

JOSEPH JUNKES S. J.

EIN VORSCHLAG ZUR
EMPIRISCHEN REDUKTION
VON SPEKTRALVERTEILUNGEN



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA
MCMLII

Bereich dieser Schwankungen definiert ist. Doch steht nichts im Wege, für die Zwecke einer theoretischen Untersuchung – wie es im Verlaufe der vorliegenden Arbeit des öfteren geschieht – die Existenz *idealer* Spektralsysteme anzunehmen.

Im allgemeinen sind die Abweichungen der in der Literatur vorkommenden Spektralsysteme untereinander nicht gerade sehr bedeutend, da die meisten Beobachter sich bemühen, einem „Standardsystem“ nahezukommen, als welches 1922⁽¹¹⁾ das Harvardsystem vorgeschlagen und 1935⁽¹²⁾ von der Internationalen Astronomischen Union allgemein angenommen wurde, so wie es in den über 200 000 Spektralangaben des *Henry Draper Catalogue* niedergelegt ist. Immerhin ist es wünschenswert, die Art und den Betrag etwaiger Abweichungen der einzelnen Systeme untereinander abschätzen und bei statistischen Arbeiten in Rechnung ziehen zu können. Deshalb versucht jeder Beobachter eines grösseren Materials, die Unterschiede seiner Schätzungen von denen des Standardsystems oder denen anderer Beobachter in „Streudiagrammen“ oder „Streutafeln“ darzubieten, in denen die Häufigkeiten des Zusammentreffens einer Schätzung seines eigenen Systems mit einer Schätzung des anderen Systems auf gleiche Objekte graphisch oder zahlenmässig dargestellt werden. Oft werden diese Befunde auch noch weiter nach korrelationstheoretischen Methoden verarbeitet und Regressionskurven oder -gleichungen angegeben, die es ermöglichen, von einer Klasse des einen Systems auf die ihr entsprechende Klasse im anderen System überzugehen.

Nun beschränken sich die Erscheinungen, die irgendwie mit dem Spektralcharakter zusammenhängen und häufig von einem Spektralsystem auf ein anderes übertragen werden sollen, nicht nur auf solche, die unmittelbar in Beziehung stehen zu den *Spektralklassen*, wie z. B. Farbe, Temperatur, absolute Helligkeit, usw., sondern es gibt auch Grössen, die dazu noch wesentlich von der *Häufigkeitsverteilung* der Spektren bedingt sind, wie z. B. die Leuchtkraftfunktion oder die Verteilungsfunktion von Eigenbewegungen. Ja selbst die Bestimmung der Regressionskurven wird von der zufälligen Verteilung der Klassenhäufigkeiten in dem benützten Material beeinflusst, wie wir im Verlaufe der Arbeit noch darlegen werden. (Vgl. S. 130ff.)

So ergeben sich zur Vorbereitung derartiger Übertragungen von einem Spektralsystem zu einem anderen zwei verschiedene Aufgaben:

1. Die Ermittlung äquivalenter Klassen, und

EIN VORSCHLAG ZUR EMPIRISCHEN REDUKTION VON SPEKTRALVERTEILUNGEN

EINLEITUNG (*)

Die vorliegende Arbeit sucht folgende Aufgabe zu lösen. Es ist eine Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen in einem bestimmten Spektralsystem gegeben, und es wird die ihr entsprechende Häufigkeitsverteilung in einem anderen System gesucht.

Die Spektralangaben verschiedener Beobachter stimmen bekanntlich nicht immer miteinander überein: Eigenheiten der Auffassung der Spektralklassen, zufällige Beobachtungsfehler, Verschiedenheit des Beobachtungsmaterials sind die Hauptursachen solcher Abweichungen. In ihrer Gesamtheit charakterisieren diese Eigenheiten eine Grundhaltung des Beobachters, die im Verlauf einer umfangreicheren Untersuchung als konstant angesehen wird, sodass von einem dem einzelnen Beobachter eigenen *Spektralsystem* gesprochen werden kann. Ähnliches gilt, wenigstens in den Hauptzügen, auch von einer Gruppe von Beobachtern an einer Sternwarte, die gleichartiges Beobachtungsmaterial verarbeiten und sich bestreben, die Spektren nach den gleichen Regeln zu bestimmen. So unterscheidet man ein Spektralsystem von Harvard, Mount Wilson, Victoria, Bergedorf, Potsdam, Uppsala, McCormick, usw.

Die Konstanz einer solchen Grundhaltung beim Spektralbeobachten lässt in der Praxis allerdings oft zu wünschen übrig, was zur Folge hat, dass das betreffende Spektralsystem nur mehr oder weniger scharf im

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Soprannumerario Rev.mo P. Johan Stein S. J. nella Riunione del 22 novembre 1951.

Die vorliegende Studie „Ein Vorschlag zur empirischen Reduktion von Spektralverteilungen“ beschäftigt sich mit einer Aufgabe, der sich der Spektralstatistiker zuweilen gegenüber sieht, der Reduktion von relativen Verteilungen von Spektralhäufigkeiten von einem Spektralsystem auf ein anderes, eine Aufgabe, die mit den gewöhnlichen in der Statistik gebräuchlichen Mitteln nicht zufriedenstellend gelöst werden kann. Durch Analyse der einer Spektralstreutafel zugrundeliegenden Gegebenheiten (wodurch eben die Beziehungen zwischen zwei Spektralsystemen charakterisiert zu werden pflegen) und deren Verwertung zum Aufbau künstlicher Streutafeln wird versucht, eine Einsicht zu eröffnen in die innere Struktur des für diese Zwecke benötigten besonderen Reduktionsverfahrens. Es zeigte sich, dass es keine einfache Methode gibt, die die Aufgabe streng zu lösen vermag, sodass man sich vorläufig mit einer empirischen Näherungslösung zufrieden geben muss, die den theoretischen Forderungen praktisch auf etwa $\pm 2 - 3\%$ nahe kommen dürfte. Bei dieser Untersuchung ergaben sich auch einige Seiten des Fragenkomplexes, wie z. B. die Sonderstellung der Spektralstreutafeln, wenn sie als Korrelationstabellen aufgefasst werden, der Zusammenhang mit der bekannten Methode Eddingtons, eine beobachtete Häufigkeitsverteilung auf die wahre Verteilung zu verbessern, und andere Fragen, die von allgemeinerem Interesse sein dürften, sodass es nach dem Urteil kompetenter Fachleute nützlich schien, die Erörterungen mit dem zugehörigen Material einmal ausführlich zur Diskussion vorzulegen.

Die Untersuchung wurde von dem Unterzeichneten der Päpstlichen Akademie der Wissenschaften in der Sitzung vom 22. November 1951 vorgelegt im Namen des hochwürdigen Herrn Direktors der Vatikanischen Sternwarte, Dr. Johan W. Stein S. J., der sich damals gerade unpässlich fühlte und am 27. Dezember desselben Jahres aus seinem arbeitsreichen Leben abgerufen wurde.

A. GATTERER S. J.

Mitglied der Päpstl. Akademie der Wissenschaften

2. die Ermittlung äquivalenter Häufigkeiten der Spektralklassen, von denen uns in erster Linie hier die zweite Aufgabe interessiert, wenn auch im Verlaufe der Arbeit noch gelegentliche Bemerkungen zu der ersten Frage der Bestimmung äquivalenter Klassen gemacht werden.

Während die erste dieser Aufgaben ohne weiteres mit den konventionellen Methoden der Korrelationstheorie gelöst werden kann und gewöhnlich auch in dieser Weise erledigt wird, stösst die zweite Aufgabe auf Schwierigkeiten, und sie wird auch, unseres Wissens, in den gewöhnlichen statistischen Lehrbüchern nicht eigens behandelt. Mag sein, dass schon die eigentliche Stellung dieses Problems etwas befremdet. Denn gewöhnlich verbindet man mit dem Begriff einer Korrelation zwischen zwei Veränderlichen oder Systemen immer auch gleichzeitig die Annahme, dass eine solche Korrelation strenge nur gilt für eine ganz bestimmte Häufigkeitsverteilung der Klassen, dass also dieselben Korrelationscharakteristiken im allgemeinen nicht beibehalten werden können, wenn sich die relativen Häufigkeiten der Klassen ändern. Deshalb die verschiedenen Prüfverfahren, um festzustellen, wie weit eine gegebene Stichprobe die Eigenschaften des Universums, aus dem sie entnommen wurde, noch richtig darstellen kann; deshalb auch immer wieder die Warnung bei namhaften Autoren, dass die aus einer gegebenen Menge von Objekten abgeleiteten Regressionen von einem Spektralsystem zu einem anderen nur mit Vorbehalten zu benützen sind, da sie eben strenge nur gelten für das benützte Material, dem sie entstammen.

Auf der anderen Seite lässt sich aber auch nicht bestreiten, dass zwischen zwei Spektralsystemen irgendwelche objektive korrelative Beziehungen bestehen müssen, die ganz *unabhängig* sind von der zufälligen Verteilung der Häufigkeiten der Spektralklassen: die Spektralschätzungen des einen und des anderen Beobachters können ja an Material mit ganz beliebigen Häufigkeitsverteilungen vorgenommen werden. In eine Spektraltafel gehen also – zunächst einmal rein phänomenologisch betrachtet – wesentlich zwei verschiedene Faktoren ein: ein *konstanter*, der die Grundhaltung der Beobachter charakterisiert und seinerseits sich wieder zusammensetzt aus der Überlagerung der zufälligen Beobachtungsfehler und den systematischen Abweichungen, und ein *veränderlicher*, die zufällige Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen im benützten Material.

Ist eine solche Unterscheidung sinnvoll, dann muss den Spektraltafeln eine gewisse *Sonderstellung* eingeräumt werden in der Reihe der gewöhnlichen Korrelationstabellen, und es wäre wünschenswert, ihre diesbezüglichen

chen Eigenheiten mit allen ihren Konsequenzen einmal klar herauszustellen. Im Verlauf der folgenden Ausführungen werden zwar einige tastende Versuche in dieser Richtung unternommen, doch möchten wir es eigentlichen Fachleuten auf diesem Gebiete überlassen, diese Frage einer eingehenderen Prüfung zu unterziehen. Hier beschäftigt uns nur die *praktische* Frage: wie müssen die Elemente einer gegebenen Streutafel sich ändern, wenn die Grundhaltung der Beobachter konstant bleibt und eine neue Verteilung der Klassenhäufigkeiten eingeführt wird?

Die ersten Versuche in dieser Richtung zeigten bald, dass es nicht genügt, die zu einer Klasse gehörigen Elemente einer Streutafel in einfach proportionaler Weise derart abzuändern, dass die gewünschten Klassenhäufigkeiten erscheinen, sondern dass notwendig auch ein gewisser Einfluss der Häufigkeiten der Nachbarklassen in Rechnung gezogen werden muss, dass also die entsprechende Reduktion *integral-proportional* sein sollte, im Gegensatz zu einer einfachen oder *partialen* Proportionalität. In welcher Weise allerdings eine solche integral-proportionale Reduktion zu bewerkstelligen sei, liess sich nicht so ohne weiteres festlegen.

Deshalb wurde die Erscheinung einer Spektralstreutafel einer eingehenden Analyse unterworfen, um die ihr zugrundeliegenden Faktoren einzeln herauszustellen und womöglich mathematisch so zu fassen, dass mit ihrer Hilfe unter bestimmten numerischen Annahmen künstliche Streutafeln aufgestellt werden können, an denen sich dieser Einfluss der Häufigkeit der Nachbarklassen auf die verschiedenen Elemente der Streutafeln quantitativ untersuchen lässt.

Das Ergebnis dieser Untersuchung, die an zahlreichen, ganz verschiedenen Beispielen ausgeführt wird, zeigt, dass ein solcher Einfluss sicher besteht, und dass die Überführung einer Streutafel in eine andere mit einer neuen Häufigkeitsverteilung der Klassen nicht mit einer partial-proportionalen Reduktion erfolgen darf, sondern dass eine neue Art von Reduktion dafür notwendig ist, die wir oben integral-proportionale Reduktion bezeichnet haben, und die eben darin besteht, dass sie auf diesen Einfluss der Häufigkeiten der Nachbarklassen gebührend Rücksicht nimmt. Es muss allerdings zugestanden werden, dass sich eine einfache, allgemeingültige Reduktionsweise nicht ausfindig machen liess, und dass wir uns vorderhand mit einer *rein empirischen* Lösung des Problems begnügen mussten, die die wirklichen Verhältnisse, soweit sie an den vorliegenden Beispielen nachgeprüft werden konnten, auf etwa $\pm 2-3\%$ zu erreichen gestatten. Damit wäre die eigentliche Aufgabe der Arbeit erledigt gewesen.

Doch führten diese Untersuchungen auch zu einigen Fragen, die vielleicht von allgemeinerem Interesse sein dürften, besonders, da sie sich nicht auf Spektralschätzungen allein beschränken, sondern überall dort auftreten, wo es sich um Beobachtungen handelt, die mit gesetzmässig festlegbaren Beobachtungsfehlern behaftet sind, wie etwa der Einfluss der zufälligen Klassenhäufigkeiten auf die Bestimmung der Regressionen, die eigentliche Bedeutung der Begriffe der Repräsentativität oder Selektivität bei derartigem Beobachtungsmaterial, also Fragen, die innerlich zusammenhängen mit der eigenartigen Stellung solcher Streutafeln in der Gruppe der Korrelationstafeln. In diesem Zusammenhange bot sich auch Gelegenheit, das EDDINGTONSche Verfahren zu berühren, mit dem eine beobachtete Häufigkeitsverteilung bei Kenntnis des Fehlergesetzes auf die wahre Verteilung verbessert werden kann. Es liegt nahe, dieses Verfahren zur Lösung der hier vorgegebenen Aufgabe zu verwenden; doch zeigt sich, dass EDDINGTONS Ansatz wesentlich eine partial-proportionale Reduktion voraussetzt und damit im Gegensatz zu stehen scheint mit dem hier als notwendig erachteten integral-proportionalen Verfahren.

Es liegt ausserhalb der Ziele unserer Arbeit, alle diese Fragen auch bis zu Ende durchzuarbeiten, einerseits, weil wir uns zunächst nur die rein praktische Aufgabe gestellt hatten, vorgegebene Spektralverteilungen in genügend genauer Weise von einem Spektralsystem auf ein anderes zu reduzieren, andererseits, weil eine befriedigende Lösung dieser Fragen doch vielleicht besser eigentlichen Spezialisten auf dem Gebiete der Statistik überlassen werden sollte. Immerhin erschienen sie uns bedeutsam genug, sie hier vorzulegen, so wie sie in diesem Zusammenhange auftraten. Deshalb wurden auch die benützten künstlichen Streutafeln und ihre Zusammenhänge ziemlich ausführlich geboten, selbst auf die Gefahr hin, etwas zu weitläufig zu werden.

Der *praktische Teil* der Arbeit beschäftigt sich nur mehr mit dem empirisch gewonnenen Näherungsverfahren, gibt einige Winke zur rationellen Berechnung der Reduktionsfaktoren und wendet dann die Methode an auf einige aus der astronomischen Literatur entnommene Spektralstreutafeln. Im besonderen wird dann noch versucht, objektive Beziehungen in Form von Streutafeln aufzustellen zwischen den Spektralsystemen des *Henry Draper Catalogue* und der *Henry Draper Extension*, die bekanntlich durchaus nicht identisch sind, und für die nur ungenügende direkte Vergleiche vorliegen.

A. THEORETISCHER TEIL

I. Zur allgemeinen Charakterisierung einer Spektralstreutafel

1. Das allgemeine Schema

An einer abgegrenzten Menge von N Objekten mögen zwei Beobachter Spektralschätzungen vornehmen. Jeder Beobachter habe eine ihm eigene Auffassung der Spektraltypen und eine ihm eigene Art von Beobachtungsfehlern. Auffassung der Spektren und Beobachtungsfehler mögen während der gesamten Dauer der Untersuchung konstant bleiben. Dann erhält jedes Individuum der Menge N zwei Spektralangaben: $S_i^{(x)}$ im System $S^{(x)}$ des einen Beobachters und $S_k^{(y)}$ im System $S^{(y)}$ des zweiten Beobachters. Bezeichnen wir mit a_{ik} die Häufigkeit des Zusammentreffens einer Angabe $S_i^{(x)}$ mit einer Angabe $S_k^{(y)}$, dann ergibt sich als erster unmittelbarer Ausdruck des Vergleiches der beiden Spektralsysteme $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$ eine Streutafel (a_{ik}), etwa vom Schema der Tabelle 1.

