all'infinito, A, di y, e possiede ivi il residuo 2 [**81**,

(1) Le funzioni $\wp$, ζ, σ si debbon qui naturalmente considerare con riferimento ai periodi $2\,\omega$, $2\,\omega'$.

p. 88, formula (42′)]. I suoi periodi 2η, $2\eta'$ son dati da [**81**, p. 41, formule (62), (63)]:

$$\eta = \zeta(\omega), \quad \eta' = \zeta(\omega') ; \tag{116}$$

e siccome v aumenta rispettivamente di 2η e di $2\eta'$ quando il punto di F percorre i due cicli normali della superficie, così la funzione $v - \zeta(u)$ appartiene al corpo e, *con tabella* (115) *si può assumere nel caso* IV, *come in* PAINLEVÉ:

$$x = \wp(u), \; y = \wp'(u), \; z = v - \zeta(u).$$

L'integrale w ora usato ha in comune con quello del nostro caso IV il polo A; ma non è normale (e non lo è necessariamente neppure quello da noi scelto, perchè non abbiamo posto la condizione che il residuo nel polo sia 1). Però l'integrale w da noi usato ha periodo nullo al 1^0 ciclo normale e inoltre le funzioni da noi considerate son relative alla tabella normale. Ebbene è facile constatare, riferendosi alla tabella normale, che il nostro integrale w è dato da:

$$w = -\frac{\vartheta'\left(u + \pi i + \frac{\omega}{2}\right)}{\vartheta\left(u + \pi i + \frac{\omega}{2}\right)} = -\zeta(u) + \frac{\zeta(\pi i)}{\pi i} u \quad (^1) \tag{117}$$

Invero, il periodo di $-\zeta(u) + \dfrac{\zeta(\pi i)}{\pi i} u$ al 1^o ciclo normale è ovviamente nullo e il periodo al 2^o ciclo normale è

$$-2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) + \frac{\zeta(\pi i)}{\pi i}\omega ;$$

(1) Questa relazione si potrebbe ricavare dalle espressioni classiche della ζ mediante le ϑ. Ved. [**81**, p. 134, formula (59)]. Si avverta che $2\pi i$, ω stanno qui per 2ω, $2\omega'$.

e siccome, a causa della relazione di LEGENDRE [**81**, p. 42, formula (65)], è

$$\frac{\zeta(\pi i)\,\omega}{2} - \zeta\left(\frac{\omega}{2}\right)\pi i = \frac{\pi i}{2}\;,$$

il predetto periodo risulta uguale ad 1, come quello che abbiamo già calcolato, e pel nostro integrale w vale la (117). Insomma *colla tabella normale di pag.* 319, *posson assumersi quali funzioni fondamentali del caso* IV, *espresse mediante le funzioni di* WEIERSTRASS, *le*:

$$x = \wp(u),\; y = \wp'(u),\; z = v + \zeta(u) - \frac{\zeta(\pi i)}{\pi i}\,u\;.$$

Passiamo al V caso e cominciamo coll'assumere la tabella

$$(118)\qquad \begin{array}{c|ccc} u & 2\omega & 2\omega' & 0 \\ v & 2a\eta & 2a\eta' & 2\pi i \end{array}$$

ove le η, η' son ancora definite dalla (116) ed a è una costante non nulla. Scelgasi come integrale di 3ª specie w l'integrale:

$$(119)\qquad w = \zeta(a)\,u - \frac{1}{2}\int \frac{y + y_0}{(x - x_0)\,y}\,dx = \log\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-a)}\;,$$
$$[x_0 = \wp\,(a),\; y_0 = \wp'\,(a)],$$

che ha i punti logaritmici (puri) nel punto di diramazione all'infinito di $y\ (x)$ (è il punto $u=0$) e nel punto $(x_0\ y_0)$ (è il punto $u=a$), coi periodi uguali a quelli indicati per v nella precedente tabella (1). La funzione

$$e^{v-w} = e^{v}\,\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)}$$

---

(1) Ved. p. es. [**81**, p. 91, formula (51), p. 92, formula (53)]. Si tenga presente che σ si annulla in $u=0$ [**81**, p. 47].

appartiene perciò al corpo e *si può pertanto assumere nel caso* V, *con la tabella* (118) *come in* PAINLEVÉ:

$$x = \wp(u),\ y = \wp'(u),\ z = e^{\nu}\frac{\sigma(u-a)}{\sigma(u)} .$$

L'integrale w che ci ha condotto alla funzione fondamentale z scelta da PAINLEVÉ, non differisce da quello da noi considerato nel caratterizzare il nostro caso V, se non pel fatto ch'esso non è normale (non ha cioè il primo periodo ciclico nullo) e non si riferisce ad una tabella normale. Ma è chiaro che, se si altera la funzione di PAINLEVÉ in guisa che sieno soddisfatte queste condizioni, si deve ritornare alla nostra z.

Ora, alle condizioni accennate si soddisfa prendendo le funzioni $\wp$, ζ, σ relative ai periodi normali e togliendo dal nostro w un opportuno integrale di 1ª specie, in modo da annullare il primo periodo ciclico. Così viene:

$$w = \log\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-a)} - \frac{a\zeta(\pi i)}{\pi i}u, \tag{120}$$

e siccome è, colle attuali notazioni, $\tau = -a$, deve risultare:

$$\log\frac{\vartheta\left(u+\pi i+\frac{\omega}{2}\right)}{\vartheta\left(u-a+\pi i+\frac{\omega}{2}\right)} = \log\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-a)} - \frac{a\zeta(\pi i)}{\pi i}u\ ;$$

il che può esser controllato mediante le espressioni di σ e ζ per le ϑ (1).

Si osserverà pure che il secondo periodo ciclico dell'integrale del 2º membro è

$$a\left[2\zeta\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\zeta(\pi i)}{\pi i}\omega\right]$$

(1) Ved. p. es. [**81** p. 133].

e la quantità tra parentesi quadre è uguale a -1 per la relazione di LEGENDRE. Sicchè ritorna, come deve essere, $\tau = -a$. In conclusione *colla tabella normale di pag.* 319, *quali funzioni fondamentali del caso* V, *espresse mediante le funzioni di* WEIERSTRASS, *possono assumersi le*:

$$x = \wp(u),\ y = \wp'(u),\ z = e^{v - \tau \frac{\zeta(\pi i)}{\pi i} u} \frac{\sigma(u+\tau)}{\sigma(u)} .$$

OSSERVAZIONE — Poichè $\sigma(u)$ è una funzione intermediaria del campo ellittico (della quale 2η, $2\eta'$ son i periodi di 2^a specie) e $\xi(u)$ è la derivata logaritmica di $\sigma(u)$, le formule (117), (119) sono casi particolari delle espressioni generali da noi assegnate nei nn. 51, 52 per gl'integrali semplici di 2^a e di 3^a specie sopra una varietà di PICARD.

59. CENNI SULLE FUNZIONI PERIODICHE NON SODDISFACENTI AL TEOREMA DI ADDIZIONE. ESEMPI PER $\pi = 2$. — Perchè sia applicabile il procedimento che ci ha condotto al teorema di struttura, gl'integrali di 3^a specie di una V_π quasi abeliana, invarianti pel gruppo continuo Γ, che, associato a V_π, definisce un corpo di funzioni quasi abeliane, devono soddisfare a due condizioni indicate alla fine del n. 47; e cioè: 1) che quegl'integrali posseggano soltanto varietà logaritmiche e che queste sieno pure; 2) che i periodi polari lungo le varietà stesse, per un medesimo integrale, sieno proporzionali a numeri interi. Alla 1) è possibile soddisfare anche senza l'ipotesi L; per verificar la 2) ci è occorso invece d'invocare la L (ma non è perciò detto che con altro procedimento l'ipotesi non possa divenire superflua anche per la seconda condizione).

Nei riguardi della 2) abbiamo indicato alla fine del n. 47 la difficoltà fondamentale che sorge s'essa non è verificata: certe relazioni che si devon trasferire nel campo algebrico per preparare il teorema di struttura, rimangono essenzialmente trascendenti.

Analoga circostanza si verifica anche se non è soddisfatta la 1), nel senso che se pur è possibile l'inversione univoca degli integrali semplici di un sistema lineare Σ, $\infty^{\pi-1}$ (comprendente gl'integrali di 1ª specie di V_π, insieme ad integrali di 2ª specie e ad almeno un integrale di 3ª specie), essa può condurre a funzioni sia pur meromorfe, ma non contenenti razionalmente le coordinate della origine delle integrazioni, e dipendenti invece in modo trascendente da queste coordinate o addirittura non meromorfe (al finito). E poichè (come si è detto varie volte) PAINLEVÉ ha dimostrato [**47**] che la dipendenza razionale delle predette funzioni dalle coordinate dell'origine, *equivale* al fatto che quelle funzioni soddisfanno al teorema d'addizione di WEIERSTRASS, in definitiva, quando l'univoca inversione sia possibile, accompagnata però dall'indicata dipendenza trascendente, le funzioni periodiche cui si perviene non soddisfanno al teorema d'addizione.

PAINLEVÉ ha dato esempi in proposito [**47**, pp. 10, 48] per le funzioni di due variabili ($\pi = 2$), riferendosi anzi all'ipotesi più generale che l'inversione conduca a funzioni con un numero finito di rami, anzichè a funzioni uniformi. Si hanno generalmente terne di funzioni periodiche cogli stessi periodi non più legate da equazioni algebriche, nonostante ch'esse provengano dall'inversione di sistemi d'integrali semplici sopra superficie algebriche.

Riferiremo qui, per comodità ed orientamento del lettore, tre degli esempi di PAINLEVÉ, riattaccandoli alla prima delle condizioni rievocate al principio di questo numero e inquadrandoli nel nostro modo di considerare il problema.

a) Sul piano x, y consideriamo gl'integrali semplici

$$u = \int \frac{dx}{x} = \log x, \qquad v = \int \left(- dx + \frac{dy}{y} \right) = \log y - x \,,$$

ambedue di 3ª specie. Il primo ha come curve logaritmiche pure, coi periodi $+2\pi i$, $-2\pi i$, la $x=0$ e la retta all'infinito del piano; il secondo ha come curve logaritmiche, coi periodi $+2\pi i$, $-2\pi i$, la $y=0$ e la retta all'infinito: però quest'ultima è *curva logaritmica impura,* perchè è anche curva polare (del 1^0 ordine) della funzione razionale x. L'inversione dei due integrali u, v conduce alle funzioni uniformi e olomorfe (al finito):

$$x = e^u , \qquad y = e^{v+e^u} ,$$

le quali ammettono i periodi $(2\pi i, 0)$ $(0, 2\pi i)$.

Consideriamo il corpo delle funzioni meromorfe con questi periodi; vogliamo dire di *tutte* le funzioni, non soltanto di quelle che soddisfanno ad un teorema d'addizione. Si posson allora trovare nel corpo tre funzioni a due a due indipendenti, p. es. le due costruite e la $z=e^v$, che ammette gli stessi periodi, *fra le quali passa una relazione non più algebrica, ma trascendente*: $y=z\,e^x$.

Si hanno così *funzioni di due variabili, meromorfe, a due periodi, le quali non posseggono un teorema d'addizione*. L'integrale generale del sistema

$$du = \frac{dx}{x} , \qquad dv = -\,dx + \frac{dy}{y}$$

che è:

$$x = x_0 e^u , \qquad y = y_0\, e^{v+x_0(e^u-1)} , \tag{121}$$

contiene in tal caso in modo trascendente la coordinata x_0 dell'origine delle integrazioni.

Posto $u=a$, $v=b$, la (121) può interpretarsi come una trasformazione biunivoca del piano che associa i punti (x_0, y_0), (x, y) e che può anche rappresentarsi sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) - u(x_0,y_0) &\equiv a , \\ v(x,y) - v(x_0,y_0) &\equiv b \end{aligned}\right\} \quad \text{(modd. periodi)}. \tag{122}$$

Variando a, b si ha sul piano *un gruppo continuo abeliano* ∞^2 *di trasformazioni biunivoche pseudoconformi,* le quali non sono birazionali, ma trascendenti. È il gruppo analogo a quello che esiste su V_2 nel caso algebrico.

Osservazione — Le funzioni $x = e^u$, $z = e^v$ definiscono il corpo delle funzioni quasi iperellittiche corrispondente al caso III, finchè si considerano le loro funzioni razionali; mentre se si considerano più in generale tutte le loro funzioni meromorfe (al finito), si definisce un corpo di funzioni (le cui coppie generiche non soddisfanno al teorema di addizione) e che non son quasi abeliane, pur essendo meromorfe. Lo stesso dicasi (in base alla Oss. 8ª del n. 54) quando si consideri la totalità delle funzioni meroforme di e^{u_1}, e^{u_2}, . . . , e^{u_π} come funzioni periodiche di u_1, u_2, . . . , u_π. Pertanto:

Esistono funzioni meromorfe di π *variabili con* π *periodi arbitrari (ma generici) e la loro totalità forma un corpo di funzioni che non sono quasi abeliane, ma che contiene un sottocorpo di funzioni quasi abeliane.*

I periodi cui si allude son generici nel senso che il loro determinante deve esser diverso da zero.

Del resto formano *un corpo di funzioni meromorfe di* π *variabili non quasi abeliane con* π' $(<\pi)$ *periodi* tutte le funzioni meromorfe di e^{u_1}, e^{u_2}, . . . , $e^{u_{\pi'}}$, $u_{\pi'+1}$, . . . , u_π. Quando queste funzioni son razionali si ha un sottocorpo di funzioni quasi abeliane corrispondenti a $p = 0$, $\delta_1 = \pi'$, $\delta_2 = \pi - \pi'$.

b) Sul piano x, y, consideriamo gl'integrali semplici

$$u = \int \frac{dx}{x} = \log x, \; v = \int \left(\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{dy}{y} \right) = \frac{1}{1-x} + \log y.$$

In questo caso l'integrale v viola la condizione 1) per una altra ragione; ossia perchè possiede la curva polare $x = 1$, distinta dalle curve logaritmiche $(y = 0,\ y = \infty)$, che sono ora pure.

L'inversione conduce alle funzioni uniformi

$$x = e^u, \quad y = e^{v + \frac{1}{e^u - 1}},$$

le quali ammettono i periodi $(2\pi i, 0)$, $(0\ 2\pi i)$.

Aggiungendo ad esse la funzione $z = e^v$ si ottengono *tre funzioni (a due a due indipendenti) di due variabili, con due periodi, tra le quali passa la relazione trascendente* $y = z\, e^{\frac{1}{x-1}}$, *non soddisfacenti al teorema d'addizione.*

In questo caso *la funzione* y *possiede una curva* $x = 1$ *di singolarità essenziali* (il piano caratteristico $u = 0$, nello S_4 rappresentativo delle u, v). Siamo così fuori del campo, al quale costantemente ci riferiamo, delle funzioni meromorfe (al finito).

L'integrale generale del sistema

$$du = \frac{dx}{x}, \quad dv = \frac{dx}{(1-x)^2} + \frac{dy}{y}$$

è:

$$(123) \qquad x = x_0 e^u\,; \quad y = y_0\, e^{\frac{x_0 - x}{(x-1)(x_0-1)} + v}.$$

Anche in questo caso la costante d'integrazione x_0 figura in modo trascendente nell'integrale generale e *il gruppo abeliano continuo* ∞^2, *di trasformazioni biunivoche, pseudoconformi, trascendenti, del piano in sè,* collegato coi due integrali u, v, è dato, per $u = a$, $v = b$, dalle (123), al variare dei parametri a, b; e si può rappresentare sotto la forma (122).

c) Un ultimo esempio di funzioni, stavolta con 3 periodi (il quale si può far rientrare fra quelli indicati da PAINLEVÉ [**47**, p. 40], quando si elimini l'irrazionalità quadratica, che comparisce nelle formule di questo Autore).

Sul cilindro ellittico (114) consideriamo gl'integrali semplici:

$$u = \int \frac{dx}{x}, \quad v = \int \left(-\,dx + \frac{dz}{z}\right) = \log z - x\,,$$

rispettivamente di 1ª e di 3ª specie. L'integrale v ha le curve logaritmiche $z=0$, $z=\infty$, coi periodi polari $+2\pi i$, $-2\pi i$ e la curva $z=\infty$ (¹) è impura, perchè sovrapposta alla curva polare della funzione razionale x, del punto del cilindro.

L'inversione degl'integrali sul cilindro conduce alle funzioni uniformi

$$x\,\wp=(u) \qquad z=e^{v+\wp(u)},$$

dotate di tre periodi $(2\pi i, 0)$, $(\omega, 0)$, $(0, 2\pi i)$, supposto che $(2\pi i, \omega)$ sieno i periodi di u.

La funzione x è meromorfa, mentre la z possiede una curva (piano caratteristico) di singolarità essenziali, in corrispondenza al polo di $\wp(u)$ nel parallelogrammo dei periodi.

Se ad x, z si aggiunge la funzione $\xi=e^v$, appartenente alla stessa tabella di periodi, si hanno *tre funzioni (a due a due indipendenti) di due variabili, con tre periodi, tra le quali passa la relazione trascendente* $z=\xi\, e^x$ *e non soddisfacenti al teorema d'addizione*: due di queste funzioni son meromorfe e l'altra possiede singolarità essenziali al finito.

Queste funzioni non soddisfanno al teorema d'addizione, perchè l'integrale generale del sistema

$$du=\frac{dx}{x}, \qquad dv=-dx+\frac{dz}{z}$$

è:

(124) $$x=\wp(u), \qquad z=z_0\, e^{v+\wp(u)-\wp(u_0)}$$

e la costante d'integrazione $x_0=\wp(u_0)$ [da associarsi alla $y_0=\wp'(u_0)$] vi comparisce in modo trascendente.

(¹) Che consta della generatrice all'infinito del cilindro contata 3 volte. Sulla generatrice stessa, contata semplicemente, il periodo polare di v è $-\frac{2}{3}\pi i$.

Le (124), per u, v parametri, *dànno sul cilindro ellittico un gruppo continuo abeliano* ∞^2 *di trasformazioni biunivoche, pseudoconformi, trascendenti,* il quale tien le veci del gruppo abeliano algebrico, che si presenta quando le funzioni soddisfanno al teorema d'addizione.

