

PONTIFICIAE ACADEMIAE SCIENTIARVM SCRIPTA VARIA

— 19 —

GUSTAVO COLONNETTI

ACCADEMICO PONTIFICIO

ELASTOPLASTICITÀ

SAGGIO DI INTERPRETAZIONE DELLE DEFORMAZIONI PLASTICHE

COME FENOMENI EREDITARI



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

—
MCMLX

GUSTAVO COLONNETTI

ACCADEMICO PONTIFICIO

ELASTOPLASTICITÀ

SAGGIO DI INTERPRETAZIONE DELLE DEFORMAZIONI PLASTICHE

COME FENOMENI EREDITARI



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MCMXX

I

POSIZIONE DEL PROBLEMA

Tutti i corpi naturali — anche quelli che, nel linguaggio corrente, si sogliono chiamare « rigidi » od « indeformabili » — possono, in determinate circostanze, presentare dei cambiamenti di stato ai quali si dà genericamente il nome di « deformazioni ».

Questi cambiamenti di stato sono, in generale, dei fenomeni assai complessi, in cui tutte le proprietà fisiche del corpo possono trovarsi impegnate. Ma vi è sempre, in ciascun caso particolare, una parte del fenomeno, più immediatamente accessibile alla esperienza diretta, che consiste in un cambiamento di forma e di dimensioni del corpo.

Ed è d'altronde proprio e soltanto nella misura in cui il cambiamento di stato si può identificare con un semplice cambiamento di forma e di dimensioni, che si giustifica il nome di « deformazione ».

* * *

Le cause che possono determinare le deformazioni dei corpi naturali sono molte e diverse. Fra di esse, quelle su cui è più frequentemente attirata la nostra attenzione, sono le forze esterne.

Ora, nello studio delle deformazioni dovute all'azione di forze esterne, un fatto costantemente si osserva: ed è la tendenza che le deformazioni hanno a scomparire non appena cessano di agire sul corpo le forze che le hanno determinate.

Si tratta ben inteso di una semplice tendenza; la scomparsa della deformazione non è mai totale.

Vi è cioè una parte della deformazione che scompare effettivamente ed immediatamente quando le forze esterne cessano di agire. Noi le diamo il nome di « deformazione elastica ».

Ma vi è anche sempre un'altra parte della deformazione che permane anche dopo che le forze che l'hanno determinata hanno cessato di agire. Noi la chiameremo « deformazione plastica ».

* * *

Le cose si complicano sensibilmente — e la distinzione tra deformazioni elastiche e deformazioni plastiche cessa di essere così netta come a tutta prima si sarebbe potuto credere — se l'azione delle forze esterne si prolunga nel tempo.

In questo caso infatti anche se le forze si mantengono rigorosamente costanti, può accadere che le deformazioni vadano crescendo.

Alla deformazione immediata che si realizza all'atto stesso dell'applicazione delle forze, viene spesso ad aggiungersi una deformazione successiva, crescente col tempo. E quando le forze cessano di agire, alla parte della deformazione che sparisce immediatamente può far seguito un'altra parte che sparirà invece lentamente, tanto più lentamente quanto più prolungata è stata l'azione delle forze.

Si suol allora parlare di « elasticità ritardata ».

* * *

Non bisogna del resto credere che la presenza di deformazioni elastiche si abbia solo in presenza di forze esterne.

La permanenza di una deformazione plastica in un elemento di un corpo che sia stato deformato dall'azione di forze esterne, può infatti impedire il ritorno allo stato non deformato di elementi vicini che, non essendo stati deformati plasticamen-

te, tenderebbero a riprendere la loro forma e le loro dimensioni primitive.

Una deformazione plastica di un elemento può così determinare tutto un sistema di deformazioni elastiche delle rimanenti parti del corpo, deformazioni elastiche le quali assumono perciò un carattere di permanenza in quanto non potrebbero annullarsi se non nel caso, del tutto ipotetico, di una distruzione delle connessioni esistenti tra elemento ed elemento.

* * *

La stessa cosa può d'altronde verificarsi se le deformazioni sono dovute ad altre cause che non siano le forze esterne applicate al corpo.

Stati di deformazione del tutto analoghi a quelli di cui ci stiamo occupando possono infatti venir determinati da variazioni della temperatura, dello stato igrometrico e di altre caratteristiche fisiche del mezzo in cui il corpo giace e di cui subisce l'influenza.

Altri stati di deformazione possono venir determinati da trasformazioni strutturali della materia di cui il corpo è formato; tipico fra tutti è il caso della presa e indurimento dei calcestruzzi, generalmente accompagnati da fenomeni di ritiro che si protraggono per mesi, a volte anche per anni.

Altre deformazioni ancora possono venir determinate da mutamenti dei vincoli a cui il corpo è soggetto; vincoli esterni dovuti per esempio alla presenza di altri corpi con cui esso viene a contatto; vincoli interni dovuti alle connessioni esistenti tra i differenti elementi che lo compongono.

Tutti questi casi, tra loro così differenti, possono sempre idealmente ridursi all'intervento di « deformazioni impresse » al corpo; ed è evidente che tale intervento può dar origine a tutto un sistema di deformazioni elastiche che — a somiglianza di quel che avviene nel caso delle deformazioni plastiche — non scompariranno effettivamente se non nel caso di una distruzione della struttura stessa del corpo.

Gli stati di equilibrio che si vengono così a definire, in assenza di ogni qualsiasi forza esterna, prendono il nome di « stati di coazione ».

* * *

In un primo studio approssimato dei problemi dell'equilibrio di quei corpi naturali le cui deformazioni ci appaiono piccolissime a fronte delle loro dimensioni, si presenta spontanea l'idea di trascurare tali deformazioni e di far dipendere la soluzione di quei problemi dalla teoria dell'equilibrio di corpi ideali supposti dotati di una perfetta indeformabilità.

Di qui l'applicazione della « statica dei corpi rigidi » allo studio dell'equilibrio dei solidi naturali.

Le leggi che l'ipotesi della rigidità conduce a formulare debbono in realtà condurre ad una soluzione, per lo meno approssimata, del problema, tutte le volte che le deformazioni effettive del corpo naturale che si considera alterano (in ragione della loro piccolezza) di pochissimo le sue condizioni statiche.

Senonché non è affatto detto che debba sempre esser così. Nulla ci autorizza infatti ad escludere la possibilità che quelle deformazioni, per quanto piccolissime, abbiano un'influenza non trascurabile su le condizioni statiche del corpo.

Che anzi la stessa statica dei corpi rigidi ci rivela non sempre lecita l'ipotesi della perfetta indeformabilità su cui essa si fonda, presentandoci come indeterminati o come impossibili certi casi di equilibrio che, in natura, sono ovviamente possibili e perfettamente determinati.

Convien dunque senz'altro ammettere che, in questi casi, nel sostituire al sistema reale lo schema ideale da sottoporsi al calcolo, noi abbiamo trascurato qualche cosa che non era lecito trascurare.

Ora impossibilità ed indeterminazioni scompaiono immediatamente non appena noi, nei nostri calcoli, introduciamo l'ipotesi di una deformazione, sia pur piccolissima e comunque definita, del corpo.

Resta così nettamente individuata, in questi casi, la via da seguire; e consiste nel sostituire alla « statica dei corpi rigidi » una « statica dei corpi deformabili ».

* * *

Naturalmente il dire che, nello studio dell'equilibrio dei corpi naturali, occorre tener conto della loro deformabilità, non vuol ancora dire che il fenomeno delle variazioni di forma e di dimensioni possa e debba venire introdotto nei calcoli in tutta la sua complessità.

Noi non dobbiamo infatti dimenticare che le deformazioni che vogliamo studiare sono piccolissime e che perciò, pur non potendo e non volendo più trascurarle, noi potremo — ed in un certo senso dovremo, a scanso di inutili complicazioni analitiche — accontentarci di apprezzarle in modo approssimativo.

Si tratterà cioè di sostituire alla prima approssimazione, quando questa vien riconosciuta insufficiente, una seconda interpretazione più prossima alla realtà, e suscettibile di determinare in ogni caso la soluzione del problema, ma che non ha, né potrebbe avere, alcuna pretesa di rappresentare il fenomeno reale con assoluto rigore.

Ora il fatto più caratteristico che ferma la nostra attenzione quando ci accingiamo a studiare sperimentalmente il fenomeno delle deformazioni dei corpi naturali è (come abbiamo già detto) questo: che, se le forze esterne che hanno per ipotesi determinata la deformazione cessano di agire, il corpo tende immediatamente a riprendere la forma e le dimensioni primitive, pur senza pervenirvi mai in modo assoluto.

Ma avviene che nelle costruzioni, per ragioni assai facili ad intuirsi, trovano più largo e frequente impiego precisamente quei materiali nei quali, finché la sollecitazione non oltrepassa un certo limite, la deformazione plastica si mantiene piccolissima (cioè praticamente inapprezzabile) rispetto alla deformazione elastica.

Si aggiunga che questo limite — a cui si dà il nome di « limite di elasticità » — è nella maggior parte dei casi assai prossimo a quello che ragioni di sicurezza ci consigliano in pratica di non oltrepassare.

E si comprenderà facilmente come si sia presentata spontanea l'idea di prendere in considerazione, nello studio dei problemi dell'equilibrio, le sole deformazioni elastiche; e come si sia stati così condotti ad introdurre un nuovo tipo di corpo (non meno ideale del corpo rigido della statica classica) capace per ipotesi di subire, sotto l'azione delle forze esterne, dei cambiamenti piccolissimi di forma e di dimensioni che scompaiono al cessare delle cause che li hanno prodotti.

Questo tipo di corpo ideale ha preso il nome di « corpo elastico » e dallo studio delle sue proprietà è nata quella « teoria dell'elasticità » su cui notoriamente poggia tutta la moderna scienza delle costruzioni.

Ma il fatto stesso che questa teoria, che potremmo chiamare di seconda approssimazione, si fonda sulla presunzione che le deformazioni plastiche, piccolissime rispetto alle deformazioni elastiche, abbiano un'influenza trascurabile sullo stato di equilibrio del sistema, basta da solo a porre dei limiti ben definiti alla sua applicabilità ai problemi dell'equilibrio dei corpi naturali.

E invero l'ipotesi della perfetta elasticità conduce bensì ad una soluzione che è in ogni caso unica e ben determinata del problema dell'equilibrio; ci addita cioè come possibile una ed una sola delle infinite soluzioni che soddisfano alle equazioni generali della statica dei corpi rigidi.

Ma un più attento esame dei fatti sperimentali ci ha resi avvertiti che, in natura, non una sola ma tutte quelle soluzioni sono, di volta in volta, possibili; in questo senso che la soluzione individuata dalla teoria dell'elasticità si realizza effettivamente se, e solo se, le ipotesi della teoria sono verificate, se cioè non interviene nessuna deformazione plastica; mentre le

altre soluzioni divengono alla lor volta realizzabili se intervengono opportune deformazioni plastiche, sian pur piccolissime.

Accade cioè ancora una volta, ed a proposito delle deformazioni plastiche, quel che abbiamo già avvertito a proposito delle deformazioni in generale; che cioè dal fatto della lor piccolezza non deriva necessariamente che la loro influenza sul regime statico del corpo sia sempre trascurabile.

Ciò avviene bensì in certi casi, ma vi sono anche dei casi in cui quelle deformazioni, pur restando piccolissime, vengono ad avere una influenza non trascurabile sulle condizioni statiche del corpo.

Di qui la necessità di passare, almeno in questi ultimi casi, ad una teoria che potremmo dire di terza approssimazione, vale a dire ad una « statica dei corpi deformabili » nella quale, non le sole deformazioni elastiche, ma anche le deformazioni plastiche, vengano tenute nel debito conto.

* * *

Resta ben inteso che, ancora una volta, non si tratterà già di introdurre nei nostri calcoli il fenomeno delle deformazioni plastiche in tutta la sua complessità.

Il nostro scopo resta infatti ancora quello di studiare delle deformazioni piccolissime; noi potremo quindi limitarci a sostituire alla considerazione del corpo elastico quello di un nuovo tipo ideale di corpo, che chiameremo « corpo elasto-plastico », in cui il duplice fenomeno della elasticità e della plasticità verrà introdotto nella forma più semplice.

In un primo tempo io avevo ritenuto che questa forma si potesse trovare prendendo le mosse dal fatto innegabile che, nei corpi di cui ci vogliamo occupare, e per sollecitazioni sufficientemente piccole, il fenomeno elastico è sempre nettamente prevalente; mentre il fenomeno plastico si rende manifesto, e qualche volta assume proporzioni ed influenza dominanti, per sollecitazioni più grandi.

Un tale stato di cose si può esprimere postulando l'esistenza di un limite — che continueremo naturalmente a chiamare « limite di elasticità » — al di sotto del quale le deformazioni siano, o si possano con sufficiente approssimazione ritenere, perfettamente elastiche; ed ammettendo che, in corrispondenza di quel limite, il materiale passi dallo stato perfettamente elastico ad uno stato perfettamente plastico in cui le deformazioni plastiche si sovrappongano alle deformazioni elastiche precedentemente realizzate, senza per altro alterarne le caratteristiche, ed in particolare senza influire sulla loro attitudine ad annullarsi quando cessino di agire le cause che le hanno prodotte.

Fin d'allora avvertivo però che la sola formulazione di queste ipotesi implicava già delle precise limitazioni alla applicabilità della nuova teoria.

Avvertivo cioè che vi potevano essere dei casi in cui le conclusioni a cui questa teoria ci avrebbe condotto non potevano corrispondere alla realtà del fenomeno fisico in quanto su questo influiscono in modo non trascurabile altri fattori da cui la teoria prescinde.

E segnalavo a questo proposito quei casi in cui l'esperienza dimostra non trascurabile l'influenza del fattore tempo; in cui cioè le deformazioni, a parità di sollecitazione, vanno sensibilmente crescendo al crescere della durata di questa.

Sono stato così indotto ad apportare una prima correzione alla impostazione della teoria introducendo la considerazione di fenomeni viscosi — cioè di deformazioni plastiche che si verificano sotto carico costante e anche là dove il limite di elasticità non è ancor stato raggiunto.

A questo punto l'esistenza stessa del limite di elasticità — e la conseguente distinzione fra una prima fase di perfetta elasticità ed una successiva fase di perfetta plasticità — si riduceva evidentemente ad una posizione convenzionale non avente più riferimento alcuno colla realtà delle cose.

Tuttavia, anche considerata soltanto come una schematizzazione di approssimazione, la distinzione fra la fase elastica e la fase plastica si è rivelata utile.

È infatti grazie ad essa che noi abbiamo potuto renderci in qualche modo conto della influenza che l'intervento delle deformazioni plastiche esercita su lo stato di equilibrio dei corpi naturali, dando origine a stati di coazione indipendenti dalle forze esterne ed a conseguenti alterazioni (spesso benefiche) nella distribuzione delle tensioni quali si verificherebbero in regime di perfetta elasticità.

* * *

Un decisivo passo innanzi verso una schematizzazione più aderente alla realtà del fenomeno fisico non si può fare però se non abbandonando completamente l'impostazione classica del problema — cioè la dipendenza dello stato di deformazione dallo stato di sollecitazione *attuale* — e considerando le deformazioni come dipendenti, non soltanto dai valori attuali delle forze applicate al corpo, ma da tutti i valori che li hanno preceduti nel tempo.

Così impostato il problema in termini veramente generali, si può dire che una qualsiasi caratteristica della deformazione, in un dato istante T , potrà sempre venire espressa da una funzione

$$F | [\alpha_0^T(t)] |$$

del tipo di quella che VITO VOLTERRA aveva scelta, nella sua teoria dei fenomeni ereditari, per rappresentare le grandezze che dipendono da tutti i valori che una funzione

$$\alpha(t)$$

può prendere in un intervallo di tempo $(0, T)$.

Seguendo VOLTERRA noi ammetteremo che, essendo soddisfatte certe condizioni, la funzione F sia sviluppabile in una serie analoga a quella di TAYLOR, e che in questa serie i ter-

mini di ordine superiore al primo siano tutti trascurabili per rapporto ai termini lineari in α .

È il caso che VOLTERRA soleva designare col nome di « eredità lineare ».

Assunta l'origine dei tempi nell'istante in cui si è verificata la prima applicazione di forze esterne, ed ammesso — fino ad avviso contrario — che in quell'istante ciascun elemento del corpo si trovi nel suo stato naturale non deformato, a ciascuna componente della deformazione plastica noi siamo così condotti ad attribuire una espressione del tipo

$$[1] \quad \bar{\varepsilon}(T) = \int_0^T \alpha(t) \cdot f(T, t) \cdot dt$$

Alla funzione $f(T, t)$ VOLTERRA ha dato il nome di « coefficiente d'eredità ».

Volendone l'interpretazione fisica basterà dire che $f(T, t) dt$ misura la deformazione plastica determinata nell'istante T da un valore unitario della funzione $\alpha(t)$ operante durante l'intervallo di tempo $(t, t + dt)$.

Si potrebbe anche dire che il coefficiente d'eredità è in ogni istante eguale al rapporto tra la velocità di incremento della deformazione plastica ed il valore della funzione determinante α .

* * *

Si tratta ora di formulare delle ipotesi sulla forma da attribuire così alla funzione determinante α come al coefficiente di eredità f .

Nei confronti della funzione determinante noi ci limiteremo qui all'ipotesi che essa varii linearmente col tempo. È un'ipotesi assai limitativa, ma che ci consentirà di studiare un certo numero di problemi concreti, tra i più interessanti nelle applicazioni.

Supporremo dunque sempre, nel corso di questa trattazione, che sia

$$[2] \quad \alpha = ct \quad (c = \text{cost.})$$

Quanto al coefficiente d' eredità, noi lo supporremo legato alla funzione determinante da una relazione del tipo

$$[3] \quad f = a_1 + a_2 \alpha + a_3 \alpha^2 + \dots$$

dove a_1, a_2, a_3, \dots sono delle costanti dipendenti dal materiale e dal modo con cui esso vien deformato (per esempio dalla velocità con cui la deformazione viene realizzata).

In queste ipotesi si ottengono per la deformazione plastica le espressioni seguenti:

$$[4] \quad \begin{aligned} \bar{\epsilon}(T) &= \int_0^T c t (a_1 + a_2 c t + a_3 c^2 t^2 + \dots) dt = \\ &= a_1 c \frac{T^2}{2} + a_2 c^2 \frac{T^3}{3} + a_3 c^3 \frac{T^4}{4} + \dots = \end{aligned}$$

$$[5] \quad = \frac{a_1}{2c} \alpha^2(T) + \frac{a_2}{3c} \alpha^3(T) + \frac{a_3}{4c} \alpha^4(T) + \dots$$

S'intende che queste ipotesi sono del tutto arbitrarie, e che la loro scelta verrà giustificata soltanto *a posteriori* dal valore della teoria che ne seguirà.

E poiché una teoria fisica non è in definitiva che un modello matematico in cui si inquadrano i risultati di certe esperienze, il suo valore consisterà per noi nella possibilità che essa ci potrà offrire di coordinare fra loro fenomeni che, senza di essa, ci si presentavano come isolati e privi di rapporti cogli altri fenomeni conosciuti.