TABELLE 1

Allgemeines Schema einer Spektralstreutafel

$S^{(y)} \backslash S^{(x)}$	$S_1^{(x)}$	$S_2^{(x)}$		$S_i^{(x)}$		$S_{n-1}^{(x)}$	$S_n^{(x)}$	$A_k^{(y)} = \sum_i a_{ik}$
$S_1^{(y)}$	a_{11}	a_{21}		a_{i1}		$a_{n-1, 1}$	a_{n1}	$A_1^{(y)}$
$S_2^{(y)}$	a_{12}	a_{22}		a_{i2}		$a_{n-1, 2}$	a_{n2}	$A_2^{(y)}$
.....								
$S_k^{(y)}$	a_{1k}	a_{2k}		a_{ik}		$a_{n-1, k}$	$a_{n, k}$	$A_k^{(y)}$
.....								
$S_{n-1}^{(y)}$	$a_{1, n-1}$	$a_{2, n-1}$	...	$a_{i, n-1}$		$a_{n-1, n-1}$	$a_{n, n-1}$	$A_{n-1}^{(y)}$
$S_n^{(y)}$	$a_{1, n}$	$a_{2, n}$		$a_{i, n}$		$a_{n-1, n}$	$a_{n, n}$	$A_n^{(y)}$
$\sum_k a_{ik} = A_i^{(x)}$	$A_1^{(x)}$	$A_2^{(x)}$		$A_i^{(x)}$		$A_{n-1}^{(x)}$	$A_n^{(x)}$	$N = \sum_i A_i^{(x)} =$ $= \sum_k A_k^{(y)} =$ $= \sum_{i, k} a_{ik}$

Die Eingänge $S_i^{(x)}$ und $S_k^{(y)}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) bezeichnen die Spektralklassen der beiden zum Vergleich stehenden Systeme $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$. Wenn wir hier uns auf den Vergleich von solchen Systemen beschränken, die die *gleiche* Zahl von Spektralklassen aufweisen, so bedeutet dies für die weitere Behandlung eine Vereinfachung, womit aber nicht gesagt sein soll, dass nicht auch Systeme mit verschiedenen Anzahlen von Spektralklassen in entsprechender Weise mit einander verglichen werden könnten. Abweichend vom Gebrauch der Matrizen- und Determinantenrechnung versinnbilden hier die i die vertikalen Spalten und die k die horizontalen Reihen, wie es bei statistischen Tabellen allgemein üblich ist.

Die Elemente a_{ik} der Tafel geben, wie gesagt, die Anzahl der Fälle an, in denen eine Schätzung $S_i^{(x)}$ mit einer Schätzung $S_k^{(y)}$ zusammentrifft. Wir nennen sie allgemein die *Teilfrequenzen* der entsprechenden Spektralklassen, und zwar sind

die a_{ik} ($k = 1, 2, \dots, n$) die Teilfrequenzen der Spektralklasse $S_i^{(x)}$, und

die a_{ik} ($i = 1, 2, \dots, n$) die Teilfrequenzen der Spektralklasse $S_k^{(y)}$.

Die Frequenzen a_{ii} nennen wir *Hauptfrequenzen*, die Frequenzen a_{ik} ($k \neq i$) *Nebenfrequenzen*, die noch weiter unterschieden werden könnten in Nebenfrequenzen 1., 2., ... Ordnung, je nachdem $|k - i| = 1, 2, \dots$ ist. Im allgemeinen werden die Nebenfrequenzen bedeutend kleiner ausfallen als die Hauptfrequenzen, eine Folge des Bestrebens der Beobachter, sich möglichst enge an dasselbe Standardsystem anzuschliessen.

Die Summen der Teilfrequenzen über k ergeben die *Klassenfrequenzen* oder *Klassenhäufigkeiten* $A_i^{(x)}$ der Spektralklassen $S_i^{(x)}$, und die Summen der Teilfrequenzen über i die Klassenfrequenzen $A_k^{(y)}$ der Spektralklassen $S_k^{(y)}$. Also

$$\sum_k a_{ik} = A_i^{(x)} \text{ und} \quad (1)$$

$$\sum_i a_{ik} = A_k^{(y)}. \quad (2)$$

Die Gesamtzahl der untersuchten Objekte ist

$$\sum_i A_i^{(x)} = \sum_k A_k^{(y)} = \sum_{i,k} a_{ik} = N. \quad (3)$$

2. Die Spektralstreutafel als Korrelationstafel

Im Grunde genommen ist eine solche Spektralstreutafel nichts anderes als eine Korrelationstafel, und es liegt nahe – wie es denn auch oft geschieht – solche Tafeln mit den in der Statistik entwickelten Methoden auszuwerten, um die Verknüpfung der beiden Spektralsysteme zu charakterisieren, wenn auch die Übertragung der entsprechenden Begriffe aus der Korrelationstheorie manchmal etwas gezwungen erscheinen mag.

Wir möchten die Übertragung dieser statistischen Verfahren auf Spektralstreutafeln hier im Zusammenhange geben – ohne jedoch die entsprechenden Ableitungen zu bringen, die in den gewöhnlichen Lehrbüchern über Statistik leicht nachgelesen werden können – einerseits, um sie bei den folgenden Überlegungen leichter zur Hand zu haben, dann aber auch, um den Unterschied zwischen den Spektralstreutafeln und den gewöhnlichen in der Statistik vorkommenden Aufgaben klarer herausstellen zu können. Dabei passen wir die Bezeichnungen, so weit es dienlich ist, der vorliegenden Aufgabe an.

Zur Vorbereitung der rechnerischen Auswertung werden den Spektralklassen zunächst entsprechende Zahlen zugeordnet, die sich in ihrer Ordnung enge an die Ordnung der Spektralfolge anschliessen. Unter der Voraussetzung, dass die Spektralintervalle annähernd gleich sind, setzen wir:

$$S_i^{(x)} = i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ und} \quad (4)$$

$$S_k^{(y)} = k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Auch Zwischenwerte werden zugelassen, die dann Spektralklassen bezeichnen, die in entsprechender Weise als „zwischen“ den andern liegend aufgefasst werden.

Dann verstehen wir unter der mittleren Spektralklasse $\bar{S}^{(x)}$ des Spektralsystems $S^{(x)}$ den Ausdruck

$$\bar{S}^{(x)} = \frac{1}{N} \sum_i A_i^{(x)} S_i^{(x)} = \frac{1}{N} \sum_i A_i^{(x)} i, \quad (6)$$

und unter der mittleren Spektralklasse $\bar{S}^{(y)}$ im Spektralsystem $S^{(y)}$ den entsprechenden Ausdruck

$$\bar{S}^{(y)} = \frac{1}{N} \sum_k A_k^{(y)} S_k^{(y)} = \frac{1}{N} \sum_k A_k^{(y)} k. \quad (7)$$

Die quadratischen Streuungen der Spektralklassen um diese Mittelwerte bezeichnen wir beziehungsweise mit $^{(x)}\sigma$ und $^{(y)}\sigma$ und erhalten für ihre Quadrate die Ausdrücke:

$$^{(x)}\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_i A_i^{(x)} (i - \bar{S}^{(x)})^2 \text{ und} \quad (8)$$

$$^{(y)}\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_k A_k^{(y)} (k - \bar{S}^{(y)})^2. \quad (9)$$

Der Spektralklasse $S_i^{(x)}$ entspricht im System $S^{(y)}$ nicht ohne weiteres die Klasse $S_i^{(y)}$, sondern eine mittlere Klasse $\bar{S}_i^{(y)}$ (nicht zu verwechseln mit der mittleren *Gesamtklasse* des Systems $S^{(y)}$ der Gleichung (7): $\bar{S}^{(y)}$!), die definiert wird durch die Gleichung

$$\bar{S}_i^{(y)} = \frac{1}{A_i^{(x)}} \sum_k a_{ik} S_k^{(y)} = \frac{1}{A_i^{(x)}} \sum_k a_{ik} k. \quad (10)$$

Ähnlich entspricht der Spektralklasse $S_k^{(y)}$ im System $S^{(x)}$ die mittlere Klasse

$$\bar{S}_k^{(x)} = \frac{1}{A_k^{(y)}} \sum_i a_{ik} S_i^{(x)} = \frac{1}{A_k^{(y)}} \sum_i a_{ik} i. \quad (11)$$

Als Mass der Abweichungen von diesen Mittelwerten verwendet man die mittleren quadratischen Streuungen $^{(y)}\sigma_i$ und $^{(x)}\sigma_k$, deren Quadrate gegeben sind durch die Ausdrücke (12) und (13):

$$^{(y)}\sigma_i^2 = \frac{1}{A_i^{(x)}} \sum_k a_{ik} (k - \bar{S}_i^{(y)})^2 \text{ und} \quad (12)$$

$$^{(x)}\sigma_k^2 = \frac{1}{A_k^{(y)}} \sum_i a_{ik} (i - \bar{S}_k^{(x)})^2. \quad (13)$$

Die Wertepaare $(S_i^{(x)}, \bar{S}_i^{(y)})$ und $(S_k^{(y)}, \bar{S}_k^{(x)})$ legen die beiden Regressionskurven fest, die die mathematischen Erwartungen des Spektrums in einem System darstellen als die Funktion des Spektrums im andern Spektralsystem. Unter Ersatz der unteren Indizes i durch x bzw. k durch y , um die kontinuierliche Variabilität anzudeuten, ergeben sich dann die zwei Regressionsgleichungen

$$\bar{S}_y^{(y)} = \Phi(S_x^{(x)}) \text{ und} \quad (14)$$

$$\bar{S}_x^{(x)} = \Psi(S_y^{(y)}). \quad (15)$$

Diese Regressionsgleichungen lassen sich ausdrücken mit höheren Momenten, die aus der Streutafel gewonnen werden können. Doch möchten wir hierfür auf die einschlägigen Kapitel in den statistischen Traktaten hinweisen⁽⁵⁾. Für den linearen Ansatz ergeben sich die Gleichungen der beiden Regressionsgeraden

$$\bar{S}_y^{(y)} = \bar{S}^{(y)} + \frac{{}^{(y)}\sigma}{{}^{(x)}\sigma} r (S_x^{(x)} - \bar{S}^{(x)}) \quad \text{und} \quad (16)$$

$$\bar{S}_x^{(x)} = \bar{S}^{(x)} + \frac{{}^{(x)}\sigma}{{}^{(y)}\sigma} r (S_y^{(y)} - \bar{S}^{(y)}) . \quad (17)$$

Der in diesen Gleichungen auftretende Faktor r ist der Korrelationskoeffizient, der durch die Gleichung definiert wird

$$r = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i,h} a_{ik} (i - \bar{S}^{(x)}) (k - \bar{S}^{(y)})}{{}^{(x)}\sigma \cdot {}^{(y)}\sigma} . \quad (18)$$

Bei linearen Regressionen kann das Quadrat von r als Mass für die Straffheit der Verknüpfung der korrelierten Veränderlichen verwendet werden: r^2 wird Null, wenn die Merkmale nicht miteinander korreliert sind, und gleich Eins bei funktionaler und nicht durch Streuungen gestörter Verknüpfung.

3. Sonderstellung der Spektralstreutafel

Bei den gewöhnlichen Aufgaben der Statistik handelt es sich meist um Veränderliche, deren Werte in sich, vor jeder Beobachtung, statistischen Schwankungen unterliegen. Mit der Aufstellung der Regressionsgleichungen (14) und (15), die die mathematische Erwartung der einen Variablen als Funktion der andern darstellen, und mit den Angaben der mittleren Streuungen (12) und (13) wird so viel an Information über die Korrelation der beiden Variablen geboten, als man billigerweise verlangen kann.

Nun sind die bei den Spektralstreutafeln auftretenden Veränderlichen, die Spektralklassen, an und für sich funktionell miteinander verbunden: sei es nun, dass die beiden zum Vergleich stehenden Spektralsysteme identisch sind, sei es, dass zwischen ihnen gewisse „systematische“ Abweichungen bestehen. Die Streuungen, die zur Aufstellung der Tafeln

führen, sind in erster Linie bedingt durch die statistischen Schwankungen der Beobachtungen, der eigentlichen Beobachtungsfehler, werden dann aber noch überlagert – falls es sich nicht um völlig identische Systeme handelt – von den Einwirkungen der systematischen Abweichungen der beiden Systeme. Nach Aufstellung der Regressionen wird man deshalb versuchen, die beiden Faktoren zu trennen und zu dieser funktionalen Beziehung zwischen den beiden Veränderlichen vorzudringen, also zu einer Gleichung von der Gestalt

$$S_y^{(y)} = f(S_x^{(x)}) . \quad (20)$$

Es ist dies die Funktion, die die beiden Veränderlichen untereinander verknüpft und die reinen systematischen Beziehungen zwischen ihnen darstellt, wenn von den statistischen Schwankungen der Beobachtungsfehler abgesehen wird. Wir nennen sie in Anlehnung an STRÖMBERGS ⁽¹⁰⁾ Terminologie die *neutrale* oder *impartielle* Funktion.

Im Falle eines *linearen* Ansatzes liegt nach STRÖMBERG ⁽¹⁰⁾ (Vgl. auch SEARES ⁽⁷⁾) die neutrale Gerade so zwischen den beiden Regressionsgeraden (16) und (17), dass sie durch ihren Schnittpunkt geht und als Steigung das geometrische Mittel aus den Steigungen der beiden Regressionsgeraden besitzt:

$$S_y^{(y)} - \bar{S}^{(y)} = \frac{{}^{(y)}\sigma}{{}^{(x)}\sigma} (S_x^{(x)} - \bar{S}^{(x)}) . \quad (21)$$

Für *nichtlineare* Regressionen lässt sich diese Vorschrift vielleicht verallgemeinern: die neutrale Kurve liegt zwischen den beiden Regressionen (und geht durch ihre Schnittpunkte) und ihr Differentialquotient ist das geometrische Mittel aus den Differentialquotienten der beiden Regressionen (14) und (15), also

$$\frac{d S_y^{(y)}}{d S_x^{(x)}} = \sqrt{\frac{d \Phi(S_x^{(x)})}{d S_x^{(x)}} \cdot \frac{d S_y^{(y)}}{d \Psi(S_y^{(y)})}} , \quad (22)$$

woraus sich durch Integration die eigentliche funktionale Beziehung zwischen den Variablen finden lässt zu:

$$S_y^{(y)} = \int d S_y^{(y)} = \int \sqrt{\frac{d \Phi}{d S_x^{(x)}} \cdot \frac{d S_y^{(y)}}{d \Psi}} d S_x^{(x)} . \quad (23)$$

Gewöhnlich verzichtet man allerdings auf die Darstellung der Regressionen durch Gleichungen höheren Grades und begnügt sich mit einer graphischen Auswertung, wobei man durch die Punkte $(S_i^{(x)}, \bar{S}_i^{(y)})$ bzw. $(\bar{S}_h^{(y)}, \bar{S}_h^{(x)})$ möglichst glatte Kurven zieht und die neutrale Kurve dann „irgendwie halbwegs“ zwischen die beiden Regressionskurven legt.

Erst diese neutrale Kurve (20) stellt die eigentliche Verknüpfung der beiden Spektralsysteme miteinander dar und erlaubt den Übergang von einer Klasse des einen Systems zu der ihr *äquivalenten* Klasse des anderen Spektralsystems und umgekehrt.

Eine solche neutrale Regression hat natürlich nur dort einen unmittelbaren Sinn, wo es sich um wirklich funktional verknüpfte Veränderliche handelt, deren eigentliche funktionale Beziehung wegen der durch die Beobachtungsfehler hervorgerufenen Streuungen aus den Beobachtungen nicht unmittelbar abgelesen werden kann. Analoge Verhältnisse werden überall dort auftreten, wo Beobachtungen nach zwei verschiedenen Systemen, oder auch nur Beobachtungen mit den wahren Werten in Streutafeln miteinander verglichen werden. Hat man es dagegen mit Veränderlichen zu tun, die ihrer Natur nach nicht streng funktional miteinander verbunden sondern nur mehr oder weniger straff im Bereich gewisser statistischer Schwankungen korreliert sind, dann hat eine solche „neutrale“ Regression nur einen hypothetischen Charakter.

Dieser Umstand bedingt eine Eigenheit der Beobachtungsstreutafeln (wie wir die Spektralstreutafeln und die ihnen verwandten Tafeln zusammenfassend nennen möchten), durch die sie sich von den gewöhnlich bei statistischen Problemen auftretenden Korrelationstafeln *wesentlich* unterscheiden: Beobachtungsstreutafeln können zu derselben funktionalen Verknüpfung zweier Beobachtungssysteme führen und doch dabei ganz verschiedene relative Häufigkeiten der Klassen aufweisen; für eine ganz bestimmte Korrelation zwischen zwei korrelierten Systemen von Veränderlichen hingegen ist auch eine ganz bestimmte Häufigkeitsverteilung der Klassen gegeben.