60. Rappresentazione di una superficie quasi iperellittica di Jacobi sopra un cilindro ellittico. Formule relative. — Consideriamo la superficie quasi iperellittica di Jacobi, che corrisponde al caso più importante $p=1$, $\delta=\delta_1=1$: campo neutro di genere $\pi=2$ individuato sopra una curva ellittica C da una coppia A, B di punti distinti.

La superficie di Jacobi relativa, che indicheremo con F, è un modello *senza eccezione* della varietà delle coppie di punti di C.

Analogamente a quanto accade nel caso generale di una V_π quasi abeliana di Jacobi, che è simultaneamente equivalente alla varietà delle π-ple di punti d'una curva C di genere p e al prodotto della varietà di Jacobi V_p di C per un S_δ (n. 22), il quale può alla sua volta concepirsi come varietà di Jacobi quasi abeliana inerente ad una curva razionale C', ove sieno assegnate δ coppie neutre (n. 22, Oss. 2ª; n. 48), la superficie F, è equivalente, non solo alla varietà delle coppie di punti della curva ellittica C, ma anche al prodotto di C per una retta ossia ad una rigata ellittica astratta, di cui possiamo assumere come modello una rigata ellittica proiettiva.

In quest'ultimo atteggiamento, F dà luogo ad un corpo di funzioni quasi iperellittiche, che si riducono a funzioni separatamente ellittiche in una variabile u e razionali-esponenziali nell'altra variabile v (n. 50).

Occorre dunque considerar F dal primo punto di vista per aver una vera e propria superficie quasi iperellittica di Jacobi, relativa ad una tabella (67) non degenere.

Osserviamo prima che *i due modi di considerare F non sono equivalenti rispetto alle trasformazioni birazionali senza eccezione* (1).

Invero, considerata F quale superficie delle coppie di punti di C, un suo modello, privo di punti multipli e di curve eccezionali di 1ª specie, che la rappresenti senza eccezione, si ottiene p. es. sulla grassmanniana delle rette di S_3 come imagine della congruenza delle corde di una quartica gobba ellittica C. Il modello F è dell'ottavo ordine sulla quadrica di S_5 rappresentativa delle rette di S_3; le ∞^1 coppie di C con un punto fisso son rappresentate, al variare di questo, da un sistema ∞^1 (ellittico) di cubiche piane ellittiche; le ∞^1 g_2^1 di C da ∞^1 coniche tracciate su F (imagini delle schiere rigate di corde di C), le quali sono associate a coppie in una g_2^1 del loro fascio, le coniche di una coppia rappresentando le due schiere incidenti di una medesima quadrica passante per C e le coniche doppie della g_2^1 essendo le imagini delle generatrici dei 4 coni quadrici passanti per C; ecc. ecc. Le coniche di F sono *generatrici* della superficie, in quanto rigata astratta. Siccome F possiede *direttrici* di grado virtuale 1 (le ∞^1 cubiche ellittiche, cui sopra si è alluso), essa *è riferibile senza eccezione soltanto a rigate proiettive di ordine dispari* (≥ 5) (2).

Se invece si considera la superficie come prodotto di C e di una retta, un modello privo di punti multipli che la rappresenti senza eccezione [**69**, p. 194] contiene direttrici di grado virtuale zero (le imagini delle ∞^1 coppie con un punto fisso in C), onde la superficie *è riferibile senza eccezione soltanto a rigate proiettive d'ordine pari* (≥ 4).

I due modelli son irriducibili rispetto alle trasformazioni birazionali senza eccezione, nonostante che abbiano lo stesso or-

(1) Delle quali ho mostrato l'importanza algebrico-topologica in vari passi delle mie Lezioni [**78**, p. 20, Cap. II, pp. 298, 303, 314].

(2) [**77**, n. 12]. Applicando il n. 7 della stessa Nota si riconosce che il modello di rigata proiettivo d'ordine minimo che rappresenta senza eccezione F non può che esser nello S_4 e del 5° ordine.

dine di connessione superficiale 2, che è l'unico fra i loro numeri di Betti avente invarianza relativa. Esse differenziansi topologicamente e quindi anche dal punto di vista delle trasformazioni birazionali senza eccezione, pel fatto che le forme quadratiche fondamentali $\lambda^2+2\lambda\mu$, $2\lambda\mu$ delle loro basi minime (che son poi le basi minime dei loro cicli bidimensionali) non son equivalenti rispetto alle sostituzioni unimodulari a coefficienti interi.

Ci siamo trattenuti più del bisogno su queste osservazioni, anche perchè esse lumeggiano da un punto di vista, che andrebbe approfondito in generale, una delle ragioni della notevole differenza fra i due tipi di corpi di funzioni quasi iperellittiche che corrispondono ai due modelli (e ai gruppi continui implicitamente ad essi associati).

Volendosi riferirsi al modello di ordine minimo di F, che è un cono cubico ellittico di S_3, si deve dunque rinunciare, in ambedue i casi, alla rappresentazione senza eccezione e *senza* punti multipli.

Assumiamo dunque a modello F della superficie il cilindro ellittico dello S_3 (x, y, z):

$$y^2 = 4\,x^3 - g_2\,x - g_3; \tag{125}$$

e cerchiamo di rappresentare su questo (che apparisce *a priori* soltanto prodotto di C per una retta) la totalità delle coppie di punti di C. Siccome (ammessa eseguita questa rappresentazione) ai punti di C rispondono su F ∞^1 curve formanti un sistema d'indice 2 e di grado effettivo 1 (cioè segantisi a due a due in un sol punto variabile), e un tal sistema dà ovviamente su F la richiesta rappresentazione, bisogna cercare di costruire sulla superficie un sistema di questa natura.

All'uopo, osserviamo che le quadriche passanti per due generatrici segano ulteriormente F in una quartica gobba ellittica D, passante pel vertice del cilindro e direttrice di F, variabile in un sistema lineare *completo* ∞^4 (somma della cubica piana C di equazione (125) e della generatrice staccata ulteriormente sul cilindro dal piano delle due date), di grado virtuale (= effettivo) 5 (¹). Lo stesso sistema si ottiene da ∞^1 sistemi lineari analoghi di quadriche, che son quelle passanti per le coppie di generatrici appartenenti alla g_2^1 individuata dalle due date. Di tali sistemi di quartiche se ne hanno ∞^1 e formano un sistema continuo completo ∞^5 $\{D\}$ (a serie caratteristica completa), segato dalle ∞^6 quadriche per le coppie di generatrici, ogni quartica del sistema essendo, come si è detto, segata da ∞^1 quadriche, che son poi tutte quelle che la contengono. In particolare i quattro coni qnadrici per ogni quartica D hanno i vertici sulle 4 generatrici doppie per la g_2^1 di generatrici associata al sistema lineare $|D|$ e toccano lungo quelle la F.

Considerate le ∞^1 curve del sistema $\{D\}$, passanti per 4 generici punti di F, determiniamo l'indice ν del loro sistema ∞^1, S, che ha già il grado effettivo 1. Dico che $\nu=2$, cosicchè S è il sistema che conviene alla nostra questione.

Intanto non può essere $\nu=1$, perchè se no il sistema S, che ha punti base semplici, sarebbe un fascio lineare, mentre esso è costituito da ∞^1 curve ciascuna delle quali appartiene ad uno e ad un solo dei sistemi lineari completi $|D|$ di $\{D\}$, che formano una totalità ellittica ∞^1; cosicchè anche S, come ente di elementi D, è un ente ellittico.

Sarà dunque $\nu\geq 2$. Suppongasi, per assurda ipotesi, $\nu>2$. Allora fissata una D, sia D_0, in S, le $\nu-1$ curve D, passanti pel punto mobile su D_0, descrivono in S un'involuzione ellittica ∞^1, la quale, appunto perchè ellittica, non ha coincidenze entro S. Ma questo è assurdo, perchè D_0 contiene, oltre ai punti base, un pnnto caratteristico, comune a D_0 e alla curva D infinitamente vicina (non si esclude che questo punto possa essere infinitamente vicino ad un punto hase), sicchè l'involuzione cui si è accennato ha per lo meno un elemento doppio in D_0. In conclusione è $\nu=2$.

(¹) È superfluo avvertire che il vertice (punto triplo) non è base pel sistema, dal punto di vista birazionale.

Sieno P_1, P_2, P_3, P_4 i 4 punti base di S. Fissata una curva D_0 di S, le coppie di curve del sistema che passan per un generico punto P di F segano D_0 ciascuna in un punto, fuori dei punti base; e si ha così una coppia di punti di D_0, associata a P. Viceversa, data una tal coppia, si risale a P. La proiezione poi di D_0 sulla cubica C, stabilisce la desiderata corrispondenza birazionale fra le coppie di punti della cubica C e i punti di F.

In questa corrispondenza son elementi eccezionali:

1) i punti P_1, P_2, P_3, P_4 a ciascun dei quali corrisponde su C una g , cioè una generatrice sulla rigata astratta — la diremo $\overline{F}$ — imagine birazionale senza eccezione della varietà delle coppie di punti di C. La g_2^1 corrispondente a uno di quei punti è segata su D_0 dalle coppie di curve di S che passan pei punti infinitamente vicini a quello. Simultaneamente le quattro generatrici di F passanti pei punti P_1, P_2, P_3, P_4, in quanto non hanno intersezioni variabili colle curve di S, si mutano in punti di $\overline{F}$, situati sulle quattro generatrici eccezionali. (Ciò è d'accordo col fatto che le generatrici son curve eccezionali di 2ª specie);

2) il vertice C_∞ di F, al quale corrisponde su D_0 (e su C) una involuzione ellittica di 2⁰ ordine, segata su D_0 dalle coppie di curve di S che passan pei punti infinitamente vicini al vertice. Però C_∞ non è eccezionale dal punto di vista della geometria sull'ente, perchè deve concepirsi come una curva (in atto infinitesima) unisecante delle generatrici.

Al sistema S appartengono 4 curve D, ciascuna spezzata in una generatrice per uno dei punti P_1, P_2, P_3, P_4 e in una sezione piana del cilindro individuata dagli altri tre punti della quaderna.

L'omologia affine di centro z_∞, che porta il piano P_1, P_2, P_3 nel piano della cubica C, riduce S a tale che i nuovi P_1, P_2, P_3 son tre punti non allineati di C e P_4 un punto situato sopra la stessa generatrice h di F dove giaceva il P_4 iniziale. Ci riferiremo a questo S così trasformato e come curva D_0 assumeremo la $C+h$. In tal modo le intersezioni con D_0 delle coppie di curve D di S uscenti dai singoli punti di F, son senz'altro su C.

Dobbiamo ora costruire le quartiche di S: cercheremo di ottenerle per mezzo dei coni quadrici che le contengono. Ogni quartica D è associata, come si è visto, ad una g_2^1 di generatrici. Se $\bar{h}$ è una generatrice doppia di questa g_2^1, un cono quadrico K, tangente ad F lungo $\bar{h}$ e passante per P_1, P_2, P_3, P_4 segna su F una D di S.. Diciamo Q la traccia su C della $\bar{h}$: allora la traccia di K sul piano $z=0$ è una conica k passante per P_1, P_2, P_3 e tangente in Q a C. Il vertice O del cono K su $\bar{h}$ è tale che la proiezione di P_4 da O sul piano $z=0$, deve stare su k; epperò O è determinato come intersezione ulteriore di $\bar{h}$ col cono quadrico proiettante k da P_4. In conclusione il cono K è individuato da k e da P_4, perchè ne è determinato anche il vertice O. Insomma, una volta dato P_4, le curve D di S son proiettate dai vertici dei coni quadrici che le contengono sulle coniche del piano $z=0$ passanti per P_1, P_2, P_3 e tangenti a C (le quali rimangono del resto le stesse qualunque sia P_4 su F).

Per un punto generico A di C passa una sola curva D di S (essendo già $C+h$ una curva di S passante per A): essa è determinata da una qualunque delle quattro coniche del fascio P_1, P_2, P_3, A tangenti a C. Ognuna di queste coniche è traccia di uno dei quattro coni quadrici passanti per D. La corrispondenza fra le D e le ∞^1 coniche della rete P_1, P_2, P_3, tangenti a C, non è cioè biunivoca; ad ogni conica corrisponde una D, ma ad ogni D corrispondono quattro coniche.

Per ottenere il punto P imagine su F di una coppia A, B di punti generici di C, occorre intersecare, fuori dei punti base, le D di S passanti per A, B. Pertanto le coppie di punti di C, che hanno per imagini le coppie con un punto fisso A, son rappresentate dalla D uscente da A: la diremo $\mathfrak{A}$. E similmente diremo $\mathfrak{B}$ la D uscente da B, che rappresenta le coppie col punto fisso B.

Esistono due generatrici h_1, h_2 di F tali che

$$\mathfrak{A} + 2\, h_1 \equiv \mathfrak{B} + 2\, h_2, \tag{126}$$

perchè le curve dei due membri dell'equivalenza son complete intersezioni di F con due coni quadrici tangenti ad F lungo h_1, h_2. E siccome, indicate con $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ le generatrici di F, tangenziali rispettive delle generatrici h_2, h_1, viene

$$\mathfrak{A}' + 2\, h_2 \equiv \mathfrak{B}' + 2\, h_1, \tag{127}$$

sommando a membro a membro colla precedente risulta:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' \equiv \mathfrak{B} + \mathfrak{B}'. \tag{128}$$

Prendiamo ora su C una coppia di punti distinti A, B e consideriamo il campo neutro γ, di genere virtuale 2, definito da questa coppia. Sieno inoltre u l'integrale normale di 1ª specie di C e v l'integrale normale di 3ª specie coi punti logaritmici A, B ed i rispettivi periodi polari $+2\,\pi i$, $-2\,\pi i$, sì che i periodi di u, v costituiscono complessivamente la tabella (67), ove le prime due colonne contengono i periodi al 1º e al 2º ciclo della retrosezione, che si suppone fissata sulla (riemanniana) C. Denotiamo colle stesse lettere u, v gl'integrali semplici corrispondenti su F agli u, v di C (cioè le somme degli u, v di C nelle coppie di punti della curva). Vale allora su F la relazione (nn. 28, 46):

$$v = \log R + w, \tag{129}$$

in cui l'integrale v ha come curve logaritmiche pure le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ coi periodi rispettivi $+2\,\pi i$, $-2\,\pi i$; R è una funzione razionale del punto di F (definita a meno di un fattore costante moltiplicativo, che vien poi assorbito, attraverso la (129), nella costante additiva a meno della quale è definito v), avente le

$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'$ rispettivamente come curve di livelli zero e infinito, del 1^0 ordine; w è infine il trasformato, mediante la trasformazione unirazionale da C ad F, rappresentata geometricamente dalla proiezione di C da z_∞, dell'integrale normale di 3^a specie di C, che ha come punti logaritmici $(C, \mathfrak{A}')$, $(C, \mathfrak{B}')$ coi periodi polari rispettivi $-2\pi i$, $+2\pi i$.

Prima di procedere alla costruzione effettiva di R e di w, particolarizziamo ulteriormente i punti base di S e la posizione di B, dato che questo punto, con una conveniente trasformazione di 1^a specie di C, può portarsi dovunque sulla cubica stessa. Assumeremo P_2, P_3, B coincidenti coll'unico punto all'infinito di C e P_4 infinitamente vicino al vertice C_∞ del cilindro sulla generatrice h_a passante per A. Cerchiamo a che cosa riduconsi con questa scelta le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Una D per A incontra h_a in A, P_4, epperò contiene h_a come parte. La cubica residua, passando per P_1, P_2, P_3, coincide con C. Dunque per A passa la sola $C+h_a$ di S e quindi:

$$\mathfrak{A}=C+h_a.$$

Si osservi che uno dei 4 coni quadrici proiettanti la $D=\mathfrak{A}$, in quanto contiene il piano di C, contiene pure un piano passante per h_a e ulteriormente tangente ad F lungo una generatrice, che potrà assumersi come generatrice h_1 della relazione generale (126).

Le coniche per P_1, P_2, P_3, B si spezzano nella retta all'infinito r di $z=0$ e nelle 4 tangenti a C da P_1: sia t una di queste, Q il suo punto di contatto ed h_2 la generatrice di F per Q.

Se P_4 non fosse all'infinito su h_a, il vertice O del cono quadrico passante per la D, diversa da $C+h_a$, individuata da B, si otterrebbe intersecando fuori di Q la generatrice h_2 col cono quadrico proiettante da P_4 la $r+t$, epperò sarebbe l'intersezione di h_2 col piano $z=\text{cost.}$ passante per P_4. Quando P_4 va all'infinito su h_a, il vertice O va dunque all'infinito su h_2 e il cono quadrico passante per la C considerata si spezza nel piano all'infinito e nel piano tangente ad F lungo h_2. Ne deriva che la D per B, distinta da $C+h_a$, cioè la curva $\mathfrak{B}$, essendo segata su F, fuori di h_2, da quest'ultimo cono quadrico, è espressa da

$$\mathfrak{B}=C_\infty+3\ h+h_b,$$

ove h è ora la generatrice all'infinito di F ed h_b la generatrice passante per P_1. Il punto C_∞ figura nella sezione di F con quel cono, perchè dal punto di vista invariantivo, è una curva, anzi l'unica componente di $\mathfrak{B}$, che sia direttrice di F. Quanto ad h_2 essa è proprio la generatrice di F, che soddisfa alla (126).

Si ha di più:

$$h_a+2\ h_1 \equiv h_b+2\ h_2,$$

perchè $h_a+2\ h_1$, $h_b+2\ h_2$ son le complete intersezioni di F (all'infuori della curva infinitesima C_∞, che può sopprimersi dai due membri dell'equivalenza) coi piani tangenti al cilindro lungo h_1, h_2.