II

L'ISTERESI ELASTICA

CASO PRIMO

L'isteresi negli stati di deformazione determinati da forze esterne

Consideriamo un corpo omogeneo ed isotropo — cilindrico o prismatico — sollecitato in corrispondenza delle sue basi da forze esterne, parallele al suo asse, di intensità crescente linearmente col tempo.

La funzione determinante va, in questo caso, ovviamente scelta nell'ambito delle tensioni che quelle forze esterne determinano, o delle deformazioni *elastiche* funzioni lineari delle stesse.

Noi la potremo sempre identificare con una componente, opportunamente scelta, della deformazione elastica; componente che denoteremo genericamente con ε .

Assumeremo dunque come funzione determinante

$$\varepsilon = c t \quad (c = \text{cost.})$$

Supporremo poi anche, fino ad avviso contrario, che nella espressione [3] del coefficiente d'eredità il solo primo termine (costante) sia diverso da zero; che cioè sia

$$f = a_1$$

La [5] diviene

$$\bar{\varepsilon}(T) = \frac{a_1}{2c} \varepsilon^2(T)$$

Ciò vuol dire che, nell'istante generico T , sussiste un rapporto di proporzionalità tra la deformazione plastica ed il quadrato della deformazione elastica; rapporto che scriveremo d'or innanzi semplicemente così

$$[6] \quad \bar{\varepsilon} = k \varepsilon^2 \quad (k = \text{cost.})$$

intendendo che ε ed $\bar{\varepsilon}$ misurano rispettivamente le deformazioni elastiche e le deformazioni plastiche che nell'istante T coesi-

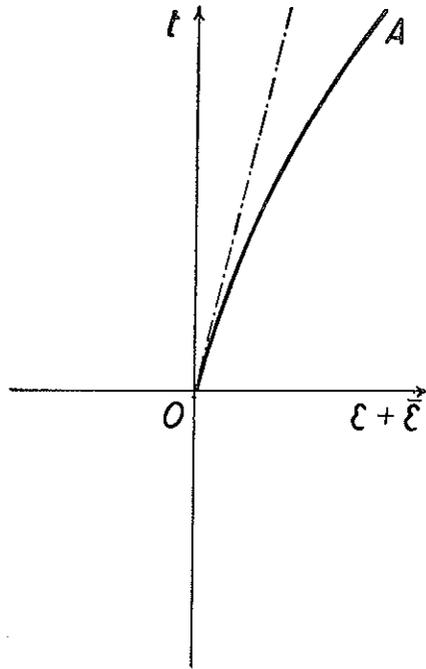


FIG. 1

stano in un determinato punto del corpo per effetto di una sollecitazione esterna che è andata linearmente crescendo nell'intervallo di tempo (O, T) .

Graficamente la legge di variazione delle deformazioni si potrà sempre rappresentare con una parabola uscente dall'origine degli assi ed ivi tangente alla retta rappresentativa delle deformazioni elastiche (fig. 1).

* * *

Vogliamo ora supporre che, nell'istante T , la legge di variazione della sollecitazione improvvisamente si inverte; che cioè la sollecitazione prenda a decrescere.

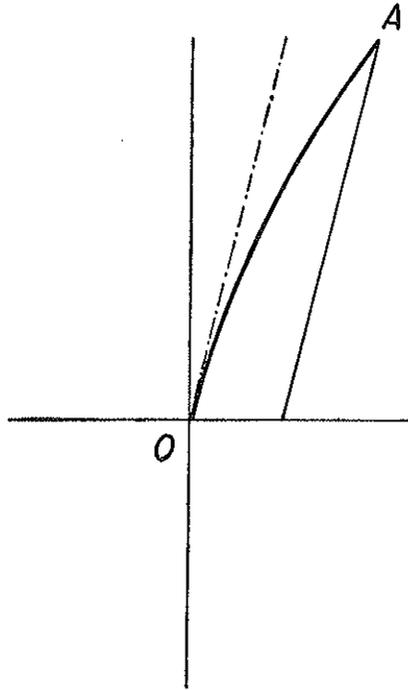


FIG. 2

Se dovesse annullarsi la sola deformazione elastica — come potrebbe avvenire se il ritorno a zero della sollecitazione avvenisse istantaneamente — il punto rappresentativo dovrebbe, nel nostro diagramma, tracciare una retta parallela alla tangente iniziale (fig. 2).

Ma se la sollecitazione decresce a poco a poco, per esempio colla stessa velocità con cui andava prima crescendo, l'esperienza dimostra che non le sole deformazioni elastiche scom-

paiono, ma anche una parte delle deformazioni plastiche; il punto rappresentativo si scosterà allora dalla parallela alla tangente iniziale per seguire una linea la cui curvatura, più o meno marcata, sarà in ogni caso opposta a quella della curva ascendente (fig. 3).

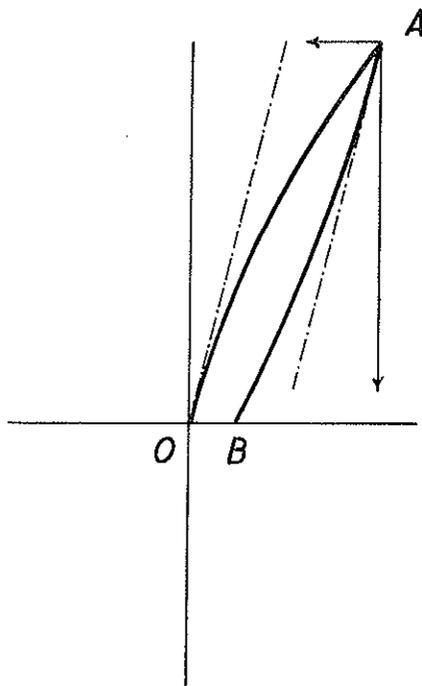


FIG. 3

Per ottenere un andamento della linea discendente assai simile a quello che si osserva sperimentalmente basta ammettere che, a partire dall'istante in cui si verifica l'inversione della sollecitazione, la deformazione elastica *negativa* che essa determina sia accompagnata da una deformazione plastica, *essa pure negativa*, la quale — per rapporto a nuovi assi coordinati convenientemente scelti: origine in A e direzioni opposte

alle precedenti — possa venire espressa in forma analoga a quella già adottata per le sollecitazioni crescenti

$$[7] \quad \bar{\epsilon}' = k' \epsilon'^2$$

k' essendo una nuova costante rappresentativa dell'attitudine del materiale a restituire *una parte* delle deformazioni plastiche; costante il cui valore dovrà perciò necessariamente essere minore o tutt'al più eguale a k .

Se poi, dopo che la sollecitazione si è in questo modo annullata, essa riprende a crescere (sempre colla stessa velocità), quelle deformazioni plastiche ricompariranno. Ed è facile constatare che — previo un nuovo cambiamento di assi: origine in B e direzioni iniziali — basta attribuire al coefficiente di proporzionalità lo stesso valore k' per ottenere una linea ascendente che fa capo in A (fig. 4) e, conseguentemente, un ciclo

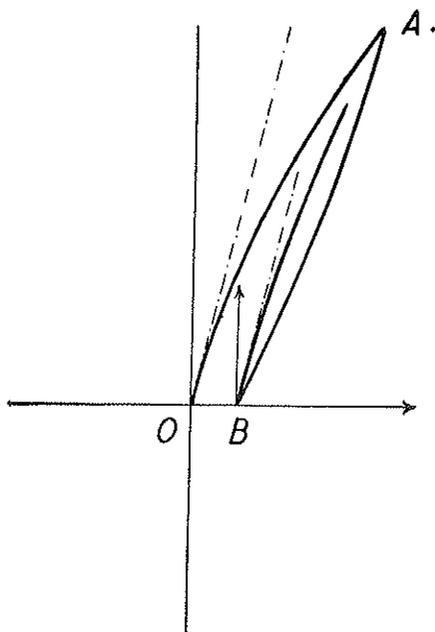


FIG. 4

di isteresi chiuso del tutto simile a quelli che si ottengono sperimentalmente se la sollecitazione non ha superato certi limiti.

Che se invece la sollecitazione, dopo di essersi annullata, continua a decrescere, cioè assume valori negativi fino ad egua-

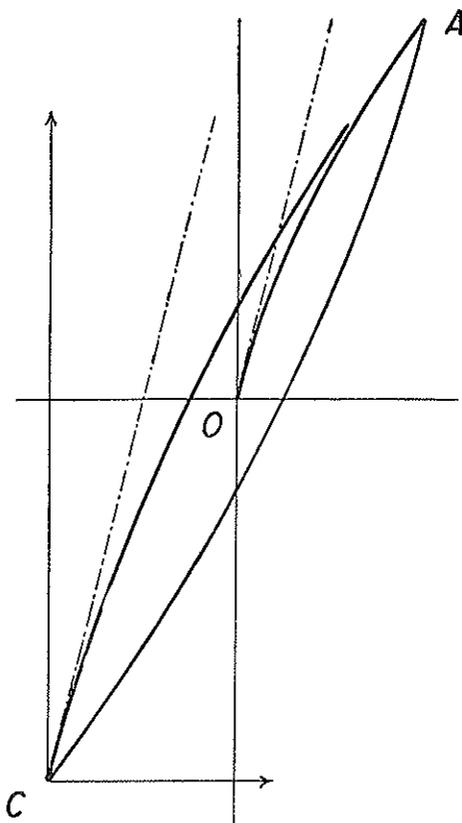


FIG. 5

gliare, in valore assoluto, il massimo già raggiunto nel campo positivo, il diagramma presenterà l'andamento indicato in fig. 5.

E questa volta, nel confronto coi risultati dell'esperienza, ci veniamo a trovare di fronte non soltanto ad una generica similitudine di forma, ma ad un dato concreto: che è la simme-

tria, per rapporto alla origine O, dei due vertici A e C del ciclo bilaterale, simmetria che si riscontra sperimentalmente sempre, qualunque sia il materiale su cui si opera e qualunque sia la velocità (costante) di variazione della sollecitazione, semprechè questa non abbia superati quei limiti a cui si è accennato poc'anzi.

Ora la teoria si presta senz'altro alla interpretazione di questo risultato; ponendo infatti nella [7]

$$\epsilon' = 2 \epsilon$$

si può ottenere

$$\bar{\epsilon}' = 2 \bar{\epsilon}$$

sol che si assuma

$$[8] \quad k' = \frac{1}{2} k$$

Ciò che significa, in ultima analisi, che della deformazione plastica una metà è destinata a sparire insieme colla deformazione elastica quando la sollecitazione si annulla, mentre l'altra metà permane.

E ciò qualunque sia la velocità di variazione della sollecitazione, purchè costante per tutta la durata dell'esperienza, cioè sia durante le operazioni di carico che durante quelle di scarico.

* * *

Queste conclusioni concordano coi risultati che io avevo personalmente ottenuti già molti anni or sono studiando sperimentalmente l'isteresi elastica del rame elettrolitico. In una Nota pubblicata nel 1915 nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » si trovano descritti e documentati due cicli bilaterali le cui forme e dimensioni riescono pienamente giustificate dalle considerazioni che qui siamo venuti svolgendo, sol che si ponga in un caso

$$k' = 0,51 k$$

e nell'altro

$$k' = 0,49 k$$

Ho ora voluto riprendere quelle esperienze valendomi delle più moderne attrezzature di cui dispone l'Istituto Dinamometrico Italiano, ed in particolare di un nuovissimo estensimetro registratore ad induzione costruito dalla Peters di Washington, il quale permette di ottenere (ingrandita mille volte) una nitidissima immagine del diagramma sforzi-deformazioni.

In occasione di questa ripresa di esperienze io sono stato condotto ad approfondire un problema collaterale ma di fondamentale importanza; quello della scelta dello « stato di riferimento » a partire dal quale conviene misurare le deformazioni.

È ovvio che tale stato di riferimento del materiale deve essere quanto più possibile *ben definito, stabile e facilmente riproducibile*.

Con quest'ultima condizione si viene senz'altro ad escludere l'idea, che potrebbe presentarsi spontanea, di assumere come stato di riferimento lo stato a partire dal quale hanno inizio le nostre esperienze.

Tale stato iniziale dipende infatti da tutti i trattamenti sia termici che meccanici che il materiale ha subiti prima di giungere nelle nostre mani; trattamenti che ci sono generalmente sconosciuti, e che in ogni caso potremmo ben difficilmente riprodurre.

V'è bensì modo di cancellare ogni traccia di quei trattamenti sottoponendo il materiale ad una prolungata ricottura e ad un successivo raffreddamento lento ed uniforme.

Ma, a parte l'arbitrarietà inerente alla scelta della temperatura di ricottura e delle modalità del raffreddamento, lo stato che così si viene a creare è sempre molto lontano da quegli stati, più o meno incruditi, in cui il materiale viene in pratica impiegato; e sembra quindi poco idoneo a servire da stato di riferimento nello studio dei fenomeni che caratterizzano l'equilibrio elasto-plastico delle strutture.

A questa funzione di « stato di riferimento » sembra pertanto più adatto uno stato in cui, per effetto di deformazioni del tipo ed intensità di quelle che il materiale dovrà sopportare in seguito, si sia realizzato l'accomodamento, e la conseguente stabilizzazione, dei cicli; e in cui la storia di tali deformazioni sia poi stata cancellata col noto processo delle alternazioni decrescenti del carico.

Questo processo — già impiegato sistematicamente dal CANTONE nelle sue prove a torsione sui fili, e poi introdotto nella tecnica delle prove a trazione e compressione — è perfettamente idoneo a determinare la formazione di uno stato del materiale rispondente alle tre esigenze fondamentali sopra indicate; stato che si può anche chiamare « neutro » in quanto, a partire da esso, il materiale presenta, sotto l'azione di sollecitazioni eguali e di segno contrario, deformazioni alla lor volta eguali e di segno contrario.

Ecco intanto — scelto tra le numerose esperienze eseguite in questi ultimi tempi nell'Istituto Dinamometrico Italiano — un diagramma (fig. 6) che descrive e documenta il processo delle alternazioni decrescenti del carico nel caso di una provetta di rame elettrolitico del diametro di 16 mm. sollecitata con carichi assiali alternati, varianti linearmente col tempo in ragione di 10 kg./sec. entro i limiti di ampiezza massima di ± 500 kg.

Da questo diagramma risulta senz'altro definita (per rilevamento dei successivi punti di regresso) la curva sforzi-deformazioni che il materiale presenterà in occasione della sua prima sollecitazione a partire dallo stato neutro così realizzato.

Questa curva è stata tracciata in fig. 7 insieme al ciclo di isteresi stabilizzato, di ampiezza ± 500 kg. Nella stessa figura sono state indicate, con linee punteggiate, le tangenti iniziali ai vari rami delle curve (¹).

(¹) In realtà l'identificazione della inclinazione della tangente iniziale nel diagramma tracciato da un estensimetro registratore riesce sempre assai incerta; ma essa può sempre dedursi con ben maggiore esattezza da una esperienza a parte, per esempio deducendo il valore iniziale del modulo elastico del materiale dalla frequenza di moti oscillatori di piccolissima ampiezza.

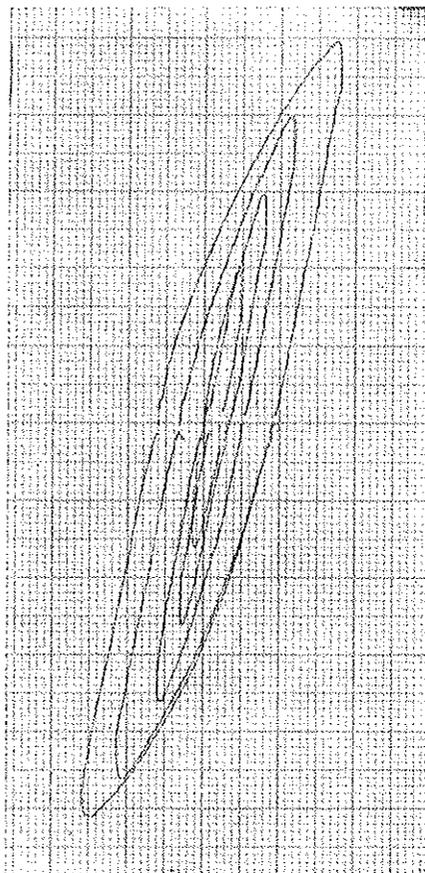


FIG. 6

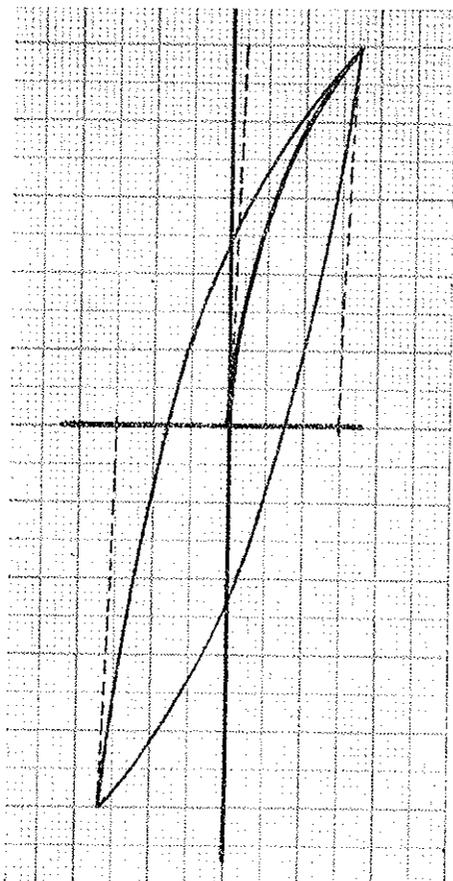


FIG. 7

Le relazioni tra deformazioni elastiche e deformazioni plastiche (e quindi tra i valori di k e di k') cui siamo giunti più sopra per via teorica, hanno trovato in queste esperienze una nuova e pienamente soddisfacente conferma.

* * *

La constatazione di un certo accordo tra i risultati della esperienza e la presente impostazione teorica dei rapporti fra deformazioni elastiche e deformazioni plastiche può indurci a trarre da questa impostazione alcune conseguenze suscettibili di venire utilizzate per la determinazione dei limiti nell'ambito dei quali quell'accordo riesce effettivamente realizzato nei diversi materiali.

Sono particolarmente utilizzabili a questo fine le caratteristiche geometriche, o « di forma », dei cicli bilaterali stabilizzati, e più precisamente:

- *l'inclinazione media*, in immediato rapporto col valore medio del modulo di elasticità, e
- *l'area* che notoriamente misura il lavoro meccanico che in ciascun ciclo viene disperso per isteresi.