Es ist zur Genüge bekannt, dass Beobachtungen an Material von verschiedenster Besetzung der Klassen vorgenommen werden und dann zu Streutafeln führen, aus denen dieselben funktionalen Beziehungen zwischen den beiden Beobachtungssystemen sich ergeben müssen. Zur Aufstellung der richtigen korrelativen Beziehungen hingegen wird immer ausdrücklich vorgeschrieben, dass die verwendete Gruppe der Individuen „repräsentativ“ ist für die Gesamtmenge, die sie vertreten, womit man

stillschweigend meint, dass die relative Verteilung der Klassenhäufigkeiten bei der Auswahl beibehalten wurde. Ist das nicht der Fall, so spricht man von „selektiv“ verfälschtem Material, aus dem die richtigen Beziehungen nicht gewonnen werden können.

Dieses unterschiedliche Verhalten erklärt sich zwanglos aus den Forderungen, die an die betreffenden Streutafeln gestellt werden, und den mathematischen Beziehungen, die diesen Anforderungen zugrundeliegen.

Damit eine neue Streutafel (b_{ik}) dieselbe korrelativen Charakteristiken wiedergibt wie eine vorgegebene Tafel (a_{ik}), ist erforderlich, dass sie wenigstens zu denselben Regressionen und zu denselben mittleren Streuungen um diese mittleren Werte der Regressionen führt. Es muss also insbesondere für die ausgezeichneten Punkte der Regressionskurven gelten:

$$\bar{S}_i^{(y)} = \frac{I}{B_i^{(x)}} \sum_k b_{ik} k = \frac{I}{A_i^{(x)}} \sum_k a_{ik} k, \quad (24)$$

$$\bar{S}_k^{(x)} = \frac{I}{B_k^{(y)}} \sum_i b_{ik} i = \frac{I}{A_k^{(y)}} \sum_i a_{ik} i; \quad (25)$$

$${}^{(y)}\sigma_i^2 = \frac{I}{B_i^{(x)}} \sum_k b_{ik} (k - \bar{S}_i^{(y)})^2 = \frac{I}{A_i^{(x)}} \sum_k a_{ik} (k - \bar{S}_i^{(y)})^2, \quad (26)$$

$${}^{(x)}\sigma_k^2 = \frac{I}{B_k^{(y)}} \sum_i b_{ik} (i - \bar{S}_k^{(x)})^2 = \frac{I}{A_k^{(y)}} \sum_i a_{ik} (i - \bar{S}_k^{(x)})^2. \quad (27)$$

Ist nun $b_{ik} = f_{ik} a_{ik}$, wobei die f_{ik} zunächst einmal noch ganz unbestimmte Reduktionsfaktoren sein mögen, und ersetzen wir die Klassenhäufigkeiten durch ihre Summen aus den Teilfrequenzen nach den Gleichungen (1) und (2), dann müssen durch die f_{ik} die folgenden Gleichungssysteme simultan erfüllt sein:

$$\frac{\sum_k f_{ik} a_{ik} k}{\sum_k f_{ik} a_{ik}} = \frac{\sum_k a_{ik} k}{\sum_k a_{ik}} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (24a)$$

$$\frac{\sum_i f_{ik} a_{ik} i}{\sum_i f_{ik} a_{ik}} = \frac{\sum_i a_{ik} i}{\sum_i a_{ik}} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (25a)$$

$$\frac{\sum_k f_{ik} a_{ik} (k - \bar{S}_i^{(y)})^2}{\sum_k f_{ik} a_{ik}} = \frac{\sum_k a_{ik} (k - \bar{S}_i^{(y)})^2}{\sum_k a_{ik}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (26a)$$

$$\frac{\sum_i f_{ik} a_{ik} (i - \bar{S}_k^{(x)})^2}{\sum_i f_{ik} a_{ik}} = \frac{\sum_i a_{ik} (i - \bar{S}_k^{(x)})^2}{\sum_i a_{ik}} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (27a)$$

Wie ersichtlich, sind die linken Seiten der Gleichungssysteme (24a) bis (27a) mit den rechten Seiten völlig identisch, bis auf die unter den Summenzeichen vorkommenden Reduktionsfaktoren f_{ik} , die in den Zählern verknüpft sind mit dem laufenden Termen k , bzw. i . Die simultane Geltung der Gleichungen (24a) und (26a) verlangt

$$f_{ik} = c_i^{(x)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (28)$$

die simultane Geltung der Gleichungen (25a) und (27a)

$$f_{ik} = c_k^{(y)} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (29)$$

und schliesslich die simultane Geltung aller vier Gleichungen

$$f_{ik} = c_i^{(x)} = c_k^{(y)} = c, \quad (30)$$

also eine einzige Konstante. Es ist demnach

$$b_{ik} = c a_{ik}$$

$$B_i^{(x)} = c A_i^{(x)} \text{ und}$$

$$B_k^{(y)} = c A_k^{(y)}.$$

Mit andern Worten:

Streutafeln, die dieselben korrelativen Charakteristiken zeigen, können sich höchstens durch einen konstanten Faktor unterscheiden, und mit einer bestimmten korrelativen Verknüpfung ist notwendig auch eine bestimmte relative Verteilung der Klassenhäufigkeiten gegeben.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn von der neuen Streutafel (b_{ik}) nur verlangt wird, dass sie wie (a_{ik}) dieselbe funktionale Beziehung wiedergibt. Da in die Differentialgleichung für die funktionale Beziehung (23)

nur das Verhältnis der Differentialquotienten der beiden Regressionen $d\Phi_x/d\Psi_y$ eingeht, kann sie erfüllt werden von jedem System von Regressionsgleichungen, für die

$$\bar{S}_y^{(y)} = a + c \Phi(S_x^{(x)}) \text{ und} \quad (31)$$

$$\bar{S}_x^{(x)} = b + c \Psi(S_y^{(y)}) \quad (32)$$

ist. Dabei sind a , b und c beliebige Konstante, die entweder wie a und b , bei der Bildung der Differentialquotienten der einzelnen Regressionen, oder, wie c , bei der Aufstellung des Differentialquotienten der funktionalen Beziehung (22) herausfallen. Wie weit a und b voneinander unabhängig oder abhängig sind, möchten wir hier nicht untersuchen. Es genügen ja schon die durch c bewirkten Unterschiede der Regressionsgleichungen, um eine relative Änderung der Klassenhäufigkeiten zu bewirken. Denn Klassenhäufigkeiten, die sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, müssen nach dem Vorhergehenden auf die gleichen Regressionen führen.

Beobachtungsstreutafeln können also unter gewissen Bedingungen verschiedene Häufigkeitsverteilungen der Klassen aufweisen und doch die gleichen funktionalen Beziehungen zwischen zwei Beobachtungssystemen darstellen. Damit wir es aber mit *denselben* Beobachtungssystemen zu tun haben, genügt es nicht, dass sie dieselben funktionalen Beziehungen haben, sie müssen auch übereinstimmen in der Eigenart der Streuung der Beobachtungen. Dass zwei verschiedene Beobachtungsstreutafeln verschiedene Häufigkeitsverteilungen ihrer Klassen besitzen können und ausser der funktionalen Beziehung auch noch die Eigenart der Streuungen der Beobachtungen der beiden Beobachtungssysteme in gleicher Weise verkörpern, ist in den bisherigen mathematischen Überlegungen nicht enthalten. Doch lässt sich das in einfacher Weise zeigen, sobald man die in die Streutafeln eingehenden Faktoren analytisch darstellt, was im folgenden Abschnitt geschehen soll.

Streutafeln, denen dieselben Beobachtungssysteme zugrunde liegen mit den ihnen eigenen Streuungen der Beobachtungen und der besonderen funktionalen Verknüpfung, nennen wir in der Folge „isogene“ Streutafeln.

II. Analytische Erfassung der einer Spektralstreutafel zugrunde liegenden Faktoren

1. Allgemeine Betrachtung der in eine Spektralstreutafel eingehenden Faktoren

Eine Spektralstreutafel ist, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, das Ergebnis des Zusammenwirkens verschiedener Faktoren. Zunächst handelt es sich um ein konstantes Moment: die Grundhaltung der Beobachter, die die Eigenart der Spektralsysteme eindeutig festlegt (und die im Verlaufe einer spektralen Untersuchung als konstant angenommen wird). Diese Grundhaltung umfasst 1. die Eigenart der *Auffassung* der Spektralklassen. Diese bedingt bei einem Vergleich die funktionale Beziehung zwischen den beiden Spektralsystemen und wird sich unter Umständen als eine systematische Abweichung zwischen den beiden Systemen offenbaren. Die Grundhaltung eines Beobachters wird dann 2. noch bestimmt durch die ihm eigenen *Beobachtungsfehler* oder Streuungen seiner Beobachtungen.

Dieses unveränderliche Element der Grundhaltung der beiden Beobachter wird in einer Streutafel nun noch überlagert von dem Einfluss der zufälligen *Häufigkeiten* der Spektralklassen in dem zum Vergleich herangezogenen Material.

Unter Umständen kann dann noch ein weiterer Einfluss hinzukommen, wenn das verwendete Material nicht repräsentativ ist. Dann ergibt sich ein Auslesefehler, auf den wir weiter unten S. 155 zurückkommen werden. Wir setzen also zunächst voraus, dass das Material repräsentativ ist.

Der *Beobachtungsfehler*, um davon zuerst zu sprechen, hängt zusammen mit der *Trennschärfe* der Spektralklassen. Zeigen die Spektralklassen für einen Beobachter keine Übergänge, dann wird ein solcher Fehler nicht vorliegen. Praktisch bilden aber die Kriterien, nach denen die Spektralklassen unterschieden werden, eine Folge von allmählich sich ändernden Eigentümlichkeiten der Spektren, und es gibt gewöhnlich zwischen benachbarten Klassen ein Übergangsgebiet, wo es dem Beobachter oft nicht

ganz klar wird, welcher Klasse er ein Objekt zuweisen soll. Bei verschiedenen Beobachtungsreihen wird er es vielleicht verschiedenen Klassen zuordnen.

Die Grösse dieses Fehlers ist nun einzig abhängig von der grösseren oder geringeren Unschärfe beim Übergang von einer Klasse zur anderen, sei diese Unschärfe nun mehr objektiv bedingt durch die Eigenart der Kriterien oder der Spektralbilder, oder mehr subjektiv zufolge der dem betreffenden Beobachter eigenen Art und Weise der Auswahl und Anwendung der Kriterien. Schlecht definierte Spektren und solche von unbequemer Dispersion werden grössere Beobachtungsfehler in diesem Sinne erwarten lassen als gut definierte und solche mit der richtigen Dispersion.

Im allgemeinen wird jeder Beobachter seine ihm eigenen zufälligen Beobachtungsfehler haben, die für den Verlauf einer Untersuchung gewöhnlich als *konstant* angesehen werden können. Sie können aber verschieden sein für die verschiedenen Klassen und unter Umständen auch für verschiedene Helligkeiten oder verschiedene Stellen der photographischen Platte, je nachdem diese Umstände die Definition der Spektren und damit ihre Trennschärfe beeinflussen.

Das zweite Element, das die Grundhaltung eines Beobachters ausmacht, ist die ihm eigene Auffassung der *Klassengrenzen*, die bei einem Vergleich mit einem anderem Spektralsystem als die funktionale Beziehung zwischen den beiden Systemen erscheint und sich als systematische Abweichung äussern kann, wenn die besondere Auswahl und Anwendung der Spektralkriterien, ja selbst die Eigenart der Spektralbilder bewirken, dass jeder Beobachter besondere, ihm eigentümliche Klassengrenzen besitzt, sodass sich die entsprechenden Klassen bei einem Vergleich nicht decken.

Im Falle, dass ein Beobachter an einem und demselben Material zwei verschiedene Beobachtungsreihen ausführt und dabei bezüglich der Streuungen seiner Beobachtungen konstant bleibt, werden natürlich bei einem solchen Vergleich keine systematischen Fehler auftreten: die funktionale Beziehung wird zur Identität.

Beobachtungsfehler und funktionale Beziehung sind nun jene Grössen, die die Verknüpfung zweier Spektralsysteme vollkommen und eindeutig bestimmen, die aber in einer Streutafel nicht ohne weiteres rein zum Ausdruck kommen, da sie dann noch überlagert werden von den Einfluss der besonderen Verteilung der Häufigkeiten der Klasse in dem Material, das zur Aufstellung der Streutafel verwendet wird.

Der *Einfluss der Klassenhäufigkeiten* auf die Elemente einer Streutafel lässt sich qualitativ leicht erkennen. Da a_{ik} die Häufigkeit des Zusammenstreffens einer Schätzung $S_i^{(x)}$ mit einer Schätzung $S_k^{(y)}$ bedeutet, so ist klar, dass dieser Wert in irgend einer Weise auch abhängig ist von den Werten für die Häufigkeiten $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(y)}$ dieser Spektralklassen $S_i^{(x)}$ und $S_k^{(y)}$: je stärker diese Klassen besetzt sind, desto grösser müssen die a_{ik} werden und umgekehrt. Nun sind die Häufigkeiten $A_k^{(y)}$ des Systems $S^{(y)}$ nicht ohne weiteres identisch mit den Häufigkeiten $A_k^{(x)}$ der entsprechenden Klassen des Systems $S^{(x)}$, wenn es sich nicht gerade um identische Spektralsysteme handelt. Doch muss auch zwischen den entsprechenden Klassen der zwei Systeme vermöge der funktionalen Beziehung eine Abhängigkeit in dem Sinne bestehen, dass die Häufigkeiten einander entsprechender Klassen gleichzeitig zu- und abnehmen werden. Es lässt sich demnach vermuten, dass die a_{ik} in irgend einer Weise von den Klassenhäufigkeiten $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(x)}$ desselben Systems $S^{(x)}$ abhängig sind, dass sich der Einfluss der Klassenhäufigkeit $A_k^{(x)}$ der Klasse $S_k^{(x)}$ nicht auf die Frequenzkomponenten der betreffenden Klasse $S_k^{(x)}$ beschränkt, sondern auch noch auf die entsprechende Teilfrequenz a_{ik} der Nachbarklasse $S_i^{(x)}$ übergreift.

Die unmittelbare Folge eines solchen Einflusses ist nun, dass sich die relativen Verhältnisse der zu einer Spektralklasse gehörigen Teilfrequenzen mit der zufälligen Verteilung der Häufigkeiten der Nachbarklassen verändern. Will man demnach von einer gegebenen Streutafel aus eine ihr isogene bilden, also eine mit derselben funktionalen Verknüpfung der beiden Spektralsysteme und mit denselben den betreffenden Systemen eigenen Streuungen der Beobachtungen, aber mit einer anderen relativen Verteilung der Klassenhäufigkeiten, so muss dieser Einfluss der Klassenhäufigkeiten auf die einzelnen Teilfrequenzen auch quantitativ richtig in Rechnung gezogen werden.

2. Mathematische Formulierung der in eine Spektralstreutafel eingehenden Faktoren

Die in eine Spektralstreutafel eingehenden Faktoren wurden im vorhergehenden Abschnitte mehr anschaulich besprochen; hier sollen sie nun analytisch so definiert werden, dass sie für die theoretische Konstruktion von Streutafeln dienen können. Damit wird dann auch ihr spezifischer

Einfluss auf die Elemente einer Streutafel besser ersichtlich, und die Beziehungen zwischen isogenen Streutafeln lassen sich klarer erfassen.

Die Kriterien, nach denen die einzelnen Spektralklassen unterschieden werden, bilden im allgemeinen eine *Folge von allmählich sich ändernden Eigenschaften*. Danach lässt sich nun jedes der zur spektralen Untersuchung vorliegenden Objekte einer Stelle s in dieser Folge zuweisen und mit dem Spektraltyp S_s belegen. Die Gesamtheit der s nennen wir die Spektralfolge. Es bedeutet nun keine grosse Ungenauigkeit, wenn wir für die weiteren Betrachtungen diese Spektralfolge als kontinuierlich ansehen wollen.