Sicchè nella (128) dovremo assumere

$$\mathfrak{A}'=h_b,\quad \mathfrak{B}'=h_a,$$

e posto:

$$\mathfrak{A}_1=C,\qquad \mathfrak{B}_1=C_\infty+3\ h,$$

onde è

$$\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{B}_1,$$

risulta:

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'=(\mathfrak{A}_1+h_a)+h_b,\qquad \mathfrak{B}+\mathfrak{B}'=(\mathfrak{B}_1+h_b)+h_a. \tag{130}$$

Nessuna limitazione vien posta nella risoluzione del nostro problema colla scelta particolare fatta di P_1, P_2, P_3 e quindi delle curve $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ passanti per A, B, perchè sul modello di rigata astratta $\overline{F}$, che rappresenta senza eccezione le coppie di punti di C, si stabilisce, attraverso alle eccezioni della trasformazione birazionale fra F ed $\overline{F}$, la piena uniformità fra le curve ognuna delle quali rappresenta le coppie con un punto fisso; e le curve corrispondenti alle particolari $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, sopra considerate, ritornano così ad esser irriducibili, come quelle che corrispondono agli altri punti di C.

Premesso tutto ciò, poichè la funzione razionale R ha la $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'$ come curva zero (del 1^0 ordine) e la $\mathfrak{B}+\mathfrak{B}'$ per curva polare (del 1^0 ordine) (¹), soppresse le curve h_a, h_b che risultano d'indeterminazione, R riducesi ad una funzione razionale nulla semplicemente in $z=0$ e infinita in $z=\infty$, ossia (cangiando eventualmente z in $a\,z$, con a costante non nulla) nella funzione z.

La (129) porge allora

$$z = e^{v-w}$$

e la rappresentazione di $\overline{F}$ sul cilindro si presenta sotto la forma:

$$x=\wp\,(u), \qquad y=\wp'\,(u), \qquad z=e^{v-w},$$

conformemente al n. 58, che assegna tali funzioni come quelle con cui si può razionalmente comporre ogni funzione quasi iperellittica inerente ad $\overline{F}$.

Per ciò che concerne e^{w}, la sua espressione come quoziente di due ϑ, si ottiene subito, tenuto conto che w è normale su C coi punti logaritmici P_1, A; sicchè, se si prende p. es. per P_1 il punto ($x=e_1$, $y=z=0$), ove $e_1=\wp\,(\pi\,i)$ è uno zero del trinomio a secondo membro della (125) (²) e per A un punto

---

(¹) In verità la componente $3h$ di $\mathfrak{B}$ è curva polare di 1^0 ordine in quanto si riguardi semplice, ma nel fatto h è curva polare del 3^0 ordine.

(²) Ved. ad es. [**81**, pp. 25, 28].

qualunque di C, corrispondente al valore u_0 di u, viene (n. 53, Oss. 2ª):

$$e^{w} = \frac{\vartheta\left(u + \frac{1}{2}\,\omega\right)}{\vartheta\left(u - u_0 + \pi i + \frac{1}{2}\,\omega\right)} \qquad (131)$$

Se poi si assumono per $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ due curve qualsiasi dello stesso sistema S o di un altro sistema S, non si fa altro in definitiva che operare una sostituzione lineare (non degenere) nella z, onde risulta

$$z' = \frac{a z + b}{c z + d} \qquad (a d - b c \neq 0)\ ,$$

con a, b, c, d funzioni ellittiche di u.

61. Le trasformazioni di 1ª e di 2ª specie di una superficie quasi iperellittica di Jacobi. — D'ora innanzi parlando della superficie quasi iperellittica di Jacobi relativa ad una curva ellittica C, colla coppia neutra A, B, intendiamo di riferirci ad un modello proiettivo F senza eccezione, privo di punti multipli, della varietà delle coppie di punti di C. Per gli integrali u, v di F, il primo di 1ª specie e il secondo di 2ª specie, e per la tabella dei rispettivi periodi, ci riferiamo ai nn. 50, 58.

A illustrazione di quanto esponemmo in generale sulle trasformazioni di 1ª e di 2ª specie di una V_π quasi abeliana di Jacobi e sulle varietà eccezionali per queste trasformazioni (nn. 21, 32, 33), riprendiamo la questione nel caso particolare della superficie F, ripetendo, anche per chiarezza e completezza, talune argomentazioni già svolte o soltanto accennate in generale.

Designamo con h (mutando le notazioni usate in generale, che sarebbero qui incomode) le generatrici di F, imagini delle g^1_2

di C; e con d le direttrici di grado 1, costituenti il sistema continuo S, ∞^1, d'indice 2, manifestamente completo, ognuna delle quali rappresenta le coppie di C con un punto fisso. Fra le d vi sono le due curve logaritmiche $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ imagini rispettive delle coppie con un punto fisso in A e di quelle con un punto fisso in B. Designata con h_0 la particolare generatrice, che rappresenta la g_2^1 canonica neutra di C e con O il punto, situato su h_0, che rappresenta la coppia A, B, le $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ son le due d uscenti da O.

L'inviluppo di S è imagine delle coppie di punti coincidenti di C. Nell'ipotesi, che stiamo considerando, in cui A, B son distinti, l'inviluppo non passa per O. Lo continuiamo a chiamar C, prendendolo addirittura a imagine della curva di partenza.

Il punto di F, imagine di una coppia P, Q di punti di C, si costruisce allora per intersezione delle due d, che escono da P, Q; e, viceversa, la coppia di C, corrispondente ad un punto di F, è data dai contatti con C delle due d uscenti da quel punto.

Su tutte le generatrici l'integrale u è costante; mentre vi è una sola generatrice in cui sia costante anche v: è la h_0. Ciò risulta sia dal teorema d'ABEL nel campo γ fissato su C (n. 25), sia dal fatto che su h_0 l'integrale w diviene di 1ª specie (epperò costante), perchè vengono a coincidere i suoi due punti logaritmici.

Consideriamo ora le trasformazioni di 1ª specie, α, e di 2ª specie, β, esistenti su F, in quanto superficie di JACOBI della C, di genere virtuale 2.

Una α è generata dalle coppie di F, che rappresentan due coppie di punti di C, la cui somma varia in una g_4^2 di γ. Ogni gruppo G della g_4^2 è rappresentato da un quadrilatero di direttrici, le cui coppie di vertici opposti son tre coppie di α.

Le coppie di α generano un'involuzione I, rappresentata su F dalle

$$(132) \qquad u+u'\equiv a, \quad v+v'\equiv b \quad \text{(modd. periodi)},$$

ove a, b denotano costanti caratteristiche di α.

La trasformazione di 1ª *specie* α *muta generatrici in generatrici,* perchè la prima delle (132) rappresenta una g_2^1 entro l'ente ellittico delle generatrici. È la g_2^1 subordinata da α. La designeremo con (α). Ma si può anche dire: Una coppia qualunque H di una g^1 non canonica di C, non è neutra per $|G|_\gamma$ e quindi essa dà, rispetto a $|G|_\gamma$, un resto H', che è la coppia omologa di H in α. Variando H nella g_2^1, la H' descrive la g_2^1 residua della data rispetto alla serie assoluta $|G|$.

La α *muta la generatrice* h_0 *in un punto* O', *mentre il punto* O *di* h_0 *si muta in una generatrice* h_0' *per* O'. Infatti, per una coppia canonica H, distinta da A, B, passa un sol gruppo di $|G|_\gamma$, che lascia un resto H', il quale, pel teorema del resto nel campo γ, applicato alle serie $|G|_\gamma$, $|A+B|_\gamma$, riman fisso al variare di H nella g_2^1 canonica. Esso è rappresentato dal punto O', di cui nell'enunciato. Poichè inoltre i gruppi di $|G|_\gamma$ per A, B dànno una serie g residua, che è poi la residua della g_2^1 canonica neutra rispetto a $|G|$, così, detta h_0' la generatrice imagine di questa g_2^1, il punto O si trasforma mediante α in h_0', contenente O'.

La proprietà osservata è ben d'accordo col fatto che le generatrici son curve eccezionali di 2ª specie, così che nessuna di esse può mutarsi birazionalmente in un punto (semplice), senza che un suo punto si muti in una linea.

La corrispondenza fra l'intorno di 1° ordine di O e i punti di h_0, indotta da α, è una proiettività, nella quale sono omologhi gli elementi lineari uscenti da O, O' sulle generatrici h_0, h_0'.

Cangiando α, restano immutati gli elementi associati O, h_0. Vi son ∞^1 trasformazioni per le quali resta immutata anche h_0', mentre O' scorre su questa generatrice. Sono le trasformazioni di I^a specie che provengono dalle g_4^2 neutre equivalenti, nel campo assoluto, alla g_4^2 donde ha preso origine α.

La α *muta l'una nell'altra le curve logaritmiche* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Invero, siccome i gruppi della g_4^2, che genera α, i quali passano pel punto A, passano in conseguenza per B, se un gruppo G contiene una coppia passante per A, il resto di questa coppia nel gruppo, è una coppia passante per B.

Analogamente α scambia tra loro le due direttrici d pel punto O'.

Come si comporta α nei riguardi delle altre direttrici?

Una d non passante per O od O' trasformasi in una curva e passante semplicemente per O, O' in corrispondenza alle intersezioni di d con h_0, h_0'. Due generiche e si tagliano fuori dei punti O, O', che risultan base pel sistema ∞^1 S' trasformato di S, in un sol punto omologo del punto comune alle due d, da cui esse provengono. Sicchè le curve e hanno il grado virtuale 3, e, come direttrici, equivalgono algebricamente alla somma di una d e di una generatrice. Ognuna di esse pertanto incontra una generica d in due punti. Per un punto generico di F passano due e.

Il sistema S' delle e è contenuto totalmente in un più ampio sistema di curve aventi il punto base O. Invero, il sistema lineare $|e|$, virtualmente privo del punto base O, a norma del teorema di RIEMANN-ROCH su F, ha la dimensione 2, e, variando e in S', $|e|$ descrive un sistema S'', ∞^3, la cui serie caratteristica è una g_3^2 completa sopra una curva ellittica: onde il sistema S'' è completo e contiene *tutte* le direttrici di grado 3 di F [**77**, n. 9], ivi comprese le somme delle d e delle h. Imponendo al sistema S'' il punto base O, si perviene ad un sistema ∞^2, Σ, completo (come sistema col punto base assegnato O), che contiene totalmente le e di S' e le somme $d+h$, passanti per O (cioè le $d+h_0$ e le $\mathfrak{A}+h$, $\mathfrak{B}+h$).

Una curva di Σ, in quanto passa per O, è mutata da α in una curva passante per O (ivi compreso il caso in cui la curva passasse per O', nel qual caso la curva trasformata si spezza in una d e in h_0). La curva trasformata è pertanto una direttrice di grado 3 passante per O e appartiene perciò al sistema Σ, che contiene appunto ogni direttrice siffatta. Dunque *il sistema* ∞^2 Σ, *di grado effettivo* 2 *e di indice* 2 *di curve ellittiche, è mutato in sè da ogni trasformazione di* 1ª (*e quindi di* 2ª) *specie.*

Abbiamo enunciato che Σ è d'indice 2, cioè che per due punti generici di F passano due curve di Σ, perchè il fatto è già acquisito per le curve di Σ passanto per O, O' e costituenti il sistema S'; e d'altronde, al variare di α, O' può assumere una posizione generica sopra F [1].

Le curve di Σ che passano per O e per un altro punto O' di F esterno ad h_0, son mutate dalla trasformazione di 1ª specie che ha per secondo punto fondamentale O', nelle curve d aumentate di h_0. Ogni curva di Σ può cioè considerarsi una e, inerente a una conveniente α. E Σ si costruisce tutto applicando ad una d o ad una e le ∞^2 trasformazioni di 1ª (o di 2ª) specie. Fanno eccezione soltanto le due d passanti per O, che son logaritmiche per w — le curve $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — perchè esse son mutate l'una nell'altra dalle ∞^2 trasformazioni di 1ª specie e mutate ciascuna in sè dalle ∞^2 trasformazioni di 2ª specie.

A chiarimento ulteriore del modo di agire delle trasformazioni di 1ª (e di 2ª) specie sui vari sistemi di direttrici, si può aggiungere che ogni sistema completo di direttrici, privo di punti base, si muta in un sistema completo di direttrici col punto base O e di grado virtuale superiore di 2 unità a quello di partenza (sicchè ampliando il sistema trasformato, col prescinder dal punto base, si viene in definitiva a far la somma del sistema di partenza col fascio delle generatrici); mentre ogni sistema completo di direttrici col punto base O si muta in sè.

Il sistema ∞^2 Σ è l'analogo, sulla F, superficie di JACOBI quasi iperellittica, del sistema designato collo stesso simbolo

---

[1] Invero, una coppia generica di C, insieme ad una coppia canonica generica dà un gruppo G individuante una $|G|_\gamma$ e quindi una α il cui punto O' sta nella imagine della prima coppia.

[**24**, p. 307] sopra un'ordinaria superficie di JACOBI. Soltanto qui Σ ha un punto base O (e una curva fondamentale h_0) e le sue curve son ellittiche, anzichè di genere 2.

Esponiamo anche altre proprietà del sistema Σ, corrispondenti a quelle del sistema Σ sopra una superficie di JACOBI.

Il sistema Σ è birazionalmente identico alla superficie F, che lo contiene.

Infatti, esso consta di ∞^1 fasci di curve $|e|$, ottenuti aggiungendo ad una d le singole h, e la serie ∞^1 di questi fasci è birazionalmente equivalente al fascio delle h.

Del resto la proprietà consegue pure, in questo caso quasi iperellittico, collo stesso ragionamento esposto pel caso iperellittico a pag. 306 della Memoria [**24**]: si tratta di riferire il ragionamento agli integrali semplici u, v e alla g_2^1 canonica neutra, definita sulla curva e generica, dalla coppia dei punti segati su e, fuori di O, dalle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$. Perciò si può affermare che:

Una curva e di Σ, distinta dalle curve del sistema contenenti come parte una delle curve logaritmiche, non è mutata in sè da alcuna trasformazione di 2ª specie diversa dall'identità ed è mutata in sè da una sola trasformazione di 1ª specie, che vi subordina la g_2^1 canonica neutra. Esiste una ed una sola trasformazione di 1ª o di 2ª specie che muta l'una nell'altra due curve generiche di Σ.

Una conseguenza importante se ne deduce. Si prevede *a priori*, considerando F come limite di un'ordinaria superficie di JACOBI, che la serie caratteristica di Σ, sopra una curva e generica, sia la relativa g_2^1 canonica neutra.

Ecco la dimostrazione di questa notevole proprietà. Sieno P, Q le intersezioni, fuori di O, delle curve $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ con una generica e. La coppia P, Q appartiene alla g_2^1 canonica e vi è quindi una trasformazione α in cui P, Q si corrispondono e che muta in sè e. D'altronde, se per P, Q passasse un'altra curva e' di Σ, distinta da e, la trasformazione α' portante e in e' scambierebbe fra loro i punti P, Q. Ma ciò è assurdo, perchè P, Q individua α, che muta in sè la e, e non può appartenere ad una α' che porti e in una curva distinta e'. Dunque pei punti P, Q passa la sola curva e: cioè la e' è venuta infinitamente vicina ad e e pertanto P, Q è un gruppo caratteristico su e. Tanto basta per enunciare, come si è già detto, che:

La serie caratteristica di Σ, sopra una curva generica del sistema, è la g_2^1 canonica neutra.

Osservazione 1ª. — L'identità birazionale del sistema Σ e della superficie F, permette di stabilire su F (in modo analogo a quanto Enriques-Severi fanno a pag. 309 della Memoria citata) quella certa *dualità*, che associa ad ogni proprietà di punti e curve e di F una proprietà (duale), ottenuta scambiando le veci dei punti e delle curve e operando i cangiamenti che da questi conseguono.

Osservazione 2ª. — L'insieme delle trasformazioni birazionali della F in sè, anche quando F (cioè C) è a moduli generali, è notevolmente più ampio di quanto non apparisca a prima vista, considerando F come superficie di Jacobi della curva C di genere virtuale 2 (ved. a tal proposito, in generale, il n. 48).

Intanto i sistemi delle α, β dipendono dalla scelta su C della coppia A, B che può variar sulla curva in ∞^2 modi, lasciando così larga variabilità ai sistemi delle α, β.

Ma poi vi sono su F le trasformazioni α', β' provenienti rispettivamente dalle trasformazioni di 1ª e di 2ª specie di C in sè. Ed esse sono distinte dalle precedenti α β, perchè una α' proviene da una g_4^2 di C composta con una g_2^1 della curva; e fra queste g_4^2 ve n'è una sola appartenente a γ: quella composta colla g_2^1 canonica. Sicchè v'è una sola α' che sia una α.

Però, siccome variando la coppia A, B varia la $|A+B|$, che è poi la g_2^1 canonica del campo γ, ogni g_2^1 di C può in definitiva fungere da serie canonica; onde le α' si vengono a ritrovar tutte fra le trasformazioni del sistema descritto dalle α al variare di A, B. E fra i prodotti delle coppie di trasformazioni di questo sistema più ampio si ritrovano non soltanto le β, ma anche le β'; ecc. ecc.

Il sistema ∞^1, abeliano, algebrico, delle β' è naturalmente intransitivo. Quali sono le sue traiettorie (necessariamente algebriche)? Poichè le trasformazioni di 1^a e di 2^a specie di C in sè, mutano coppie di punti coincidenti in coppie di punti coincidenti, le α', β' lasciano invariata la curva C inviluppo del sistema S delle d. Pertanto le traiettorie richieste costituiscono un fascio lineare di grado zero $|C|$, che è di quadrisecanti delle generatrici. Così C viene ad essere equivalente ad una conveniente curva $2(2d-h)$, perchè la forma quadratica fondamentale $\lambda + 2\lambda\mu$ di F assume il valore zero soltanto per $\lambda = 4$, $\mu = -2$.

62. I PUNTI DOPPI DELL'INVOLUZIONE I GENERATA SU F DA UNA TRASFORMAZIONE DI 1^a SPECIE. — I punti doppi dell'involuzione generata sopra una superficie di JACOBI da una trasformazione di 1^a specie son notoriamente in numero di 16 e provengono dai gruppi della corrispondente g_4^1 della curva di genere 2, costituiti ciascuno da una coppia contata 2 volte.

Nel caso della nostra F si trovano agevolmente i punti doppi di I. Essi debbon giacere anzitutto sulle 4 generatrici doppie per la g_2^1 (α) subordinata da α sul fascio ellittico delle generatrici; e, siccome su ciascuna di queste, α subordina una omografia involutoria (di cui le intersezioni della generatrice considerata colle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ costituiscono una coppia), così su ognuna delle predette 4 generatrici si ha una coppia di punti doppi (armonica colla coppia dei punti staccati da $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ sulla generatrice stessa): in tutto dunque 8 punti doppi (1).