Per quel che riguarda la prima di queste caratteristiche, tenuto conto dell'equazione

$$\bar{\varepsilon} = k \varepsilon^2$$

della curva di prima deformazione (a partire dallo stato neutro) sulla quale si trovano i vertici dei successivi cicli bilaterali stabilizzati, si può senz'altro affermare che l'inclinazione τ/E sull'asse delle σ di una qualunque corda $01, 02, 03, \dots$ (fig. 8) e quindi anche del ciclo bilaterale corrispondente $11, 22, 33, \dots$ (fig. 9) può sempre esprimersi, in funzione dell'inclinazione τ/E_0 della tangente iniziale, sotto la forma

$$\frac{\tau}{E} = \frac{\varepsilon + \bar{\varepsilon}}{\sigma} = \frac{\varepsilon + k\varepsilon^2}{\sigma} = \frac{\tau}{E_0} + \frac{k}{E_0^2} \sigma$$

Essa è dunque *una funzione lineare dell'ampiezza del ciclo.*

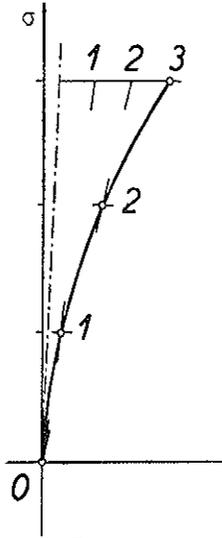


FIG. 8

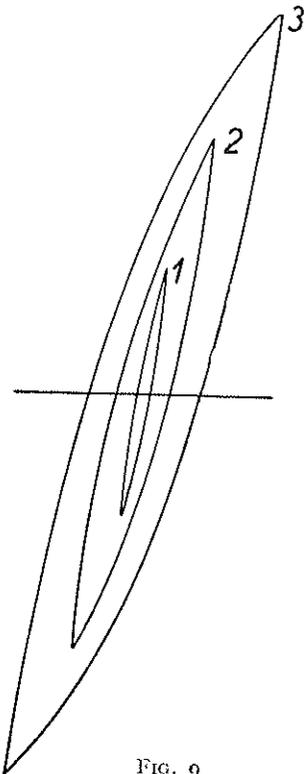


FIG. 9

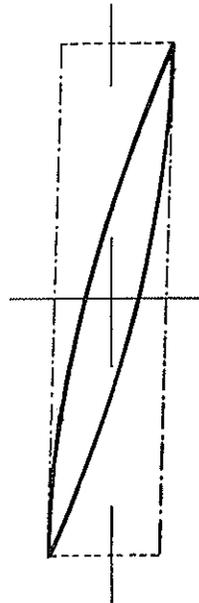


FIG. 10

Quanto all'altra caratteristica — l'area del ciclo bilaterale stabilizzato — è facile riconoscere che i due archi di parabola di cui il ciclo è formato dividono in tre parti eguali l'area del parallelogrammo circoscritto (fig. 10) che ha per dimensioni ortogonali l'ampiezza σ del ciclo e la deformazione plastica

$$\bar{\epsilon} = \frac{k'}{E_0^2} \sigma^2$$

L'area del ciclo

$$A = \frac{1}{3} \frac{k'}{E_0^2} \sigma^3$$

deve dunque crescere proporzionalmente al cubo dell'ampiezza.

Questi due risultati si prestano bene alla verifica sperimentale.

Le divergenze che l'esperienza di volta in volta accuserà (tanto più accentuate quanto più grande sarà l'ampiezza del ciclo) ci diranno per quali valori di σ si determinino nei singoli materiali quei fenomeni di incrudimento — e di conseguente variazione del coefficiente f d'eredità — per cui i presupposti attuali vengono a mancare e le deduzioni che ne abbiamo tratte cessano di essere valide.

* * *

CASO SECONDO

L'isteresi negli stati di coazione determinati da deformazioni impresse

Il solito corpo omogeneo ed isotropo — cilindrico o prismatico — sia questa volta assoggettato a deformazioni impresse alle basi parallelamente al suo asse geometrico, di ampiezza crescente linearmente col tempo.

La funzione determinante non può essere questa volta che scelta nell'ambito della deformazione totale che la deforma-

zione impressa direttamente determina; noi la identificheremo con una sua componente, opportunamente scelta, che denoteremo genericamente con la somma $\varepsilon + \bar{\varepsilon}$.

Assumeremo cioè come funzione determinante

$$\varepsilon + \bar{\varepsilon} = c t \quad (c = \text{cost.})$$

Ferma restando l'ipotesi

$$f = a_1$$

la [5] diviene

$$\bar{\varepsilon}(T) = \frac{a_1}{2c} [\varepsilon(T) + \bar{\varepsilon}(T)]^2$$

che scriveremo brevemente così

$$\bar{\varepsilon} = k(\varepsilon + \bar{\varepsilon})^2 \quad \left(k = \frac{a_1}{2c}\right)$$

intendendo che ε ed $\bar{\varepsilon}$ misurano al solito le deformazioni elastiche e le deformazioni plastiche che nell'istante T coesistono nel punto considerato del corpo, per effetto delle deformazioni impresses che sono andate linearmente crescendo nell'intervallo di tempo $(0, T)$.

Graficamente la legge di deformazione della deformazione elastica

$$\varepsilon = (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) - \bar{\varepsilon}$$

sarà rappresentata da una parabola uscente dall'origine degli assi ed ivi tangente alla retta rappresentativa della deformazione totale (fig. II).

Vogliamo ora supporre che, in un certo istante T , la legge di variazione delle deformazioni impresses improvvisamente si inverta; che cioè le deformazioni impresses prendano a decrescere.

Se il loro ritorno allo zero potesse avvenire istantaneamente, la sola deformazione elastica si annullerebbe; e il punto rappresentativo che, nell'istante T , aveva raggiunta la posizione A

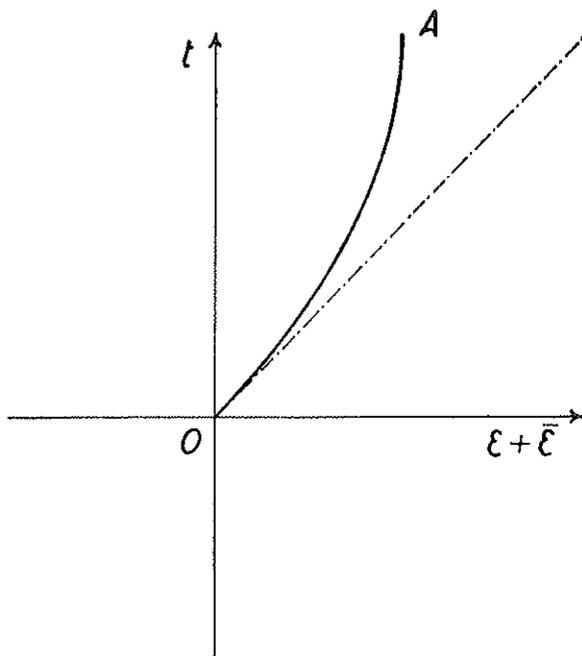


FIG. 11

(fig. 12) dovrebbe tracciare una retta parallela alla tangente iniziale, parallela la cui intersezione coll'asse dei tempi segnerebbe l'istante in cui, la deformazione elastica essendo completamente scomparsa, la deformazione totale si troverebbe ridotta alla sola deformazione plastica (rimasta immutata).

A partire da tale istante l'ulteriore diminuzione delle deformazioni impresse darebbe origine a deformazioni elastiche di segno contrario, che diverrebbero eguali, in valore assoluto, alla deformazione plastica (sempre immutata) in corrispondenza della intersezione di detta parallela coll'asse delle ϵ , definendo così lo stato di coazione residuo.

Ma noi vogliamo invece supporre che le deformazioni impresse vadano decrescendo a poco a poco, colla medesima velocità con cui andavano dapprima crescendo.

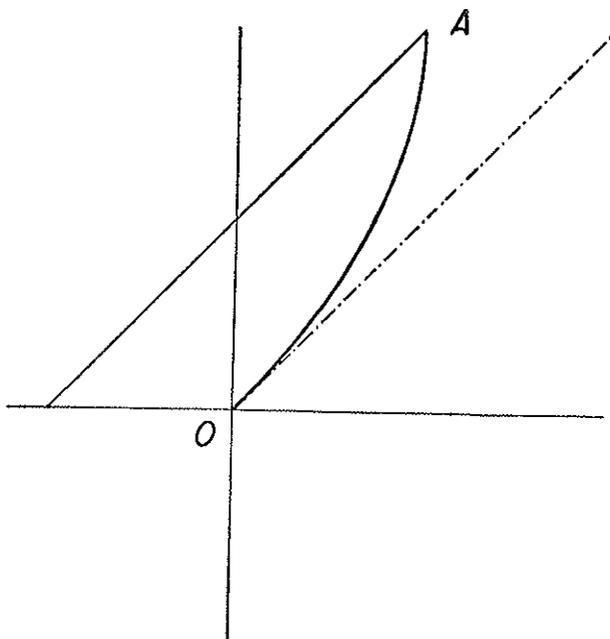


FIG. 12

L'esperienza dimostra che, in questo caso, non soltanto le deformazioni elastiche scompaiono, ma anche una parte delle deformazioni plastiche. Il punto rappresentativo si scosta quindi dalla parallela alla tangente iniziale per seguire una linea AB (fig. 13) la cui curvatura, più o meno marcata, sarà in ogni caso opposta a quella del diagramma ascendente.

Sembra perciò logico ammettere — analogamente a quanto si è fatto nel caso delle deformazioni dovute all'azione di forze esterne — che, a partir dall'istante in cui si verifica l'inversione delle deformazioni impresse, la deformazione elastica *negativa* (accompagnata da una deformazione plastica, *essa pure negativa*) — per rapporto a nuovi assi coordinati convenientemente scelti: origine in A e direzioni opposte alle precedenti — possa

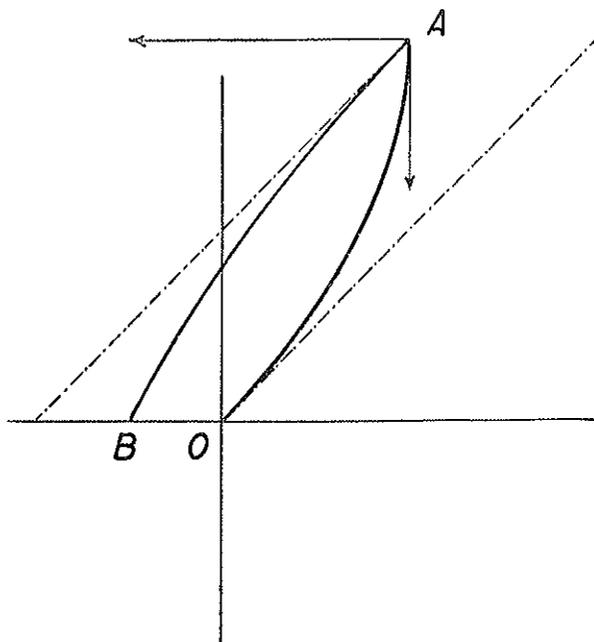


FIG. 13

venire espressa in termini analoghi a quelli già adottati per le deformazioni crescenti

$$[\text{10}] \quad \bar{\epsilon}' = k' (\epsilon' + \bar{\epsilon}')^2$$

k' essendo una nuova costante in relazione coll'attitudine del materiale a restituire *una parte* soltanto delle deformazioni plastiche; costante che dovrà quindi necessariamente essere minore o tutt'al più eguale a k .

Se poi, dopo che le deformazioni impresse si sono in questo modo annullate, esse riprendono a crescere (colla medesima velocità), le deformazioni plastiche fanno immediatamente la loro ricomparsa.

Ed è facile constatare che — previo un nuovo cambiamento di assi: origine in B e direzioni iniziali — basta mantener fermo il nuovo valore k' della nota costante per ottenere che il nuovo diagramma ascendente faccia capo in A (fig. 14); per ottenere cioè quello che per analogia chiameremo il « ciclo di isteresi » dello stato di coazione.

Per il quale è facile constatare che continuano a valere le solite proprietà degli ordinari cicli: in particolare l'interpretazione dell'area del ciclo come misura del lavoro speso per deformare il materiale.

Che se invece le deformazioni impresse, dopo di essersi annullate, continuassero a decrescere fino a raggiungere valori negativi pari, in valor assoluto, ai massimi positivi toccati al

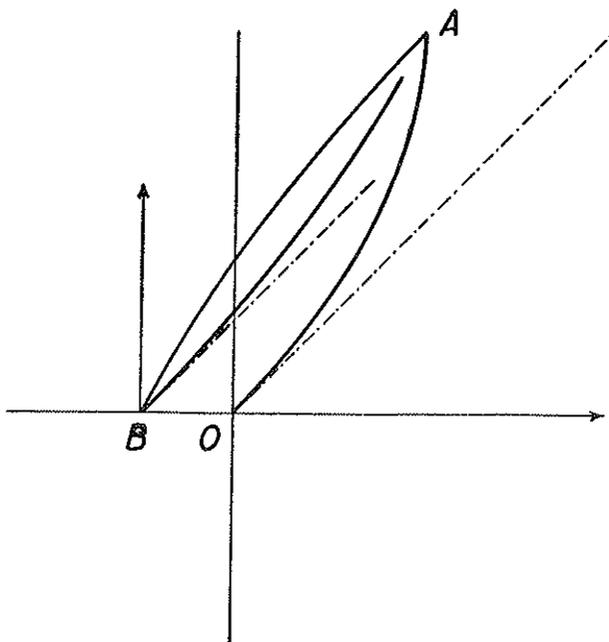


FIG. 14

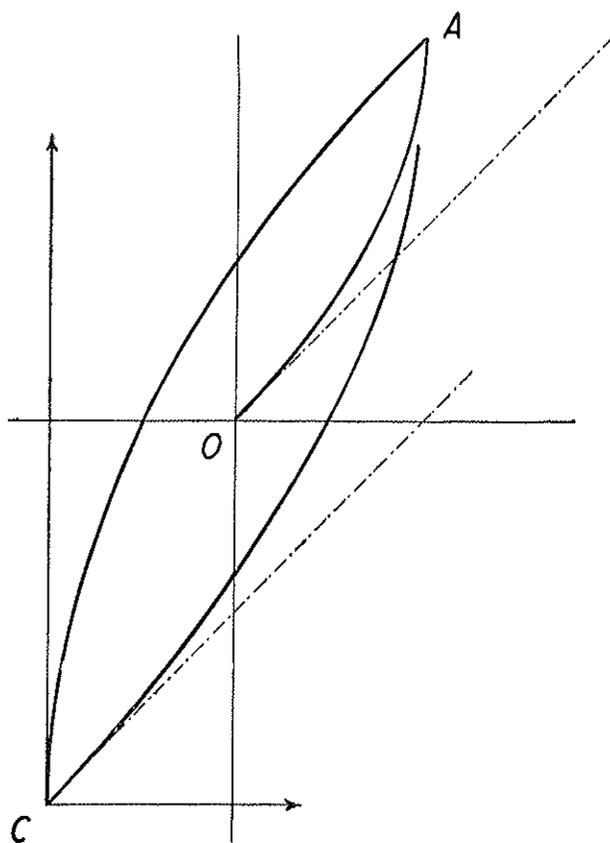


FIG. 15

tempo T , il nostro diagramma si presenterebbe come in fig. 15 e ci offrirebbe, anche questa volta, la possibilità di precisare il valore di h' .

La simmetria del ciclo bilaterale rispetto all'origine O implica infatti che ponendo nella [10]

$$\epsilon' + \bar{\epsilon}' = 2(\epsilon + \bar{\epsilon})$$

si ottenga da essa

$$\bar{\varepsilon}' = 2\bar{\varepsilon}$$

ciò che effettivamente si verifica se

$$[11] \quad k' = \frac{1}{2} k$$

Anche questa volta dunque una metà soltanto della deformazione plastica è destinata a sparire insieme colla deformazione elastica quando le deformazioni impresse si annullano, mentre l'altra metà permane.

III

RILASSAMENTO ED INCRUDIMENTO DEI MATERIALI

Vi sono dei casi in cui l'ipotesi della costanza del coefficiente d'eredità, da noi provvisoriamente adottata nel precedente capitolo, non permette di giungere ad una rappresentazione sufficientemente approssimata del fenomeno.

E sono quelli in cui la deformazione non si limita ad essere pura e semplice variazione di caratteristiche geometriche — forma e dimensioni — del corpo, ma implica una alterazione non trascurabile delle sue stesse proprietà fisiche: per esempio della maggiore o minore attitudine del materiale a subire deformazioni ulteriori.

Volendo affrontare lo studio di questi casi, diviene indispensabile adottare per il coefficiente d'eredità l'espressione più generale [3]

$$f = a_1 + a_2 \alpha + a_3 \alpha^2 + \dots$$

Se ora ci vogliamo riferire al caso del corpo omogeneo ed isotropo — cilindrico o prismatico — sollecitato a trazione o pressione semplice da forze esterne di intensità crescente linearmente col tempo, nello studio del quale abbiamo già riconosciuta l'opportunità di adottare come funzione determinante α la deformazione elastica

$$\varepsilon(t) = c t$$

la [5] diviene

$$\bar{\varepsilon}(T) = \frac{a_1}{2c} \varepsilon^2(T) + \frac{a_2}{3c} \varepsilon^3(T) + \frac{a_3}{4c} \varepsilon^4(T) + \dots$$

o più semplicemente

$$[12] \quad \bar{\varepsilon} = k_1 \varepsilon^2 + k_2 \varepsilon^3 + k_3 \varepsilon^4 + \dots$$

dove k_1, k_2, k_3, \dots sono delle nuove costanti dipendenti, oltrechè dalle caratteristiche del materiale, dalla velocità di variazione della deformazione elastica (o della sollecitazione esterna che la determina), mentre ε ed $\bar{\varepsilon}$ misurano al solito rispettivamente le deformazioni elastiche e le deformazioni plastiche che nell'istante T coesistono in un punto generico del corpo per effetto di una sollecitazione esterna che è andata linearmente crescendo col tempo nell'intervallo $(0, T)$.

Supponiamo per fissar le idee che, oltre al primo termine — che già sappiamo graficamente rappresentabile colla parabola di cui a fig. 1 — sia diverso da zero anche uno dei termini seguenti, per esempio quello che ha per coefficiente k_n .

Due casi possono allora presentarsi, a seconda che

$$k_n > 0 \quad \text{ovvero} \quad k_n < 0$$

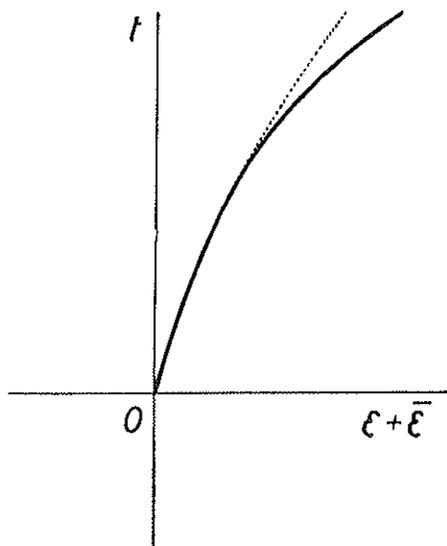


FIG. 16

Se infatti k_n è positivo, la curva rappresentativa del fenomeno (fig. 16), dopo di aver seguita da vicino durante un certo tempo la parabola (punteggiata) di cui parlavamo testè, se ne allontana a poco a poco curvandosi sempre più decisamente verso l'asse delle deformazioni.