Die Aufstellung von *diskreten* Spektralklassen S_i besteht nun darin, dass die Spektralfolge s in verschiedene Intervalle Δs_i aufgeteilt wird, und jedes in dieses Intervall fallende Objekt erhält den Klassennamen S_i zugewiesen. Die ursprüngliche Auswahl der Klassen ist ganz willkürlich; es ist belanglos, ob die einzelnen Intervalle Δs_i gleich gross sind, ja es ist nicht einmal nötig, dass sie in *natürlicher* Weise aufeinander folgen. Praktisch scheint allerdings die Wahl der Schöpfer des Harvardsystems glücklich gewesen zu sein: nach einigen Umstellungen ergab sich ein System von ziemlich gleich grossen Intervallen und in einer gewissen natürlichen Ordnung nach der Temperatur.

Die Anzahl der Objekte in einem gegebenen Material, denen nach ihren Spektralkriterien das Spektrum S_s zukommt, sei $f(s)$. Die Funktion $f(s)$ ist eine Häufigkeitsfunktion, die wir zum Unterschied von der Funktion der Häufigkeiten der Spektralklassen S_i als *Besetzungsfunktion* bezeichnen, da sie die Besetzungszahlen in dem betreffenden Intervall ds angibt. Die Zahl der Objekte in ds ist dann

$$f(s) ds,$$

und die Gesamtzahl N der zur Untersuchung stehenden Objekte ergibt sich zu

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds, \quad (33)$$

wobei das Integral über den gesamten Definitionsbereich der Spektralfolge s zu erstrecken ist.

Der objektive Sachverhalt wird bei den Schätzungen der Spektren wohl selten erscheinen. Die einzelnen Objekte lassen sich eben nur mit

einer mehr oder weniger grossen Wahrscheinlichkeit irgend einer der verschiedenen Spektralklassen S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) zuordnen, je nach der Qualität ihrer objektiven Kriterien und der Art der Auffassung dieser Kriterien durch den Beobachter. Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit der Zuordnung eines Objektes in s zur Spektralklasse S_i mit $w_i(s)$ und nennen diese Funktion die *Schätzungsfunktion* des Beobachters für die Spektralklasse S_i . Für alle Stellen s , wo der Beobachter mit Sicherheit S_i schätzt, ist $w_i(s) = 1$, für die Stellen, wo er gewiss nicht S_i schätzt, ist $w_i(s) = 0$.

Handelt es sich um Folgen von Klassen, die keinerlei „Übergänge“ zeigen, so sind die entsprechenden Schätzungsfunktionen $w_i(s) = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) für den gesamten Bereich des Intervalls der Klasse S_i und $w_i(s) = 0$ für den Bereich der übrigen Klassen S_k ($k \neq i$). Für diesen Fall werden die Beobachtungsfehler überall gleich Null. Ein solcher Fall wäre z.B. verwirklicht für eine Menge von verschiedenfarbigen Objekten in den Farben der Hauptfarben, die von einer nicht farbenblinden Versuchsperson nach den Hauptfarben sortiert werden sollen.

Bei Folgen, die wie die Spektralfolge von einer Klasse zur nächsten allmähliche Übergänge zeigen, wird die Schätzungsfunktion $w_i(s)$ von der Sicherheitsstelle an nach beiden Seiten hin *monoton* von 1 nach 0 abfallen, und der Null um so näher kommen, je weiter s abliegt von dieser Stelle, an der mit Sicherheit S_i geschätzt wird. Es besteht dann in einem solchen Übergangsgebiet auch eine Wahrscheinlichkeit $w_k(s)$ der Schätzung der Nachbarklasse S_k ($k = i \pm 1$). Die Schätzungsfunktion $w_k(s)$ wird dann ihrerseits zu Eins an der Stelle an der mit Sicherheit S_k , und zu Null, wo mit Sicherheit nicht mehr S_k , geschätzt wird.

Im allgemeinen werden in solchen Übergangsgebieten nur zwei Möglichkeiten bestehen, sodass die Summe der beiden Schätzungsfunktionen

$$w_i(s) + w_k(s) = 1 \quad (k = i \pm 1) \quad (34)$$

ist. Es ist allerdings nicht auszuschliessen, besonders bei sehr schlecht definierten oder fein unterteilten Spektralklassen, dass noch eine dritte oder vierte Möglichkeit einer Schätzung besteht; in diesem Falle ist dann die *Summe* aller an der betreffenden Stelle geltenden Schätzungsfunktionen gleich Eins zu setzen. Doch sollen diese Fälle hier weiter nicht berücksichtigt werden.

Der Satz der Schätzungsfunktionen $w_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ist nun charakteristisch für einen Beobachter und bedingt die spezifische Eigenart seines Spektralsystems, eben das, was wir oben etwas anschaulicher als die *Grundhaltung des Beobachters* bezeichnet haben. Die verschiedenen $w_i(s)$ brauchen nicht alle die gleiche analytische Form zu haben. Für verschiedene Beobachter wird es verschiedene Sätze geben, die sich unterscheiden nicht nur bezüglich der analytischen Form der einzelnen Schätzungsfunktionen, sondern auch bezüglich ihrer Lage und Definition in der Spektralfolge s . Auch die Anzahl der Spektraltypen kann für die einzelnen Systeme verschieden sein, doch werden hier, wie gesagt, nur Vergleiche von Systemen behandelt, die die gleiche Zahl und Benennung der Spektralklassen haben. Für zwei verschiedene Spektralsysteme $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$ haben wir also zwei verschiedene Sätze von Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_k^{(y)}(s)$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) anzusetzen.

Zusammenfassend ergeben sich also für den Aufbau einer Spektralstreutafel folgende Grundfunktionen:

s ist die Funktion der *Spektralfolge* und bezeichnet die Ordnung der Objekte nach den objektiven Spektralkriterien.

$f(s)$ ist die *Besetzungsfunktion* und bezeichnet die Häufigkeit der Objekte an der Stelle s .

$w_i^{(x)}(s)$ ist die *Schätzungsfunktion* für die Spektralklasse $S_i^{(x)}$ im System $S^{(x)}$ und bedeutet die Wahrscheinlichkeit, mit der im System $S^{(x)}$ an der Stelle s ein Objekt als $S_i^{(x)}$ geschätzt wird.

$w_i^{(y)}(s)$ ist die entsprechende Schätzungsfunktion in System $S^{(y)}$.

Mit Hilfe dieser Grundfunktionen ist es nun möglich, den Elementen einer Spektralstreutafel eine analytische Form zu geben.

Die Zahl der Objekte im Intervall ds ist $f(s) ds$. Damit ergibt sich als Gesamtzahl der Objekte

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) ds.$$

Da die Zahl der Objekte in ds gleich $f(s) ds$ ist und die Wahrscheinlichkeit, dass darin ein Objekt als $S_i^{(x)}$ geschätzt wird, gleich $w_i^{(x)}(s)$ ist, ist die Zahl der in ds als $S_i^{(x)}$ geschätzten Objekte gleich $f(s) w_i^{(x)}(s) ds$.

Damit ergibt sich die Gesamtzahl $A_i^{(x)}$ der als $S_i^{(x)}$ geschätzten Objekte zu

$$A_i^{(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) w_i^{(x)}(s) ds. \quad (35)$$

Ähnlich ist die Häufigkeit der Klasse $S_k^{(y)}$ gegeben durch:

$$A_k^{(y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) w_k^{(y)}(s) ds. \quad (36)$$

Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens einer Schätzung $S_i^{(x)}$ von der Wahrscheinlichkeit $w_i^{(x)}$ mit einer Schätzung $S_k^{(y)}$ von der Wahrscheinlichkeit $w_k^{(y)}$ ist gleich dem Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten $w_i^{(x)} w_k^{(y)}$. Demzufolge ist die Zahl der Objekte in ds , die gleichzeitig $S_i^{(x)}$ und $S_k^{(y)}$ geschätzt werden, gleich $f(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds$, und die Zahl aller Objekte a_{ik} , die gleichzeitig $S_i^{(x)}$ und $S_k^{(y)}$ geschätzt werden,

$$a_{ik} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds. \quad (37)$$

Damit sind alle in Spektralstreutafeln vorkommenden Grössen auf analytische Funktionen zurückgeführt, und es steht nichts im Wege, theoretische Streutafeln zu berechnen: wir brauchen nur den einzelnen Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_k^{(y)}(s)$, sowie der Besetzungsfunktion $f(s)$ bestimmte Werte zu geben, was im nächsten Abschnitt (S. 52ff.) erfolgen soll.

Es ist nun ohne weiteres einleuchtend, dass die Verknüpfung zweier Spektralsysteme über die ihnen eigenen Schätzungsfunktionen ganz unabhängig sein muss von der zufälligen Häufigkeitsverteilung der Spektren; sie können ja mit ganz beliebigen Besetzungsfunktionen kombiniert werden. Und umgekehrt: eine bestimmte Besetzungsfunktion kann mit verschiedenen Schätzungsfunktionen verbunden werden. Dies ist nun das, was in der Praxis ohne weiteres einleuchtend ist: Dieselben Spektralbeobachtungen können sich erstrecken auf Material verschiedenster Population der Spektralklassen, andererseits können am selben Material Beobachtungen nach den verschiedensten Systemen vorgenommen werden.

Die Streutafel nun, die die Verknüpfung zweier Spektralsysteme am reinsten zum Ausdruck bringt, ist offenbar jene, die nur aus den Integralen der Schätzungsfunktionen und ihrer Produkte besteht, wenn also die Besetzungsfunktion $f(s) = 1$ genommen wird.

Nun mögen noch einige Worte gesagt werden über einige dieser Ansätze, die vielleicht etwas gewagt erscheinen: die Annahme einer objektiven Spektralfolge s und einer von den Schätzungen unabhängigen, beliebigen Besetzungsfunktion $f(s)$.

Über die objektive Existenz einer bestimmten Spektralfolge kann man wohl verschiedener Ansicht sein. Die Aufstellung von Spektraltypen bleibt immer zunächst eine subjektive Angelegenheit der Beobachter. Aber sie gründet sich dann doch wieder auf objektive Gegebenheiten im Spektrum der einzelnen Objekte. Auch wenn jeder Stern ein ganz individuelles Spektrum besitzt, das schwerlich mit dem eines anderen *vollkommen* übereinstimmen wird, so lassen sich unter der grossen Mannigfaltigkeit der einzelnen Spektren doch wieder Ähnlichkeiten finden, die eben zur Aufstellung bestimmter Spektraltypen führten. Es gibt tatsächlich in den Sternspektren gewisse Linien und Liniengruppen, die für bestimmte Typen charakteristisch sind und deren absolute oder auch relative Intensitäten irgendwie einen allmählich verlaufenden Gang zeigen, sodass es möglich wird, die einzelnen Spektraltypen in eine gewisse geordnete Folge zu bringen. Dass die Spektralfolge, so wie sie im Harvardsystem vorliegt, noch dazu einen klaren Gang zeigt mit den Temperaturen der Sternatmosphären, war zur Zeit der Schöpfung des Systems nicht gerade beabsichtigt, hat dann aber später doch viel dazu beigetragen, das künstlich aufgestellte System als eine natürliche Folge von Spektraltypen zu empfehlen.

Wenn wir hier von einer Spektralfolge reden, so wollen wir *nur* diesen Befund damit zum Ausdruck bringen, und es kommt kein wesentlich neues Moment hinzu, wenn diese Spektralfolge für die Zwecke einer theoretischen Untersuchung auch als praktisch kontinuierlich angenommen wird.

Was nun die Besetzungsfunktion $f(s)$ angeht, so wird sie in Wirklichkeit wohl eine ganz bestimmte Form haben, die allerdings verschiedene Gestalt annehmen dürfte, je nach der Gegend, aus der das Material stammt. Es ist bekannt, dass die Verteilung der Spektraltypen eine andere ist in der Milchstrasse als an den galaktischen Polen, eine andere in Sternhaufen als bei freien Sternverteilungen. Auch die Beschränkung auf gewisse scheinbare Grössen oder bestimmte Gegenden der Himmelsphäre haben eine Änderung der relativen Verteilung der Spektren im Gefolge und damit auch der Besetzungsfunktion $f(s)$. Wenn aus der Tatsache einer solchen Veränderlichkeit nun die Berechtigung abgeleitet wird, jede beliebige Funktion als Besetzungsfunktion verwenden zu dür-

fen, so bedeutet das gewiss eine starke Extrapolation, auch wenn man noch einige naheliegende Einschränkungen machen wollte: z. B. dass die Funktion keine Sprünge aufweisen darf, dass sie nie negativ werden kann. Das eigentliche aber, worauf es hier ankommt, ist zu zeigen, dass die Besetzungsfunktion tatsächlich unabhängig ist von den durch die Schätzungsfunktionen definierten Spektralklassen, also von den Spektralsystemen. Denn dieser Umstand bedingt letztlich die oben S. 16ff. hervorgehobene Sonderstellung der Spektralstreutafeln und anderer verwandter Beobachtungstreutafeln gegenüber den gewöhnlichen Korrelationstabellen, wie sie aufgestellt werden zur Darstellung der Verknüpfung nur stochastisch mit einander verbundener Variablen.

3. Isogene Streutafeln

Die im Vorhergehenden gebotenen mathematischen Fassungen der in eine Spektralstreutafel eingehenden Faktoren gestattet nun eine neue, präzisere Fassung des Begriffes isogener Streutafeln und lässt auch sofort einige wichtige Beziehungen zwischen solchen Tafeln erkennen.

Wir haben oben S. 22 Streutafeln dann isogen genannt, wenn ihnen dieselben Beobachtungssysteme zugrundeliegen, auch wenn sie sich in den relativen Häufigkeiten der Klassen unterscheiden. Nun wird die Eigenart der Beobachtungssysteme eindeutig festgelegt durch das System der Schätzungsfunktionen $w_i^{(n)}(s)$ und $w_k^{(n)}(s)$, und die relativen Klassenhäufigkeiten werden mitbedingt durch die Besetzungsfunktion $f(s)$. So können wir Streutafeln dann isogene Streutafeln nennen, wenn ihnen die gleichen Sätze von Schätzungsfunktionen zugrundeliegen und sie sich nur unterscheiden durch ihre Besetzungsfunktionen.

Daraus ergeben sich nun unmittelbar die beiden Sätze:

I. *Zwei Streutafeln, die sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden, sind einander isogen.*

II. *Die Summe isogener Streutafeln ergibt wieder eine zu den Summanden isogene Streutafel.* Dabei wird unter Summe auch die Differenz einbegriffen, solange in der resultierenden Streutafel keine negativen Elemente auftreten.

Der erste Satz ist eigentlich schon oben bewiesen worden S. 19-21, wo gezeigt wurde, dass Streutafeln, die dieselben korrelativen Charakte-

ristiken aufweisen sollen, sich höchstens durch einen konstanten Faktor unterscheiden können. Unter Benützung der neuen Begriffe lässt sich dasselbe zeigen.

Ist (a_{ik}) die ursprüngliche Streutafel mit den Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_k^{(y)}(s)$ und der Besetzungsfunktion $f_a(s)$ und soll für die neue Streutafel (b_{ik}) gelten

$$b_{ik} = c a_{ik}, \quad (38)$$

dann ergibt sich unter Berücksichtigung von (37)

$$\begin{aligned} b_{ik} &= c \int f_a(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds = \\ &= \int c f_a(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds = \\ &= \int f_b(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds, \end{aligned} \quad (39)$$

wobei

$$f_b(s) = c f_a(s) \quad (40)$$

die neue Besetzungsfunktion ist.

Die neue Streutafel hat also mit der ursprünglichen die Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_k^{(y)}(s)$ gemeinsam und unterscheidet sich von ihr nur durch eine andere Besetzungsfunktion, die das Produkt der Konstanten c mit der ursprünglichen Besetzungsfunktion $f_a(s)$ ist. Beide Tafeln sind demnach nach den oben gegebenen Definitionen isogen.

Zum Beweise des zweiten Satzes setzen wir:

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}. \quad (41)$$

Nach Voraussetzung sind die Streutafeln (a_{ik}) und (b_{ik}) isogen, unterscheiden sich also nur durch ihre Besetzungsfunktionen, die beziehentlich $f_a(s)$ und $f_b(s)$ sein mögen. Es gilt dann

$$a_{ik} = \int f_a(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds \quad \text{und} \quad (42)$$

$$b_{ik} = \int f_b(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds. \quad (43)$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} c_{ik} &= \int f_a(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds + \int f_b(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds = \\ &= \int [f_a(s) + f_b(s)] w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds = \\ &= \int f_c(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds, \end{aligned} \quad (44)$$

wobei

$$f_c(s) = f_a(s) + f_b(s) \quad (45)$$

die Besetzungsfunktion der durch die Summierung gewonnenen neuen Streutafel ist. Die neue Tafel unterscheidet sich also von den ursprünglichen nur bezüglich der Besetzungsfunktion, ist also mit ihnen wieder isogen.