Che cosa accade dei 16 punti doppi della $\bar{\alpha}$ relativa ad una superficie di JACOBI $\bar{F}$, quando $\bar{F}$ tende ad F e insieme $\bar{\alpha}$ ad α?

(1) Ciò è conforme d'altronde ad un risultato generale che ho altrove stabilito circa le involuzioni di 2^0 ordine con un numero finito di coincidenze sopra una data superficie [63, p. 413] e che trovasi riprodotto nelle mie Lezioni [76, p. 353].

Per rispondere, basta assumer come $\overline{C}$ una quartica piana con un nodo $\overline{P}$ e far tendere $\overline{C}$ ad una quartica C con due nodi P, Q, dei quali P sia il limite di $\overline{P}$ e Q compaia *ex novo*. Se $\overline{C}$ è abbastanza vicina a C, si può fissare una legge di variazione di due punti $\overline{X}$, $\overline{Y}$, genericamente scelti su $\overline{C}$, i quali tendano ai limiti X, Y di C (scorrendo p. es. su due rette assegnate). Allora la g_4^2 segata su $\overline{C}$ dalle coniche aggiunte per $\overline{X}$, $\overline{Y}$, ha per limite la g_4^2 neutra segata su C dalle coniche aggiunte neutre per X, Y e le coppie doppie della prima serie, segnate sn $\overline{C}$ dalle coniche aggiunte bitangenti, hanno per limiti le coppie doppie della seconda e le coppie doppie degeneri. Le prime son segnate su C dalle coniche aggiunte neutre bitangenti proprie a C e le seconde dalle coniche aggiunte neutre, ognuna k delle quali passa (oltrechè naturalmente per X, Y) pel nodo acquisito Q, toccando altrove C. Ciascuna di queste ultime va contata 2 volte nel limite. Invero, associato uno dei punti di contatto N di k con C, al punto Q, concepito come appartenente ad uno dei due rami di C uscenti dal nodo Q, s'ottiene una coppia N, Q, che, raddoppiata, fornisce una coppia doppia degenere. Un'altra coppia, birazionalmente distinta dalla precedente, la quale fornisce pure una coppia doppia degenere, è data da N, Q, ove però Q si consideri appartenente all'altro dei rami di C per Q.

Si hanno così 8 coppie doppie degeneri, provenienti dai 4 punti doppi della g_2^1 segata su C dalle coniche per P, Q, X, Y. Vi sono poi 8 coppie doppie proprie, provenienti dalle coppie doppie della g_4^2 neutra (¹). Ritroviamo in tal modo le 16 coppie limiti delle coppie doppie della g_4^2 su $\overline{C}$.

Si osserverà che, dal punto di vista invariantivo, due punti, i quali, raddoppiati, dànno una coppia doppia degenere, sono uno dei punti della coppia neutra A, B ed uno dei punti doppi della g_2^1 residua della A, B rispetto alla data g_4^2 neutra.

(¹) Numero che s'ottiene applicando la nota formula generale di Jonquières. [**69**, p. 244].

Passando alla superficie di JACOBI $\overline{F}$ e al suo limite F, e chiamando $\overline{\alpha}$ la trasformazione di 1ª specie di $\overline{F}$ che (fissata una conveniente legge) ha per limite α, si conclude che 8 dei punti doppi di $\overline{\alpha}$ vanno a finire in altrettanti punti doppi di α ed 8 vanno invece a finire nelle 8 intersezioni delle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ colle d uscenti dai 4 punti dove l'inviluppo C di S incontra h_0'. Basta, per concluder ciò, tener conto che sull'inviluppo C la g_2^1 residua, cui sopra si è alluso, è segnata dalle coppie di curve d uscenti dai punti di h_0'.

63. LA SUPERFICIE DI PLÜCKER COME SUPERFICIE DI KUMMER NEL CAMPO QUASI IPERELLITTICO. — Occorre raccoglier le fila di quanto siamo andati finora esponendo sulla F, onde pervenire alla costruzione, nel campo quasi iperellittico, del modello proiettivo analogo alla superficie di KUMMER del campo iperellittico.

All'uopo, pensiamo ad una superficie Φ, i cui punti siano in corrispondenza birazionale senza eccezioni colle coppie di I ed osserviamo anzitutto che Φ *è razionale* (e non soltanto regolare, come nel caso iperellittico) (1). Invero, al fascio delle generatrici corrisponde su Φ un fascio razionale di curve razionali, ogni curva di questo rappresentando una coppia di generatrici coniugate nella g_2^1 (α). Indicheremo queste curve razionali con η.

Inoltre α associa a coppie e, e' le curve di Σ e la curva $e+e'$, composta con una di queste coppie, ha per imagine su Φ una curva ellittica ε, in corrispondenza con ciascuna delle e, e'. Mentre $e+e'$ varia, la curva ε si mantiene equivalente a se stessa (attesa la regolarità, anzi la razionalità di Φ) e de-

(1) Sarebbe errato porre *a priori* la condizione che Φ sia priva di punti multipli, perchè tale condizione potrebbe esser incompatibile (come avviene di fatto nel nostro caso, secondo vedremo in seguito) colla condizione dell'assoluta biunivocità della corrispondenza fra Φ ed I.

scrive un sistema, ∞^2, di grado 4, perchè due $e+e'$ si tagliano, fuori di O, in 8 punti distribuiti in 4 coppie di I.

Occorre, pel seguito, determinare il luogo del punto di Φ, che rappresenta le coppie di I, conteneuti il punto fondamentale O.

Facciasi muovere un punto P sopra una generica e, tendendo al punto E staccato su e da h_0'. Allora la coppia di I, individuata da P, tende alla coppia E, O (intendendosi O come origine dell'elemento lineare di e'). Se invece P tende lungo e al punto O, la coppia di I contenente P tende alla coppia O, E', ove E' è il punto staccato da h_0' su e' (e intendendosi O come origine dell'elemento lineare di e).

Pertanto l'insieme delle coppie di I alle quali appartiene O, è rappresentato su Φ da una curva η_0, che è proprio una η, e che, al pari di ogni altra η, è segata in due punti distinti da una ε generica. Che ogni η sia segata in una coppia di punti da una ε, risulta da ciò che i 4 punti comuni ad e, e' e ad una coppia della g_2^1 (α) si distribuiscono in due coppie di I.

Le coppie di I contenenti l'altro punto fondamentale O' di α, son invece rappresentate su Φ da una curva λ, che è fondamentale per le ε (cioè che non ha intersezioni con una ε generica). Questa curva incontra in un punto, imagine della coppia O, O', la curva η_0.

Per esaurire l'esame dei luoghi in qualche modo singolari per α, occorre vedere come si trasforma, nel passaggio da F a Φ, la coppia $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, e come si trasformano le 4 generatrici doppie della g_2^1 (α).

Quanto alle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, si ricordi che esse son coniugate in α e che una $e+e'$ sega $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, fuori di O, in 4 punti distribuiti in due coppie di α; sicchè il luogo richiesto è una curva a di Φ, in corrispondenza birazionale con ciascuna delle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, cioè ellittica, la quale vien segata in 2 punti da una generica ε.

Quanto alle generatrici doppie di (α), ognuna di esse si trasforma in una curva doppia del fascio delle η. La diremo una curva μ.

Ciò premesso, osserviamo che una curva ε ha un punto doppio, variabile con ε su tutta la F, il quale proviene dall'unica coppia di α situata sulle e, e' (la coppia delle intersezioni di queste curve, fuori di O). Pertanto il sistema lineare $|\varepsilon|$, al quale appartengono le ε, ha la sua curva generica, $\bar{\varepsilon}$, senza punti doppi e di genere 2. Il sistema è inoltre privo di punti base, perchè nessuna curva di F si muta in un punto, passando da F a Φ, ed è di grado (virtuale = effettivo) 4 e di genere (virtuale = effettivo) 2. La sua dimensione vale 3 (perchè la serie caratteristica completa è una g_4^2).

Infine $|\varepsilon|$ è semplice. Questo è un punto delicato, che si stabilisce come segue. Il sistema $|\varepsilon|$ sega su a una serie g_2, che ha dimensione almeno uguale ad 1, perchè contiene coppie variabili, e l'ha esattamente uguale ad 1, perchè appartiene ad una curva ellittica. Per una coppia di questa g_2^1, che designeremo in seguito col simbolo che le è proprio $|(\varepsilon, a)|$, passano dunque ∞^2 curve $\bar{\varepsilon}$, cioè le dette coppie son neutre pel sistema lineare. Se pertanto $|\varepsilon|$ è composto, necessariamente, con un'involuzione J di 2^0 ordine, le coppie della $|(\varepsilon, a)|$ fanno parte di quest'involuzione; e ne fanno parte altresì le coppie residue dei gruppi di $|(\varepsilon, a)|$ rispetto alla serie caratteristica del sistema $|\varepsilon|$, in quanto i gruppi di questa serie constano di due coppie di J. Dunque la $g_2^{1\,\prime}$ — diciamola brevemente $\bar{g}$ — staccata su una $\bar{\varepsilon}$ (e quindi anche su una ε, che è una particolare $\bar{\varepsilon}$) dalle $\bar{\varepsilon}$ per una coppia di $|(\varepsilon, a)|$, appartiene ad J; cioè la g_4^2 caratteristica sulla $\bar{\varepsilon}$ è composta con g e quindi la coppia prescelta su a appartiene a $\bar{g}$.

Ora questa conclusione è assurda. Invero, nella corrispondenza birazionale fra ε ed e, la coppia (ε, a) è la trasformata della coppia staccata su e, fuori di O, da $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, la quale, come si è visto (n. 61) appartiene alla g_2^1 subordinata su e dalla trasformazione di 1ª specie che la muta in sè; mentre la coppia riunita nel nodo di ε, la quale appartiene pur essa a $\bar{g}$, proviene dalla coppia di α giacente in e, che invece non appartiene affatto, per e generica, alla g_2^1 subordinata su e dalla trasformazione di 1ª specie che lascia fissa la curva.

Tanto basta per concludere che $|\varepsilon|$ è semplice. Mediante $|\varepsilon|$ si può dunque ottenere un'imagine proiettiva di Φ; e sarà una superficie del 4^0 ordine a sezioni piane di genere 2. La curva a, luogo di coppie neutre del sistema $|\varepsilon|$, tagliata in due punti da una generica $\bar{\varepsilon}$, si muta perciò in una retta doppia nodale b della superficie del 4^0 ordine, che continueremo a chiamare Φ, per quanto non sia più un modello senza eccezioni di I, perchè la curva a si è mutata nella retta nodale h di Φ e la curva fondamentale λ si è mutata in un punto L della imagine di η_0, il quale diviene punto base semplice per le ∞^1 sezioni piane d' corrispondenti alle d di F. E queste dunque hanno per imagini le sezioni di Φ coi piani tangenti uscenti da L (e formanti un sistema d'indice 2).

Quanto alle η (ivi compresa la η_0), poichè esse segano le ε ed anche la a in due punti, le loro imagini sulla superficie del 4^0 ordine son le ∞^1 coniche segate su Φ dai piani per b.

Le 4 curve μ, equivalendo ciascuna a $2\,\eta$, hanno per imagini su Φ 4 rette m appoggiate a b ciascuna in un punto M ed il piano passante per una retta doppia e per una m non incontra altrove Φ, cioè *tocca la superficie lungo tutta la retta.*

Ogni piano per b è tangente alla superficie nei due punti dove la conica da essa segnata ulteriormente su Φ incontra b: *vi sono quattro di questi piani pei quali i punti di contatto coincidono e son precisamente quelli che contengono le rette m.* Sulla curva originaria $\mathfrak{A}$ (o $\mathfrak{B}$) i 4 punti M hanno per corrispondenti i punti doppi della g^1_2 segatavi dalle generatrici.

Su b vi sono poi 4 punti cuspidali K, i quali son le imagini dei punti doppi della g^1_2 segata su $\mathfrak{A}$ (o $\mathfrak{B}$) dalle curve ε.

Gli 8 punti doppi di I su F, in quanto son distribuiti a coppie sulle generatrici doppie della $g^1_2\,(\alpha)$, le quali hanno per imagini le m, hanno per imagini 8 punti di Φ, che appartengono a coppie a queste rette. Essi sono esterni alla retta doppia b, perchè su F gli 8 punti doppi di I non stanno su $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$.

In virtù dello stesso ragionamento che ENRIQUES-SEVERI fanno, nei riguardi della superficie di KUMMER, a p. 342 della [**24**] o di un risultato di carattere più generale [**78**, p. 353], si può affermare che gli 8 punti indicati di Φ son punti doppi conici.

La retta doppia nodale b e gli 8 punti doppi conici ad essa esterni, così trovati, bastano a caratterizzare Φ. Infatti le superficie del 4^0 ordine con retta doppia sono ∞^{25} (1) e quelle con 8 punti doppi nodali son perciò ∞^{17}. Esse formano un sol sistema algebrico irriducibile (2) e di questo fanno parte le superficie ottenute nel modo descritto come superficie di KUMMER nel campo quasi iperellittico. Ora è facile contare i parametri da cui queste ultime dipendono. Si trova ch'essi son 17; per modo che le superficie quasi iperellittiche vengon ad abbracciare la totalità delle superficie del 4^0 ordine con retta doppia e 8 punti doppi conici.

Invero, data C e ivi la coppia neutra A, B, il che importa (n. 21, Oss. 1ª)la scelta di 2 moduli, rimane fissato *direttamente su* C il sistema ∞^2, Σ, delle serie ∞^1 ε, di coppie di punti, e quindi il sistema lineare $|\varepsilon|$, costituito da ∞^3 serie semplicemeute infinite $\bar{\varepsilon}$ di coppie di punti di C. Resta dopo ciò la scelta di una proiettività fra il sistema $|\varepsilon|$ e il sistema dei piani dello spazio S_3 e con questo viene individuato il modello Φ; il quale dunque, dopo la scelta dei 2 moduli, resta determinato a meno di una delle ∞^{15} omografie di S_3. Così risultano proprio 17 i parametri essenziali per determinare una Φ, giacchè è chiaro che, viceversa, Φ determina i valori di tali parametri.

La superficie Φ, a cagione dei precedenti storici che tosto

(1) Ved. p. es. [**16**, p. 163].

(2) Ciò deriva dal fatto che tali superficie (razionali) son tutte rappresentabili con sistemi lineari di quartiche piane con un punto base doppio e 8 punti base semplici, così disposti che vi sieno 8 curve fondamentali, le quali dieno luogo agli 8 punti doppi conici. Ved. [**16**, p. 165].

rievocherò, si deve giustamente chiamare *superficie di* PLÜCKER. Si ha riassumendo il notevole teorema:

La superficie quasi iperellittica di KUMMER *non è che una superficie di* PLÜCKER, *cioè una superficie (razionale) del* 4^0 *ordine con retta doppia e 8 punti doppi conici, fuori di questa. Tali singolarità la caratterizzano pienamente come superficie quasi iperellittica. Essa ha il massimo numero di punti doppi isolati fra le quartiche con retta doppia.*

L'ultima affermazione è nota (ROHN, 1886). Essa è deducibile dalla rappresentazione piana semplice della superficie o dalla rappresentazione di questa sopra un piano doppio con sestica di diramazione. Dal nostro punto di vista la cosa è pressochè evidente, in quanto, se la superficie possiede 8 punti doppi conici (almeno), essa è senz'altro quasi iperellittica, cioè imagine di un'involuzione I sopra una conveniente F; epperò non ha, fuori della retta doppia e dei punti doppi isolati, ulteriori punti singolari.

OSSERVAZIONE — La conica η_0, il punto L su essa e le sezioni piane d' praticate coi piani tangenti a Φ passanti per L, *non hanno nessun valore intrinseco, nei riguardi della superficie* Φ. Variando la doppia neutra A, B variano su F le h_0, h_0' nel fascio delle generatrici e i punti O, O' sulle generatrici h_0, h_0'. La variazione si può ottenere p. es. mantenendo fermo il punto A, cioè la curva $\mathfrak{A}$ su F, e trasportando B su C mediante le ∞^1 trasformazioni di 1ª specie di C in sè, cioè mutando α in una trasformazione di 1ª specie, birazionalmente equivalente, di un altro sistema ∞^2, per mezzo di una delle trasformazioni β' di F in sè (n. 61, Oss. 2ª). Assunta Φ come imagine della nuova involuzione, mediante il sistema lineare trasformato del primitivo $|\varepsilon|$, si viene in definitiva a prendere come η_0 un'altra qualsiasi conica η (distinta dalle coniche ridotte alle rette doppie m) e come punto L un punto qualunque di questa conica, fuori della retta doppia.

64. Altre proprietà della superficie di Plücker. — È noto (¹) a quali eleganti proprietà geometriche dà luogo la classica *configurazione di* Kummer costituita dai 16 punti doppi e dai 16 piani tangenti alla superficie di Kummer lungo altrettante coniche. Quando la superficie di Jacobi $\overline{F}$ tende alla rigata ellittica F e con una legge conveniente si è fissata una trasformazione di 1ª specie $\overline{\alpha}$ di $\overline{F}$, che abbia per limite una determinata trasformazione di 1ª specie α di F, si può, in corrispondenza, costruire un modello $\overline{\Phi}$ della superficie di Kummer derivante da $\overline{F}$, il quale ha per limite la nostra Φ.

A che cosa si riducono le proprietà della configurazione di Kummer, passando al limite sulla Φ?

Occorre intanto fissare qual'è il limite degli 8 punti doppi conici di $\overline{\Phi}$ dei quali non resta traccia apparente sul limite Φ. Basta all'uopo ricordare la fine del n. 62, dove si è indicato il limite dei punti doppi di $\overline{\alpha}$ quando $\overline{F}\to F$. L'inviluppo C di S ha per imagine il contorno apparente di Φ da L. Poichè il cono circoscritto da L a Φ è dell'ottavo ordine, il contorno predetto incontra b in 8 punti, dei quali 4 sono i punti cuspidali di Φ (²) e gli altri 4 coincidono a coppie coi due punti di contatto del piano bL, che è doppio nell'inviluppo dei piani tangenti di Φ. Poichè i limiti dei punti doppi di $\overline{\Phi}$ sono determinati dalla configurazione limite, la quale è individuata dagli 8 punti doppi conici di Φ (ciò che risulta meglio dalle proprietà indicate di tale configurazione), i limiti dei punti doppi conici di $\overline{\Phi}$, che vanno in b, sono, fra le intersezioni di b col contorno apparente da L, quelle indipendenti dalla scelta di L (n. 63, Oss.), cioè i punti cuspidali. Concludendo:

Quando una superficie di Kummer $\overline{\Phi}$ *tende ad una superficie di* Plücker Φ, *dei* 16 *punti doppi di* $\overline{\Phi}$, *otto vanno verso altrettanti punti doppi conici di* Φ *e gli altri otto tendono a coppie ai* 4 *punti cuspidali di* Φ.