Questo andamento traduce bene quello che i tecnici designano col nome di *rilassamento* del materiale, e che consiste in

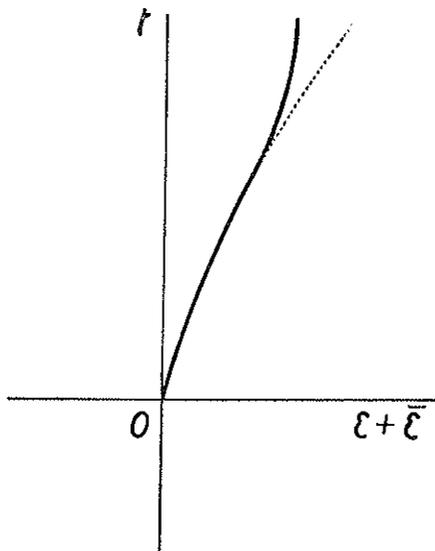


FIG. 17

una progressiva menomazione della resistenza al crescere delle deformazioni plastiche.

Se invece k_n è negativo, la curva rappresentativa del fenomeno (fig. 17), presenterà una curvatura decrescente fino ad annullarsi ed a cambiare di segno, e si allontanerà dalla parabola (punteggiata) già ricordata, ma dal lato opposto, orientandosi decisamente verso l'asse delle forze (o dei tempi).

È questo il caso dell'*incrudimento*, o aumento di resistenza, che si osserva in molti materiali metallici se le deformazioni plastiche crescono al di là di un certo limite.

* * *

Per passare alla considerazione dei corpi in cui uno stato di coazione (in assenza di forze esterne) può venir determinato da un dato sistema di deformazioni impresse, noi dovremo al solito assumere come funzione determinante α una caratteristica della deformazione totale

$$\varepsilon(t) + \bar{\varepsilon}(t) = c t$$

Ferma restando l'espressione generale del coefficiente di eredità

$$f = a_1 + a_2 \alpha + a_3 \alpha^2 + \dots$$

La [5] diviene

$$\bar{\varepsilon}(T) = \frac{a_1}{2c} \left(\varepsilon(T) + \bar{\varepsilon}(T) \right)^2 + \frac{a_2}{3c} \left(\varepsilon(T) + \bar{\varepsilon}(T) \right)^3 + \dots$$

e la scriveremo brevemente così

$$[13] \quad \bar{\varepsilon} = k_1 (\varepsilon + \bar{\varepsilon})^2 + k_2 (\varepsilon + \bar{\varepsilon})^3 + \dots$$

k_1, k_2, \dots essendo le solite costanti che caratterizzano il materiale ed il modo (ed in particolare la velocità) con cui esso viene deformato, mentre ε ed $\bar{\varepsilon}$ sono al solito le deformazioni elastiche e le deformazioni plastiche che nell'istante T coesistono nel punto generico del corpo, per effetto delle deformazioni impresse che sono andate linearmente crescendo nell'intervallo di tempo $(0, T)$.

Graficamente la legge di variazione della deformazione elastica

$$\varepsilon = (\varepsilon + \bar{\varepsilon}) - \bar{\varepsilon}$$

si scosterà dalla parabola rappresentativa del primo termine da una parte o dall'altra a seconda che tra i termini seguenti prevalgono quelli positivi o quelli negativi.

Supponiamo per fissar le idee che, oltre a k_1 , sia diverso da zero anche uno dei coefficienti dei termini di grado superiore, per esempio il coefficiente k_n .

Delle due eventualità accennate, è particolarmente interessante quella in cui

$$k_n < 0$$

La curva rappresentativa del fenomeno assume infatti in questo caso l'andamento indicato in fig. 18 che è stata tracciata supponendo

$$k_1 = \frac{1}{10} \quad \text{e} \quad k_5 = -\frac{1}{1.000.000}$$

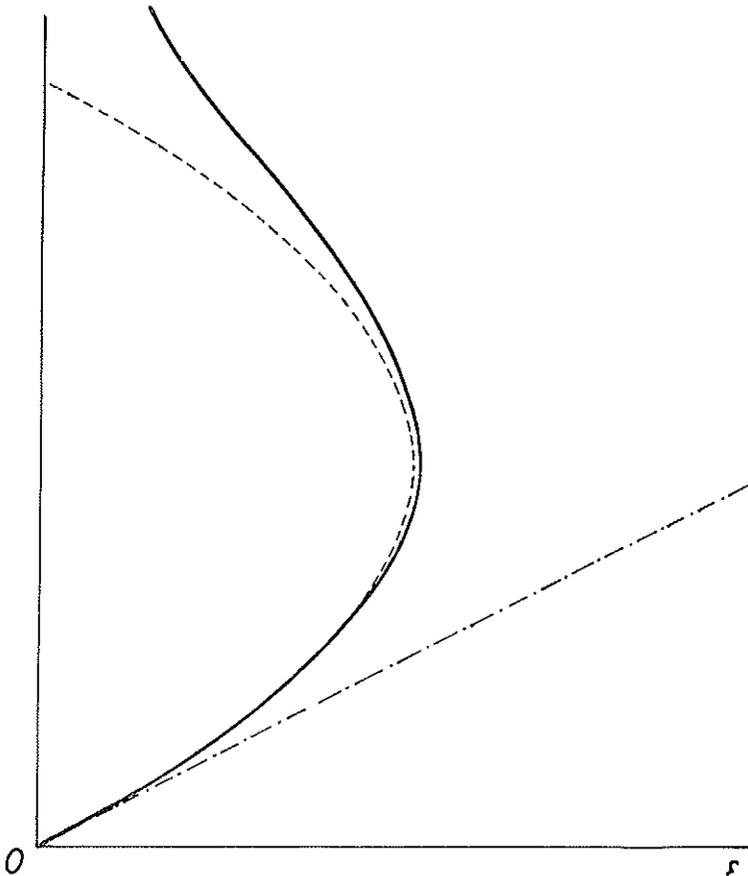


FIG. 18

Curve di questo genere si prestano molto bene a rappresentare i risultati sperimentali.

Fra i tanti di cui ormai disponiamo, meritano di essere a questo proposito segnalati quelli ottenuti da C. RASCH sperimentando su travi in calcestruzzo sollecitate a presso flessione.

Questi risultati, di cui avremo presto occasione di riparlare, si trovano documentati nel « Rapporto » che VON RUSCH, Presidente della Commissione per la pressione eccentrica del « Comité Européen du Béton » ha presentato alla sessione di Vienna nell'aprile ultimo scorso.

Essi sono stati ottenuti regolando la velocità di applicazione del carico in modo da dar luogo a quattro differenti velocità (costanti) di variazione della deformazione.

* * *

Ma la coincidenza tra i risultati della teoria così generalizzata e quelli dell'esperienza diviene particolarmente espressiva quando si prendono di proposito in considerazione i materiali ricotti o incruditi.

Nel descrivere i cicli di isteresi elastica, e nell'atto di darne una interpretazione per mezzo della teoria dell'eredità lineare, noi abbiamo infatti avvertita la necessità di adottare un certo stato di riferimento, o stato neutro, che abbiamo imparato a realizzare assoggettando il materiale a deformazioni del tipo ed intensità di quelle che dovrà sopportare in servizio, poi provocando l'accomodamento dei cicli, e infine cancellando ogni traccia delle precedenti operazioni col noto processo delle alterazioni decrescenti del carico.

Restava naturalmente aperto il problema dei rapporti di posizione tra i cicli stabilizzati ottenuti partendo da questo stato neutro e le curve di prima deformazione, o curve di rilassamento, che si osservano quando la cancellazione delle precedenti operazioni è stata ottenuta per altra via, per esempio mediante una prolungata ricottura ed un successivo raffreddamento lento ed uniforme.

Ora basta ammettere che nella espressione del coefficiente d'eredità, oltre al termine costante a_1 , sia diverso da zero anche uno solo dei termini seguenti, per ottenere una curva di prima deformazione del tipo di quella disegnata nella fig. 19.

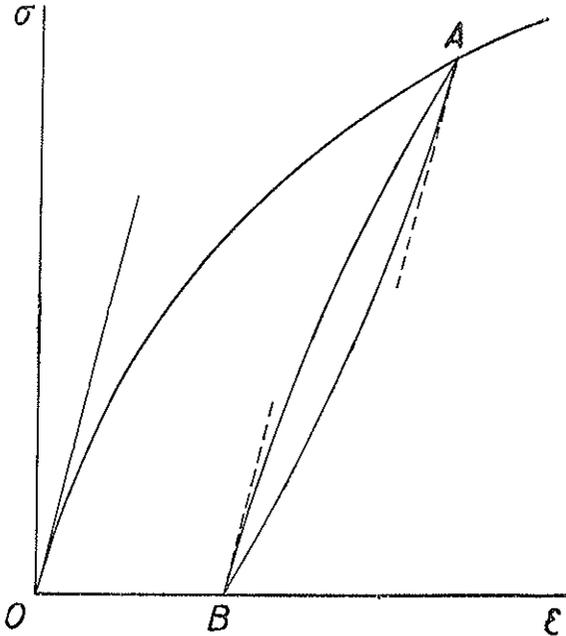


FIG. 19

Essa è stata tracciata partendo dalla ipotesi, del tutto arbitraria, che fosse diverso da zero il coefficiente k_4 e precisamente che fosse

$$k_4 = \frac{k_1}{5000}$$

Chiunque sia avvezzo a sperimentare, a trazione od a compressione, su materiali metallici ricotti, non può non essere colpito dalla somiglianza dei diagrammi che si ottengono con questi cui ci ha ora condotto la teoria.

Tra i tanti richiami che potrei fare a conferma di questa affermazione, mi limito a ricordare ancora una volta le mie prime esperienze « su l'elasticità del rame » pubblicate nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei nel lontano 1914.

Quelle esperienze furono per altro riprese, al fine di ottenere una più ampia ed aggiornata documentazione su l'argomento; e furono questa volta eseguite impiegando il nuovissimo estensimetro registratore Peters dell'Istituto Dinamometrico Italiano a Torino.

Tra i numerosi diagrammi così ottenuti dal mio collaboratore prof. ing. A. BRAY, ne ho scelti due che si riferiscono a due provini tratti da un medesimo tondo di rame (del diametro di 16 mm.) che, avendo subiti trattamenti termici diversi, presentano curve di rilassamento molto differenti.

La sollecitazione è stata in entrambi i casi contenuta entro limiti relativamente modesti, per modo che i cicli di isteresi si presentano subito come praticamente chiusi. Su di essi la diversità dei trattamenti anteriori ha un'influenza assai modesta.

Accertato (per via dinamica) il valore iniziale del modulo di elasticità del materiale — e quindi la inclinazione, praticamente costante, delle tangenti iniziali alle varie curve — ed ammesso che i due rami di curva che delimitano ciascun ciclo possano al solito rappresentarsi sotto la forma

$$\bar{\epsilon}' = k' \epsilon'^2$$

nelle equazioni delle curve di rilassamento noi attribuiremo al coefficiente del termine quadratico il valore

$$k_1 = 2 k'$$

Quanto ai termini di ordine superiore che devono necessariamente fare la loro comparsa nella equazione della curva di rilassamento, l'ipotesi più semplice che si possa fare è che, essendo diverso da zero il coefficiente k_2 , si possa limitare lo sviluppo alla forma

$$\bar{\epsilon} = k_1 \epsilon^2 + k_2 \epsilon^3$$

Basta allora imporre la condizione che la curva rappresentata da questa equazione passi per un punto arbitrariamente scelto della curva rilevata sperimentalmente che si vuole interpretare. Se ne potrà immediatamente dedurre il valore del coefficiente k_2 .

Così operando si è ottenuto nel primo caso (fig. 20)

$$k_1 = 0,082 \qquad k_2 = 0,020$$

nel secondo caso (fig. 21)

$$k_1 = 0,100 \qquad k_2 = 0,074$$

A questi valori corrispondono i diagrammi disegnati in basso nelle due figure. La loro corrispondenza coi diagrammi rilevati sperimentalmente, e fotograficamente riprodotti in alto, appare subito assai soddisfacente.

Resta comunque ben inteso che, quando ciò non avvenisse, la semplice introduzione nella espressione di $\bar{\epsilon}$ di uno o più altri termini di grado superiore ci consentirebbe di imporre la coincidenza di un altro o di più altri punti delle due curve, e di giungere così a rappresentazioni analitiche delle curve sperimentali approssimate quanto si voglia.

* * *

Anche più interessanti, per la novità ed importanza dei risultati, sono le esperienze che nell'Istituto Dinamometrico Italiano vennero in questi ultimi tempi organizzate al fine di controllare i risultati della teoria in tema di incrudimento dei materiali.

Per verità un andamento della curva di deformazione analogo a quello segnalato in fig. 17 ci si era già presentato in occasione di certe esperienze su travi metalliche inflesse effettuate nel 1938 da due miei collaboratori, gli ingegneri E. GIACCHERO e F. LEVI ⁽¹⁾ che si proponevano semplicemente di accertare se

(1) E. GIACCHERO e F. LEVI, *Conferme sperimentali della teoria di Colonnetti su l'equilibrio elasto plastico*, Pontificia Academia Scientiarum, Acta, 1939.

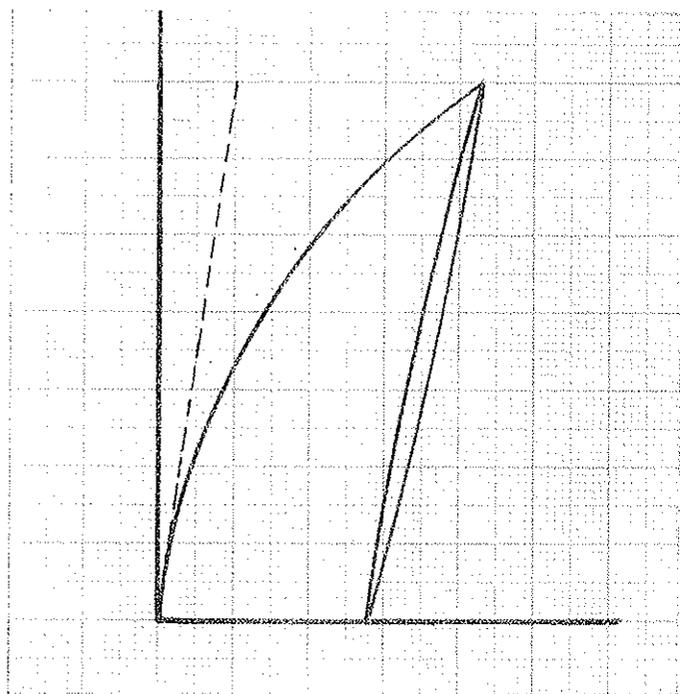
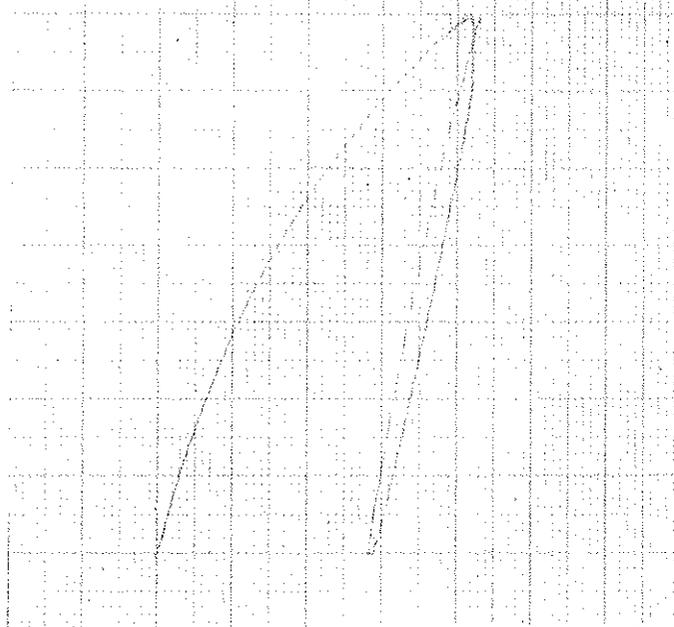


Fig. 20 — In alto: *Curva di rilassamento rilevata sperimentalmente.*
 In basso: *interpretazione analitica secondo l'equazione*

$$\bar{\epsilon} = \frac{82}{1000} \epsilon^2 + \frac{20}{1000} \epsilon^3$$

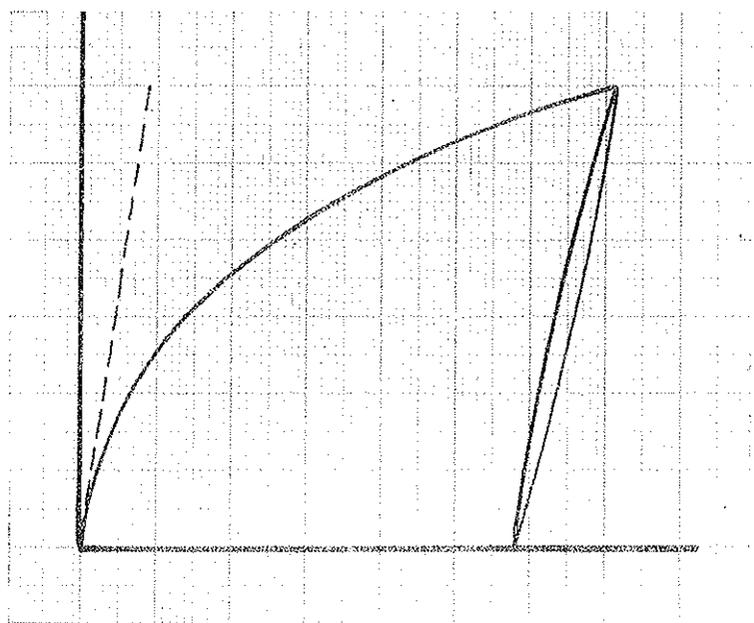
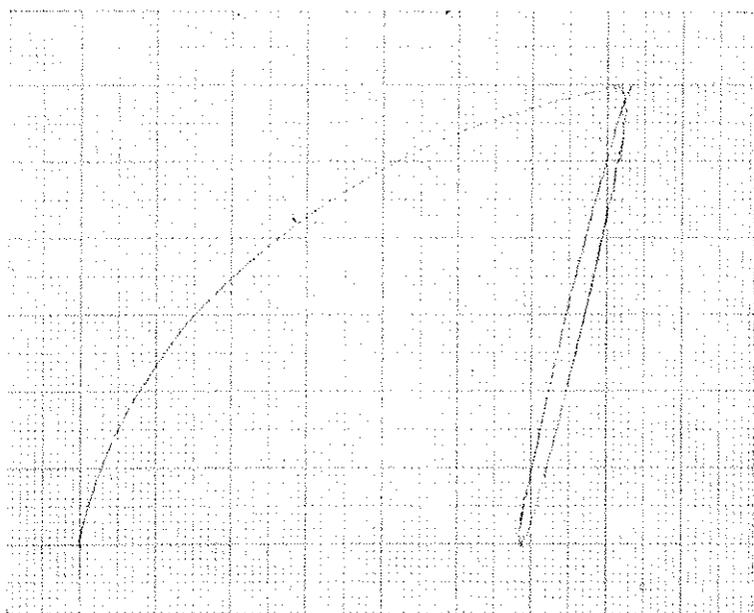


Fig. 21 — In alto: *Curva di rilassamento rilevata sperimentalmente.*
 In basso: *Interpretazione analitica secondo l'equazione*

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{100}{1000} \varepsilon^2 + \frac{74}{1000} \varepsilon^3$$

e fino a qual punto esistesse accordo tra i risultati della mia teoria dell'equilibrio elasto-plastico e quelli dell'esperienza.