Mit Hilfe dieser beiden Sätze lassen sich aus vorliegenden Streutafeln neue ihnen isogene herstellen, für die man unter Umständen noch besondere Vorschriften geben kann, z. B. dass sie in einem System eine ganz bestimmte Häufigkeitsverteilung der Klassen aufweisen. Notwendig ist nur, dass genügend isogene und im mathematischen Sinne von einander unabhängige Streutafeln zur Verfügung stehen. Für diesen Fall nennen wir die isogenen Streutafeln $(a_{ik,q})$ ($q = 1, 2, \dots, n$) von einander unabhängig, wenn die Determinante aus der Matrix der Klassenhäufigkeiten $A_{i,q}^{(x)}$ nicht verschwindet. Die Beschränkung auf das Spektralsystem $S^{(x)}$ bedeutet keine Einschränkung, und die folgenden Überlegungen gelten in gleicher Weise für das System $S^{(y)}$ mit den Klassenhäufigkeiten $A_{k,q}^{(y)}$.

Für die Teilfrequenzen der gewünschten Streutafel setzen wir an:

$$a_{ik}^* = \sum_q z_q a_{ik,q} \quad (q = 1, 2, \dots, n), \quad (46)$$

wo die z_q näher zu bestimmende Grössen sind. Diese Streutafel ist offenbar mit den gegebenen $(a_{ik,q})$ isogen zufolge der obigen Sätze über die Multiplikation mit einer Konstanten und der Addition isogener Streutafeln.

Die Klassenfrequenzen ergeben sich zu

$$A_i^{(x)*} = \sum_k a_{ik}^* = A_{i0}^{(x)}. \quad (47)$$

Für die x_q haben wir die n Bestimmungsgleichungen:

$$A_{11}^{(x)} x_1 + A_{12}^{(x)} x_2 + \dots + A_{1,n}^{(x)} x_n = A_{10}^{(x)},$$

$$A_{21}^{(x)} x_1 + A_{22}^{(x)} x_2 + \dots + A_{2,n}^{(x)} x_n = A_{20}^{(x)}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_{n1}^{(x)} x_1 + A_{n2}^{(x)} x_2 + \dots + A_{nn}^{(x)} x_n = A_{n0}^{(x)}.$$

Die zu den vorgegebenen Klassenfrequenzen $A_i^{(x)*}$ im System $S^{(x)}$ äquivalenten Klassenfrequenzen im System $S^{(y)}$ sind gegeben durch die Gleichungen

$$A_k^{(y)*} = \sum_i a_{ik}^*. \quad (47a)$$

Unter den gemachten Voraussetzungen lässt sich also die gestellte Aufgabe strenge lösen, und es ist offenbar, dass unter diesen Umständen mit der Vorgabe einer bestimmten Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen in einem System auch die neue Besetzungsfunktion $f^*(s)$ *eindeutig* definiert ist, da

$$f^*(s) = \sum_q x_q f_q(s) \text{ sein muss.} \quad (48)$$

Die Lösungsmöglichkeiten sind nun allerdings noch dahin einzuschränken, dass Streutafeln mit Frequenzen

$$a_{ik}^* < 0$$

nicht zugelassen werden können, sodass unter Umständen eine bestimmte Aufgabe auch in diesem Sinne als unlösbar betrachtet werden müsste, wenn sie zu derartig ausgearteten Streutafeln führte.

III. Vorschlag eines Verfahrens zur Reduktion von Spektralstreutafeln

1. Die Aufgabe und ihre Eindeutigkeit

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten die Spektralstreutafeln und die ihnen zugrundeliegenden Elementarfunktionen im Hinblick auf die gestellte Aufgabe einer eingehenden Analyse unterworfen wurden, handelt es sich jetzt darum, diese Aufgabe mit den gewonnenen Begriffen und Definitionen näher zu präzisieren und zu einer Lösung vorzudringen.

Das Problem, dem sich der Stellarstatistiker in der Praxis gegenüber sieht, ist folgendes:

Es ist eine bestimmte Häufigkeitsverteilung von Spektren gegeben, die nach einem bestimmten Spektralsystem geschätzt wurden. Es wird gefragt nach der äquivalenten Verteilung in einem andern Spektralsystem. Die Beziehungen zwischen den beiden Spektralsystemen sind nur bekannt über eine bestimmte Spektralstreutafel, die man erhält durch einen Vergleich von Schätzungen, die nach beiden Systemen an einem bestimmten, genügend umfangreichen Material angestellt wurden.

Nach den im Vorausgehenden gebotenen Begriffen und Definitionen heisst das:

Gegeben ist eine bestimmte Streutafel mit den Elementen a_{ik} und den Klassenfrequenzen $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(y)}$ der Spektralklassen $S_i^{(x)}$ und $S_k^{(y)}$, die die Verknüpfung der beiden Spektralsysteme $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$ charakterisiert. Es wird nun eine neue Verteilung der Klassenfrequenzen z. B. $B_i^{(x)}$ im Spektralsystem $S^{(x)}$ vorgegeben, zu der die ihr äquivalenten Häufigkeiten $B_k^{(y)}$ im Spektralsystem $S^{(y)}$ zu suchen sind. Die Lösung ist offenbar eine mit der gegebenen Tafel (a_{ik}) isogene Streutafel (b_{ik}) , in der

$$\sum_k b_{ik} = B_i^{(x)}$$

sind und

$$\sum_i b_{ik} = B_k^{(y)}$$

die gesuchten zu $B_i^{(x)}$ äquivalenten Häufigkeiten im Spektralsystem $S^{(y)}$. Dabei sind die i und k gleich $1, 2, \dots, n$ zu nehmen, wenn die Zahl der benützten Spektralklassen n ist.

Lägen nun n unabhängige isogene Streutafeln $(a_{ik,q})$ ($q = 1, 2, \dots, n$) vor, dann ergibt sich nach den S. 33 gebotenen Ausführungen die Lösung ohne weiteres. Nun liegt aber nur eine *einzig*e Streutafel vor, die die Verknüpfung der beiden Spektralsysteme charakterisiert, und es ist die Frage, wie man mit ihr allein das Auslangen findet.

Es liegt nahe,

$$b_{ik} = f_{ik} a_{ik} \quad (49)$$

zu setzen und die Reduktionsfaktoren f_{ik} so zu bestimmen, dass die gewünschten Häufigkeiten $B_i^{(x)}$ erscheinen und die Tafel mit der früheren (a_{ik}) isogen bleibt.

Eine rein „proportionale“ oder, wie wir sie eingangs genannt haben, eine partial-proportionale Reduktion, bei der die Teilfrequenzen proportional zu den gewünschten Klassenfrequenzen reduziert werden, dass also

$$f_{ik} = c_i^{(x)} = B_i^{(x)} / A_i^{(x)} \quad (50)$$

gesetzt werden, führt zwar die gewünschten Häufigkeiten im System $S^{(x)}$ herbei, da dann

$$\sum_k b_{ik} = \sum_k B_i^{(x)} / A_i^{(x)} a_{ik} = B_i^{(x)} / A_i^{(x)} \sum_k a_{ik} = B_i^{(x)}$$

wird. Dabei wird nun auch, wie Gl. (28) zeigt, die Regression $\bar{S}_i^{(y)}$ erhalten, aber die andere Regression $\bar{S}_k^{(x)}$ wird sich ändern zu

$$\bar{S}_k^{(x)} = \frac{\sum_i B_i^{(x)} / A_i^{(x)} a_{ik} i}{\sum_i B_i^{(x)} / A_i^{(x)} a_{ik}} \quad (51)$$

Damit ändert sich aber auch sicher die funktionale Beziehung zwischen den beiden Systemen, die ja die zwischen den beiden individuellen Regressionen liegende mittlere Regression sein soll, und die nur erhalten bleiben kann, wenn entweder die beiden individuellen Regressionen *die-selben* bleiben, oder wenn diese sich *gleichzeitig* in entsprechender Weise ändern. Demnach ist die auf eine solche Weise reduzierte Streutafel mit der ursprünglichen nicht mehr isogen.

Die Unzulänglichkeit des partial-proportionalen Verfahrens für derartige Reduktionen kann noch unmittelbarer gezeigt werden. Denn gilt der Ansatz (50)

$$f_{ik} = c_i^{(x)} = B_i^{(x)} / A_i^{(x)}$$

für das System $S^{(x)}$, so muss im System $S^{(y)}$ ein ähnlicher Ansatz Geltung haben; denn es liegt kein Grund vor, das eine oder andere System in dieser Hinsicht auszuzeichnen. Setzen wir nun aber auch

$$f_{ik} = c_k^{(y)} = B_k^{(y)} / A_k^{(y)}, \quad (50a)$$

dann folgt sofort

$$f_{ik} = c_i^{(x)} = c_k^{(y)} = c$$

für alle i und k . Damit wäre es aber unmöglich, zu irgend einer Streutafel eine ihr isogene zu finden, die eine *verschiedene* relative Häufigkeitsverteilung aufweist, also gerade das, was die gestellte Aufgabe voraussetzt.

Die Lösung ist also auf diesem Wege nicht zu erreichen, und es muss ein Bildungsgesetz für die Reduktionsfaktoren gesucht werden, demzufolge die einzelnen Faktoren f_{ik} nicht nur abhängig sind von dem Verhalten der Spektralklassen $S_i^{(x)}$ sondern auch von dem der Klassen $S_k^{(x)}$, wie oben S. 25 schon angedeutet wurde. Dieses Bildungsgesetz wird dann später an Hand künstlicher Streutafeln zu ermitteln sein (S. 52ff).

Auch ein Versuch, die neue Streutafel (b_{ik}) synthetisch herzustellen aus den betreffenden Schätzungsfunctionen und der geeigneten Besetzungsfunktion, stösst auf Schwierigkeiten. Die benötigten Schätzungsfunctionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_k^{(y)}(s)$ sind nun allerdings mit der Streutafel (a_{ik}) gegeben, aber immer nur im Integranden in Verbindung mit der Besetzungsfunktion $f_a(s)$ [Vgl. Gr. (35), (36) und (37).] Ähnlich findet sich die neue Besetzungsfunktion $f_b(s)$ in den Integranden der Integrale $B_i^{(x)}$, aber wieder nur verbunden mit den Schätzungsfunctionen $w_i^{(x)}(s)$. Es ist nun hoffnungslos, aus diesen Angaben allein, diese Schätzungsfunctionen und die neue Besetzungsfunktion zu isolieren, sodass wir auf den ersten Ansatz mit den Reduktionsfaktoren f_{ik} von Gleichung (49) wieder zurückgreifen müssen.

Bevor wir nun zur Bestimmung der Bildungsgesetze der Reduktionsfaktoren an Hand künstlicher Streutafeln übergehen, mögen noch einige Bemerkungen am Platze sein über die *Eindeutigkeit* der gestellten Aufgabe. Die Tatsache, dass durch die gegebene Streutafel (a_{ik}) der Satz der Schätzungsfunctionen und durch die neue Häufigkeitsverteilung $(B_i^{(x)})$ die neue Besetzungsfunktion nur implizit gegeben sind, berechtigt zur Frage, ob mit diesen Angaben wirklich eine und nur eine Besetzungsfunktion definiert wird.

Es lässt sich zeigen, dass die Eindeutigkeit etwas zu wünschen übrig

lässt, dass ein vorgegebener Satz von Klassenfrequenzen $B_i^{(x)}$ unter Beibehaltung derselben Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ nur unter gewissen Vorbehalten eine Besetzungsfunktion $f_b(s)$ eindeutig definiert. Dabei nehmen wir für die Besetzungsfunktion nur an, dass sie einen „natürlichen“ Verlauf zeigt, womit gemeint ist, dass sie keine Sprünge aufweist und immer positiv sein soll, wie das bei natürlich gegebenen Mannigfaltigkeiten vorausgesetzt werden darf.

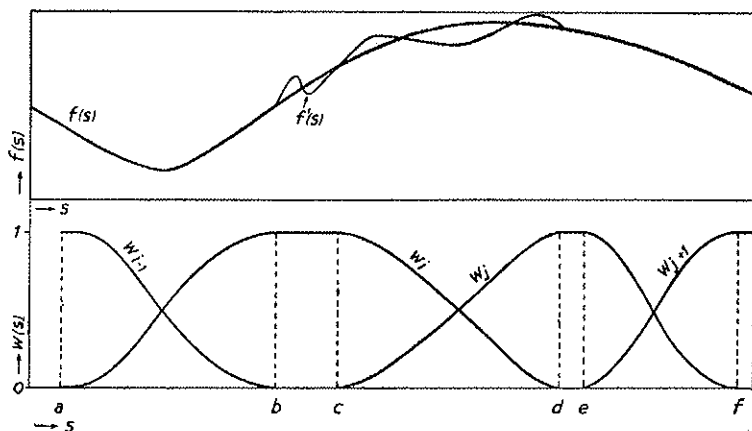


FIG. 1. Zur Eindeutigkeit der Besetzungsfunktion

Zur Erläuterung der Frage von der Eindeutigkeit der Aufgabe sei in Fig. 1 ein fingiertes Beispiel dargestellt von zwei Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_j^{(x)}(s)$ der benachbarten Spektralklassen $S_i^{(x)}$ und $S_j^{(x)}$ desselben Spektralsystems $S^{(x)}$ (weshalb wir auch im weiteren Verlauf der Diskussion die oberen Indizes ohne Schaden der Klarheit weglassen können). Die Punkte a, b, c, d, e und f markieren ausgezeichnete Stellen der Schätzungsfunktionen, nämlich

$$w_i(a) = 0; \quad w_i(b) = 1; \quad w_i(c) = 1; \quad w_i(d) = 0;$$

$$w_j(c) = 0; \quad w_j(d) = 1; \quad w_j(e) = 1; \quad w_j(f) = 0.$$

Die Intervalle (b, c) und (d, e) sind „Sicherheitsgebiete“, in denen die Objekte mit Sicherheit der betreffenden Klasse S_i oder S_j zugeordnet werden; (a, b) , (c, d) und (e, f) dagegen sind „Übergangsgebiete“ zwischen benachbarten Spektralklassen, wo der Beobachter die Objekte nur

mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit der betreffenden Klasse zuweist. Für die Übergangsgebiete sind die Summen der dort definierten Schätzungsfunktionen in diesem Falle gleich Eins, also im besonderen für (c, d) :

$$w_i(s) + w_j(s) = 1. \quad (52)$$

Sei nun $f(s)$ eine Besetzungsfunktion, die die Forderungen

$$\int_a^d f(s) w_i(s) ds = A_i \quad \text{und} \quad (53)$$

$$\int_c^f f(s) w_j(s) ds = A_j \quad (54)$$

erfüllt. Die Integrale A_i und A_j lassen sich nach den gegebenen Intervallen in Teilintegrale zerlegen:

$$\int_a^b f(s) w_i(s) ds = A_{i,ab},$$

$$\int_b^c f(s) w_i(s) ds = A_{i,bc},$$

$$\int_c^d f(s) w_i(s) ds = A_{i,cd},$$

$$\int_c^d f(s) w_j(s) ds = A_{j,cd},$$

$$\int_d^e f(s) w_j(s) ds = A_{j,de},$$

$$\int_e^f f(s) w_j(s) ds = A_{j,ef}.$$

Die Addition der entsprechenden Teilsummen ergeben die entsprechenden Klassenfrequenzen A_i und A_j .

Es ist nun leicht aus der Fig. 1 abzulesen, dass die Wirkung einer Änderung der Besetzungsfunktion auf die Häufigkeiten der Spektralklassen von verschiedenem Ausmass ist, je nachdem in dem betreffenden Teilintervall nur eine einzige Spektralklasse definiert ist, wie in den Sicherheitsintervallen, oder aber zwei, wie in den Übergangsgebieten. So betrachten wir zunächst die Wirkungen einer Änderung der Besetzungs-

funktion auf die einzelnen Teilintegrale der betreffenden Klassenhäufigkeiten.