(¹) Ved. p. es. [**24**, p. 343].
(²) Ved. p. es. [**78**, p. 267].

Abbiamo già alluso (n. 61, Oss. 1ª) ad una certa dualità fra i punti di F e le curve ε di Σ; essa si traduce in una dualità tra i punti ed i piani tangenti di Φ. Così la superficie ha 4 punti cuspidali, cioè 4 punti della retta doppia i cui due punti tangenti coincidono e, dualmente, 4 *piani cuspidali*, cioè 4 piani per la retta doppia i cui due punti di contatto coincidono; ha una retta di punti doppi, che è insieme asse di un fascio di piani tangenti doppi; è di 4° ordine e di 4ª classe, ecc.

È prevedibile che, correlativamente agli 8 punti doppi conici, essa contenga 8 piani tangenti (doppi per l'inviluppo dei piani tangenti), i quali toccano Φ lungo altrettante coniche (limiti di 8 delle 16 coniche di Φ). Nel fatto questi piani si ottengono come segue.

Sia P uno dei punti doppi della I su F. Il sistema delle ∞^1 curve ε per P è mutato in sè da α, la quale subordina entro l'ente ellittico ∞^1 una g_2^1 con 4 elementi doppi. Vi son cioè 4 curve ε per P mutate in sè da α. Ognuna di esse è rappresentata su Φ da una curva che, raddoppiata, deve dare una sezione piana, cioè da una conica situata in un piano tangente a Φ lungo tutta la conica. Le coniche che così si ottengono sono 8, perchè ogni ε mutata in sè da α contiene 4 punti doppi. Dunque:

Alla superficie di PLÜCKER Φ *spettano, oltre agli 8 punti doppi isolati, 8 piani tangenti lungo altrettante coniche. Per ogni punto doppio passan 4 di questi piani e ogni piano contiene 4 punti doppi.*

Ricordiamo inoltre che:

Gli 8 punti doppi son a coppie distribuiti sulle 4 rette di contatto di altrettanti piani tangenti passanti per la retta doppia.

E per la dualità cui si è più volte alluso:

Gli 8 piani tangenti lungo coniche passano a coppie per certe 4 rette situate sui piani tangenti nei punti cuspidali.

Si hanno insomma tutte le proprietà limiti di quelle spettanti alla configurazione di KUMMER; le quali posson essere espresse da un simbolismo analogo a quello di HUMBERT, riprodotto a pag. 343 della Memoria di ENRIQUES-SEVERI ([1]). Da osservare pure che le quaderne dei punti cuspidali e relativi piani tangenti; dei piani cuspidali e relativi punti di contatto; dei punti doppi che giacciono sopra una conica della configurazione; dei piani tangenti doppi che passano per un punto doppio conico (in quanto tali piani si pensino come elementi del cono tangente nel punto doppio) son *tutte quaderne proiettive fra loro*. Invero, ognuna di esse è, sull'ente razionale cui appartiene, gruppo di diramazione d'un ente ellittico doppio, birazionalmente equivalente alla curva ellittica C.

Siccome poi i moduli della F, come superficie di JACOBI quasi iperellittica, son dati dal modulo di C e da quello della coppia neutra, così:

I moduli di Φ, come superficie quasi iperellittica, dal punto di vista delle trasformazioni birazionali, sono i due invarianti proiettivi, sopra una conica di Φ, della quintupla dei punti doppi di Φ, in quella conica contenuti (4 *punti conici ed un punto della retta doppia*).

Questi moduli sono anche i soli invarianti proiettivi di Φ, perchè due Φ birazionalmente equivalenti, come superficie quasi iperellittiche, sono fra loro proiettive, in quanto le ∞^{17} Φ si ripartiscono in ∞^2 famiglie ∞^{15} di superficie omografiche. Perciò le quintuple di punti doppi sopra le varie coniche di Φ e le quintuple duali son proiettive.

Un'ultima osservazione è che *non può esistere alcun modello proiettivo che rappresenti senza eccezione l'involuzione I di F, senza ch'esso possegga 8 punti doppi conici*; e ciò perchè I ha 8 punti doppi isolati [**78**, p. 303].

Circa la rappresentazione parametrica della superficie di PLÜCKER, considerata come superficie quasi iperellittica, siccome il punto di Φ è funzione razionale del punto di F, le coordinate del punto di Φ risultan funzioni quasi iperellittiche di

([1]) Ved. un simbolismo adatto ad esprimer le proprietà della configurazione inerente a Φ in [**29**, p. 68].

due variabili, alle quali spetta la tabella (67) di periodi. Si può pertanto enunciare, tenuto conto di quanto si è esposto in generale, che:

Le coordinate x, y, z di un punto di una superficie di PLÜCKER Φ *a retta doppia nodale, son funzioni quasi iperellittiche di due variabili u, v, con 3 periodi [tabella (67)] e assumon lo stesso valore in due punti diversi del prisma dei periodi (punti che coincidono soltanto in corrispondenza agli 8 punti doppi isolati di Φ).*

Dalla rappresentazione restano esclusi i punti della retta doppia di Φ, che non si posson conseguire con valori finiti di v.

65. LA SUPERFICIE DI PLÜCKER CORRISPONDENTE AD UNA COPPIA NEUTRA DOPPIA. ALTRI CASI SPECIALI. — Trattiamo rapidamente il caso d'una curva ellittica C, ov'è data una coppia neutra A, B di punti coincidenti ($A = B$).

La superficie F possiede allora un integrale semplice u, che è in via assoluta di 1ª specie ed un integrale, v, virtualmente di 1ª specie, ma nel fatto di 2ª specie, colla curva polare di 1º ordine $\mathfrak{A}$ ed il punto d'indeterminazione $O = (\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$ rappresentativo della coppia A, A e caratteristico su $\mathfrak{A}$, come curva di S.

L'inviluppo C di S passa in tal caso per O (toccando ivi $\mathfrak{A}$).

La tabella dei periodi relativi a questi integrali è quella corrispondente al caso IV (n. 58), cioè la:

$$(133) \qquad \begin{array}{c|cc} u & 2\pi i & \omega \\ v & 0 & \tau \end{array} .$$

L'integrale u è al solito costante su tutte le generatrici h, mentre v è costante soltanto sulla h_0.

Ogni trasformazione di 1ª (e di 2ª) specie muta in sè $\mathfrak{A}$; sicchè su $\mathfrak{A}$ cadon 4 punti doppi dell'involuzione I e precisamente nelle intersezioni di I colle generatrici doppie della $g_2^1(\alpha)$.

In conseguenza:

La superficie quasi iperellittica di PLÜCKER Φ, *derivante da una curva ellittica con una coppia di punti coincidenti, è del* 4° *ordine e della* 4^{a} *classe; possiede una retta doppia cuspidale e* 4 *punti doppi conici fuori di questa.*

Quando una superficie di KUMMER $\overline{\Phi}$ tende a Φ, 8 punti doppi di $\overline{\Phi}$ tendono a coppie a 4 punti della retta cuspidale, pei quali passano tutti i contorni apparenti di Φ dai punti dello spazio; altri 4 tendono ai punti di contatto sulla retta cuspidale dei 4 piani tangenti cuspidali di Φ; gli ulteriori 4 ad altrettanti punti doppi conici isolati di Φ.

La superficie è caratterizzata, come superficie quasi iperellittica, dalla retta doppia cuspidale e dai 4 *punti doppi conici fuori di essa; ha, come superficie quasi iperellittica, un sol modulo, invariante proiettivo,* che è p. es. il birapporto d'una delle quaderne di punti doppi sovra indicate sulla retta cuspidale oppure il birapporto dei 4 punti doppi conici contenuti sopra una delle 4 coniche di Φ, di contatto per altrettanti piani tangenti; ecc.

Tipi di tutt'altra natura di superficie quasi iperellittiche, provengon dal prodotto di una curva razionale e d'una curva ellittica: prodotto appartenente, rispetto alle trasformazioni birazionali senza eccezione (come si è detto nel n. 37) ad una classe diversa da quella delle F finora considerate. Sulla curva razionale è assegnata una coppia neutra, sicchè si ha in corrispondenza una superficie di JACOBI quasi iperellittica, con due fasci unisecantisi, l'uno effettivamente e l'altro virtualmente ellittico. La superficie Φ, che si costruisce come imagine della involnzione generata da una trasformazione di 1^{a} specie su tale superficie di JACOBI, *è una quadrica doppia* (1). Ma superficie siffatte non sono limiti di superficie di KUMMER.

Invece un altro caso limite della superficie di KUMMER, proviene dalla superficie di JACOBI quasi iperellittica di genere vir-

(1) Ved. pel modello analogo nel campo iperellittico a pag. 344 della Memoria [**24**].

tuale $\pi = 2$ e di genere effettivo $p = 0$, che si ottiene come varietà delle coppie di punti di una curva razionale C, sulla quale sieno assegnate due coppie neutre. Essa può considerarsi sia come limite di una superficie di KUMMER generale, sia come limite della superficie di PLÜCKER (facendo tendere una curva ellittica, su cui sia già data una coppia neutra, ad una curva razionale). *La* Φ *risulta allora una rigata razionale del* 4^0 *ordine con due rette doppie direttrici.* Ulteriori particolarità s'introducono, se una o ambedue le coppie son costituite da punti coincidenti.

Ma non giova insistere nell'enumerazione di questi casi particolari, i quali conducono tutti a superficie conosciute, attraverso la classificazione dei complessi quadratici di rette, ai quali esse son intimamente legate, come diremo nel n. seguente.

Lo scopo fondamentale che si voleva conseguire, e che è ormai raggiunto, era di porre in relazione questi modelli colla teoria delle funzioni quasi iperellittiche.

Notiamo piuttosto la proprietà seguente, che risulta senz'altro da tutto quanto precede:

Le coordinate x, y, z *di un punto di una superficie di* PLÜCKER Φ *a retta doppia cuspidale, son funzioni quasi iperellittiche di due variabili* u, v, *con* 2 *periodi* [*tabella* (133)] *e assumon lo stesso valore in due punti distinti del prisma dei periodi* (*coincidenti soltanto in corrispondenza ai* 4 *punti doppi isolati di* Φ). *I punti della retta cuspidale sfuggono alla rappresentazione parametrica.*

66. NOTIZIE STORICHE SULLA SUPERFICIE DI PLÜCKER. — Occorrono anzitutto alcuni richiami di geometria della retta, onde apprezzare al loro giusto valore i precedenti storici, che vogliamo rievocare; richiami necessari oggi che la geometria della retta è un po' fuori di moda (1).

(1) Ma essa, e più in generale la geometria delle varietà grassmanniane, saranno certamente riprese e approfondite col procedere degli studi sui sistemi di equazioni a derivate parziali, secondo le vedute di POINCARÉ-CARTAN.

Per ogni complesso (sistema ∞^3) di rette è importante la cosidetta *superficie di complesso* introdotta da PLÜCKER [**52**, p. 203]. È la superficie toccata dalle rette del complesso che si appoggiano a una data retta *a* (cioè inviluppata dagli ∞^1 coni di rette del complesso che hanno i vertici su *a* e che è luogo delle ∞^1 curve inviluppate delle rette del complesso che giaccion su piani passanti per *a*).

Vi sono poi da definire, rispetto ad un dato complesso algebrico, i *punti*, i *piani*, le *rette singolari* (1). Pn punto è singolare quando il cono di rette del complesso per esso possiede una generatrice singolare. Il cono (quadrico) d'un complesso quadratico per un punto singolare si spezza in due piani e la conica inviluppo sopra un piano singolare si spezza in due fasci di rette. Una retta è singolare quando contiene qualche punto singolare e quindi (dualmente) giace in qualche piano singolare.

Si dice poi che una retta è *doppia* per un complesso, quando ogni suo punto (ed ogni suo piano) è singolare. Un complesso non ha generalmente rette doppie.

Per un complesso quadratico hanno poi particolare importanza quei punti e quei piani, già incontrati da PLÜCKER, da KLEIN, da KUMMER [**39**, **40**], da C. SEGRE [**55**] e da altri e che si chiamano *punti* e *piani doppi*. Le rette del complesso appartenenti a un tal punto o a un tal piano formano un fascio doppio.

Ad un complesso è infine legata la cosidetta *superficie singolare* (così chiamata da VOSS in una Nota del 1873, ma già considerata da KUMMER, da PLÜCKER e da KLEIN per complessi quadratici e in generale, nel 1870 e nel 1873, da PASCH): è il luogo dei punti singolari e (dualmente) l'inviluppo dei piani singolari del complesso.

Orbene, KUMMER, nei lavori citati, pone la mano sulla celebre superficie che porta il suo nome, come superficie singo-

(1) Considerati da PLÜCKER e dai suoi continuatori e in primo luogo da KLEIN [**31**, **33**].

lare di un complesso quadratico generale. I 16 punti doppi della superficie e i 16 piani tangenti lungo coniche sono i punti e i piani doppi del complesso.

La superficie di PLÜCKER Φ con retta doppia nodale e 8 punti doppi conici fu invece scoperta da PLÜCKER [**52**, pp. 168 e segg.] e subito dopo studiata da KLEIN [**31**, **32**, **35**] e da CAYLEY [**10**] come superficie di complesso di un complesso quadratico generale, costruito a partire da una retta dello spazio non appartenente al complesso. Se la retta appartiene (genericamente) al complesso, si ha la superficie di PLÜCKER, studiata nel n. 65, con una retta doppia cuspidale e 4 punti doppi conici fuori.

Ma queste proprietà non lasciavan prevedere che una superficie di PLÜCKER potesse presentarsi come limite d'una superficie di KUMMER, in quanto i legami dell'una e dell'altra con un complesso quadratico eran del tutto dissimili.

È la classificazione dei complessi quadratici abbozzata da KLEIN, dovuta con qualche lieve lacuna a VEILER [**83**] e da un punto di vista più largo e completo a C. SEGRE ([1]) che condusse a considerare la superficie di PLÜCKER con retta doppia nodale come superficie singolare del più generale complesso quadratico con una sola retta doppia (quella della superficie). La superficie di PLÜCKER con retta doppia cuspidale è invece superficie singolare del generico complesso quadratico, avente un'ulteriore particolarità, che ora specificheremo.

Dato un complesso quadratico vi sono 6 complessi lineari considerati da KLEIN (a due a due in involuzione, cioè generanti sistemi nulli permutabili), rispetto ai quali il complesso è autopolare. Pel complesso più generale con retta doppia, 2 dei 6 complessi coincidono (e divengono speciali); pel complesso più generale che conduce ad una Φ con retta cuspidale, coincidono invece 3 dei 6 complessi.

Queste proprietà dànno già dunque le Φ come limiti delle

([1]) [**55**]. Veggasi pure l'opera classica di geometria della retta di STURM [**80**] e specialmente il terzo volume, sui complessi quadratici.

$\overline{\Phi}$ di KUMMER: si tratta di far tendere un complesso quadratico generale verso uno dei complessi aventi le particolarità indicate e di seguire la variazione della superficie singolare del complesso.

Rievocati questi precedenti, che segnano l'inizio di ricerche le quali diedero luogo, per molti anni, ad un'ampia letteratura, che non è qui il caso neppur di riassumere, indichiamo piuttosto i legami degli enti considerati colla teoria delle funzioni iperellittiche.

Fu KLEIN che incidentalmente osservò pel primo la possibilità di rappresentar parametricamente una superficie di KUMMER con funzioni iperellittiche [**34**, p. 302]. Egli fu seguito da CAYLEY [1], che sviluppò più ampiamente il legame, e da numerosissimi analisti e geometri (BORCHARDT, JORDAN, LIE, WEBER, ROHN, DARBOUX, BRIOSCHI, REYE, C. SEGRE, PASCAL, WIRTINGER, GEISER, HUMBERT, ENRIQUES-SEVERI, ecc.), i quali, fino agli anni più recenti, ampliaron largamente le conoscenze sopra questa importante superficie.

Amplissima è poi la letteratura sopra un caso particolare metrico della superficie di KUMMER e cioè la cosidetta *superficie d'onda,* considerata per la prima volta da FRESNEL nel 1821 nelle sue ricerche sulla rifrazione doppia e successivamente da AMPÈRE, che nel 1828 ne scrisse l'equazione. Alla superficie d'onda è legata la scoperta della rifrazione conica fatta « colla punta della penna » nel 1830 e 1833 da HAMILTON e MAC CULLAGH sul fondamento delle proprietà geometriche della superficie d'onda e verificata dipoi sperimentalmente da LLOYD.

Nessuno però aveva portato l'attenzione sui casi limiti della superficie di KUMMER nei loro rapporti colle nuove funzioni, collegate a quelle superficie, che sarebbero derivate per continuità dalle funzioni iperellittiche. La teoria delle funzioni quasi abeliane esposta in questa Memoria colma la lacuna e dà ai legami fra la superficie di KUMMER e le sue degenerazioni un profondo contenuto di analisi.

---

(1) Ved. la Memoria [**11**] e altre successive Memorie dello stesso Autore.

BIBLIOGRAFIA

[1] APPELL, *Sur l'inversion des intégrales abéliennes.* « Journal de mathématiques », t. I, 1885.

[2] APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales.* Paris, Gauthier-Villars, 2^{me} éd., 2 vol., 1929-30.

[3] BAKER H. F., *Abel's theorem and the allied theory including the theory of Thetafunctions.* Cambridge University Press, 1897.

[4] — *An introduction to the theory of multiply periodic functions.* Cambridge University Press, 1907.

[5] BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degl'iperspazi.* 2^a ed. Messina, Principato, 1907.