GIACCHERO e LEVI avevano allora potuto constatare che l'accordo — assai soddisfacente da principio — veniva meno allorchè l'incrudimento del materiale incominciava a manifestarsi, o comunque cessava di essere trascurabile. Ed i diagrammi che essi rilevarono in quella occasione presentavano tutti dei punti di flesso del tipo di quelli a cui la teoria ci ha ora condotti.

Ma quelle esperienze avrebbero avuto bisogno di venir trasferite dal caso della flessione a quello della trazione o compressione esemplice; e ciò non si poteva allora fare perchè la variazione lineare nel tempo, della sollecitazione, facilissima a realizzarsi nelle prove a flessione, era difficilmente attuabile nelle prove a trazione o compressione con le ordinarie macchine per prove sui materiali da costruzione, notoriamente costruite in modo da poter regolare direttamente la legge di variazione della deformazione, non quella della sollecitazione.

Ci volle del tempo prima che ci si rendesse conto che le attrezzature dei nostri laboratori per le prove sui materiali, pienamente idonee allo studio sperimentale dei fenomeni elastici, cessavano di esserlo quando si trattava di studiare fenomeni plastici.

Solo recentemente, nell'Istituto Dinamometrico Italiano, io ho potuto disporre di macchine capaci di realizzare sforzi considerevoli (fino a dieci tonnellate) per applicazione diretta di pesi.

Con queste macchine le ricerche su l'incrudimento hanno potuto venir riprese, e ci hanno confermata la piena aderenza della nuova teoria dei fenomeni elasto-plastici alla realtà del fenomeno fisico.

* * *

Citerò, fra i tanti, un caso concreto estremamente significativo.

Un filo di acciaio di 1,9 mm. di diametro venne sottoposto a sforzi di trazione crescenti nel tempo in ragione di 2 chilogrammi al secondo; le deformazioni erano misurate, su 60 mm. di lunghezza, per mezzo di un estensimetro Amsler DM 740 (sensibilità 1/100 di mm.).

Ecco i risultati:

Carico applicato (kg.)	Deformazioni (10 ⁻² mm.)	
	totali	plastiche
0	0	0
10	12	0
20	26	2
30	42	6
40	64	16
50	86	26
60	109	37
70	294	210
80	404	308
90	454	346

Essi sono rappresentati in fig. 22 con dei piccoli circoletti.

Quanto alla possibilità di interpretare analiticamente questi risultati per mezzo della espressione

$$\bar{\epsilon} = k_1 \epsilon^2 + k_2 \epsilon^3 + k_3 \epsilon^4 \dots,$$

è ovvio che lo si può fare in molte maniere diverse, supponendo che siano diversi da zero i coefficienti dei termini che contengono certe potenze arbitrariamente scelte di ϵ .

Supponiamo per esempio

$$\bar{\epsilon} = k_2 \epsilon^3 + k_4 \epsilon^5 + k_6 \epsilon^7$$

Si tratterà di determinare i valori dei coefficienti k_2 , k_4 , k_6 che rendono minimi gli scarti tra questa funzione ed i risultati dell'esperienza.

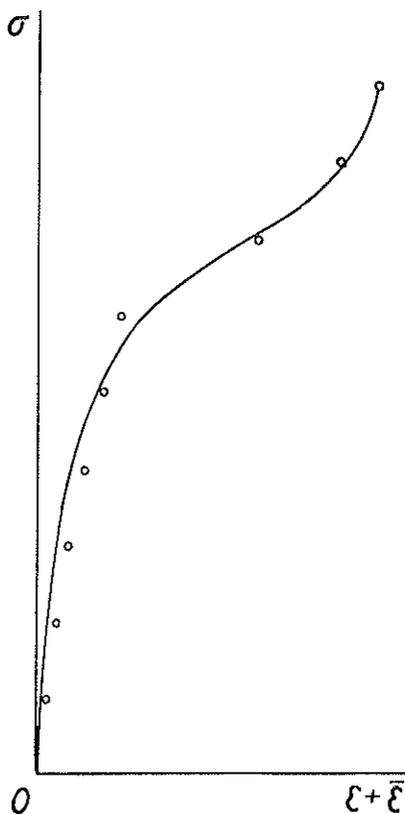


FIG. 22

Ciò è stato fatto, nel caso concreto, coll'aiuto della macchina « Finac » dell'Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo a Roma coi risultati seguenti:

$$k_2 = - 0, 0^3 508 232 47$$

$$k_4 = + 0, 0^6 191 932 36$$

$$k_6 = - 0, 0^{10} 106 972 86$$

La curva così definita — quale tracciata in figura — può ben essere considerata come una rappresentazione soddisfacente dei risultati dell'esperienza.

* * *

Si tratta piuttosto di sapere se e fino a qual punto la teoria dell'eredità lineare può per questa via fornire quella che si suole, sia pur impropriamente, chiamare una « spiegazione » dei fenomeni di rilassamento e di incrudimento dei vari materiali, caratterizzando le diverse modalità con cui questi fenomeni si manifestano.

Più precisamente si tratta di sapere se sia possibile caratterizzare il rilassamento o l'incrudimento di un dato materiale colla legge di variazione del suo coefficiente d'eredità.

La risposta è immediata e decisamente positiva.

Basta ricordare la definizione che, a suo tempo, noi abbiamo data del coefficiente d'eredità: « rapporto tra la velocità di incremento della deformazione plastica e il valore della funzione determinante ». Si riconosce subito che tale rapporto può venire direttamente calcolato, sia per via analitica che graficamente, ogniqualvolta sia noto il diagramma delle deformazioni plastiche.

E non occorre neppure per far ciò disporre dei risultati dei calcoli di cui ci siamo occupati fin qui, poichè è sempre possibile operare sul diagramma quale ci viene fornito dall'esperienza.

Riprendiamo per esempio in considerazione i due diagrammi di deformazione di materiali ricotti di cui a pag. 53 che riproduciamo nelle figure 23 e 24 (*a sinistra*).

Calcolando per diversi valori dell'ordinata tempo, il rapporto tra le velocità di incremento della deformazione plastica (inclinazione della tangente al diagramma) e la funzione determinante (che, nel caso concreto, è la deformazione elastica), si possono immediatamente tracciare per punti i diagrammi rappresentativi della legge di variazione del coefficiente d'eredità.

* * *

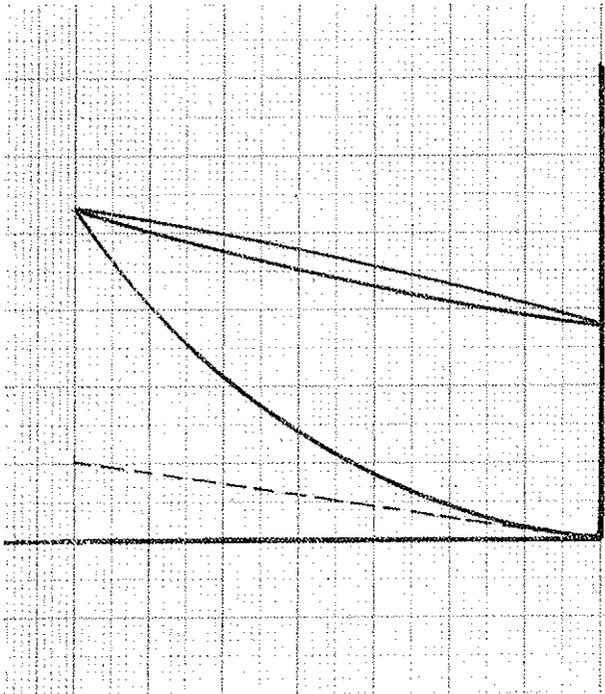
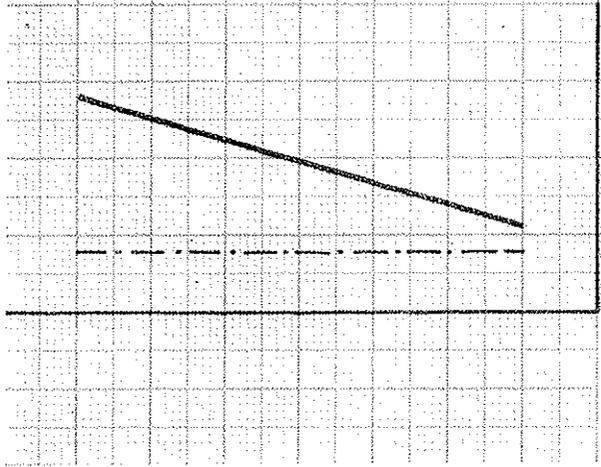


FIG. 23

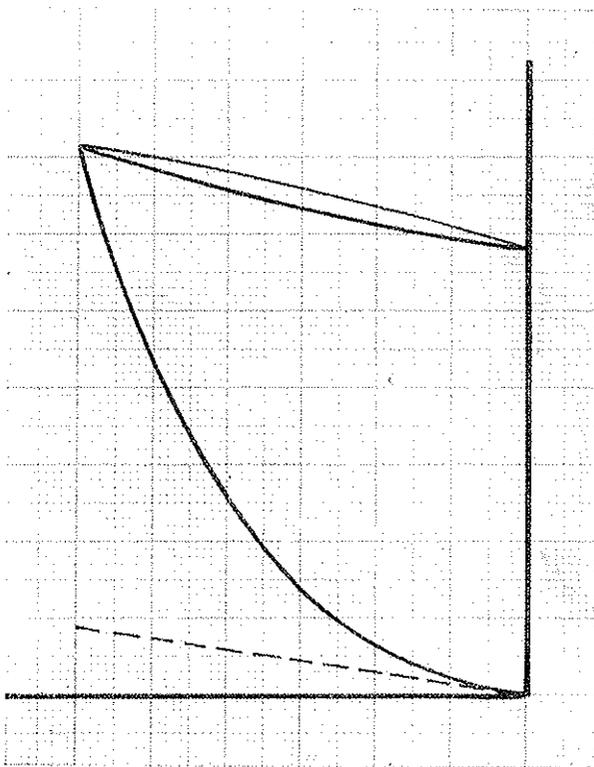
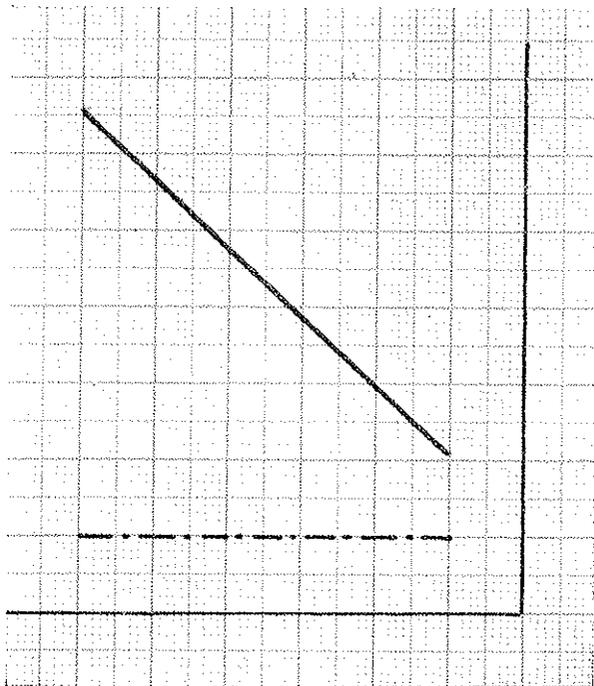


FIG. 24

Essi sono disegnati (*a destra*) nelle nostre due figure (¹); ed è notevole la differenza tra i due casi, corrispondenti (come si è detto a suo tempo) a differenti gradi di ricottura del materiale.

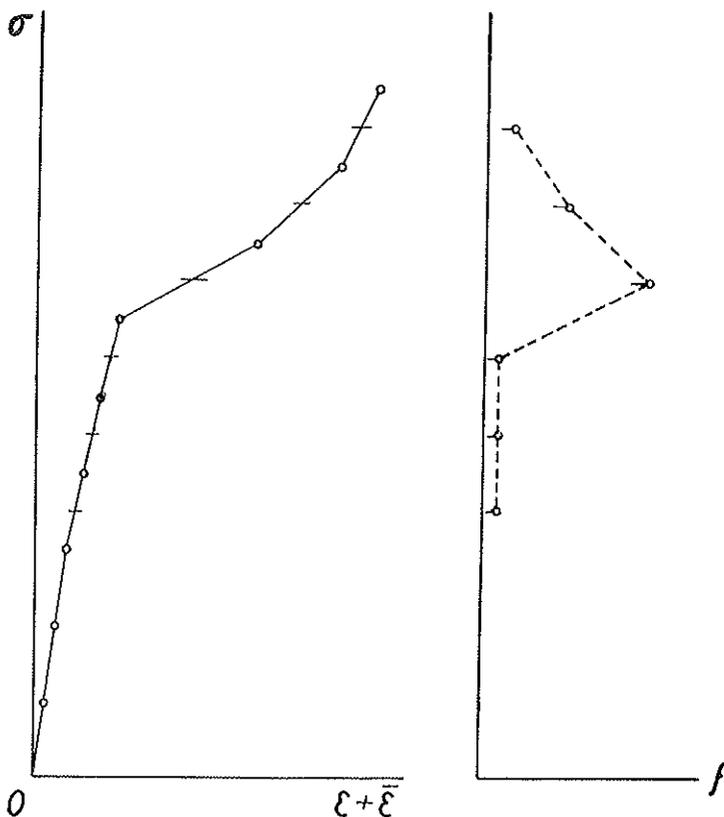


FIG. 25

Anche più caratteristico è l'andamento del diagramma del coefficiente d'eredità nei materiali suscettibili di incrudimento.

(¹) Come elemento di riferimento è stata in entrambe le figure tracciata la retta (parallela all'asse dei tempi) che corrisponde al valore — costante — del coefficiente d'eredità che caratterizza le curve delimitanti i cicli di isteresi stabilizzati.

Ci rifaremo anche qui al caso, precedentemente considerato a pag. 57 ed anche qui affiancheremo, nella fig. 25, il diagramma delle deformazioni plastiche rilevato sperimentalmente al diagramma del coefficiente d'eredità che ne consegue.

Si osserva:

- 1) che il coefficiente di eredità si mantiene praticamente costante fino ad un certo valore della sollecitazione; è quel valore che i tecnici continuano a designare col nome di « limite elastico » anche quando sanno che piccole deformazioni plastiche hanno già fatta la loro comparsa accanto alle deformazioni elastiche;
- 2) che un accrescimento brusco del valore del coefficiente d'eredità caratterizza il raggiungimento di quel valore limite della sollecitazione al di là del quale le deformazioni plastiche cessano decisamente di essere trascurabili;
- 3) che quello che i tecnici chiamano lo stato incrudito della materia è caratterizzato da una evidente tendenza del coefficiente d'eredità a ritornare più o meno rapidamente al suo valore iniziale.

L'esperienza ci autorizza a presumere che questo valore del coefficiente si manterrà poi praticamente costante anche nella eventualità di un ritorno a zero della sollecitazione e del suo eventuale rinnovarsi, almeno fino a che non vengano oltrepassati i limiti della sollecitazione precedente.

* * *

E veniamo al caso degli stati di coazione che a pag. 34 abbiamo supposti determinati da deformazioni impresse e per le quali la funzione determinante è la deformazione totale.

Faremo senz'altro riferimento ai già citati risultati ottenuti dal RASCH sperimentando su travi in calcestruzzo con differenti velocità di incremento della deformazione (fig. 26).

A destra dei quattro diagrammi — che corrispondono a velocità di incremento della deformazione totale pari all'uno

per mille, rispettivamente al minuto, all'ora, al giorno ed in cento giorni — sono state disegnate in figura 26 le quattro curve rappresentative della legge di variazione del coefficiente d'eredità.

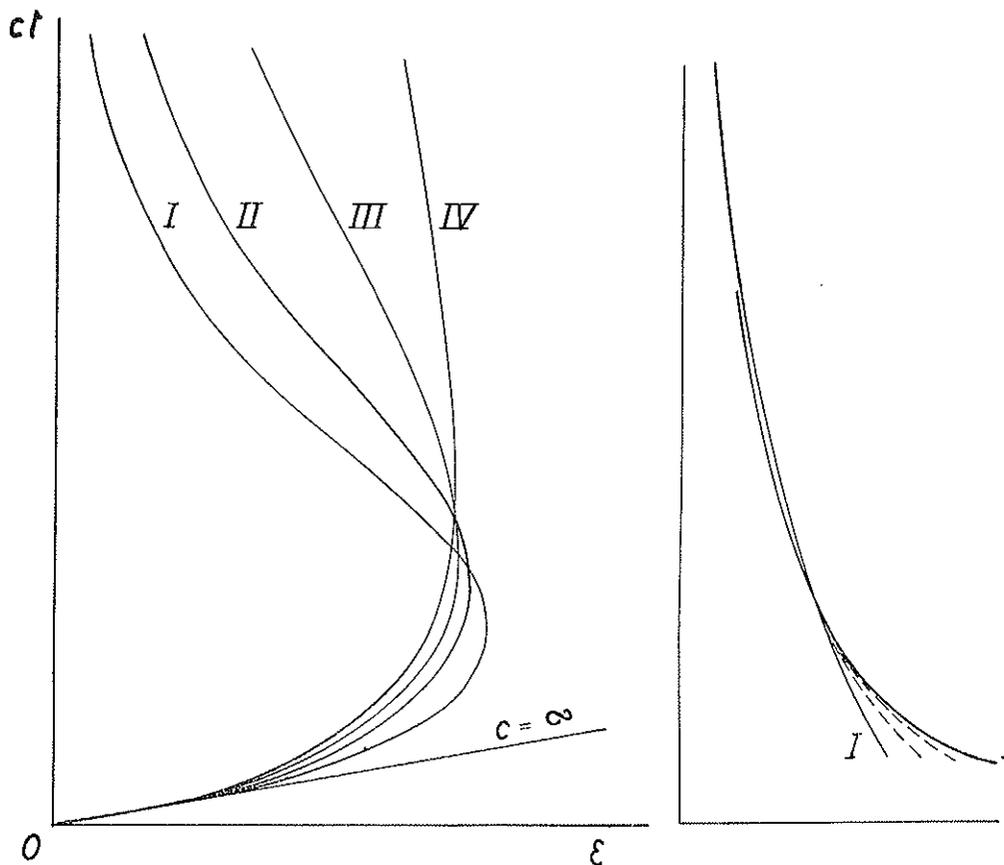


FIG. 26

I	velocità di deformazione	1‰ al minuto
II	» » »	1‰ all'ora
III	» » »	1‰ al giorno
IV	» » »	1‰ in 100 giorni

L'influenza della velocità di incremento della deformazione sul valore del coefficiente d'eredità, marcatissima nella fase iniziale dell'esperienza (e precisamente fino a che l'ordine di grandezza della deformazione è di poche unità per mille) si attenua in seguito fino a divenire praticamente trascurabile.