Sei $f'(s) = f(s) + \Delta f(s)$ eine andere Besetzungsfunktion, die für die einzelnen Teilintegrale zu denselben Werten führen soll, nämlich

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b f'(s) w_i(s) ds &= A'_{i,ab} = A_{i,ab}, \\ \int_b^c f'(s) w_i(s) ds &= A'_{i,bc} = A_{i,bc}, \\ \int_c^d f'(s) w_i(s) ds &= A'_{i,cd} = A_{i,cd}, \\ \int_c^d f'(s) w_j(s) ds &= A'_{j,cd} = A_{j,cd}, \\ \int_d^e f'(s) w_j(s) ds &= A'_{j,de} = A_{j,de}, \\ \int_e^f f'(s) w_i(s) ds &= A'_{i,ef} = A_{i,ef}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Da nun

$$f'(s) = f(s) + \Delta f(s), \quad (56)$$

werden auch

$$\begin{aligned} \int_x^y f'(s) w_h(s) ds &= \int_x^y f(s) w_h(s) ds + \int_x^y \Delta f(s) w_h(s) ds = \\ &= A_{h,xy} + \int_x^y \Delta f(s) w_h(s) ds, \end{aligned} \quad (57)$$

wobei (x, y) eines der vorgegebenen Intervalle bedeutet, und $w_h(s)$ eine der in diesem Intervall definierten Schätzungsfunktionen ist.

Die neue Besetzungsfunktion $f'(s)$ führt also nur dann zu denselben Werten der Teilintegrale $A_{h,xy}$ der Funktion $f(s)$, wenn das Integral

$$\int_x^y \Delta f(s) w_h(s) ds = 0 \quad (58)$$

wird.

Für die *Sicherheitsintervalle* (b, c) und (d, f) , in denen die bezüglichen Schätzungsfunktionen $w_i(s)$ bzw. $w_j(s) = 1$ sind, muss also das Integral

$$\int_x^y \Delta f(s) ds = 0 \quad (59)$$

werden. Das kann ohne Schwierigkeiten erreicht werden, ohne dass $\Delta f(s)$ *überall* verschwindet, nämlich durch eine Funktion, die in grösseren oder kleineren Amplituden um die Funktion $f(s)$ herumpendelt in der Weise, dass sich die Überschüsse und Fehlbeträge ausgleichen. In Fig. 1 wurde eine solche Funktion im Intervall (b, c) schematisch eingezeichnet.

Es gibt demnach für die Sicherheitsgebiete theoretisch unendlich viele Besetzungsfunktionen (die allerdings nur mehr oder weniger um eine mittlere Funktion schwanken), die die gleichen Teilsummen der Klassenfrequenzen bei konstanter Schätzungsfunktion darzustellen vermögen.

Die Verhältnisse in *Übergangsgebieten*, in denen *zwei* Schätzungsfunktionen definiert sind, liegen zwar etwas anders, führen aber zu einem ähnlichen Ergebnis. Zur Erläuterung möge das Intervall (c, d) betrachtet werden, in dem die beiden Schätzungsfunktionen $w_i(s)$ und $w_j(s)$ gelten. Es ist also zu untersuchen, ob nicht nur $A_{i,cd}$ sondern auch $A_{j,cd}$ konstant gehalten werden können, wenn statt $f(s)$ eine Besetzungsfunktion $f'(s) = f(s) + \Delta f(s)$ verwendet wird. Es muss dann gleichzeitig

$$\int_c^d \Delta f(s) w_i(s) ds = 0 \quad \text{und} \quad (60)$$

$$\int_c^d \Delta f(s) w_j(s) ds = 0 \quad (61)$$

werden. Wegen $w_j(s) = 1 - w_i(s)$ nach Gl. (52) gilt für die zweite Gleichung (61)

$$\int_c^d \Delta f(s) ds - \int_c^d \Delta f(s) w_i(s) ds = 0. \quad (62)$$

Diese Gleichung kann mit (60) aber nur dann gleichzeitig bestehen, wenn auch

$$\int_c^d \Delta f(s) ds = 0 \quad (63)$$

ist.

Das kann nun möglich sein auf zweifache Weise:

1. $\Delta f(s)$ ist überall gleich Null,
2. $\Delta f(s)$ ist stellenweise von Null verschieden, doch so, dass sich die positiven und negativen Werte so ergänzen, dass das Integral

$$\int_c^d \Delta f(s) ds = 0$$

wird, wie wir es z. B. oben für das Sicherheitsgebiet als möglich annehmen mussten.

Sei nun $\Delta f(s)$ eine im Intervall (c, d) definierte Funktion, die ausser den Nullstellen bei c und d noch zwei weitere Nullstellen α und β im Inneren des Intervalls (c, d) besitzt. Die Schätzungsfunktion $w_h(s)$ ist immer positiv und monoton entweder fallend oder steigend. Es wird dann

$$\begin{aligned} \int_c^d \Delta f(s) w_h(s) ds &= \int_c^\alpha \Delta f(s) w_h(s) ds + \int_\alpha^\beta \Delta f(s) w_h(s) ds + \\ &\quad + \int_\beta^d \Delta f(s) w_h(s) ds . \\ &= \bar{w}_{h,1} \int_c^\alpha \Delta f(s) ds + \bar{w}_{h,2} \int_\alpha^\beta \Delta f(s) ds + \\ &\quad + \bar{w}_{h,3} \int_\beta^d \Delta f(s) ds , \end{aligned}$$

wobei die $\bar{w}_{h,n}$ die nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung aus dem Integranden herausgezogenen Mittelwerte der Funktion $w_h(s)$ darstellen, die einem Funktionswert in den betreffenden Unterintervallen entsprechen. Wegen der Monotonie von $w_h(s)$ folgt

$$\bar{w}_{h,1} > \bar{w}_{h,2} > \bar{w}_{h,3} , \text{ wenn } w_h(s) \text{ fällt, und}$$

$$\bar{w}_{h,1} < \bar{w}_{h,2} < \bar{w}_{h,3} ,$$

wenn die Funktion $w_h(s)$ ansteigt. Es lässt sich nun leicht einsehen, dass die Integrale $\int_c^\alpha \Delta f(s) ds$ und $\int_\beta^d \Delta f(s) ds$ gegeneinander so ausgewogen werden können, dass einerseits

$$\int_c^\alpha \Delta f(s) ds + \int_\beta^d \Delta f(s) ds = - \int_\alpha^\beta \Delta f(s) ds$$

bleibt und gleichzeitig

$$\overline{w}_{h,1} \int_c^{\alpha} \Delta f(s) ds + \overline{w}_{h,3} \int_{\beta}^d \Delta f(s) ds = - \overline{w}_{h,2} \int_{\alpha}^{\beta} \Delta f(s) ds$$

wird, womit dann die Gleichungen (60) und (63) gleichzeitig erfüllt sind. Ähnliches lässt sich auch zeigen für den Fall, dass die Funktion $\Delta f(s)$ mehr als zwei Nullstellen im Innern des Intervalls (c, d) besitzt, sodass sich also beliebig viele Besetzungsfunktionen $f(s)$ finden lassen, die die Teilhäufigkeiten $A_{i,cd}$ und $A_{j,cd}$ unverändert lassen.

Wenn nun schon für die einzelnen Teilintervalle verschiedene Besetzungsfunktionen in Verknüpfung mit denselben Schätzungsfunktionen zu den gleichen Klassenhäufigkeiten führen können, so gilt das noch mehr für das ganze Intervall. Wenn auch theoretisch solche Schwankungen beliebig sein können, so wird man doch bei einem empirisch gegebenen Material einen „ruhigeren“ Verlauf der Besetzungsfunktion voraussetzen dürfen. Damit wird die Vieldeutigkeit der Festlegung einer Besetzungsfunktion durch die Angabe einer Häufigkeitsverteilung der Klassen schon stark gemildert, und wird praktisch im Bereich der gewöhnlichen statistischen Schwankungen bleiben. Ferner ist leicht einzusehen, dass diese Unbestimmtheit auch etwas abhängt von der Grösse der Spektralintervalle: sie wird um so geringer, je enger die Spektralklassen gewählt werden.

Unter diesen Vorbehalten lässt sich denn auch sagen, dass die Aufgabe „praktisch“ eindeutig bestimmt ist, dass es also einem Sinn hat, eine Lösung zu versuchen.

Im Vorhergehenden wurde die Eindeutigkeit der Aufgabe verneint mit dem Hinweis, dass bei blosser Vorgabe einer Spektralstreutafel (a_{ik}) mit einer neuen Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen $(B_i^{(v)})$ die neue Besetzungsfunktion $f_b(s)$ nicht eindeutig festgelegt wird. Diese Frage lässt sich vielleicht noch besser behandeln als Teil eines allgemeineren Problems, das sich etwa folgendermassen formulieren lässt (*):

(*) Die folgenden Ausführungen wurden dem Vf. von Dr. WALTER FRICKE, Hamburg-Bergedorf, für die Benützung freundlichst zur Verfügung gestellt, wofür ihm der Vf. auch an dieser Stelle seinen herzlichsten Dank aussprechen möchte.

In wie weit ist für eine bestimmte Reihe von Schätzungsfunktionen $w_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, n$, durch die Angaben der Klassenfrequenzen

$$A_i = \int f(s) w_i(s) ds \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (a)$$

die Besetzungsfunktion $f(s)$ eindeutig festgelegt. $f(s)$ und $w_i(s)$ seien reguläre Funktionen und im gesamten Wertebereich von s grösser oder gleich Null. Sie dürfen Sprungstellen, aber keine Unendlichkeitsstellen aufweisen, wie es in der Natur des Problems liegt. Wir schreiben zunächst Gl. (a) besser

$$A_i(s_i) = \int f(s_i + \varepsilon) w_i(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (b)$$

wobei wir z. B. ε positiv oder negativ von der Mitte des Spektralbereiches s_i aus zählen können.

Für die Lösung der Frage ergeben sich zwei mögliche Fälle:

1. Sämtliche $w_i(\varepsilon)$ seien bekannt.

Dann empfiehlt es sich, analog dem Vorgehen EDDINGTONS^(1,2) $f(s_i + \varepsilon)$ in eine Taylorreihe zu entwickeln und die einzelnen Integrale – die Ableitungen $f^{(v)}(s_i)$, $v = 1, 2, 3, \dots$, treten als Faktoren vor die Integrale – auszuwerten. Wir erhalten

$$\left. \begin{aligned} A_i(s_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(s_i) + \varepsilon f'(s_i) + \varepsilon^2 \frac{f''(s_i)}{2} + \dots] w_i(\varepsilon) d\varepsilon, \\ A_i(s_i) &= f(s_i) \int_{-\infty}^{+\infty} w_i(\varepsilon) d\varepsilon + f'(s_i) \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon w_i(\varepsilon) d\varepsilon + \dots \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

Im Falle symmetrischer Funktionen $w_i(\varepsilon)$ in Bezug auf $\varepsilon = 0$ sind die ungeradzahigen Momente von $w_i(\varepsilon)$ gleich Null. Allgemein sollte jedoch nicht mit symmetrischen Funktionen gerechnet werden. Unter gewissen Bedingungen, die in der Praxis fast immer erfüllt sind, kann nun die Reihe (c) nach dem Umkehrsatze von Potenzreihen (Vgl. K. KNOPP, *Unendliche Reihen*, Seite 183) umgekehrt werden, sodass $f(s_i)$ als Funktion von $A(s_i)$ und den Ableitungen $A^{(v)}(s_i)$ folgt. Bis zu welchen Gliedern die Reihenentwicklung vorgenommen wird, sieht man leicht an der Grösse der Ableitungen $A^{(v)}(s_i)$, die man durch Differenzbildung approximiert. Das EDDINGTONSche Verfahren ist ein Spezialfall des hier angegebenen.

2. Sämtliche $w_i(s)$ seien unbekannt.

In diesem Fall sieht man leicht, dass $f(s_i)$ unbestimmt bleibt, da Gl. (b) nicht *mehr* als den folgenden Schluss zulässt:

$$A(s)_i = f\{(s_i + \varepsilon)_0\} \int_{-\infty}^{+\infty} w_i(\varepsilon) d\varepsilon,$$

wobei $(s_i + \varepsilon)_0$ ein nicht näher bestimmter Ort in der Spektralfolge s ist.

2. Lösungsversuche mit Reduktionsfaktoren

a. Elementare Teilfrequenzen, Grundfrequenzen, Reduktionsfaktoren und Reduktionsfunktion.

Unter den verschiedenen möglichen isogenen Streutafeln, die dieselbe Verknüpfung zweier Spektralsysteme charakterisieren und sich nur durch ihre Besetzungsfunktionen unterscheiden, gibt es eine ausgezeichnete, nämlich jene, für die die Besetzungsfunktion

$$f(s) = 1$$

ist. Diese Streutafel bringt offenbar die Verknüpfung der beiden Systeme am reinsten zum Ausdruck, da ihre Teil- und Klassenfrequenzen Integrale der blossen Schätzungsfunktionen sind. Wir nennen diese Streutafel die Tafel der *elementaren Teilfrequenzen* und die entsprechenden Klassenhäufigkeiten *elementare Klassenfrequenzen*. Werden die elementaren Teilfrequenzen mit u_{ik} bezeichnet und die elementaren Klassenfrequenzen in den beiden Systemen $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$ beziehentlich mit $U_i^{(x)}$ und $U_k^{(y)}$, dann gelten die folgenden Gleichungen

$$u_{ik} = \int w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds, \quad (64)$$

$$U_i^{(x)} = \int w_i^{(x)}(s) ds \quad \text{und} \quad (65)$$

$$U_k^{(y)} = \int w_k^{(y)}(s) ds. \quad (66)$$

Die elementaren Klassenfrequenzen sind nicht notwendig gleich eins, nur in dem Sonderfall einer entsprechenden Gestalt der Schätzungsfunktionen.

Bildung einer isogenen Streutafel aus einer gegebenen Streutafel (a_{ik}) so vorschreiben, dass die Klassenhäufigkeiten in einem System gleich der Einheitsfrequenz werden. Im allgemeinen werden sich dann zwei verschiedene Tafeln ergeben, je nachdem die Klassenfrequenzen im System $S^{(x)}$ oder in $S^{(y)}$ zur Einheit werden sollen. Nur für den Sonderfall, dass beide Systeme die gleichen Schätzungsfunktionen besitzen – ein Fall der verwirklicht ist, wenn ein Beobachter unter Beibehaltung seiner Grundhaltung eine zweite Schätzungsreihe an demselben Material ausführt und die zweiten Schätzungen mit den ersten vergleicht – werden beide Tafeln zusammenfallen. Diese so definierten Streutafeln nennen wir die Tafeln der *Grundfrequenzen* und bezeichnen sie beziehentlich mit (α_{ik}) und (β_{ik}) , je nachdem die Klassenfrequenzen im System $S^{(x)}$ oder in $S^{(y)}$ zur Einheit werden. Sind die entsprechenden Reduktionsfaktoren Φ_{ik} und Ψ_{ik} (*) und wird wieder voraus gesetzt, dass sich die Nebenfaktoren in bekannter Weise mit den zugehörigen Hauptfaktoren darstellen lassen, etwa

$$\Phi_{ik} = f_{\Phi}(\Phi_{ii}, \Phi_{kk}) \quad \text{und} \quad (75a)$$

$$\Psi_{ik} = f_{\Psi}(\Psi_{ii}, \Psi_{kk}), \quad (75b)$$

dann ergeben sich für die Reduktionsfaktoren die Bestimmungsgleichungen

$$\sum_k \alpha_{ik} = \sum_k a_{ik} \Phi_{ik} = 1^{(x)} \quad \text{und} \quad (76)$$

$$\sum_i \beta_{ik} = \sum_i a_{ik} \Psi_{ik} = 1^{(y)}. \quad (77)$$

Nun mögen noch einige *Besonderheiten* dieser *Tafeln der Grundfrequenzen* besprochen werden.