[6] BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.* Pisa, Spoerri, 2^a ed. 1916.

[7] BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes.* Paris, Gauthier-Villars, 1879.

[8] CASTELNUOVO, *Le corrispondenze univoche tra gruppi di più punti sopra una curva di genere p.* « Rend. Istituto Lombardo », vol. 25_2, 1892.

[9] — *Sugl'integrali semplici appartenenti ad una superficie algebrica.* « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. 14, 1905.

[10] CAYLEY, *Memoir on quartic surfaces. Three Memoires.* « Proceedings of the London Math. Society », vol. 3, 1871.

[11] — *On the double theta functions in connection with a 16 nodal quartic surface.* « Journal für Math. », Bd. 83, 1877.

[12] CLEBSCH, *Ueber diejenigen Curven, deren coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen.* « Journal für Math. », t. 64, 1865.

[13] CLEBSCH-GORDAN, *Theorie der abelschen Funktionen.* Leipzig, Teubner, 1866.

[14] COBLE, *Algebraic geometry and theta functions.* New York, American mathematical Society, 1929.

[15] COMESSATTI, *Sulle trasformazioni hermitiane delle varietà di Jacobi.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », t. 50, 1915.

[16] CONFORTO, *Le superficie razionali.* Bologna, Zanichelli, 1939.

[17] — *Funzioni abeliane e matrici di Riemann*. Parte I, « Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica », Libreria dell'Università di Roma, 1942.

[18] COUSIN, *Sur les fonctions périodiques*. « Annales scientifiques de l'École normale supérieure », Paris, t. 19, 1902.

[19] — *Sur les fonctions triplement périodiques de deux variables*. « Acta mathematica », t. 33, 1910.

[20] ELLIOT, *Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ*. « Annales de l'École normale supérieure », Paris, t. 11_2. 1882, parte I e II.

[21] ENRIQUES, *Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche*. « Math. Annalen », Bd. 85, 1922.

[22] ENRIQUES-CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Bologna, Zanichelli, 1924, vol. 3.

[23] — *Id. Id.* Vol. 4, 1934.

[24] ENRIQUES-SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*. « Acta mathematica », t. 32, 33, 1909-10.

[25] FROBENIUS, *Ueber die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Functionen* I, II « Journal für Math. », Bd. 97, 1884.

[26] GAMBIER, *Théorème du reste de Brill et Noether. Systèmes linéaires de courbes algébriques et groupes de points surabondants*. « Annales scientifiques de l'École normale supérieure », Paris, t. 42_3, 1925.

[27] GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*. Paris, Gauthier-Villars, 5^{me} éd. t. 2, 1929.

[28] — *Sur l'inversion des intégrales abéliennes*. « Comptes rendus », t. 115, 1892.

[29] HUDSON, *Kummer's quartic surface*. Cambridge University Press, 1905.

[30] HUMBERT, *Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques*. « Journal de mathématiques », t. 3_4, 1887.

[31] KLEIN, *Zur Theorie der Liniencomplex I und II Grades*. « Mathematische Annalen », Bd. 2, 1870.

[32] — *Die allgemeine lineare Transformation der Liniencoordinaten*. « Math. Annalen », Bd. 2, 1870.

[33] — *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie*. « Math. Annalen », Bd. 5, 1872.

[34] — *Ueber gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen*. « Math. Annalen », Bd. 5, 1872.

[35] — *Ueber die Plückersche Complexfläche*. « Math. Annalen », Bd. 7, 1874.

[36] — *Zur Theorie der Abelschen Functionen*. « Math. Annalen », Bd. 36, 1889.

[37] KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen*. Leipzig, Teubner, 1903.

[38] KRAZER-WIRTINGER, *Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen.* « Encyklopädie der Math. Wiss. », Bd. 2, Leipzig, 1921.

[39] KUMMER, *Ueber die Flächen vierter Grades mit sechszehn singuläre Punkten.* Berliner Berich., 1864.

[40] — *Ueber die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung.* « Berliner Abhand. », 1866.

[41] JACOBI, *Sur la rotation d'un corps.* « Journal für Math. », t. 39, 1850, p. 349.

[42] LEFSCHETZ, *L'analysis situs et la géométrie algébrique.* Paris, Gauthier-Villars, 1924.

[43] LINDEMANN, *Untersuchungen über den Riemann-Rochschen Satz.* « Programmschrift », Teubner, Leipzig, 1879.

[44] MARTINELLI, *Sulle funzioni analitiche di più variabili complesse, che posseggono periodi infinitesimi.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », 1941.

[45] NOETHER, *Ueber die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curven mit nicht-adjungierten Curven.* « Math. Annalen », Bd. 15, 1879.

[46] — *Zur Theorie der Abelschen Differentialausdrücke und Functionen.* Theil I und II, « Math. Annalen », Bd. 37, 1890.

[47] PAINLEVÉ, *Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition.* « Acta Mathematica », t. 27, 1903 (Vol. in onore di Abel).

[48] PICARD, *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables.* « Journal de mathématiques », t. 5, 1889.

[49] — *Sur la théorie des groupes et des surfaces algébriques.* « Rend. del Circolo matematico di Palermo », t. 9, 1895.

[50] — *Traité d'Analyse.* Paris, Gauthier-Villars, t. 2, 2^{me} éd., 1905.

[51] PICARD et SIMART, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* Paris, Gauthier-Villars, t. 1, 1897; t. II, 1906.

[52] PLÜCKER, *Neue Geometrie des Raumes.* Leipzig, Teubner, 1868-69.

[53] ROSENHAIM, *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques.* « Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences », t. 11, 1851.

[54] SCHUBERT, *Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes.* « Math. Annalen », Bd. 26, 1885.

[55] SEGRE C., *La geometria della retta e delle sue serie quadratiche.* « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », t. 36_2, 1884.

[56] — *Sulla varietà cubica con 10 punti doppi dello spazio a 4 dimensioni.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. 22, 1887.

[57] — *Sulle varietà cubiche dello spazio a 4 dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario.* « Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino », t. 39_2, 1888.

[58] SEVERI, *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti d'una curva algebrica.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », Vol. 38, 1903.

[59] — *Sulle superficie algebriche che posseggono integrali di Picard della seconda specie.* « Math. Annalen », Bd. 61, 1905.

[60] — *Sulla differenza fra i numeri degl'integrali di Picard della* 1ª *e della* 2ª *specie appartenenti ad una superficie algebrica.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », t. 40, 1905.

[61] — *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica.* « Math. Annalen », Bd. 62, 1906.

[62] — *Intorno al teorema d'Abel sulle superficie algebriche ed alla riduzione a forma normale degl'integrali di Picard.* « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », t. 21, 1906.

[63] — *Sulle superficie che ammettono un gruppo continuo permutabile a due parametri di trasformazioni birazionali in sè.* « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », t. 72, 1907-08.

[64] — *Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di* 1ª *specie appartenenti ad una superficie algebrica.* « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », t. 72, 1903.

[65] — *Relazioni fra gl'integrali semplici e multipli di* 1ª *specie d'una varietà algebrica.* « Annali di Matematica », t. 20_3, 1913.

[66] — *Sui fondamenti della geometria numerativa e sulla teoria delle caratteristiche.* « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », t. 75, 1916.

[67] — *Vorlesungen über algebraische Geometrie.* Leipzig, Teubner, 1921.

[68] — *Sulla teoria degl'integrali semplici di* 1ª *specie appartenenti ad una superficie algebrica.* « Rend. della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. 30_5, 1921.

[69] — *Trattato di geometria algebrica.* Vol. 1, parte I, Bologna, Zanichelli, 1926.

[70] — *Conferenze di geometria algebrica,* raccolte da B. Segre. Roma, Tip. Genio Civile, 1907-30.

[71] — *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse.* « Rend. del Seminario matematico e fisico di Milano », vol. 5, 1931; « Rend. del Seminario matematico della R. Università di Roma », vol. 7_2, 1932.

[72] — *Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica.* « Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. 3, 1932.

[73] — *La base per le varietà algebriche di dimensione qualunque contenute in una data e la teoria generale delle corrispondenze fra i punti di due superficie algebriche.* « Memorie della R. Acc. d'Italia », vol. 5, 1934.

[74] — *Lezioni di analisi.* II ed., vol. 1, Bologna, Zanichelli, 1938.

[75] SEVERI, *Relazioni fra i periodi degl'integrali multipli d'una varietà algebrica.* « Memorie della R. Acc. d'Italia », vol. 9, 1938.

[76] — *La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.* « Memorie della R. Accademia d'Italia », vol. 12, 1941.

[77] — *Sulla classificazione delle rigate algebriche.* « Rend. di Matematica e delle sue applicazioni ». Roma, 1941.

[78] — *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche,* a cura di F. Conforto e E. Martinelli. Roma, ed. Cremonese, vol. 1, 1942.

[79] — *Sulla irregolarità superficiale d'una varietà algebrica.* « Rend. della R. Accademia d'Italia », vol. 3, 1942.

[80] STURM, *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniegeometrie in synthetischer Behandlung.* 3 Bände, Leipzig, Teubner, 1892-96.

[81] TRICOMI, *Funzioni ellittiche.* Bologna, Zanichelli, 1937.

[82] VAN DER WAERDEN, *Zur Begründung des Restsatzes mit den Noetherschen Fundamentalsatz.* « Math. Annalen ». Bd. 194, 1931.

[83] VEILER, *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades.* « Math. Annalen », Bd. 7, 1874.

APPENDICE

I. Quelques problèmes se rapportant aux fonctions analytiques de plusieurs variables (*)

Je vais exposer ici des problèmes plutôt qu'en donner des solutions, que je ne possède pas en général. Il s'agit de questions un peu à côté des directions actuelles du développement de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. C'est là peut-être une raison de plus pour en parler.

. . . .
. . . .
. . . .

Problème IV. — *Questions d'existence relatives aux fonctions quasi abéliennes.*

1. Je résume ici d'abord quelques notions sur les fonctions dont il s'agit.

Etant donné un ensemble de fonctions de π variables complexes, $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, qui admettent un théorème d'addition algébrique (au sens de Weierstrass), ces fonctions s'appellent « fonctions quasi abéliennes ». Elles sont par conséquent méromorphes à distance finie, et périodiques, avec $\mu \leqslant 2\pi$ périodes

(*) Esposto dell'A. in: « *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* (*C B R M*), tenu à Bruxelles du 11 au 14 mars 1953 », pp. 9-20.

indépendantes [1]. Ces fonctions ont naturellement des singularités essentielles à l'infini, à l'exception du cas où elles se réduisent à des fonctions rationnelles de $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ (pour lesquelles $\mu = 0$).

Lorsque $\mu = 2\pi$, on retombe sur les fonctions abéliennes ordinaires, et alors la condition qu'elles possèdent un théorème d'addition est une conséquence de la périodicité et de ce que les fonctions sont méromorphes à distance finie; tandis que si $\mu < 2\pi$, il peut exister des fonctions méromorphes qui ne satisfont pas au théorème d'addition.

Les fonctions quasi abéliennes permettent aussi de caractériser les fonctions de π variables admettant $\mu > 2\pi$ périodes. Celles-ci ont des périodes arbitrairement petites, et se réduisent, à une substitution linéaire convenable près, à des fonctions quasi abéliennes d'un plus petit nombre de variables.

Les fonctions quasi abéliennes peuvent en outre être envisagées comme étant des *fonctions abéliennes dégénérées*, lorsque certaines périodes d'un corps de fonctions abéliennes tendent vers l'infini. C'est l'extension du passage des fonctions elliptiques aux fonctions trigonométriques.

2. Enfin les fonctions quasi abéliennes de π variables se présentent dans l'étude des variétés algébriques irréductibles, ∞^π, V_π, admettant un groupe continu abélien transitif, Γ, ∞^π, d'automorphismes birationnels. PICARD, dans des recherches célèbres des années 1889-1895, avait démontré que ces variétés étaient des *variétés abéliennes*. Celles que nous avons nommées *variétés de Picard*. Mais le cas général des variétés quasi abéliennes avait échappé au grand géomètre, parce qu'il

[1] Une *période* est un vecteur complexe $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\pi$ tel que les valeurs de chaque fonction de l'ensemble soient les mêmes aux points $(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ et $(u_1 + \omega_1, u_2 + \omega_2, \ldots, u_\pi + \omega_\pi)$, $(u_1, u_2, \ldots, u_\pi)$ étant un point quelconque à distance finie. On dit que μ périodes sont indépendantes si les vecteurs représentatifs ne sont liés par aucune relation linéaire à coefficients entiers (non tous nuls).

avait implicitement admis que le groupe Γ était absolument transitif, c'est-à-dire qu'il ne possédait pas de sous-variété invariante. De l'existence du groupe transitif Γ, absolument transitif ou non, on peut déduire l'existence sur V_π de π intégrales simples, $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ (intégrales de différentielles totales de fonctions rationelles du point de V_π). Le cas d'un groupe Γ absolument transitif correspond au cas où les intégrales sont toutes de première espèce. L'examen du cas général, où les intégrales sont aussi de seconde ou de troisième espèce, a été fait (en complétant l'analyse de PICARD) par PAINLEVÉ, dans un mémoire de 1903 (*Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition*: « Acta Mathematica », vol. 27). Le procédé de PAINLEVÉ est développé pour $\pi=2$ et limité à un aperçu général pour π quelconque. Il conduit à la conclusion qu'une V_π, possédant des intégrales simples $u_1, \ldots, u_\pi$ admet un théorème d'addition, et que les coordonnées du point variable de V_π sont des fonctions abéliennes, propres ou dégénérées, des variables $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$.

Après le travail de PAINLEVÉ, on ne trouve plus de contributions appréciables à ce sujet, jusqu'en 1947. J'ai publié alors une étude très étendue sur les fonctions abéliennes dégénérées, que j'ai nommées quasi abéliennes. Mais plusieurs problèmes importants demeurent toujours en suspens dans la théorie. J'indiquerai ici quelques-uns de ces problèmes.

3. On sait que dans la théorie classique des fonctions abéliennes de π variables, et dans la démonstration même du théorème d'existence fondamental, on réduit d'abord la matrice $(\pi, 2\pi)$ [1] des périodes à une forme normale

$$\|A \;\; \Omega\|, \tag{1}$$

où A est une matrice (π, π) à éléments nuls, sauf ceux de la

[1] C'est-à-dire à π lignes et à 2π colonnes.

diagonale principale, qui sont égaux à $\frac{2\pi i}{d_1}, \ldots, \frac{2\pi i}{d_\pi}$ (1), $d_1, \ldots, d_\pi$ étant certains nombres entiers (diviseurs élémentaires) et Ω une matrice (π, π) satisfaisant à une condition quantitative et à une condition qualitative assurant l'existence des fonctions intermédiaires (c'est-à-dire la convergence de certaines séries) au moyen desquelles on exprime toute fonction abélienne du corps déterminé par la matrice (CONFORTO: *Funzioni abeliane e matrici di Riemann*, Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica in Roma, 1942). Eh bien! j'ai cherché d'abord une forme normale pour la matrice des périodes d'un ensemble de fonctions quasi abéliennes en obtenant les résultats suivants.

Parmi les π intégrales simples de V_π, soient p de première espèce, δ_1 « essentiellement » (2) de troisième espèce, δ_2 « essentiellement » de deuxième espèce, avec $\pi = p + \delta_1 + \delta_2$ ($p \geqslant 0$, $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$). Ecrivons la matrice de type $(\pi, 2p + \delta_1)$ des $2p + \delta_1$ périodes cycliques et polaires des intégrales sous la forme

$$\begin{Vmatrix} A & \Omega & O \\ O & \Omega_1 & B \\ O & \Omega_2 & O \end{Vmatrix} \tag{2}$$

où $\|A, \Omega\|$ est la matrice abélienne des périodes des intégrales de première espèce, Ω_1, Ω_2 sont des matrices des types respectifs (δ_1, p), (δ_2, p) renfermant les périodes cycliques respectives des δ_1, δ_2 intégrales de troisième et de deuxième espèce, et B, de type (δ_1, δ_1), est la matrice des périodes polaires des δ_1 intégrales de troisième espèce. Cette dernière peut être réduite tout de suite à avoir les éléments tous nuls, sauf ceux de la diagonale principale, qui peuvent être supposés égaux à $2\pi i$.

(1) Il va sans dire qu'ici il s'agit du nombre π classique et non pas du nombre des variables.

(2) C'est-à-dire qu'une combinaison linéaire quelconque à coefficients constans non tous nuls des δ_1 intégrales envisagées n'est jamais d'espèce plus petite.

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un corps (dans le sens ordinaire du mot) de fonctions quasi abéliennes correspondant à un tableau donné (2)?

J'ai donné à ce propos trois théorèmes d'existence, dont le troisième est le plus significatif.

Pour l'existence d'un corps de fonctions abéliennes déterminé par (2) *il est tout simplement nécessaire et suffisant que* (1) *soit une matrice abélienne.*

Il n'y a en somme aucune condition pour les éléments de Ω_1, Ω_2 qui peuvent être choisis d'une façon quelconque.

Mais est-il toujours possible de réduire le tableau des périodes d'un corps de fonctions quasi abéliennes à la forme normale (2)?

J'ai démontré que c'est toujours possible si la variété algébrique V_π associée (en vertu du théorème algébrique d'addition) à l'ensemble donné de fonctions quasi abéliennes, peut se réduire, par transformations birationnelles, à une variété (sans points multiples) ne possédant pas de variétés exceptionnelles à $\pi - 1$ dimensions.

Alors il résulte aussi que V_π est birationnellement équivalente au produit d'une variété abélienne V_π par un espace linéaire S_δ $(\delta = \delta_1 + \delta_2)$.

Ici se présente une question très importante. Est-il possible de démontrer directement à partir de la définition analytique, que la matrice des périodes est toujours rédnctible à la forme (2)? Ou, ce qui revient au même, est-il possible de prouver directement que $V_\pi = V_p \times S_\delta$? Je renvoie pour quelques considérations à ce propos à mon mémoire cité.

Une autre question intéressante est relative à la reduction des équations aux dérivées partielle intégrables par des fonctions quasi abéliennes (en particulier par des fonctions abéliennes) à des classes rationnellement distinctes. Il s'agit de l'extension des équations de RIEMANN auxquelles satisfont les fonctions θ du premier ordre.