L'importanza della fase iniziale è però così nettamente dominante che tutto il seguito dell'esperienza ne risentirà le conseguenze, a tal segno che la differenziazione tra stati di deformazione (e di tensione) prodotti operando a velocità molto differenti, non solo non si attenua col tempo, ma può anche crescere col crescere della deformazione.

Comunque un fatto altamente significativo trova qui, credo per la prima volta, la sua giustificazione nel quadro di una teoria razionale; ed è che le deformazioni plastiche che da principio sono tanto minori quanto più elevata è la velocità (fino ad annullarsi, al limite, per azioni istantanee) diventano, a partire da un certo valore della deformazione, tanto più grandi quanto più grande è la velocità (finita) di variazione di questa.

IV

LE LEGGI GENERALI
DELL'EQUILIBRIO ELASTOPLASTICO

Noi ci proponiamo ora di formulare una teoria dell'equilibrio dei corpi deformabili, la quale sia valida qualunque siano le cause che hanno dato origine alla deformazione, e qualunque sia la storia dei fenomeni — elastici o plastici — attraverso a cui il corpo è pervenuto al suo stato attuale.

Una sola ed unica limitazione imporremo: che cioè le deformazioni dei singoli elementi di cui il corpo è composto siano piccolissime non solo ma che siano piccolissimi (cioè trascurabili rispetto alle dimensioni del corpo) gli spostamenti dei singoli suoi punti.

Questa ipotesi ha, nella nuova teoria, la stessa fondamentale importanza che nella teoria classica dell'elasticità.

Nell'un caso come nell'altro lo studio di un qualsiasi stato di equilibrio dovrebbe evidentemente venir fatto considerando il corpo nel suo stato attuale *deformato*; ma questo stato è generalmente incognito: si potrebbe dire che rappresenta proprio l'incognita del problema.

È soltanto grazie all'ipotesi che abbiamo testè enunciata, che noi ci possiamo permettere di introdurre nei nostri calcoli le coordinate dei differenti punti del corpo coi loro valori iniziali (e quindi noti) come se esso non si fosse deformato.

Tutto quello che verremo dicendo ha perciò valore solo nella misura in cui l'ipotesi della piccolezza degli spostamenti si può ritenere realizzata.

* * *

Consideriamo un corpo — occupante un certo spazio connesso V e limitato da una superficie o da un complesso di su-

perficie S — il quale da uno stato iniziale non deformato (stato naturale) sia passato ad uno stato di equilibrio (sotto l'azione di certi sistemi di deformazioni impresse e di forze applicate) mediante certi spostamenti dei suoi punti, le cui componenti

$$u, v, w$$

riterrremo funzioni delle coordinate, continue, uniformi e piccolissime rispetto alle dimensioni del corpo, e dotate di derivate parziali prime alla loro volta continue, uniformi e piccolissime a fronte dell'unità.

È noto che in queste condizioni, lo stato di deformazione in un punto generico del corpo riesce completamente determinato dai valori dei sei parametri.

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{array}$$

tre dei quali rappresentano i coefficienti di dilatazione lineare dei tre elementi uscenti dal punto nelle direzioni degli assi, mentre gli altri tre misurano gli scorrimenti mutui (variazioni degli angoli primitivamente retti) di quegli stessi elementi presi a due a due.

I sei parametri prendono perciò il nome di « componenti della deformazione ».

Ora noi vogliamo supporre che a determinare gli spostamenti u, v, w abbiano contribuito due ben distinti tipi di deformazioni: l'elastica, le cui componenti indicheremo con

$$\begin{array}{ll} \epsilon_x & \gamma_{yz} \\ \epsilon_y & \gamma_{zx} \\ \epsilon_z & \gamma_{xy} \end{array}$$

e la plastica, le cui componenti denoteremo con

$$\begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ \bar{\varepsilon}_z \end{array} \qquad \begin{array}{l} \bar{\gamma}_{yz} \\ \bar{\gamma}_{zx} \\ \bar{\gamma}_{xy} \end{array}$$

entrambe continue, uniformi e piccolissime, sì che si possa porre

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{array}$$

Con ciò si viene evidentemente ad affermare la congruenza della deformazione totale (vale a dire la sua derivabilità da un sistema di spostamenti continui, uniformi e piccolissimi) pur senza esigere che siano separatamente congruenti le due deformazioni componenti. Noi ammetteremo anzi in modo esplicito che queste deformazioni componenti, singolarmente e separatamente considerate, possano essere *non congruenti*.

* * *

Si tratta ora, in primo luogo, di precisare analiticamente quel che noi intendiamo dire quando affermiamo che una delle deformazioni componenti è elastica.

Noi abbiamo infatti convenuto di chiamare elastica una deformazione se essa è suscettibile di annullarsi quando scompaiono le cause che l'hanno prodotta. Ora questo fatto si può esprimere diversamente a seconda che si guarda alla deformazione come ad uno stato di equilibrio, o che si considera il modo con cui essa si produce o si annulla.

Nel primo caso si è infatti condotti a concepire l'elemento generico di volume del corpo come mantenuto nel suo stato deformato dalle azioni esercitate su di esso dagli elementi contigui.

Al concetto della deformazione si viene così necessariamente a far corrispondere quello di azioni interne — o tensioni — che si può sempre caratterizzare mediante sei nuovi parametri

$$\begin{array}{ll} \sigma_x & \tau_{yz} \\ \sigma_y & \tau_{zx} \\ \sigma_z & \tau_{xy} \end{array}$$

a cui si dà generalmente il nome di « componenti speciali di tensione » e che misurano rispettivamente tre tensioni unitarie normali e tre tensioni unitarie tangenziali sulle faccie di un parallelepipedo elementare orientato parallelamente agli assi coordinati, ed assunto per l'occasione ad elemento generico di volume.

Se ci si pone invece dal secondo punto di vista, la tendenza della deformazione ad annullarsi se si annullano le cause che l'hanno determinata, si esprime postulando l'esistenza di una « energia potenziale » nella quale si deve intendere trasformato il lavoro meccanico che è stato necessario spendere per portare il corpo nel suo attuale stato di deformazione, e che è suscettibile di trasformarsi di bel nuovo in lavoro se la deformazione viene ad annullarsi.

Sulla natura di questa energia potenziale elastica si vuol fare questa ipotesi fondamentale: che essa sia la somma delle energie potenziali elastiche dei singoli elementi di volume che costituiscono il corpo, singolarmente e separatamente considerati, per modo che ciascuna di quelle energie elastiche elementari risulti completamente definita dalla conoscenza dello stato dell'elemento a cui si riferisce, senza che per caratterizzarla occorra far intervenire nè la sua posizione nello spazio, nè lo stato degli altri elementi, nè la posizione di questi per rapporto al primo.

Ciò si esprime attribuendo all'energia potenziale elastica totale un'espressione del tipo

$$\Phi = \int_V \varphi dV$$

dove φ energia potenziale elastica unitaria (cioè riferita alla unità di volume) è per definizione una funzione delle sei componenti della deformazione.

Si dimostra allora che, a meno di infinitesimi di ordine superiore, l'energia potenziale elastica elementare è una forma quadratica, omogenea, essenzialmente positiva, le cui derivate parziali prime rispetto alle sei componenti della deformazione sono ordinatamente eguali alle sei componenti speciali di tensione:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x & \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y & \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z & \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy} \end{array}$$

L'ipotesi da cui abbiamo prese le mosse è pertanto perfettamente equivalente a quest'altra: che le sei componenti speciali di tensione siano delle funzioni lineari ed omogenee delle sei componenti della deformazione, e viceversa.

Ne consegue che l'energia potenziale elastica elementare può anche venir riguardata come una forma quadratica, omogenea, essenzialmente positiva, delle sei componenti speciali di tensione; nel qual caso le sue derivate parziali prime rispetto a queste nuove variabili saranno ordinatamente eguali alle sei componenti della deformazione:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x & \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y & \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z & \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy} \end{array}$$

* * *

Passiamo ora a precisare analiticamente quel che intendiamo dire quando parliamo di deformazioni plastiche.

Noi abbiamo infatti convenuto di chiamare plastica una deformazione quando essa permane anche se scompaiono le cause che l'hanno prodotta. Ciò è quanto dire che il lavoro meccanico speso per produrla non verrà più recuperato all'annullarsi della sollecitazione.

Ora per intendere come ciò possa avvenire è assolutamente necessario distinguere il caso dell'elemento di volume preso isolatamente dal caso del corpo preso nel suo insieme, cioè considerato come l'aggregato degli infiniti elementi che lo compongono.

Perchè fin che ci si limita a considerare l'elemento isolato, il fatto che il lavoro meccanico speso per produrre una deformazione plastica non possa più venir recuperato, si può esprimere naturalmente e nel modo più semplice ammettendo che quel lavoro se ne vada tutto disperso attraverso trasformazioni irreversibili, restando esclusa ogni qualsiasi produzione di energia potenziale.

Si esprime d'altronde lo stesso concetto affermando che la deformazione plastica, una volta prodotta, non ha bisogno, per mantenersi, di azioni che costringano l'elemento nel suo stato deformato, epperò (a differenza della deformazione elastica) non implica l'intervento di un corrispondente stato di tensione.

In questo senso diciamo che, quando in un certo elemento di volume si sono determinate delle deformazioni plastiche, queste si sovrappongono puramente e semplicemente alle deformazioni elastiche senza in alcun modo alterare lo stato di tensione nè l'energia potenziale ad esse relativa.

Però quel che si dice dell'elemento non si può affatto ripetere per il corpo preso nel suo insieme; nel quale i fenomeni plastici possono verificarsi in certi elementi e non in altri, costituendo un sistema generalmente non congruente, che cioè non

può realizzarsi da solo, ma esige per realizzarsi la concomitanza di un sistema di deformazioni elastiche complementari, vale a dire tali che risulti congruente il sistema delle deformazioni totali.

Può così accadere che la deformazione plastica di un dato elemento determini uno stato di deformazione elastica negli elementi attigui che non si sono deformati plasticamente; stato che implica naturalmente anche uno stato di tensione, pur nell'assenza di ogni qualsiasi sollecitazione esterna. È quello che noi abbiamo fin da principio convenuto di designare col nome di « stato di coazione ».

E l'energia potenziale elastica che questo stato necessariamente implica la chiameremo « energia vincolata » per ricordare che essa dipende, come lo stato a cui si riferisce, dalla presenza di deformazioni plastiche, e che quindi permane con esse quando pure cessino di agire le cause che l'hanno prodotta.

Nei confronti dunque del corpo considerato nel suo insieme, il lavoro meccanico assorbito in occasione di una deformazione plastica è, generalmente parlando, da considerarsi come composto di due frazioni ben distinte: l'una spesa per produrre la deformazione plastica propriamente detta, e che viene dispersa attraverso trasformazioni irreversibili; mentre l'altra, spesa per creare lo stato di coazione, viene trasformata in energia vincolata.

Resta naturalmente sempre vero che nessuna delle due frazioni verrà restituita allo sparire delle cause che hanno determinato il complesso fenomeno.

Tuttavia mentre la prima è veramente e definitivamente perduta, la seconda resta nel corpo allo stato potenziale; e, sommandosi coll'energia potenziale dovuta ad eventuali sollecitazioni ulteriori, potrà anche rivelare la sua presenza per il diverso modo con cui il corpo si comporterà per rapporto ad esse.

Nè è da escludersi che, in determinate circostanze che consentano una totale o parziale scomparsa delle stesse deforma-

zioni plastiche, l'energia vincolata possa in tutto o in parte venire restituita sotto forma di lavoro meccanico.

* * *

Tutto ciò premesso, noi siamo finalmente in grado di scrivere, nella loro forma la più generale, le condizioni di equilibrio di un corpo soggetto all'azione di un qualsiasi sistema di forze esterne e di deformazioni non elastiche, e ciò qualunque sia il modo ed il tempo in cui queste ultime gli sono state impresse.

Siano

$$\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$$

le tensioni incognite che caratterizzano questo stato di equilibrio. Supponiamo di attribuir loro idealmente certe variazioni

$$\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xy}$$

costituenti alla lor volta un sistema di forze in equilibrio indipendentemente da qualsiasi intervento di forze esterne.

Il teorema dei lavori virtuali esige che sia identicamente nullo il lavoro che queste variazioni di tensione eseguirebbero in una qualsiasi variazione di configurazione piccolissima e compatibile coi vincoli a cui il corpo stesso è soggetto.

Ora come variazione di configurazione piccolissima e compatibile noi possiamo assumere quella che si è effettivamente realizzata nel passaggio del corpo dallo stato iniziale non deformato allo stato di equilibrio che stiamo studiando; e che ha per componenti

$$\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x, \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y, \dots, \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}$$

Potremo quindi scrivere

$$[14] \int_V [(\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x) \delta\sigma_x + (\varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y) \delta\sigma_y + \dots + (\gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}) \delta\tau_{xy}] dV = 0$$

o anche

$$\int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \delta\sigma_y + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \delta\tau_{xy} \right] dV + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \delta\sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \delta\sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \delta\tau_{xy}) dV = 0$$

Ma il primo membro di questa equazione non è che la variazione prima della funzione

$$\int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}) dV + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV$$

la cui variazione seconda

$$\int_V \varphi(\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xy}) dV$$

è essenzialmente positiva.

Se ne deduce che:

Le tensioni che caratterizzano lo stato di equilibrio di un corpo sono quelle che rendono minima la funzione

$$\int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}) dV + \int_V (\bar{\varepsilon}_x \sigma_x + \bar{\varepsilon}_y \sigma_y + \dots + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV$$

per rapporto a tutti i valori che la stessa funzione potrebbe assumere compatibilmente col sistema dato di forze esterne e di deformazioni non elastiche.

Grazie a questo teorema — e più precisamente grazie alla equazione [14] — noi abbiamo sempre la possibilità di esprimere le tensioni incognite in funzione delle forze esterne e delle deformazioni non elastiche a cui il corpo è soggetto indipendentemente dal modo e dal tempo in cui esso è pervenuto allo stato attuale.

Se le deformazioni non elastiche sono note — come avviene nel caso di quelle che si sogliono chiamare « deformazioni impresse » — il problema è senz'altro risolto.

Se invece le deformazioni non elastiche non sono date, ma dipendono dallo stesso stato di equilibrio incognito — come accade nel caso delle deformazioni « plastiche » — il teorema può ancora venire utilizzato per successive approssimazioni.

* * *

Ecco, in breve, come si presentano in pratica le possibilità di utilizzazione del teorema.

In pratica si perviene, per questa via, a risolvere tre ben determinate categorie di problemi:

a) quelli in cui si conoscono (o si può supporre che si conoscano) le deformazioni non elastiche. È questo il problema fondamentale della teoria delle coazioni. Le k equazioni servono a determinare le k incognite iperstatiche;

b) quelli in cui le deformazioni non elastiche sono sconosciute, ma in cui si conoscono (perchè date o perchè da noi scelte ad arbitrio) h delle incognite iperstatiche. In questo caso le equazioni serviranno a determinare, insieme colle $k - h$ incognite iperstatiche ancora sconosciute, gli h parametri della deformazione non elastica;

c) quelli infine in cui le deformazioni elastiche sono sconosciute, ma in cui si conoscono h relazioni (lineari o trattabili come tali, almeno in via di prima approssimazione) che le leghino alle incognite iperstatiche. Queste h relazioni, insieme colle k equazioni scritte, potranno allora venire utilizzate per determinare le $k + h$ incognite del problema.

* * *

Se si suppongono nulle tutte le forze esterne, il nostro teorema definisce uno stato di coazione; è lo stato di equilibrio in cui il corpo tenderà a portarsi quando le forze esterne cesseranno di agire; è lo stato a cui dovremo naturalmente riferirci nella valutazione delle deformazioni, elastiche o plastiche, che potranno venir determinate da una sollecitazione ulteriore.

Se invece si suppongono nulle tutte le deformazioni non elastiche, la nostra equazione si riduce a

$$[15] \quad \int_V (\epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \dots + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy}) dV = 0$$

e caratterizza lo stato di equilibrio determinato in un corpo che, partendo da uno stato naturale non deformato, sotto l'azione di un dato sistema di forze esterne, abbia subito delle sole deformazioni elastiche.

Siamo dunque in regime di perfetta elasticità; ed inverso l'equazione scritta non fa che esprimere la condizione di minimo dell'energia potenziale elastica cioè il noto teorema di Me-nabrea.

A questo proposito è importante rilevare che dalla equazione [15] che compendia le leggi della perfetta elasticità si può passare alla [14] in cui noi abbiamo espresse le leggi dell'equilibrio elasto-plastico, sostituendo le sei componenti della deformazione elastica

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$$

colle sei componenti della deformazione totale

$$\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x, \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y, \dots, \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy}$$

Sotto riserva della esistenza di analoghi rapporti nelle equazioni ai limiti che ciascun problema particolare naturalmente comporta, si può quindi pensare alla possibilità di passare dalla soluzione di un determinato problema della teoria classica dell'elasticità alla soluzione dell'analogo problema nella teoria dell'equilibrio elasto-plastico mediante le stesse sostituzioni.

Un dubbio soltanto potrebbe sorgere a proposito del valore del coefficiente di Poisson; ma recenti esperienze di SWAINGER hanno dimostrato che, fin che le deformazioni si mantengono molto piccole, il coefficiente di Poisson in regime elasto-plastico non si scosta sensibilmente dai valori che gli spettano in regime di perfetta elasticità.

L'ipotesi della invariabilità del coefficiente di Poisson, e la conseguente liceità del trasferimento delle soluzioni dalla teoria classica dell'elasticità alla teoria dell'equilibrio elasto-plastico, sono quindi da considerarsi come accettabili fin che è rispettata quella condizione della piccolezza delle deformazioni a cui tanto l'una che l'altra teoria sono, anche per altre ragioni, notoriamente subordinate.

* * *

Consideriamo ora due diversi stati di equilibrio di un medesimo corpo, le cui caratteristiche converremo di contrassegnare rispettivamente con uno o con due accenti.

Siano

$$X', Y', Z'$$

ed

$$X'', Y'', Z''$$

le componenti delle forze applicate (nel primo e nel secondo sistema) al punto generico di coordinate

$$x, y, z$$

Noi scriveremo l'equazione generale di equilibrio di ciascuno di questi due stati servendoci, come variazioni virtuali, delle deformazioni che caratterizzano l'altro stato.