1. Sie charakterisieren die Verknüpfung zweier Spektralsysteme in einer *normalisierten* Weise, indem sie die äquivalente Häufigkeitsverteilung der Klassen in einem System geben, wenn im anderen System die Einheitsverteilung vorhanden ist. Die zu Einheitsverteilungen äquivalen-

(*) Φ und Ψ wurden oben S. 16ff. zur Bezeichnung der Korrelationsfunktionen verwendet; doch dürfte der hier erfolgte Gebrauch weiter keine Unklarheiten zur Folge haben.

ten Häufigkeiten nennen wir *Restfrequenzen* und bezeichnen sie mit $R_k^{(y)}$ und $R_i^{(x)}$, sodass wir die Beziehungen haben

$$\sum_i \alpha_{ik} = R_k^{(y)} \quad \text{und} \quad (78)$$

$$\sum_k \beta_{ik} = R_i^{(x)}. \quad (79)$$

2. Die Tafeln der Grundfrequenzen können als eine Art *Einheitsstreu-tafeln* angesehen werden, aus denen Streutafeln mit gegebener Häufigkeitsverteilung der Klassen $A_i^{(x)}$ oder $A_k^{(y)}$ erhalten werden durch „Einsetzen“ der gewünschten Häufigkeiten in die bezügliche Tafel. Dabei ist das „Einsetzen“ allerdings so zu verstehen, dass die entsprechenden Reduktionsfaktoren aufzusuchen sind, die wir für diesen Übergang mit kleinen Buchstaben bezeichnen möchten, und zwar mit φ_{ik} für die Benützung der α_{ik} -Tafel unter Vorgabe der Häufigkeitsverteilung ($A_i^{(x)}$) im System $S^{(x)}$ und mit ψ_{ik} für die Benützung der β_{ik} -Tafel bei Vorgabe der Klassenverteilung ($A_k^{(y)}$) im System $S^{(y)}$. Es erscheinen also die Beziehungen

$$\alpha_{ik} \varphi_{ik} = a_{ik} \quad \text{und} \quad (80)$$

$$\beta_{ik} \psi_{ik} = a_{ik}. \quad (81)$$

Die Bestimmungsgleichungen für diese Reduktionsfaktoren sind dann entsprechend

$$\sum_k \alpha_{ik} \varphi_{ik} = A_i^{(x)} \quad \text{und} \quad (82)$$

$$\sum_i \beta_{ik} \psi_{ik} = A_k^{(y)}, \quad (83)$$

wobei wieder vorausgesetzt wird, dass sich die Nebenfaktoren als bekannte Funktionen der Hauptfaktoren bestimmen lassen.

3. Die Tafeln der Grundfrequenzen sind enge miteinander verknüpft.

a. Als isogene Streutafeln müssen sie dieselben Grundfrequenzen besitzen. Werden also in diesen Tafeln die Restfrequenzen auf Eins reduziert, so muss zwangsläufig die andere Tafel sich ergeben. Es ist demnach

$$\alpha_{ik} Z_{ik} = \beta_{ik} \text{ mit den Bedingungsgleichungen } \sum_i \alpha_{ik} Z_{ik} = 1^{(y)}$$

und

$$\beta_{ik} \Xi_{ik} = \alpha_{ik} \text{ mit den Bedingungsgleichungen } \sum_k \beta_{ik} \Xi_{ik} = 1^{(x)}.$$

b. Werden die Restfrequenzen $R_k^{(y)}$ in die Tafel der (β_{ik}) „eingesetzt“, so ergibt sich die Tafel (α_{ik}) , und entsprechend erhält man durch Einsetzen der $R_i^{(x)}$ in (α_{ik}) die Tafel (β_{ik}) . Es ist also

$$\alpha_{ik} \zeta_{ik} = \beta_{ik} \text{ mit den Bedingungsgleichungen } \sum_k \alpha_{ik} \zeta_{ik} = R_i^{(x)}$$

und

$$\beta_{ik} \xi_{ik} = \alpha_{ik} \text{ mit den Bedingungsgleichungen } \sum_i \beta_{ik} \xi_{ik} = R_k^{(y)}.$$

Aus den unter a und b angeführten Beziehungen ersieht man sofort, dass

$$\zeta_{ik} = Z_{ik} = \frac{1}{\xi_{ik}} = \frac{1}{\Xi_{ik}} \quad (84)$$

sein muss.

c. Aus den Beziehungen der Tafeln der Grundfrequenzen zu der ursprünglichen Streutafel, aus denen sie abgeleitet wurden, ergeben sich zwischen α_{ik} und β_{ik} die weiteren Beziehungen

$$\alpha_{ik} = \frac{\Phi_{ik}}{\Psi_{ik}} \beta_{ik} \quad (85)$$

und

$$\beta_{ik} = \frac{\Psi_{ik}}{\Phi_{ik}} \alpha_{ik}, \quad (86)$$

sodass sich die für die verschiedenen Operationen zwischen den Tafeln der Grundfrequenzen benötigten Reduktionsfaktoren zurückführen lassen auf die Verhältnisse der Reduktionsfaktoren, mit deren Hilfe diese Tafeln aus der ursprünglichen Streutafel gewonnen wurden:

$$\zeta_{ik} = Z_{ik} = \frac{1}{\xi_{ik}} = \frac{1}{\Xi_{ik}} = \frac{\Psi_{ik}}{\Phi_{ik}}. \quad (84a)$$

4. Die Streutafeln der Grundfrequenzen sind isogene Streutafeln, unterscheiden sich also nur durch ihre verschiedenen Besetzungsfunktio-

nen $f_\alpha(s)$ und $f_\beta(s)$ und lassen sich ohne weiteres zu einer Tafel von *mittleren Grundfrequenzen*

$$\eta_{ik} = \frac{\alpha_{ik} + \beta_{ik}}{2} \quad (87)$$

mit der Besetzungsfunktion

$$f_\eta(s) = \frac{f_\alpha(s) + f_\beta(s)}{2} \quad (88)$$

vereinigen, die ihrerseits mit den Tafeln der Grundfrequenzen und der Ausgangstafel isogen, also auch wieder eine Darstellung der Verknüpfung der beiden Spektralsysteme ist.

Diese Tafel der mittleren Grundfrequenzen ist nun nicht ohne weiteres identisch mit der Tafel der elementaren Teilfrequenzen, nur in dem Ausnahmefall dass $f_\eta(s) = 1$ ist. Andererseits bevorzugt sie keines der beiden Spektralsysteme, wie etwa die Tafeln der Grundfrequenzen (α_{ik}) und (β_{ik}), und dürfte daher in Ermangelung der Kenntnis der elementaren Teilfrequenzen im allgemeinen *die* Tafel sein, die der reinen Darstellung der Verknüpfung der beiden Spektralsysteme sich am besten nähert. Es kann allerdings in Sonderfällen vorkommen, dass eine der Grundfrequenztafeln besser dazu geeignet ist, wenn nämlich ihre Besetzungsfunktion schon gleich Eins ist; ein Fall, der wohl selten vorkommen mag, aber doch nicht ausgeschlossen werden kann (Vergl. dazu die Streutafelgruppe **B** im nächsten Abschnitt.)

Die vorausgehenden Überlegungen beruhen auf der Annahme, dass es möglich ist, mit geeigneten Reduktionsfaktoren von einer Streutafel auf eine andere, ihr isogene überzugehen. Die Bestimmung dieser Reduktionsfaktoren scheitert an dem Mangel genügend zahlreicher Bestimmungsgleichungen, sodass noch eine Zusatzannahme notwendig wurde, dass nämlich die Nebenfaktoren in einer bekannten Weise aus den zugehörigen Hauptfaktoren dargestellt werden können. Die Funktion, die diese Darstellung leistet, nannten wir die *Reduktionsfunktion*, da ohne ihre Kenntnis, die Reduktion in der beschriebenen Weise mit Reduktionsfaktoren nicht möglich ist. Im folgenden Abschnitt soll nun versucht werden, eine geeignete Reduktionsfunktion zu finden.

b. Zur Wahl einer geeigneten Reduktionsfunktion.

Einen Fingerzeig über den Charakter der Reduktionsfunktion wird man am besten erwarten dürfen durch einen Vergleich von wirklich isogenen Streutafeln, die also mit Hilfe solcher Reduktionsfaktoren als miteinander verbunden vorausgesetzt werden dürfen.

Leider ist das aus der Erfahrung gewonnene Material oft so kärglich, dass es manchmal kaum genügt für *eine* Streutafel, die die Beziehungen zwischen den beiden zum Vergleich stehenden Spektralsystemen *sicher* zum Ausdruck bringt. Deshalb soll hier an synthetischen Streutafeln versucht werden, diese Beziehungen zwischen den Neben- und Hauptfaktoren festzustellen.

Zunächst werden einige typische isogene Streutafeln vorgelegt, die durch eine entsprechende Verfügung über die Schätzungs- und Besetzungsfunktionen erhalten wurden. Daran lassen sich unmittelbar die Reduktionsfaktoren studieren, die die einzelnen Gruppen von isogenen Streutafeln beherrschen. Aus der Diskussion dieser Ergebnisse wird dann versucht, zu einer plausiblen Reduktionsfunktion zu kommen, die die Beziehungen zwischen den Nebenreduktionsfaktoren und den Hauptreduktionsfaktoren darstellen kann.

Es sei ganz allgemein eine *Spektralfolge* s so definiert, dass sie dem Zahlenkontinuum von 0 bis 6 zugeordnet werden kann. Die Spektralfolge sei in sechs aufeinanderfolgende Intervalle oder Spektralklassen geteilt

$$(s_0, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_5, s_6),$$

von denen nur gefordert wird, dass sie die ganze Spektralfolge innerhalb des Intervalles lückenlos überdecken, ohne jedoch sich zu überschneiden. Die 6 Spektralklassen S_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) werden hier einfach mit den bekannten Namen der Hauptklassen B, A, F, G, K, M belegt. Wir beschränken uns absichtlich auf die Hauptklassen, um die Rechnungen etwas einfacher zu gestalten, dann aber auch, weil für die spätere Anwendung des Reduktionsverfahrens praktisch nur diese 6 Klassen in Frage kommen. Damit soll nicht ausgeschlossen werden, dass die Methode sich nicht auch auf feinere Unterteilungen anwenden liesse.

Weiterhin seien drei verschiedene Spektralsysteme $S^{(a)}$, $S^{(b)}$, und $S^{(c)}$ definiert durch drei Sätze von entsprechenden *Schätzungsfunktionen*, $w_i^{(a)}(s)$, $w_k^{(b)}(s)$ und $w_h^{(c)}(s)$ ($i, k, h = 1, 2, \dots, 6$). Für diese Schätz-

zungsfunktionen wird nur verlangt, dass sie überall positiv sind und an allfallsigen Unstetigkeitsstellen für angrenzende Intervalle gleiche Werte besitzen. Die hier verwendeten Schätzungsfunktionen für die einzelnen Spektralklassen der betreffenden Spektralsysteme sind in Tabelle 2 mit ihren numerischen Werten zusammengestellt und in Fig. 2 veranschaulicht.

Die einzelnen Schätzungsfunktionen, besonders für die Spektralsysteme $S^{(b)}$ und $S^{(c)}$, wurden willkürlich gewählt, um die folgenden Überlegungen nicht durch Sonderfälle zu belasten. Die Wahl von durchwegs linearen Funktionen erfolgte mit Rücksicht auf die notwendigen Integrationsoperationen. In der Praxis werden solche regelmässigen Funktionen als Schätzungsfunktionen kaum auftreten, eher Fehlerfunktionen, die aber nicht gerade einfach zu handhaben sind bei Integrationen. Doch dürfte diese Form der Schätzungsfunktionen nichts ändern an dem allgemeinen Wert der Ergebnisse.

Das Spektralsystem $S^{(a)}$ könnte als ein *symmetrisches* System bezeichnet werden, insofern für alle Klassen die gleichen symmetrischen Schätzungsfunktionen gelten. Nur die Schätzungsfunktionen der Randklassen müssen zwangsläufig asymmetrisch ausfallen, da von der letzten Gewissheitsstelle an bis zur Abbruchstelle der Spektralfolge alle Objekte in die betreffende Randklasse fallen müssen, schon aus dem einfachen Grunde, weil über die Randklassen hinaus keine andere Spektralklassen mehr zur Verfügung stehen.

Es mag vielleicht beanstandet werden, dass bei diesen Schätzungsfunktionen fast *nur Übergangsgebiete* vorkommen, wo für den Beobachter immer die Möglichkeit besteht, in eine Klasse oder ihre Nachbarklasse zu schätzen. In der Praxis dürften bei so groben Spektraleinteilungen diese Übergangsgebiete bedeutend geringer sein. Die Folge dieser Wahl ist eine unverhältnismässig grosse Streuung der Schätzungen, wie sie normalerweise kaum auftreten dürfte. Doch ist das für die vorliegende Untersuchung eher ein Vorteil; denn wenn sich für diese ausserordentlichen Verhältnisse noch eine brauchbare Reduktionsfunktion findet, dann wird diese weit besser wirken in den günstigeren Verhältnissen der Praxis.

Endlich seien noch 4 verschiedene *Besetzungsfunktionen* definiert:

$$\begin{aligned} f_1(s) &= 1, \\ f_2(s) &= s, \\ f_3(s) &= s^2 \text{ und} \\ f_4(s) &= F(s). \end{aligned}$$

TABELLE 2

Numerische Werte für die einzelnen Schätzungsfunktionen

Schätzungsfunktionen	Definitionsbereich
Spektralsystem $S^{(a)}$	
$w_{B_1} = 1$ $w_{B_2} = 1.5 - s$	$0 - 0.5$ $0.5 - 1.5$
$w_{A_1} = -0.5 + s$ $w_{A_2} = 2.5 - s$	$0.5 - 1.5$ $1.5 - 2.5$
$w_{F_1} = -1.5 + s$ $w_{F_2} = 3.5 - s$	$1.5 - 2.5$ $2.5 - 3.5$
$w_{G_1} = -2.5 + s$ $w_{G_2} = 4.5 - s$	$2.5 - 3.5$ $3.5 - 4.5$
$w_{K_1} = -3.5 + s$ $w_{K_2} = 5.5 - s$	$3.5 - 4.5$ $4.5 - 5.5$
$w_{M_1} = -4.5 + s$ $w_{M_2} = 1$	$4.5 - 5.5$ $5.5 - 6.0$
Spektralsystem $S^{(b)}$	
$w_{B_1} = 1$ $w_{B_2} = \frac{13}{9} - \frac{10}{9}s$	$0 - 0.4$ $0.4 - 1.3$
$w_{A_1} = -\frac{4}{9} + \frac{10}{9}s$ $w_{A_2} = 1$ $w_{A_3} = 3.25 - 1.25s$	$0.4 - 1.3$ $1.3 - 1.8$ $1.8 - 2.6$
$w_{F_1} = -2.25 + 1.25s$ $w_{F_2} = 7.5 - 2.5s$	$1.8 - 2.6$ $2.6 - 3.0$

TABELLE 2 (Forts.)

Schätzungenfunktionen	Definitionsbereich
$w_G = -6.5 + 2.5 s$	2.6 - 3.0
$w_{G_2} = \frac{43}{13} - \frac{10}{13} s$	3.0 - 4.3
$w_{K_1} = -\frac{30}{13} + \frac{10}{13} s$	3.0 - 4.3
$w_{K_2} = 1$	4.3 - 4.5
$w_{K_3} = \frac{57}{12} - \frac{10}{12} s$	4.5 - 5.7
$w_{M_1} = -\frac{45}{12} + \frac{10}{12} s$	4.5 - 5.7
$w_{M_2} = 1$	5.7 - 6.0
Spektralsystem $S^{(e)}$	
$w_{B_1} = 1$	0 - 0.6
$w_{B_2} = \frac{15}{9} - \frac{10}{9} s$	0.6 - 1.5
$w_{A_1} = -\frac{6}{9} + \frac{10}{9} s$	0.6 - 1.5
$w_{A_2} = 1$	1.5 - 1.7
$w_{A_3} = \frac{23}{6} - \frac{10}{6} s$	1.7 - 2.3
$w_{F_1} = -\frac{17}{6} + \frac{10}{6} s$	1.7 - 2.3
$w_{F_2} = 1$	2.3 - 2.9
$w_{F_3} = \frac{38}{9} - \frac{10}{9} s$	2.9 - 3.8
$w_{G_1} = -\frac{29}{9} + \frac{10}{9} s$	2.9 - 3.8
$w_{G_2} = 8.6 - 2 s$	3.8 - 4.3
$w_{K_1} = -7.6 + 2 s$	3.8 - 4.3
$w_{K_2} = 5.3 - s$	4.3 - 5.3
$w_{M_1} = -4.3 + s$	4.3 - 5.3
$w_{M_2} = 1$	5.3 - 6.0

$F(s)$ ist eine Funktion, die stückweise aus linearen Funktionen in der Art eines Polygonzuges zusammengesetzt wird. Ihre numerischen Werte mit dem Definitionsbereich der einzelnen Züge finden sich in Tab. 3, eine graphische Veranschaulichung in Fig. 3.