Il y a en outre bien des questions qui se rattachent à l'extension aux fonctions quasi abéliennes de la théorie des fonctions abéliennes (théorie des matrices de RIEMANN, dans le sens de Gaetano SCORZA, et lien avec la théorie des correspondances de HURWITZ).

On se trouve ici en face d'anomalies nouvelles dans les rapports entre propriétés arithmétiques et propriétés fonctionnelles. Par exemple, des problèmes équivalents dans le champ abélien deviennent distincts dans le champ quasi abélien. Nous renvoyons à ce propos aux résultats de M. CONFORTO, qui donnent des orientations remarquables à ces questions.

II. SULLA CARATTERIZZAZIONE DEI CORPI DI FUNZIONI QUASI ABELIANE (*)

Numerosi ed importanti problemi nascono dalla teoria delle funzioni quasi abeliane (1) e dalle teorie collegate. Richiamo qui l'attenzione sopra qualcuno di essi, le cui origini — in quanto risiedono in proprietà infinitesimali dei gruppi continui — hanno rapporto con le direttive del presente Convegno.

Il prof. HODGE, nella propria comunicazione, ha alluso ai mutui aiuti fra geometria differenziale e geometria algebrica. D'altronde la solidarietà fra le diverse branche della matematica diviene sempre più evidente negli avanzamenti della nostra scienza.

1. Ricordo anzitutto due delle possibili definizioni dei corpi di funzioni abeliane (2).

(*) Esposto dell'A. in: « *Convegno internazionale di geometria differenziale,* Italia, 20-26 settembre 1953 », pp. 21-26. Ed. Cremonese, Roma, 1954.

(1) Cfr. SEVERI, *Funzioni quasi abeliane* (Scripta varia della Pontificia Accademia delle Scienze, n. 4, 1947). Questo volume sarà citato come « Memoria A ».

(2) Memoria A, n. 37, pag. 147 e segg. (*la numerazione delle pagine si riferisce alla presente edizione*).

a) Un corpo di funzioni quasi abeliane (in particolare abeliane di π variabili consta di tutte le funzioni razionali di punto sopra una varietà algebrica (irriducibile) V_π possedente un gruppo continuo abeliano ∞^π, Γ, generalmente (o, in particolare, assolutamente) transitivo di trasformazioni birazionali.

Perchè si tratti di un corpo di funzioni abeliane occorre e basta che Γ sia assolutamente transitivo.

b) Un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili consta di tutte le funzioni razionali di punto sul prodotto (diretto) di una varietà abeliana di PICARD ∞^π ($p \leq \pi$) e di uno spazio lineare S_δ ($\delta = \pi - p$).

Il corpo è di funzioni abeliane se $p = \pi$.

L'equivalenza delle *a*), *b*) fu stabilita nella Memoria A subordinatamente ad un'ipotesi di lavoro, che chiamai ipotesi *L* e che è inutile riferire qui. Naturalmente m'assicurai fin d'allora che esistessero corpi ad essa soddisfacenti.

Ma siccome qualcuno dei teoremi di struttura e di esistenza dei corpi di funzioni quasi abeliane, di cui assegnai l'effettiva costruzione per mezzo degli sviluppi in serie delle funzioni intermediarie, è legato all'equivalenza delle *a*), *b*), mi sono indotto a stabilire tale equivalenza a prescindere dall'ipotesi di lavoro. Ed è ciò su cui ora riferisco.

Posso prima osservare che, nel dedurre la *b*) dalla *a*), non si fa altro, in sostanza, che stabilire una struttura fibrata della varietà. Si potrebbe dunque tentar di conseguire direttamente il risultato per via differenziale.

2. Non ci occupiamo dei corpi di funzioni abeliane, di cui esiste una teoria ampia e classica [1]. Supporremo cioè di aver da fare, secondo la *a*), con una V_π possedente un gruppo Γ *non* assolutamente transitivo, rispetto al quale dunque esiste su V_π un insieme I invariante di punti. Si tratta di dedurre

---

[1] Cfr. p. es. CONFORTO, *Funzioni abeliane e matrici di Riemann* (Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, Roma, 1942).

che *il corpo delle funzioni razionali su* V_π *è suscettibile della definizione b*).

Indipendentemente dall'ipotesi L si stabiliscono le proprietà seguenti (1):

Profittando delle trasformazioni infinitesime del gruppo Γ, si costruiscono su V_π π forme differenziali lineari integrabili, linearmente indipendenti, che si diranno *associate* a Γ. Degl'integrali di queste forme un certo numero $p(<\pi)$ sono di 1ª specie, ove p è l'irregolarità superficiale di V_π; $\delta_1(\geq 0)$ sono di 3ª specie; $\delta_2(\geq 0)$ di 2ª specie, essendo $\delta=\delta_1+\delta_2=\pi-p$. Per $p=0$, la V_π è superficialmente regolare.

Ciascuna delle π forme è mutata in sè da Γ e l'insieme invariante I è riempito dai poli e dai punti logaritmici dei predetti integrali semplici di 2ª, 3ª specie.

Gl'integrali delle forme stesse costituiscono un sistema lineare Σ, associato a Γ, al quale appartengono *tutti* gl'integrali semplici di 1ª specie di V_π, ma non, naturalmente, tutti gl'integrali semplici di 2ª e 3ª specie di V_π.

Com'è ben noto, gl'integrali semplici di 2ª specie sopra una qualsiasi varietà algebrica ∞^π posseggono una varietà pura $\infty^{\pi-2}$ di punti d'indeterminazione. Lo stesso non accade sempre per gl'integrali di 3ª specie. Ma nel caso della nostra V_π ciascuno degl'integrali di 3ª specie di Σ possiede una varietà pura $\infty^{\pi-2}$ d'indeterminazione.

I punti delle varietà d'indeterminazione sono punti d'accumulazione dell'insieme I e si distribuiscono in un numero finito di varietà algebriche pure $\infty^{\pi-2}$. Sia M la loro somma. Allora $I+M$ è un'ipersuperficie algebrica pura costituita dunque da un numero finito di ipersuperficie algebriche, che comprendono tutti i punti singolari degl'integrali di Σ.

Ciascuna, E_{r-2}, delle varietà d'indeterminazione è *eccezionale* rispetto ad ogni trasformazione di Γ, nel senso che non è invariante, ma mutasi invece in una varietà di dimensione

(1) Memoria A, n. 47, p. 201 e segg.

maggiore, E'_{r-1}, riempita da un'involuzione di $\infty^{\pi-2}$ curve razionali γ, trasformate dei punti di E_{r-2}. Insomma ogni trasformazione di Γ possiede varietà eccezionali. Ciò caratterizza d'altronde la non assoluta transitività del gruppo. Invero, le trasformazioni di questo non posseggono varietà eccezionali quando $p = \pi$ (e il modello considerato di V_p è privo, com'è possibile ottenere, di varietà eccezionali).

Variando la trasformazione, muta in generale la E'_{r-1} corrispondente ad E_{r-2}. Le E'_{r-1} riempiono un sistema irriducibile $\infty^{\pi-1}$ e le γ relative a queste E'_{r-1} un'involuzione $\infty^{\pi-1}$, mediante cui è composto il sistema delle E'_{r-1}.

3. Dimostriamo ora che *su ciascuna delle* $\infty^{\pi-1}$ *curve razionali* γ *si può fissare un punto senza introdurre irrazionalità aritmetiche* (rispetto ai parametri da cui dipende la γ variabile).

Invero, il sistema $\infty^{\pi-1}$ delle γ è mutato in sè da Γ e può essere pertanto rappresentato dai punti d'una varietà irriducibile $W_{\pi-1}$, possedente un gruppo continuo abeliano transitivo $\infty^{\pi-1}$, Γ', di trasformazioni birazionali, indotto da Γ. La $W_{\pi-1}$ è insomma, alla sua volta, una varietà quasi abeliana, il cui punto è funzione razionale del punto di V_π. E siccome ognuno degl'integrali semplici di 1ª specie di V_π è costante sulle γ, gl'integrali stessi sono tanti quanti gl'integrali semplici di 1ª specie di $W_{\pi-1}$, ossia questa varietà ha la stessa irregolarità superficiale p di V_π.

Sopra una generica γ il gruppo Γ subordina un gruppo abeliano continuo ∞^1 di trasformazioni birazionali, cioè, trattandosi di una curva razionale, di proiettività, che può essere o un gruppo di proiettività iperboliche cogli stessi punti uniti A, B o un gruppo di proiettività paraboliche con un sol punto unito O, che al variare di γ descrive una varietà algebrica unisecante delle γ. Nel primo caso l'unico integrale u di Σ, non costante sulle γ, è ivi un integrale di 3ª specie coi due punti logaritmici A, B, a residui opposti; nel secondo caso u subordina su γ un'integrale di 2ª specie col solo polo O.

Se si verifica l'ultimo caso, su ogni γ resta fissato, senza irrazionalità aritmetiche, il punto O. Ma anche se si verifica il primo caso, ciascuno dei punti A, B ritorna in sè per le circolazioni di γ nel proprio sistema algebrico $\infty^{\pi-1}$ ed è pertanto funzione razionale del punto di $W_{\pi-1}$. Invero, i punti A, B non possono che descrivere componenti distinte (ciascuna delle quali è dunque unisecante delle γ) della varietà dei punti logaritmici di u, in quanto nel punto generico di ogni componente irriducibile della varietà completa dei punti logaritmici d'un integrale semplice di 3ª specie, sopra una varietà qualunque, il residuo ha un valore costante, che può cambiare soltanto in punti singolari di quella varietà completa.

4. Dalla proprietà dimostrata nel n. prec. discende che ogni γ può omograficamente rappresentarsi sopra una medesima retta a, senza introdurre irrazionalità aritmetiche.

In conseguenza di ciò V_π risulta birazionalmente equivalente al prodotto $W_{\pi-1} \times a$. Invero, dato un punto generico P di V_π per esso passa *una* γ, rappresentata da un punto P' di $W_{\pi-1}$ e nell'omografia fra γ ed a al predetto punto P di γ corrisponde un punto P'' di a; sicchè la coppia P', P'' è funzione razionale di P. Viceversa, partendo da P', P'' si costruisce razionalmente prima γ, imagine di P', eppoi P, imagine di P'' su γ; ossia P è funzione razionale della coppia P', P''.

Ora, se $\pi = p + 1$ e $p > 0$, la varietà quasi abeliana $W_{\pi-1}$ è una varietà abeliana di PICARD, d'irregolarità superficiale $p = \pi - 1$ e S_δ è una retta. Il teorema è dunque in tal caso dimostrato. Per induzione si risale da questo caso ad ogni valore $\pi > p$.

Se poi $p = 0$, $\pi = 1$, la V_π è una curva razionale e $W_{\pi-1}$ un punto; perciò il teorema è vero. Da questo caso si risale, per induzione, a $p = 0$ e $\pi > 0$ qualunque.. Si trova cioè, indipendentemente da L, che V_π è il prodotto di uno spazio lineare S_π per un punto, ossia che V_π è una varietà razionale.

La proprietà *b*) è dunque acquisita in ogni caso. Viceversa, il prodotto (diretto) di una varietà ∞^p di PICARD per uno spazio lineare S_δ dà luogo a un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili soddisfacente ad *a*) (1).

L'equivalenza delle definizioni a), b) è così stabilita.

5. Tale equivalenza è molto importante, perchè (2) in conseguenza di essa e di risultati di PAINLEVÈ (3) un corpo di funzioni quasi abeliane di π variabili complesse si può altresì identificare col corpo generato da π funzioni (indipendenti) delle π variabili, ammettenti un teorema d'addizione nel senso di WEIERSTRASS e le quali sieno continue e a derivate parziali continue, anche per soli valori reali delle variabili. Risulta invero che funzioni siffatte sono analitiche, meromorfe (al finito) e periodiche con $\mu<2\pi$ periodi indipendenti (4) e si riducono a funzioni razionali del punto d'una V_π possedente un gruppo continuo abeliano ∞^π di trasformazioni birazionali.

Inoltre la matrice dei periodi di tali funzioni può ridursi ad una forma tipica (5), la quale consente di arrivare al conclusivo teorema di esistenza (6), che indica quali elementi son arbitrari

(1) Memoria A, n. 46.

(2) Memoria A, introduzione e nn. 37, 38.

(3) PAINLEVÉ, *Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition* (Acta mathematica, 1903).

(4) il caso $\mu>2\pi$ resta escluso soltanto in apparenza dalla teoria sviluppata nella Memoria A, perchè, come dimostrarono CLEBSCH-GORDAN (1866) e FROBENIUS (1884), una funzione di π variabili con $\mu>2\pi$ periodi, mediante un'opportuna sostituzione lineare sulle variabili, può ridursi a dipendenze da $\pi'<\pi$ variabili e, se le variabili non sono ulteriormente riducibili, il numero dei suoi periodi rispetto alle variabili effettivamente restate non supera $2\pi'$.

(5) La forma (40) della Memoria A, con ulteriore precisazione nelle formule (106), (107) di pag. 293.

(6) Memoria A, n. 54 e particolarmente p. 279 per ciò che concerne la determinazione del corpo mediante gli elementi arbitrari della matrice tipica dei periodi e p. 272 e segg. per ciò che concerne la costruzione effettiva delle funzioni del corpo.

in tale matrice e quali sono legati quantitativamente o qualitativamente per costruire un corpo di funzioni quasi abeliane, di cui diventa dopo ciò facile di assegnare le espressioni mediante le funzioni intermediarie o le funzioni theta di più variabili.

Resta la questione di sapere a quali condizioni deve esser sottoposta una matrice di π orizzontali e di $\mu < 2\pi$ verticali perchè possa ridursi alla ricordata forma tipica. La sola condizione che le funzioni del corpo sieno meromorfe e con $\mu < 2\pi$ periodi, non basta, mentre è sufficiente nel caso abeliano ($\mu = 2\pi$). Ciò equivale a chiedere quali condizioni vanno aggiunte alla meromorfia, perchè sussista il teorema d'addizione, che è automaticamente soddisfatto quando $\mu = 2\pi$, mentre non lo è per $\mu < 2\pi$, come lo attestano esempi di COUSIN.

III. FONCTIONS ET VARIÉTÉS QUASI-ABÉLIENNES (*)

Il s'agit-là des fonctions analytiques, méromorphes de π variables indépendantes avec $\mu \leqq 2\pi$ périodes ([1]). La théorie est commencée en 1947. (Voir mon mémoire *Funzioni quasi abeliane* un volume dans « Scripta varia », Ac. Pont. 1947).

Si $\mu = 2\pi$ (et alors nous écrirons, suivant l'usage, p au lieu de π) on tombe sur les fonctions abéliennes. Dans ce cas les composantes des périodes forment une *matrice de* RIEMANN, caractérisée par deux conditions, une qualitative et l'autre quantitative. A propos d'une telle matrice il faut rappeler les recherches remarquables de Gaetano SCORZA. Le théorème d'existence relatif assure l'existence d'un corps de fonctions abéliennes, attaché à une matrice de RIEMANN quelconque ω,

(*) Nel volume: « *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 1954, Amsterdam, September 2-9 ». Vol. III, pp. 521-528.

([1]) L'étude des fonctions aver $\mu > 2\pi$ périodes se reduise à l'étude des fonctions quasi abéliennes par un convenable changement de variables.

donnée. Le même corps est défini par toute matrice *équivalente* à ω, dans un sens bien précis [1].

Parmi les matrices équivalentes à ω il y a des matrices *normales*, c'est-à-dire de type $|A\Omega|$, ou A est une matrice carré (d'ordre p) à éléments tous nuls sauf ceux de la diagonale principale qui sont $\frac{2\pi i}{d_1}, \ldots, \frac{2\pi i}{d_p}$; $d_1, \ldots, d_p$ étant des entiers ($d_1 = 1$, d_s divisible par d_{s-1}), appellés *diviseurs* du corps; et Ω est une matrice carré symétrique satisfaisante à une seule condition qualitative [2].

Avant de nous borner aux fonctions quasi abéliennes ($\mu < 2\pi$) ajoutons quelques mots sur la *variété de* PICARD V_p, attachée à un corps de fonctions abéliennes de *p variables* [3].

V_p est une variété abélienne, c'est-à-dire que les coordonnées de ses points sont des fonctions du corps et en outre elle est de *rang* 1, c'est-à-dire qu'à chaque point de V_p correspond un seul point dans un des parallèletopes des périodes. Nous

---

(1) Deux matrices A, A^* s'appellent *équivalentes* s'il existe une matrice complèxe non dégénérée β et une matrice unimodulaire à éléments entiers B, telle que $A^* = \beta A B$. Cette relation est réflexive, symétrique et transitive.

(2) Pour les développements plus recents de la théorie des fonctions abéliennes je renvois aux belles leçons: *Funzioni abeliane e matrici di Riemann* di Fabio CONFORTO (Corsi dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, 1942).

(3) La dénomination de *variété de Picard* a été introduite dans des travaux de ENRIQUES-SEVERI et de CASTELNUOVO. En partant d'une variété algébrique irréductible quelconque W d'irrégularité superficielle $p>0$ on obtient, d'après CASTELNUOVO (1905), une *première* V_p de PICARD. Elle est l'image birationnelle de la totalité ∞^p des systèmes linéaires de hypersurfaces d'un système irréductible complet de hypersurfaces de W. Une *seconde* W_p (abélienne de rang 1 suivant la términologie qui va suivre), s'obtient d'après le conférencier (F. SEVERI, *Un teorema d'inversione per gl'integrali semplici di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1913) moyennant la matrice de RIEMANN des intégrales simples de première espèce attachées à W. Le conférencier a remarqué pour la première fois (en 1913) que les deux variétés peuvent être distinctes. Un lieu fort élegant entre les deux variétés a été établi par M. ANDREOTTI (Lincei, 1951: Ac. Royale de la Belgique, 1952). Dans des travaux récemment publiés dans l'Am. Journal la seconde variété est appellée *variété de Albanese*, tandis que cet ancien et vaillant disciple du conférencier l'a rencontrée seulement presque vingt après la publication de la Note de SEVERI (Istituto Veneto).

nous référons à un modèle non singulier, ne contenant pas des variétés exceptionnelles; ce qu'il est possible d'obtenir.