Si ottengono così le due equazioni:

$$\begin{aligned} & \sum (X' u'' + Y' v'' + Z' w'') = \\ & = \int_V \left[\sigma'_x (\epsilon''_x + \bar{\epsilon}''_x) + \sigma'_y (\epsilon''_y + \bar{\epsilon}''_y) + \dots + \tau'_{xy} (\gamma''_{xy} + \bar{\gamma}''_{xy}) \right] dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum (X'' u' + Y'' v' + Z'' w') = \\ & = \int_V \left[\sigma''_x (\epsilon'_x + \bar{\epsilon}'_x) + \sigma''_y (\epsilon'_y + \bar{\epsilon}'_y) + \dots + \tau''_{xy} (\gamma'_{xy} + \bar{\gamma}'_{xy}) \right] dV \end{aligned}$$

Se poi si tien conto che, φ essendo una funzione quadratica,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \right)' \epsilon''_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \right)' \epsilon''_y + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)' \gamma''_{xy} = \\ & = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_x} \right)'' \epsilon'_x + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \epsilon_y} \right)'' \epsilon'_y + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{xy}} \right)'' \gamma'_{xy} \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \int_V (\sigma'_x \epsilon''_x + \sigma'_y \epsilon''_y + \dots + \tau'_{xy} \gamma''_{xy}) dV = \\ & = \int_V (\sigma''_x \epsilon'_x + \sigma''_y \epsilon'_y + \dots + \tau''_{xy} \gamma'_{xy}) dV \end{aligned}$$

si potrà scrivere la relazione

$$[16] \left\{ \begin{aligned} & \sum (X' u'' + Y' v'' + Z' w'') - \int_V (\sigma'_x \bar{\varepsilon}''_x + \sigma'_y \bar{\varepsilon}''_y + \dots + \tau'_{xy} \bar{\gamma}''_{xy}) dV = \\ & = \sum (X'' u' + Y'' v' + Z'' w') - \int_V (\sigma''_x \bar{\varepsilon}'_x + \sigma''_y \bar{\varepsilon}'_y + \dots + \tau''_{xy} \bar{\gamma}'_{xy}) dV \end{aligned} \right.$$

la quale esprime, nella forma più generale, la reciprocità fra differenti stati di equilibrio.

Questa espressione contiene naturalmente come casi particolari i teoremi conosciuti sotto questo medesimo nome nella teoria classica dell'elasticità e nella moderna teoria degli stati di coazione.

* * *

Supponiamo infatti nulle tutte le deformazioni non elastiche così nell'uno come nell'altro dei due stati di equilibrio considerati. La [16] si riduce subito alla forma

$$[17] \quad \sum (X' u'' + Y' v'' + Z' w'') = \sum (X'' u' + Y'' v' + Z'' w')$$

ed esprime il teorema di reciprocità nella forma classica enunciata per la prima volta da ENRICO BETTI:

« *Dati due differenti stati di deformazione di un corpo elastico, corrispondenti a due differenti sistemi di forze esterne, il lavoro che le forze del primo sistema compirebbero se ai loro punti di applicazione venissero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la seconda deformazione, è eguale al lavoro che compirebbero le forze del secondo sistema se ai loro punti di applicazione venissero attribuiti gli spostamenti che caratterizzano la prima deformazione* ».

* * *

Supponiamo ora che siano nulle le deformazioni non elastiche in uno soltanto dei due stati di equilibrio considerati, per esempio nel primo, e che nell'altro siano invece nulle le forze

applicate, sicchè esso si riduca ad un semplice stato di coazione; si otterrà allora l'equazione

$$[18] \quad \sum (X' u'' + Y' v'' + Z' w'') = \int_V (\sigma'_x \bar{\epsilon}''_x + \sigma'_y \bar{\epsilon}''_y + \dots + \tau'_{xy} \bar{\gamma}''_{xy}) dV$$

che esprime in forma assolutamente generale quello che, in occasione della sua prima enunciazione, io avevo chiamato il « secondo principio di reciprocità »:

La somma dei prodotti delle componenti di una deformazione non elastica (arbitrariamente imposta al corpo o sopravvenuta per effetto della sua plasticità) per le componenti corrispondenti delle tensioni interne dovute ad un sistema qualunque di forze esterne, è eguale al lavoro che queste forze esterne compirebbero nel cambiamento di configurazione determinato dalla deformazione non elastica.

* * *

Supponiamo infine che, nell'uno come nell'altro degli stati di equilibrio considerati, siano nulle tutte le forze esterne.

Tra i due stati di coazione che si vengono così a caratterizzare dovrà sussistere la relazione

$$[19] \quad \int_V (\sigma'_x \bar{\epsilon}''_x + \sigma'_y \bar{\epsilon}''_y + \dots + \tau'_{xy} \bar{\gamma}''_{xy}) dV = \\ = \int_V (\sigma''_x \bar{\epsilon}'_x + \sigma''_y \bar{\epsilon}'_y + \dots + \tau''_{xy} \bar{\gamma}'_{xy}) dV .$$

Si ha dunque anche una reciprocità tra stati di coazione che VOLTERRA aveva per la prima volta riconosciuta nel caso assai particolare delle « distorsioni », e che noi possiamo ora enunciare in modo tutt'affatto generale sotto la forma:

Dati due differenti stati di coazione di un medesimo corpo definiti da due sistemi arbitrari di deformazioni non elastiche, la somma dei prodotti delle componenti delle deformazioni non elastiche che determinano il primo stato di coazione per le corrispondenti componenti speciali di tensione del secondo, è eguale alla somma dei prodotti delle componenti di deforma-

zioni non elastiche che determinano il secondo stato di coazione per le corrispondenti componenti speciali di tensione del primo.

* * *

Ritorniamo ora all'espressione generale della reciprocità, e supponiamo che il secondo sistema si riduca ad una sola delle componenti delle forze che lo caratterizzano, per esempio alla sola X''_i a cui noi attribuiremo un valore unitario

$$X''_i = 1$$

tutte le altre componenti, sia delle forze applicate sia delle deformazioni non elastiche, essendo identicamente nulle.

Si otterrà allora dalla [16] una espressione della componente di spostamento corrispondente nel primo sistema

$$[20] \sum (X' u'' + Y' v'' + Z' w'') - \int_V (\sigma'_x \bar{\varepsilon}''_x + \sigma'_y \bar{\varepsilon}''_y + \dots + \tau'_{xy} \bar{\gamma}''_{xy}) dV = u'_i$$

nella quale tutte le quantità segnate con due accenti altro non sono che componenti di spostamento o componenti speciali di tensione in uno stato d'equilibrio ben definito: quello determinato dalla sollecitazione

$$X''_i = 1$$

Se ne deduce che u'_i è una funzione lineare delle

$$X', Y', Z', \bar{\varepsilon}'_x, \bar{\varepsilon}'_y, \dots, \bar{\gamma}'_{xy}$$

o più geueralmente che:

Gli spostamenti dei differenti punti del corpo sono delle funzioni lineari delle forze applicate e delle deformazioni non elastiche che li hanno determinati.

Questo carattere lineare delle relazioni che legano gli spostamenti — e per conseguenza tutte le caratteristiche così dello stato di deformazione come dello stato di tensione — alle forze applicate ed alle deformazioni non elastiche è di fondamentale importanza perchè ci permette di ottenere la soluzione dei pro-

blemi più complessi per semplice sovrapposizione dei risultati a cui si giunge nello studio dei problemi più semplici.

Siamo qui di fronte ad una vera e propria generalizzazione della classica *legge di Hooke*, punto di partenza di tutta la teoria dell'elasticità e della resistenza dei materiali.

Questa generalizzazione è estremamente preziosa perchè legittima, in modo rigoroso e definitivo, l'uso di studiare separatamente gli stati di deformazione elastica che formano oggetto della teoria classica, e gli stati di coazione i cui problemi hanno potuto solo in questi ultimi tempi venire impostati razionalmente.

V

APPLICAZIONE AD UN PROBLEMA PARTICOLARE

FLESSIONE SEMPLICE O PRESSOFLESSIONE

Vediamo ora come la soluzione di uno dei problemi fondamentali per la resistenza dei materiali — quello della flessione semplice o della pressoflessione — possa venire trasferita dalla teoria classica dell'elasticità alla nuova teoria dell'equilibrio elasto plastico, e fino a qual punto i risultati che così si ottengono corrispondano ai più recenti ed attendibili risultati della esperienza.

Prendiamo perciò in considerazione il classico caso del solido prismatico o cilindrico (naturalmente omogeneo ed isotropo) di lunghezza molto grande per rapporto alle dimensioni trasversali, e sollecitato esclusivamente in corrispondenza delle basi (problema di De Saint Venant).

Assumiamo come assi coordinati di riferimento i due assi principali d'inerzia di una delle basi e l'asse geometrico del solido.

E ricordiamo le relazioni che, in queste condizioni, legano le componenti speciali di tensione non identicamente nulle alle componenti della deformazione elastica

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \epsilon_x \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}\end{aligned}$$

È noto che nel caso della semplice flessione o della pressoflessione, soltanto la prima di queste tre componenti speciali di tensione è diversa da zero. Essa è d'altronde legata alla sollecitazione esterna, e più precisamente allo sforzo normale \mathcal{O}

ed alle due componenti \mathfrak{M}_x ed \mathfrak{M}_y del momento flettente, da relazioni del tipo

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= \int_A \sigma_z dA \\ \mathfrak{M}_x &= \int_A \sigma_z y dA \\ \mathfrak{M}_y &= \int_A \sigma_z x dA\end{aligned}$$

A essendo l'area della sezione retta generica.

Se ora si tien conto che, per il principio della conservazione delle sezioni piane, la componente ε_z della deformazione elastica deve potersi scrivere sotto la forma

$$\varepsilon_z = \lambda + \mu y + \nu x$$

e che, per la particolare scelta degli assi

$$\begin{aligned}\int_A y dA &= 0 \\ \int_A x dA &= 0 \\ \int_A xy dA &= 0\end{aligned}$$

le relazioni testè scritte divengono

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= E \int_A \varepsilon_z dA = EA \lambda \\ \mathfrak{M}_x &= E \int_A \varepsilon_z y dA = EJ_x \mu \\ \mathfrak{M}_y &= E \int_A \varepsilon_z x dA = EJ_y \nu\end{aligned}$$

J_x e J_y essendo al solito i momenti d'inerzia principali della sezione retta.

Se ne deducono i valori di

$$\lambda = \frac{\mathcal{N}_0}{EA}$$

$$\mu = \frac{\mathcal{N}_{0x}}{EJ_x}$$

$$\nu = \frac{\mathcal{N}_{0y}}{EJ_y}$$

nonchè l'espressione della componente della deformazione elastica in funzione delle componenti della sollecitazione

$$[21] \quad \varepsilon_z = \frac{\mathcal{N}_0}{EA} + \frac{\mathcal{N}_{0x}}{EJ_x} y + \frac{\mathcal{N}_{0y}}{EJ_y} x$$

Operiamo ora la sostituzione delle deformazioni elastiche ε_z colle deformazioni totali $\bar{\varepsilon}_z + \varepsilon_z$; cioè poniamo

$$\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \lambda + \mu y + \nu x$$

Si avrà

$$\mathcal{N}_0 = E \int_A \varepsilon_z dA = EA \lambda - E \int_A \bar{\varepsilon}_z dA$$

$$\mathcal{N}_{0x} = E \int_A \varepsilon_z y dA = EJ_x \mu - E \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA$$

$$\mathcal{N}_{0y} = E \int_A \varepsilon_z x dA = EJ_y \nu - E \int_A \bar{\varepsilon}_z x dA$$

da cui

$$\lambda = \frac{\mathcal{N}_0 + E \int_A \bar{\varepsilon}_z dA}{EA}$$

$$\mu = \frac{\mathcal{N}_{0x} + E \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA}{EJ_x}$$

$$\nu = \frac{\mathcal{N}_{0y} + E \int_A \bar{\varepsilon}_z x dA}{EJ_y}$$

e sostituendo

$$[22] \quad \varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \frac{\mathcal{N} + E \int_A \bar{\varepsilon}_z dA}{EA} + \frac{\mathcal{M}_x + E \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA}{EJ_x} y + \\ + \frac{\mathcal{M}_y + E \int_A \bar{\varepsilon}_z x dA}{EJ_y} x$$

e finalmente

$$[23] \quad \sigma_z = E\varepsilon_z = \frac{\mathcal{N} + E \int_A \bar{\varepsilon}_z dA}{A} + \frac{\mathcal{M}_x + E \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA}{J_x} y + \\ + \frac{\mathcal{M}_y + E \int_A \bar{\varepsilon}_z x dA}{J_y} x - E\bar{\varepsilon}_z$$

Noi siamo così in grado di valutare l'influenza dei fenomeni plastici che accompagnano, come si è detto a suo tempo, ogni deformazione elastica; influenza che si manifesta non soltanto sullo stato di deformazione ma anche sul corrispondente stato di tensione, vale a dire sulla legge di distribuzione delle tensioni interne.

* * *

Si noti bene che, fin che ci si limita alla considerazione delle deformazioni — e parliamo, ben s'intende, delle deformazioni totali, somma delle deformazioni elastiche e delle deformazioni plastiche — il fenomeno non appare influenzato dal punto di vista qualitativo, ma soltanto dal punto di vista quantitativo.

Più esattamente si constata che tutto procede come se al posto dello sforzo normale \mathcal{N} e dei momenti flettenti \mathcal{M}_x ed \mathcal{M}_y fossero stati applicati alle basi del prisma, o del cilindro, uno sforzo normale fittizio

$$\mathcal{N} + E \int_A \bar{\varepsilon}_z dA$$

e due momenti flettenti fittizii

$$\mathcal{M}_x + E \int_A \bar{\varepsilon}_z y dA$$

c

$$\mathfrak{D}\mathfrak{K}_p + E \int_A \bar{\varepsilon}_2 x \, dA$$

Con che si spiegano i due fatti nuovi che caratterizzano il comportamento dei corpi in regime elasto plastico; il fatto cioè che le deformazioni non siano più delle funzioni lineari delle forze applicate, ma crescano più rapidamente di esse; ed il fatto che una frazione di queste deformazioni abbia un carattere permanente, cioè possa continuare a sussistere anche quando le forze esterne avranno cessato di agire sul corpo.

* * *

Diversamente vanno le cose nei confronti dello stato di tensione, dove si manifestano mutamenti qualitativi della maggiore importanza.

La distribuzione delle tensioni non dipende infatti soltanto dalla sollecitazione esterna ed al suo apparente incremento dovuto all'insieme delle deformazioni plastiche, ma anche dalla grandezza della deformazione plastica locale.

È facile comprendere che questa dipendenza della tensione in un determinato punto dalla deformazione plastica che si è prodotta in quel punto può assumere in pratica una grande importanza, in quanto può influire sulla posizione dei punti del corpo in corrispondenza dei quali si possono verificare i massimi valori delle tensioni.

La [23] ci autorizza anzi a prevedere la possibilità di una limitazione dei valori delle tensioni nei punti in cui le deformazioni plastiche sono più grandi; che sono poi generalmente i punti in cui, in regime elastico, si dovrebbero verificare le tensioni maggiori. Diminuzione delle tensioni dunque là dove esse potrebbero diventare più pericolose per la resistenza del materiale.

Contemporaneamente dovrà necessariamente aversi un incremento delle tensioni in altre regioni del corpo; in partico-

lare là dove, in regime elastico, la resistenza del materiale sarebbe meno utilizzata. Queste regioni verrebbero così impegnate a maggiormente contribuire alla resistenza dell'insieme.

* * *

Tutto ciò premesso, prendiamo in considerazione un caso concreto: quello per esempio di un solido sollecitato a flessione semplice nel piano yz , e supponiamo la deformazione crescente linearmente col tempo.

Vogliamo definirne lo stato di equilibrio elasto plastico in un ben determinato istante T ; vogliamo cioè studiare quale sarà, in quell'istante, la distribuzione delle deformazioni plastica ed elastica, e la conseguente distribuzione delle tensioni interne.

Ci varremo a tal fine della [4]

$$\bar{\varepsilon}(T) = a_1 c \frac{T^2}{2} + a_2 c^2 \frac{T^3}{3} + a_3 c^3 \frac{T^4}{4} + \dots$$

nella quale T è da considerarsi come dato, mentre c deve intendersi variabile colla posizione del punto sul piano della sezione retta; possiamo anzi senz'altro affermare che, in omaggio al principio della conservazione delle sezioni piane, c dovrà considerarsi come proporzionale alla distanza del punto che si considera dall'asse neutro della sezione.

Posto dunque

$$c = \omega y \quad (\omega = \text{cost})$$

si ottiene

$$\bar{\varepsilon}(T) = \frac{a_1 \omega T^2}{2} y + \frac{a_2 \omega^2 T^3}{3} y^2 + \frac{a_3 \omega^3 T^4}{4} y^3 + \dots$$

che scriveremo

$$[24] \quad \bar{\varepsilon} = K_1 y + K_2 y^2 + K_3 y^3 + \dots$$

con

$$K_1 = \frac{a_1 \omega T^2}{2}, \quad K_2 = \frac{a_2 \omega^2 T^3}{3}, \quad K_3 = \frac{a_3 \omega^3 T^4}{4}, \dots$$

costanti che dipendono dalle caratteristiche del materiale e dalla velocità di deformazione.

Tenuto presente che

$$\varepsilon + \bar{\varepsilon} = c t$$

si può senz'altro scrivere l'espressione della deformazione elastica nell'istante T

$$[25] \quad \varepsilon = \omega T y - K_1 y - K_2 y^2 - K_3 y^3 - \dots$$

E qui diverse possibilità si prospettano a seconda delle caratteristiche del materiale, a seconda della velocità della deformazione, a seconda dell'istante che si considera.

Incominciamo coll'osservare che, se il coefficiente di eredità fosse costante, se cioè il solo coefficiente K_1 fosse diverso da zero, le due espressioni della deformazione plastica e della deformazione elastica

$$\bar{\varepsilon} = K_1 y$$

$$[26] \quad \varepsilon = (\omega T - K_1) y$$

risulterebbero entrambe proporzionali ad y ; si avrebbe cioè sulla sezione retta una distribuzione lineare così delle deformazioni come delle tensioni, non diversamente da quanto accade in regime di perfetta elasticità.

L'ipotesi della costanza del coefficiente d'eredità è peraltro, generalmente, da escludersi.

Ammettiamo dunque che sia diversa da zero una almeno delle costanti a_2, a_3, \dots . Supponiamo per esempio che si abbia

$$f = a_1 + a_n (\varepsilon + \bar{\varepsilon})^{n-1}$$

Se ne deduce subito che

$$\bar{\varepsilon} = K_1 y + K_n y^n$$

ed

$$[27] \quad \varepsilon = (\omega T - K_1) y - K_n y^n$$

Ecco dunque che, come avevamo previsto, l'intervento delle deformazioni plastiche determina dei mutamenti non solo quantitativi, ma qualitativi nell'andamento del diagramma delle deformazioni elastiche e quindi nella distribuzione delle tensioni sulla sezione retta; tale distribuzione non è più lineare.