Toute variété abélienne (de rang quelconque) se représente avec une involution sur V_p.

La V_p fur recontrée pour la première fois par PICARD dans ses recherches classiques (commencées pour $p=2$ en 1889) sur les variétés algébriques admettant un groupe continu, abélien, transitif, ∞^p, d'automorphismes birationnels. Nous envisageons la variété surtout de ce point devue, de sorte à comprendre les deux types de variétés dont nous avons parlé tout à l'heure dans la note (3).

Des transformations infinitésimales du groupe PICARD déduit aisement l'existence sur V_p de p intégrales algébriques simples. Il lui échappa que ces intégrales ne sont pas nécessairement de 1re espèce, comme il le croyait. Le malentendu fut corrigé par PAINLEVÉ en 1903.

J'avais dans une petite Note de 1907 (Ist. Veneto) remarqué que pour caractériser la surface de PICARD au moyen des invariants géométriques, l'hypothèse de l'existence du groupe continu ∞^2, transitif, n'était pas suffisante, mais qu'il fallait ajouter l'hypothèse de la transitivité *absolue* du grouppe, c'est-à-dire que sur la surface, dépourvue de courbes exceptionnelles, n'existait aucune courbe ou point invariant. Au point de vue analytique cela signifie que si la transitivité n'est pas absolue, les deux intégrales simples de la surface ne peuvent pas être tous les deux de 1re espèce.

Eh! bien, la même conclusion est valable pour une dimension quelconque. C'est-à-dire que si une variété algébrique V_π (non singulière) possède un group continu ablélien, ∞^π, Γ, d'automorphismes birationnels, ou bien Γ est *absolument* transitif et alors V_π est une variété de PICARD d'irregularité *superficielle* $\pi=p$, de sorte qu'il y a sur la variété p intégrales simples de 1re espèce; ou bieu Γ est *généralement* transitif et ils existent sur V_π de sous variétés non exceptionnelles invariantes et alors $\pi>p$, p étant l'irregularité superficielle de V_π et les π intégrales simples existant sur V_π en vertu des transformations infinitésimales du groupe, ne sont pas tous de première espèce. On tombe ainsi sur les variétés et sur les fonctions quasi abéliennes.

La recherche de PAINLEVÉ ne touche pas aux groupes continus attachés aux fonctions envisagées; mais ce lien est dans la nature même du problème, comme nous le verrons de suite.

En raison de l'importance de la recherche de PAINLEVÉ publiée dans le volume des « Acta mathematica » pour la célébration du centenaire d'Abel, j'ajouterai d'autres indications. La recherche est développée jusqu'au fond pour $\pi=2$, avec le but principal de démontrer le théorème algébrique d'addition pour les fonction de plusieurs variables, théorème que WEIERSTRASS donnait dans ses leçons, mais dont on ne connaissait pas la démonstration avant PAINLEVÉ. Dans le cadre de ces fonctions se presentaient soit les fonctions abéliennes, soit leurs dégénérescences, qui sont précisement les fonction quasi abéliennes.

Les résultats de PAINLEVÉ combinés avec ceux de l'Auteur amènent à la conclusion que les fonctions quasi abéliennes (en particulier abéliennes) épuissent l'ensemble des fonctions continues de π variables, à dérivées premières continues, qui admettent un théorème d'addition algébrique. (Elles résultent en conséquence analytiques méromorphes, périodiques).

Nous appellons *variété quasi abélienne de* PICARD V_π une variété algébrique (dont nous considérons un modèle non singulier) possedant un groupe continu ∞^π, abélien, Γ, généralement transitif d'automorphismes birationnels. Elle joue dans la théorie des fonctions quasi abéliennes le même role qui est joué par la variété de PICARD dans la théorie des fonctions abéliennes.

L'inversion simultanée du système linéaire Σ des intégrales simples $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$ existant sur V_π en vertu de Γ, donne l'uniformisation de V_π au moyen de fonctions quasi abéliennes d'un corps, dont nous indiquérons dans la suite la construction.

La V_π est de rang 1 par rapport aux périodes de ce corps de fonctions, mais il y a des exceptions à la biunivocité.

Le système Σ est *complet* par rapport à Γ; c'est-à-dire qu'il renferme toute intégrale simple de V_π invariant pour Γ.

Au système Σ appartient toute intégrale de 1re espèce $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de V_π, ou p $(0 \leqq p \leqq \pi)$ est l'irregularité superficielle de V_π. Soit Σ_0 le système linéaire des intégrales de 1re espèce. Etant $p<\pi$, dans Σ il existe des intégrales de 2me et 3me espèce, formant dans leus ensemble un système linéaire subordonné Σ'. Il renferme un nombre maximum δ_1 $(\geqq 0)$ d'intégrales *essentiellement de 3me espèce*, $u_{p+1}, \ldots, u'_{p+\delta_1}$, formant un système linéaire Σ_1. En disant "essentiellement" de 3me espèce nous entendons exprimer que toute combinaison linéaire à coéfficients constants, non tous nuls, d'intégrales de Σ_1, est de 3me espèce. Analoguement par rapport aux intégrales de 2de espèce, pour lesquelles nous aurons un nombre maximum δ_2 $(\geqq 0)$ d'intégrales essentiellement de seconde espèce $u_{p+\delta_1+1}, \ldots, u_{p+\delta_1+\delta_2}$, formant un système linéaire Σ_2. Le système Σ' a la dimension $\delta_1+\delta_2-1$ et Σ est le système minimum renfermant Σ_0, Σ_1, Σ_2. C'est-à-dire que $\pi=p+\delta_1+\delta_2$. Les systèmes Σ_1, Σ_2 peuvent être choisis arbitrairement en Σ', sous la condition de leur définition.

On a ainsi trois *entiers caractéristiques* p, δ_1, δ_2 de la variété V_π associée au groupe Γ, c'est-à-dire à la matrice des périodes des intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$.

Nous verrons tout à l'heure qu'étant donné π et étant choisie la decomposition $\pi=p+\delta_1+\delta_2$ de π, ou p, δ_1, δ_2 sont des entiers non négatifs arbitraires (sous la condition $\pi=p+\delta_1+\delta_2$), il existe toujours des variétés V_π possédantes les entiers caractéristiques choisis.

Nous verrons aussi que le groupe Γ n'est pas déterminé univoquement par V_π, lorsque $\pi>p$ (tandis qu'il est parfaitement déterminé si $\pi=p$).

Une des grandes difficultés dans l'étude de V_π $(p<\pi)$ est que cette variété renferme un nombre infini de variétés exceptionnelles. C'est le même qui se présente (suivant un théorème classique de CASTELNUOVO-ENRIQUES) pour les surfaces appartenant aux classes des reglées et des surfaces rationnelles. Il n'existent pas pour ces surfaces des modèles dépourvus de courbes exceptionnelles, tandis qu'ils existent pour toute autre surface. C'est le même pour V_π, comme nous allons le voir.

On démontre aisément que l'ensemble de points, I, invariant pour Γ, est constitué des pôles et des points logarithmiques des intégrales de Σ'. Mais ces points ne sont pas les seuls points singuliers pour ces intégrales. Il y a aussi pour chacune d'elles des points d'indétermination qui remplissent des variétés algébriques pures à $\pi - 2$ dimensions. Soit M leur ensemble. Alors $I + M$ est une variété algébrique pure H, $\infty^{\pi-1}$, qui renferme tout point singuliers, les points d'indéterminations se présentant aussi comme points d'accumulations des pôles et des points logarithmiques.

Eh! bien, chaque composante de M est exceptionnelle vis-à-vis des transformations de Γ. Soit $E_{\pi-2}$ une telle composante. Alors une transformation (non identique) de Γ change $E_{\pi-2}$ dans une variété $E'_{\pi-1}$, remplie par une involution $\infty^{\pi-2}$ de courbes rationnelles γ, chacune desquelles correspond à un point de $E_{\pi-2}$. En changeant la transformation, la variété $E'_{\pi-1}$ décrit sur V_π un système irréductible $\infty^{\pi-1}$, de variétés analogues et les γ attachées aux variétés $E'_{\pi-1}$ de ce système constituent une involution $\infty^{\pi-1}$, J, qui compose le système susdit. Par le point générique de V_π passe une et une seule courbe γ.

Chaque involution des courbes γ est invariante pour Γ. On a ainsi autant d'involutions analogues que des variétés d'indétermination; mais en realité il existe sur V_π une infinité de telles involutions. Une seule d'elles est suffisante pour nos déductions ultérieures.

J'ai en effet démontré récemment (Convegno di geom. diff., Venezia, 1953) *que sur toute courbe rationnelle* γ *d'une invo-*

lution J est possible de fixer un point sans introduire des irrationalités arithmétiques (par rapport aux paramètres de γ en J).

Cela complète dans un point fondamental la théorie que j'avais développée en 1947, parce qu'on peut à présent éliminer l'ennuyante hypothèse de travail, que j'avais appelé « hypothèse L »: c'est-à-dire l'hypothèse de l'existence d'un modèle (non singulier) de V_π tel qu'aucun composante $\infty^{\pi-1}$ de la variété invariante H soit exceptionnelle.

Nous pouvons maintenant énoncer les théorèmes fondamentaux de la théorie des fonctions quasi abéliennes:

Théorème de caractérisation. Pour qu'une V_π possédant un groupe continu du type Γ ait l'irregularité superficielle $p<\pi$ (c'est-à-dire qu'elle soit quasi abélienne) il faut et il suffit que Γ renferme un sous groupe rationnel ∞^δ, ou $\delta<\pi$ (et alors $p=\pi-\delta$). La V_π est en consequence le produit directe d'une variété de PICARD *V_π et d'un espace linéaire S_δ; et viceversa.*

Si p$=0$ (et par suite $\delta=\pi$) *la V_π est rationnelle.* Tout cela explique à priori l'existence sur V_π d'une nombre infini de variétés exceptionnelles et de groupes de type Γ.

Pour établir les théorèmes d'existence, qui vont suivre, il faut préablement déterminer les expressions des intégrales simples de 2de et 3^{me} espèce d'une V_π de PICARD en fonction des intégrales de 1re espèce; ce qui donne une extension remarquable des formules classiques de la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes *speciales*. Avec ces moyens on arrive plus aisément aux théorèmes suivantes:

I Théorème d'existence. Il existe toujours un corps de fonctions quasi abéliennes dont la matrice des périodes est la même de celle des périodes des p intégrales simples de première espece d'une V'_p de PICARD *et de δ_1 intégrales simples de 3^{me} espece et de δ_2 intégrales simples de 2^{me} espèce, génériquement choisies sur V'_p.*

En disant, "génériquement choisies" nous entendons que les variétés logarithmiques des intégrales de 3^{me} espèce soient *simplement liées* (¹) et que les δ_2 intégrales de 2^{de} espèce soient *essentiellement de* 2^{de} espèce.

Après une substitution linéaire à determinant non nul sur les intégrales conçues comme des variables indépendantes, la matrice formée par leur $2p+\delta_1$ périodes (cycliques et polaires) se réduit à la *forme normale* snivante

$$(T) \quad \begin{vmatrix} A & \Omega & O \\ O & \Omega_1 & B \\ O & \Omega_2 & O \end{vmatrix},$$

ou $|A\Omega|$ est la matrice de Riemann attachée à V'_p; $|O\Omega_1|$, $|O\Omega_2|$ sont les matrices respectives des périodes cycliques des intégrales de 3^{me} et de 2^{de} espèce; et B, matrice carré d'ordre δ_1, est la matrice des périodes polaires des intégrales de 3^{me} espèce.

Une ultérieure substitution linéaire (à déterminant non nul) sur les dernières intégrales réduit égal à zéro tout élément de B, sauf ceux de la diagonale principale qui deviennent égaux à $2\pi i$.

II Théorème d'existence. Sur une V_π quasi abélienne d'irrégularité superficielle $p<\pi$, il existe un nombre infini de groupes du type Γ *associés, suivant le théorème I, au même corps de fonctions quasi abéliennes, et ces groupes dépendent du choix d'une transformation crémonienne arbitraire dans un espace linéaire.*

Ajoutons que parmi les groupes Γ sur une même V_π il y en a qui satisfont à l'hypothèse L, et d'autres qui en échappent.

Mais le plus significantif des théorèmes d'existence est le suivant.

III Théorème d'existence. Etant donné une matrice du type (T), *pour qu'il existe un correspondant corps de fonctions quasi abéliennes il faut et il suffit que la matrice* $|A\Omega|$ *soit rieman-*

(¹) Dans mes premiers travaux sur la base j'ai demontré que les variétés logarithmique (nécessairement pures et de dimension $\pi-1$ si la variété ambiante est ∞^π) d'une intégrale de 3^{me} espèce, sont algébriquement liées. On doit supposer pour notre théorème qu'il n'y ait qu'un de ces liens indépendants.

nienne. Les autres matrices partielles $|\Omega_1|$, $|\Omega_2|$ *peuvent être choisies arbitrairement.*

Résultat d'une simplicité inattendue vis-à-vis des difficultés qu'on a du surmonter pour l'atteindre.

Pour ce qui concerne les conséquences de ces théorèmes je renvoi à mon mémoire du 1947.

Je me borne a rappeler (parce qu'il est nécessaire pour la suite) que la détermination du nombre des modules d'un corps K de fonctions quasi abéliennes conduit à envisager un quatrième entier caractéristique du corps, qui est (lui même) comme les caractères p, δ_1, δ_2, invariant vis-à-vis des transformations birationnelles: c'est le rang ρ de la matrice carré $|B|$.

Les applications à la géométrie algébrique sont nombreuses et très intéressantes. Je me suis borné (dans le mémoire de 1947) seulement à quelques essais initiaux en traitant complètement le cas particulier $\pi=2$.

Le role de la surface de KUMMER dans la théorie des surfaces hyperelliptiques est ici joué par la surface de PLÜCKER (surface de complex d'un complex quadratique général). Elle est rationnelle, de 4^{me} ordre, avec une droite double ordinaire et 8 points doubles ordinaries hors de la droite.

On trouvera plusieurs problèmes qui interessent soit l'analyse soit la géométrie, dans mon mémoire de 1947 et particulièrement au n. 57.

Parmi les problèmes non resolus il y a le problème de déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire une matrice ayant π horizontales et $\mu < 2\pi$ verticales pour qu'elle puisse être réduite au type (T) et elle soit pourtant la matrice des périodes d'un corps de fonctions quasi abéliennes.

Je termine en résumant les remarquables contributions à la théorie données dans ces derniers temps par Fabio CONFORTO. Je saisis l'occasion pour envoyer encore une fois mes souvenirs à la mémoire de l'ami perdu.

Le but principal de CONFORTO était d'arriver à une théorie arithmétique des fonctions quasi abéliennes analogues jusqu'au possible à celle des fonctions abéliennes.

Mais il y a là des différences profondes et des difficultée absolument nouvelles à surmonter.

La raison principale n'est pas seulement qu'à un corps de fonctions quasi abéliennes réponde un nombre infini de groupes Γ, mais aussie qu'à une matrice (T) peuvent correspondre plusieurs corps de fonctions quasi abéliennes; tandis que dans le cas abélien il y a correspondence biunivoque entre le corps et le groupe Γ, entre la matrice des périodes et le corps. C'est cette correspondence que dans ce dernier cas permet de substituer à l'étude des propriétés fonctionnelles l'étude des propriétés arithmétiques de la matrice de RIEMANN, comme l'a fait SCORZA. Dans le cas quasi-abélien le détachement du fonctionnel du côté arithmétique n'est pas possible.

CONFORTO posa à la base de ses recherches la théorie des correspondances univoques sur une V_π quasi abélienne de PICARD répresenté par des congruences du type

$$u' \equiv \Lambda u + \lambda \pmod{\omega} \tag{1}$$

étant u la matrice à π horizontales et à 1 verticale dont les éléments sont les intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_\pi$, c'est-à-dire les variables du corps de fonctions quasi abéliennes envisagé sur V_π; ω la matrice des périodes, Λ une matrice carré d'ordre π et λ une matrice à π horizontales et à une verticale.

Pour que la congruence ait un sense il faut et il suffit que ω satisfait à une *relation de* HURWITZ-CONFORTO (comme on a proposé de la nommer), c'est-à-dire

$$\omega \mathrm{I} = \Lambda \omega$$

ou I est une matrice carré convenable d'ordre μ (μ nombre des périodes, c'est-à-dire de verticales de ω) à *éléments entiers*.

Les rapports entre les matrice Λ et I donnent lieu à des faits imprevus en comparaison avec le cas abélien. En outre tandis que dans le dernier cas la (1) donne toujours une correspondance *algébrique*, dans le cas quasi-abélien ($\mu < 2\pi$) la correspondence, tout en restant analytique, peut être *transcendante*.

Ces propriétés sont contenues, avec bien d'autres, dans plusieurs notes et mémoires de CONFORTO, publiées entre 1948 et 1954. Le dernier (postume, dans les *Annali di Matematica*) contient la détermination complète des correspondances (1); un autre mémoire de 1949 donne toutes les rélations de HURWITZ-CONFORTO. Ici joue un rôle fondamentale de caractère ρ, dont j'ai parlé plus haut (rang de la matrice B). Les matrices quasi abéliennes qui présentent l'analogie plus étroite avec les matrices de RIEMANN (et que comprennent en particulier ces dernières) sont celles pour lesquelles $\rho = \delta_2$.

Cette théorie arithmétique-fonctionnelle, suivant le programme de CONFORTO, est bien loin d'être achevée.

Plusieurs élèves de l'Istituto di Alta Matematica en Rome travaillent maintenant suivant les directives laissées par CONFORTO. P. ex. un de ces élèves, M. BENEDICTY a étudié les propriétés des fonctions quasi abéliennes que j'avais nommées *speciales* et les conditions pour que une matrice du type (T) soit équivalente à une matrice du même type, avec des entiers caractéristique et des diviseurs différents. Il vient maintenant d'envisager le problème de determiner ces entiers et ces diviseurs pour toute matrice du type (T) equivalente à une matrice donnée de tel type.

INDICE DEGLI AUTORI

I numeri rinviano alle pagine del volume

INDICE ANALITICO

I numeri rinviano alle pagine del volume. L'indicazione di un argomento vale, quasi sempre, anche per le pagine successive.

INDICE