Nelle figure 27, 28 e 29 la legge di variazione delle ϵ è stata graficamente rappresentata in alcuni casi particolari, rispettivamente corrispondenti alle ipotesi

$$n = 2, \quad n = 3, \quad n = 4,$$

e per differenti valori del rapporto

$$\frac{K_n}{\omega T - K_1}$$

Resta in ogni caso definitivamente confermato:

1) che, contrariamente a quanto si usa ammettere (e contrariamente a quanto io stesso ho ammesso nelle trattazioni di prima approssimazione) l'intervento delle deformazioni plastiche si verifica anche nelle regioni più vicine all'asse neutro, epperò meno sollecitate;

2) che tale intervento non si traduce soltanto in un incremento della deformazione totale, cioè della curvatura del solido, interpretabile con una sostituzione del momento flettente effettivamente applicato con un momento flettente fittizio, funzione dell'insieme delle deformazioni plastiche;

3) che deformazioni e tensioni in un punto generico della sezione retta vengono a dipendere non soltanto dalla sollecitazione esterna e dal suo apparente incremento dovuto all'insieme delle deformazioni plastiche ma anche dai particolari valori che le deformazioni plastiche hanno assunto in quel punto;

4) che il nuovo diagramma delle tensioni — raffrontato a quello che si avrebbe in regime di perfetta elasticità, quale si vede (per uno dei casi sopra considerati) rappresentato in figura 30 dalla retta punteggiata — accusa sempre, fin dal primo momento, una riduzione di valori in quei punti in cui il mate-

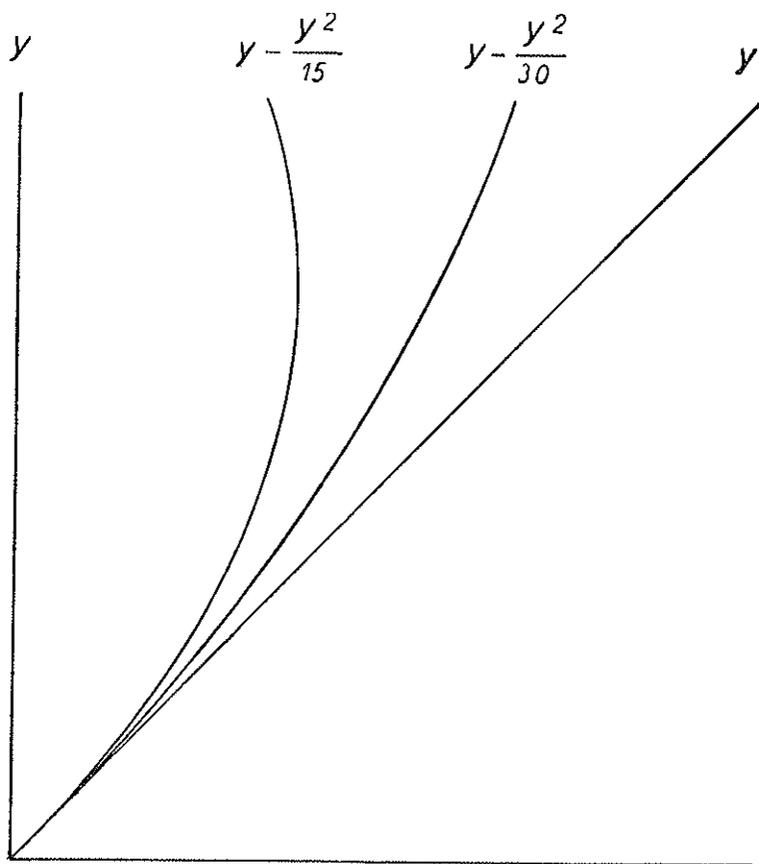


FIG. 27

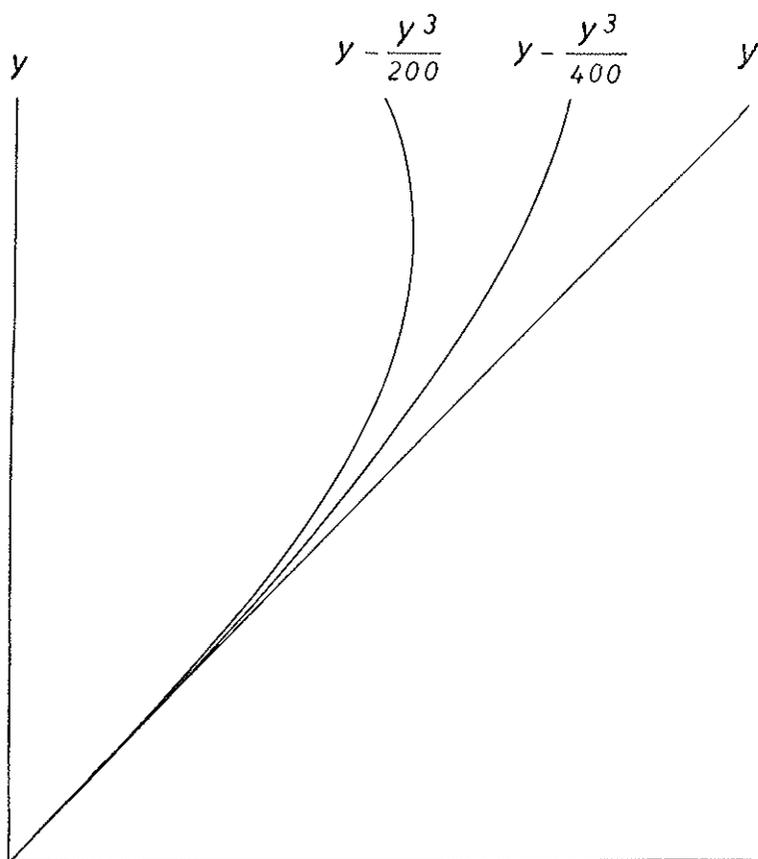


FIG. 28

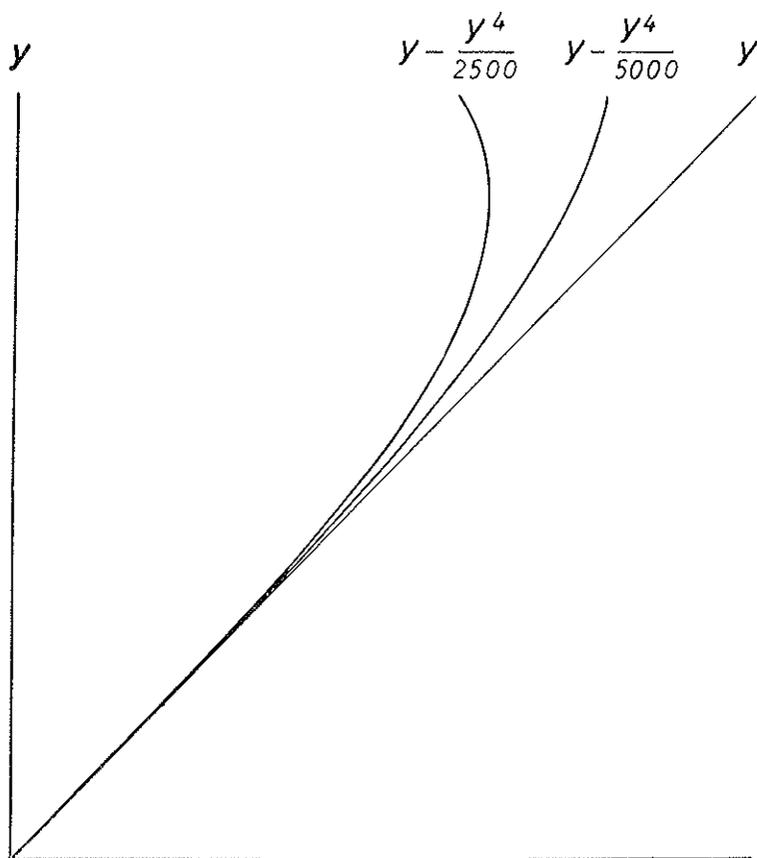


FIG. 29

riale, in regime elastico, sarebbe stato soggetto alle tensioni più elevate, ed un aumento là dove, in regime elastico, la resistenza del materiale sarebbe stata meno utilizzata;

5) che non è neppur più detto che le tensioni massime si trovino sui bordi della sezione (e comunque nei punti più lontani dall'asse neutro). Ciò accade bensì per valori di K_n inferiori ad un certo limite; ma per valori più grandi di K_n — quali si possono sempre incontrare al crescere della velocità ω o del tempo T — le ε (e quindi le tensioni) si mantengono crescenti solo fino ad un certo valore di y , poi prendono a decrescere. Le tensioni massime possono pertanto verificarsi in corrispondenza di punti interni alla sezione (tanto più prossimi al bordo della sezione quanto più elevato è il valore di n);

6) che uno stato di coazione ha sempre origine, comunque piccole siano le sollecitazioni a cui il solido è stato sottoposto; e che, a causa di esso, un ritorno puro e semplice del solido al suo stato naturale non deformato non sarà mai più possibile.

Questo stato di coazione si può immediatamente caratterizzare riferendo il diagramma delle deformazioni elastiche alla punteggiata a cui il diagramma stesso si ridurrebbe notoriamente in regime di perfetta elasticità (fig. 30 a sinistra).

Tale diagramma è stato, per maggiore chiarezza, riprodotto a destra nella stessa figura e potrebbe assumersi a rappresentazione dello stato di coazione a trave scarica se la soppressione del carico avvenisse istantaneamente, sì da dar luogo alla scomparsa delle sole deformazioni elastiche.

Se l'eliminazione del carico avviene invece gradualmente (per esempio colla stessa velocità con cui il carico era stato applicato) noi già sappiamo che, insieme colle deformazioni elastiche, scompare anche una parte, e precisamente la metà, delle deformazioni plastiche.

Il diagramma dello stato di coazione resta tuttavia valido purchè riferito ad una unità di misura doppia della precedente.

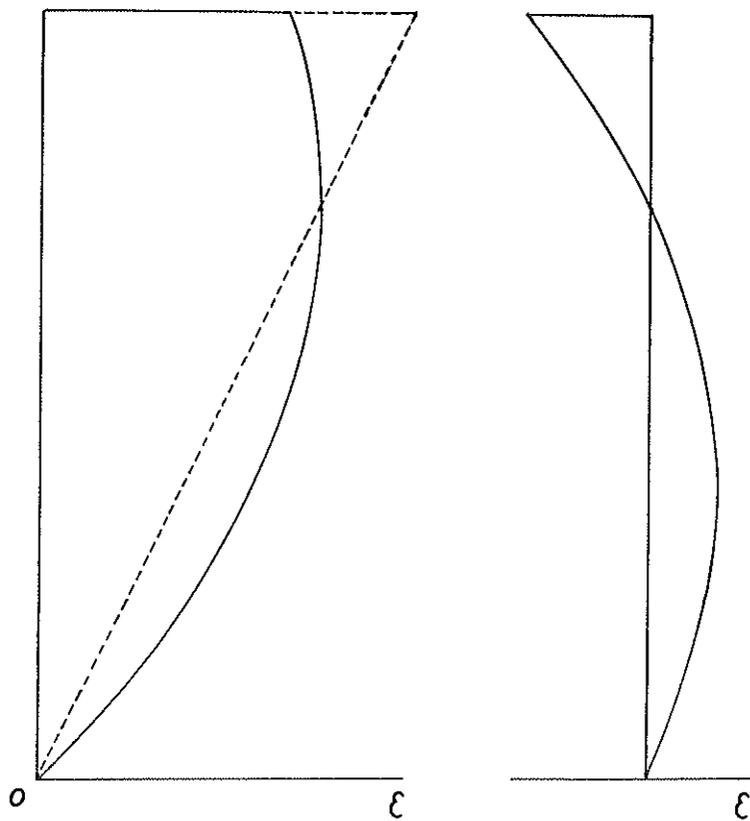


FIG. 30

* * *

Di queste conclusioni, alcune corrispondono a fatti sperimentalmente già accertati da tempo.

Il fatto per esempio che la prima applicazione dei carichi — anche se questi son contenuti in limiti modestissimi — è sempre accompagnata dalla comparsa di deformazioni permanenti, è ben noto a tutti i costruttori di strutture in cemento armato. Esso trova qui per la prima volta la sua interpretazione nel quadro di una teoria razionale.

Nota è pure l'insorgenza di stati di coazione che inevitabilmente accompagnano quelle prime deformazioni.

Di questi fenomeni che per la loro piccolezza non destano preoccupazioni ai fini della sicurezza, ma che son destinati ad influire in modo non sempre trascurabile su tutti gli stati successivi di equilibrio della struttura — non esclusi quelli che potrebbero anche comprometterne la sicurezza — ci si è fin qui occupati troppo poco.

L'esperienza, specie se condotta con strumenti di misura che consentano di apprezzare l'esistenza di curvature, o comunque di deformazioni permanenti, anche molto piccole, potrebbe offrire a progettisti ed a costruttori argomento di preziose meditazioni.

BIBLIOGRAFIA

DELLO STESSO AUTORE SUL MEDESIMO ARGOMENTO:

- Esperienze sulla elasticità a trazione del rame* (tre note). « Rendiconti Accademia Nazionale Lincei », Roma, (5), 23 (1914).
- Nuove esperienze sulla elasticità del rame*. « Rend. Lincei » (5), 24 (1915).
- Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne*. « Rend. Lincei » (5), 25 (1917).
- Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie*. « Rend. Lincei » (5), 27 (1918).
- Una proprietà caratteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei*. « Rend. Lincei » (5), 27 (1918).
- Sul problema delle coazioni elastiche* (due note). « Rend. Lincei » (5), 27 (1918).
- Applicazione a problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche*. « Atti R. Accademia Scienze », Torino, 54 (1^o dicembre 1918).
- Per una teoria generale delle coazioni elastiche*. « Atti Accad. Scienze », Torino, 56 (19 giugno 1921).
- Ricerche sperimentali sulle coazioni elastiche* (tre note). « Atti Pontificia Accad. Scienze I Nuovi Lincei », 79 (1926).
- Nuovo contributo alla teoria delle coazioni elastiche ed alle sue applicazioni tecniche* (tre note). « Rend. Lincei » (6), 8 (1928).
- Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche* (quattro note). « Rend. Lincei » (6), 25 (1937).
- De l'équilibre des systèmes élastiques dans lesquels se produisent des déformations plastiques*. « J. de Math. Pures et Appliquées », Paris (1937-38).
- Analisi delle deformazioni plastiche e del conseguente stato di tensione nelle travi in cemento armato*. « Il Cemento Armato », Milano (1938).
- Le problème des déformations plastiques et la théorie des poutres fléchies*. « La Technique des Travaux », Paris (1938).
- Le problème des déformations plastiques et la théorie des arcs surbaissés*. « La Technique des Travaux », Paris (1938).
- Saggio di una teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico*. « Pontificia Accademia Scientiarum - Commentationes », 2 (1938).
- Su la possibilità di un razionale impiego delle deformazioni plastiche dei materiali*. « L'Ingegneria », Milano (1938).

- Incrudimento ed isteresi elastica nel quadro della nuova teoria dell'equilibrio elasto-plastico.* « Pontificia Acad. Scient. - Commentationes », 2 (1938).
- La statica dei corpi elasto-plastici.* « Pontificia Acad. Scient. » - Commentationes », 2 (1938).
- Les déformations plastiques et le dimensionnement des systèmes hyperstatiques.* « L'Ossature Métallique », Bruxelles (1938).
- Su la resistenza alla flessione in regime elasto-plastico.* « Pontificia Acad. Scient. » - Commentationes », 3 (1939).
- De la résistance des poutres fléchies en régime élasto-plastique.* « L'Ossature Métall. », Bruxelles (1938).
- Alla ricerca dei fondamenti sperimentali della teoria dell'equilibrio elasto-plastico.* « Rend Lincei » (6), 28 (1938).
- Les bases expérimentales de la théorie de l'équilibre élasto-plastique.* « L'Ossature Métall. », Bruxelles (1939).
- Risoluzione grafica generale del problema della flessione in regime elasto-plastico.* « Pontificia Acad. Scient. - Commentationes », 3 (1939).
- Saggio su la resistenza dei materiali in regime plastico.* « Pontificia Acad. Scient. - Acta », 3 (1939).
- Un théorème fondamental sur l'équilibre des systèmes élastiques en état de coaction.* Conferenza tenuta alla Sorbona addì 8 giugno 1939. « Mécanique », Paris (1939).
- Le rôle des états de coaction élastique dans la technique des constructions.* Conferenza tenuta alla Sorbona addì 9 giugno 1939. « Mécanique », Paris (1939).
- Contributo alla teoria delle travi inflesse in stato di coazione* « Pontificia Acad. Scient. - Acta », 3 (1939).
- Sono ammissibili deformazioni plastiche nelle costruzioni?* (In collaborazione con C. GUIDI). « Ann. dei Lavori Pubblici » (1940).
- Al di là dei limiti della teoria classica dell'elasticità.* « Pontificia Acad. Scient. - Acta », 5 (1941).
- Théorie de l'équilibre des corps elasto-plastiques.* « Bull. Technique de la Suisse Romande » (28 giugno, 20 settembre, 18 ottobre, 15 novembre 1941).
- Sul problema della flessione composta in regime elasto-plastico.* « Pontificia Acad. Scient. - Acta », 6 (1942).
- Deformazioni plastiche e deformazioni viscosse.* « Pontificia Acad. Scient. - Acta », 6 (1942).
- Saggio di impostazione generale del problema delle deformazioni viscosse.* « Rend. Lincei » (8), 4 (1948).
- Les phénomènes de coaction élasto-plastique et l'adaptation à la résistance des matériaux.* « Ann. Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics », 99 (1949).
- Valeur pratique d'une théorie de l'équilibre élasto-plastique.* « C. R. Académie des sciences », Paris, 232 (1951).

- L'équilibre élasto-plastique dans le temps* (quattro note). « C. R. Acad. Sciences », Paris, 233 (1951).
- De la valeur du coefficient de Poisson dans les phénomènes élasto-plastiques.*
« C. R. Acad. Sciences », Paris, 235 (1952).
- Expression généralisée du théorème de réciprocité.* « C. R. Acad. Sciences », Paris, 237 (1953).
- Saggio di generalizzazione della teoria classica dell'equilibrio elastico.*
« Rend. del Corso di perfezionamento per le costruzioni in cemento armato », Milano, vol. VI, 1955.
- Su l'equilibrio elasto-plastico delle pareti sottili.* « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXII (1957).
- Nuovo punto di vista sul problema dell'equilibrio elasto-plastico nel tempo.*
« Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXV (1958).
- L'equilibrio elasto-plastico delle strutture nel tempo.* « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXV, 1958.
- Il problema dell'isteresi negli stati di coazione.* « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXV (1958).
- Verifica sperimentale di presunti rapporti tra deformazioni elastiche e deformazioni plastiche.* « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXVI (1959).
- Caratteristiche geometriche dei cicli di isteresi elastica.* « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXVI (1959).
- Sui rapporti di forma e di posizione tra curve di rilassamento e cicli di isteresi* (due note). « Rend. Lincei », serie VIII, vol. XXVI (1959).
- Plasticité et Fluage* (quattro note). « C. R. Acad. Sciences », Paris, t. 247 (1938).
- Relaxation et écrouissage* (tre note). « C. R. Acad. Sciences », Paris, t. 248 e 249 (1959).
- Plasticité et fluage.* « Ann. Institut Technique du Bâtiment et Travaux Publics », Paris, n. 142 (1959).

I N D I C E

I. POSIZIONE DEL PROBLEMA	Pag. 5
II. L'ISTERESI ELASTICA	
<i>Caso primo</i> : L'isteresi negli stati di deformazione determinati da forze esterne	» 21
<i>Caso secondo</i> : L'isteresi negli stati di coazione de- terminati da deformazioni impresse	» 34
III. RILASSAMENTO ED INCRUDIMENTO DEI MATERIALI	» 43
IV. LE LEGGI GENERALI DELL'EQUILIBRIO ELASTO PLA- STICO	» 67
V. APPLICAZIONE AD UN PROBLEMA PARTICOLARE - FLES- SIONE SEMPLICE E PRESSOFLESSIONE	» 87
BIBLIOGRAFIA	» 103