TABELLE 3
Zusammensetzung der Besetzungsfunktion $F(s)$

Einzelzüge	Definitionsbereich
$F_1(s) = 8.75 s$	0 - 0.8
$F_2(s) = -\frac{95}{7} + \frac{180}{7} s$	0.8 - 1.5
$F_3(s) = 25$	1.5 - 2.0
$F_4(s) = \frac{575}{11} - \frac{150}{11} s$	2.0 - 3.1
$F_5(s) = \frac{173}{8} - \frac{30}{8} s$	3.1 - 3.9
$F_6(s) = -\frac{25}{2} + \frac{10}{2} s$	3.9 - 4.3
$F_7(s) = -34 + 10 s$	4.3 - 5.0
$F_8(s) = 96 - 16 s$	5.0 - 6.0

Auch bei der Auswahl der Besetzungsfunktionen war vor allem auf eine leichte Handhabung bei der Integration Rücksicht genommen worden. Vielleicht hätte man erwartet, dass vor allem Funktionen verwendet werden, die auch in der Natur vorkommen können; doch müssen sich die allgemeinen Gesetze auch bei Verwendung ganz beliebiger Funktionen zeigen, und darauf kommt es schliesslich hier zunächst an.

Mit Hilfe dieser Aufbaufunktionen wurden nun vier Serien *isogener Streutafeln* berechnet, die in den folgenden Tabellen 4-7 zusammengestellt sind.

Die Gruppen A und D stellen den Vergleich eines Spektralsystems mit sich selbst dar, ein Fall, der sich verwirklicht, wie schon oben gesagt

wurde, wenn ein Beobachter seine eigenen Schätzungen am selben Material miteinander vergleicht. Für A wurde ein symmetrisches Spektral-

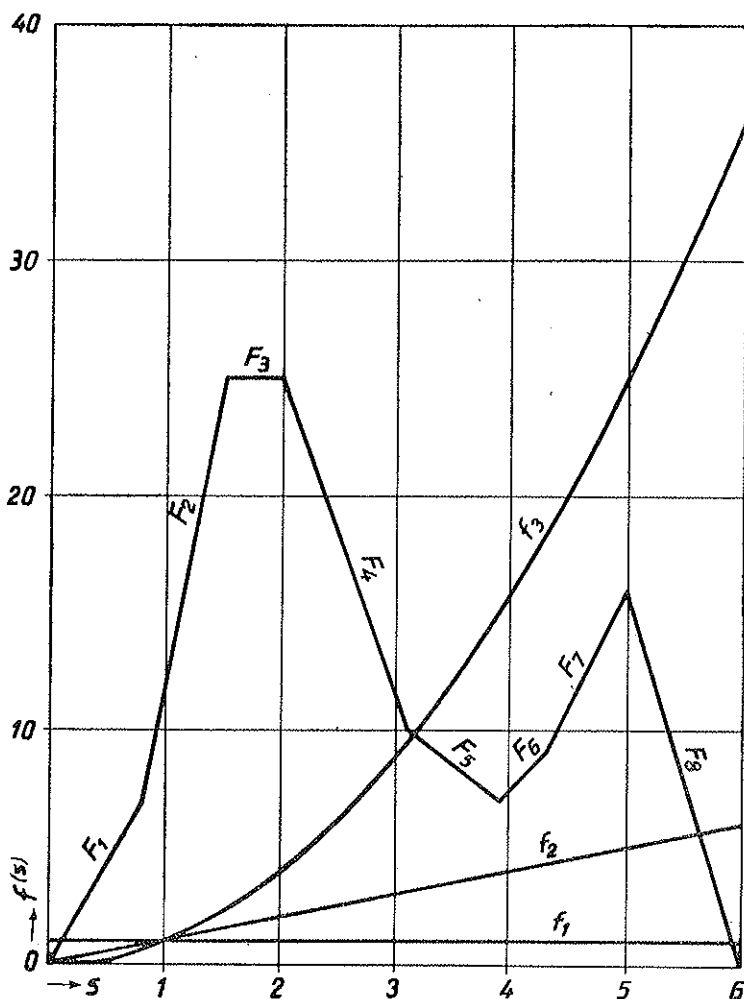


FIG. 3. Graphische Darstellung der Besetzungsfunktionen.

$$f_1(s) = 1, f_2(s) = s, f_3(s) = s^2, f_4(s) = F(s).$$

system gewählt, was den Vorzug hat, dass bei Verwendung der Besetzungsfunktion $f_1(s) = 1$ alle Klassenfrequenzen zur Einheit kommen und damit die Tafeln der Grundfrequenzen (α_{ik}) und (β_{ik}) mit den Tafeln

der elementaren Teilfrequenzen (u_{ik}) in eine einzige Tafel zusammenfallen.

Für die Streutafelgruppe **D** wurde das Spektralsystem $S^{(b)}$ benützt. Auch in diesem Falle sind die beiden Tafeln der Grundfrequenzen miteinander identisch, aber verschieden von der Tafel der elementaren Teilfrequenzen.

In der Gruppe **B** wird ein symmetrisches System, $S^{(a)}$, mit einem unsymmetrischen, $S^{(c)}$, verglichen. Die Folge ist, dass eine Tafel der Grundfrequenzen, nämlich (α_{ik}) , mit der Tafel der elementaren Teilfrequenzen (u_{ik}) zusammenfällt.

Die Spektralstreutafelgruppe **C** stellt den allgemeinsten Fall dar, den Vergleich zweier unsymmetrischer Spektralsysteme, $S^{(b)}$ und $S^{(c)}$. Hier sind die beiden Grundfrequenztafeln (α_{ik}) und (β_{ik}) von einander verschieden und zugleich verschieden von der Tafel der elementaren Teilfrequenzen (u_{ik}) .

Jeder Vergleich wurde mit allen vier Besetzungsfunktionen durchgeführt, sodass für die Diskussion von jeder Gruppe vier streng isogene Streutafeln zur Verfügung stehen.

Die in den Streutafeln gebotenen Werte wurden im allgemeinen auf fünf Dezimalen angegeben, wenn auch die eigentlichen Rechnungen vollständig ausgeführt wurden. Die Abrundung der letzten Dezimale erfolgte in der gewöhnlichen Weise. Nur in Einzelfällen – wenn es nämlich dienlich schien, die Summen an anderswoher bekannte sichere Werte der Klassenhäufigkeiten oder der Gesamtsumme N aller Objekte anzugleichen – wurde von der allgemeinen Regel zugunsten der Angleichung abgewichen.

Zur Untersuchung des Bildungsgesetzes der Reduktionsfaktoren, die eine Streutafel in eine andere ihr isogene überführen, beschränken wir uns auf die Übergänge von den Tafeln der elementaren Teilfrequenzen (u_{ik}) auf die entsprechenden Tafeln aktueller Frequenzen (a_{ik}) mit den Besetzungsfunktionen f_2, f_3 und f_4 . Einerseits, weil solche Übergänge nahegelegt werden durch das in den vorhergehenden Tabellen 4-7 bereitgestellte Streutafelmaterial, andererseits, weil gerade bei diesen Übergängen die Reduktionsfaktoren eine besonders einfache Gestalt annehmen: sie sind für diesen Fall nichts anderes als die Funktionswerte der entsprechenden Besetzungsfunktionen für ein mittleres $\bar{s}$, das im Geltungsbereich der Integrale a_{ik} liegt nach den Seite 46 gebrachten Gleichungen (67) und (68).

TABELLE 4

Berechnete Streutafeln der Gruppe A
 Vergleich des Spektralsystems $S^{(a)}$ mit sich selbst

$$A1: f(s) = 1$$

$S^{(a)} \backslash S^{(a)}$	B	A	F	G	K	M	$U_i^{(a)}$
B	.8333..	.1666..					1
A	.1666..	.6666..	.1666..				1
F		.1666..	.6666..	.1666..			1
G			.1666..	.6666..	.1666..		1
K				.1666..	.6666..	.1666..	1
M					.1666..	.8333..	1
$U_i^{(a)}$	1	1	1	1	1	1	6

$$A2: f(s) = s$$

$S^{(a)} \backslash S^{(a)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(a)}$
B	.37500	.16666..					.54166..
A	.16666..	1.00000	.33333..				1.50000
F		.33333..	1.66666..	.50000			2.50000
G			.50000	2.33333..	.66666..		3.50000
K				.66666..	3.00000..	.83333.	4.50000
M					.83333..	4.62500	5.45833..
$A_i^{(a)}$	.54166..	1.50000	2.50000	3.50000	4.50000	5.45833.	18.00000

TABELLE 4 - (Forts.)

$$A3: f(s) = s^2$$

$S^{(a)}$ \ $S^{(a)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(a)}$
B	.24166..	.17500					.41666..
A	.17500	1.56666..	.67500				2.41666..
F		.67500	4.23333..	1.50833..			6.416666.
G			1.50833..	8.23333..	2.67500		12.41666..
K				2.67500	13.56666..	4.17500	20.41666..
M					4.17500	25.74166..	29.91666..
$A_i^{(a)}$	.41666..	2.41666..	6.41666..	12.41666..	20.41666..	29.91666..	72.00000

$$A4: f(s) = F(s)$$

$S^{(a)}$ \ $S^{(a)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(a)}$
B	3.62068	2.08870					5.70938
A	2.08870	14.46423	3.95360				20.50653
F		3.95360	12.07128	1.97830			18.00318
G			1.97830	5.86861	1.33067		9.17758
K				1.33067	7.38725	2.26041	10.97833
M					2.26041	5.86459	8.12500
$A_i^{(a)}$	5.70938	20.50653	18.00318	9.17758	10.97833	8.12500	72.50000

TABELLE 5

Berechnete Streutafeln der Gruppe B
Vergleich der Spektralsysteme $S^{(a)}$ und $S^{(c)}$

B1: $f(s) = 1$

$S^{(c)} \backslash S^{(a)}$	B	A	F	G	K	M	$U_k^{(c)}$
B	.8650	.1850					1.05
A	.1350	.6750	.1400				.95
F		.1400	.8200	.385	.005		1.35
G			.0400	.5033..	.1566..		.70
K				.1103..	.5543..	.0853..	.75
M				.0013..	.2840	.9146..	1.20 ⁺
$U_i^{(a)}$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	6.0000

B2: $f(s) = s$

$S^{(c)} \backslash S^{(a)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)}$
B	.39992	.18508					.58500
A	.14175	1.02158	.26667				1.43000
F		.29334	2.10533	1.21308	.01825		3.63000
G			.12800	1.82417	.61450		2.56667
K				.45688	2.47499	.41813	3.35000
M				.00587	1.39226	5.04020	9.43833
$A_i^{(a)}$	.54167	1.50000	2.50000	3.50000	4.50000	5.45833	18.00000

TABELLE 5 - (Forts.)

B3: $f(s) = s^3$

$S^{(a)} \backslash S^{(e)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(e)}$
B	.26236	.19439					.45675
A	.15431	1.60333	.51228				2.26992
F		.61895	5.49407	3.85160	.06663		10.03125
G			.41032	6.64479	2.41472		9.46983
K				1.89446	11.09021	2.05158	15.03625
M				.02581	6.84510	27.86508	34.73600
$A_i^{(a)}$	.41667	2.41667	6.41667	12.41666	20.41666	29.91666	72.00000

B4: $f(s) = F(s)$

$S^{(a)} \backslash S^{(e)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(e)}$
B	3.87642	2.31988					6.19630
A	1.83296	14.93495	3.43352				20.20143
F		3.25170	14.17734	4.12515	.03969		21.59388
G			.39232	4.12595	1.19554		5.71381
K				.91315	5.97715	1.20395	8.09425
M				.01333	3.76595	6.92105	10.70033
$A_i^{(a)}$	5.70938	20.50653	18.00318	9.17758	10.97833	8.12500	72.50000

TABELLE 6

Berechnete Streutafeln der Gruppe C
Vergleich der Spektralsysteme $S^{(b)}$ und $S^{(c)}$

$$C1: f(s) = 1$$

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$U_k^{(c)}$
B	.77942	.27058					1.05
A	.07058	.83602	.04340				.95
F		.24340	.55614	.47753	.07293		1.35
G			.00046	.34042	.35912		.70
K				.03205	.64684	.07111	.75
M					.37111	.82889	1.20
$U_i^{(b)}$	.85	1.35	.60	.85	1.45	.90	6.00

$$C2: f(s) = s$$

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)}$
B	.32795	.25705					.58500
A	.06705	1.27398	.08897				1.43000
F		.52064	1.38966	1.47172	.24798		3.63000
G			.00137	1.20347	1.36183		2.56667
K				.12981	2.87175	.34844	3.35000
M					1.85177	4.58656	6.43833
$A_i^{(b)}$	.39500	2.05167	1.48000	2.80500	6.33333	4.93500	18.00000

TABELLE 6 - (Forts.)

C3: $f(s) = s^2$

$S^{(b)} \backslash S^{(c)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)}$
B	.19666	.26009					.45675
A	.06542	2.02155	.18294				2.26991
F		1.12294	3.50103	4.56182	.84546		10.03125
G			.00403	4.28047	5.18533		9.46983
K				.52613	12.80047	1.70965	15.03625
M					9.27466	25.46135	34.73601
$A_i^{(b)}$	.26208	3.40458	3.68800	9.36842	28.10592	27.17100	72.00000

C4: $f(s) = F(s)$

$S^{(b)} \backslash S^{(c)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)}$
B	3.06593	3.13037					6.19630
A	.78301	18.37809	1.04033				20.20143
F		5.52896	10.11319	5.30338	.64835		21.59388
G			.00557	2.89104	2.81720		5.71381
K				.24941	6.84155	1.00329	8.09425
M					4.71501	5.98532	10.70033
$A_i^{(b)}$	3.84894	27.03742	11.15909	8.44383	15.02211	6.98861	72.50000

TABELLE 7

Berechnete Streutafeln der Gruppe D
Vergleich des Spektralsystems $S^{(b)}$ mit sich selbst

$$D1: f(s) = 1$$

$S^{(b)}$	$S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$U_k^{(b)}$
B		.70000	.15000					.85000
A		.15000	1.06666..	.133333..				1.35000
F			.13333..	.40000	.06666..			.60000
G				.06666..	.56666..	.21666..		.85000
K					.21666..	1.03333..	.20000	1.45000
M						.20000	.70000	.90000
$U_i^{(b)}$		.85000	1.35000	.60000	.85000	1.45000	.90000	6.00000

$$D2: f(s) = s$$

$S^{(b)}$	$S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(b)}$
B		.26750	.12750					.39500
A		.12750	1.63083..	.29333..				2.05166..
F			.29333..	1.00000	.18666..			1.48000
G				.18666..	1.82750	.79083..		2.80500
K					.79083..	4.52250	1.02000	6.33333..
M						1.02000	3.91500	4.93500
$A_i^{(b)}$		.39500	2.05166..	1.48000	2.80500	6.33333..	4.93500	18.00000

TABELLE 7 - (Forts.)

D3: $f(s) = s^2$

$S^{(b)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(b)}$
B	.14673	.11445					.26208
A	.11445	2.64053	.64960				3.40458
F		.64960	2.51520	.52320			3.68800
G			.52320	5.94037	2.90485		9.36842
K				2.90485	19.98467	5.21640	28.10592
M					5.21640	21.95460	27.17100
$A_i^{(b)}$	.26208	3.40458	3.68800	9.36842	28.10592	27.17100	72.00000

D4: $f(s) = F(s)$

$S^{(b)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(b)}$
B	2.44971	1.39923					3.84894
A	1.39923	22.68838	2.94981				27.03742
F		2.94981	7.26989	.93939			11.15909
G			.93939	5.72267	1.78176		8.44382
K				1.78176	10.71770	2.52265	15.02211
M					2.52265	4.46596	6.98861
$A_i^{(b)}$	3.84894	27.03742	11.15909	8.44382	15.02211	6.98861	72.49999

In der Praxis allerdings werden solche Aufgaben kaum vorkommen. Hier erfolgt der Übergang entweder von den aktuellen Frequenzen (a_{ik}) zu den Grundfrequenzen (α_{ik}) oder (β_{ik}) oder gar direkt zu einer neuen Tafel aktueller Frequenzen (b_{ik}) . Die bei diesen Operationen auftretenden Reduktionsfaktoren können nicht wesentlich verschieden sein von den bei den Übergängen von elementaren Teilfrequenzen nach aktuellen Frequenzen benutzten f_{ik} . Führen z. B. φ_{ik} von (α_{ik}) zu (a_{ik}) , $f_{ik}^{(a)}$ von (u_{ik}) nach (a_{ik}) und $f_{ik}^{(a)}$ von (u_{ik}) nach (α_{ik}) , dann wird

$$\varphi_{ik} = \frac{f_{ik}^{(a)}}{f_{ik}^{(a)}} , \quad (89)$$

und die für $f_{ik}^{(a)}$ und $f_{ik}^{(a)}$ geltenden Bildungsgesetze müssen im Wesentlichen auch gelten für die Bildung der φ_{ik} .

In den folgenden Tabellen 8-11 werden die *Reduktionsfaktoren* f_{ik} geboten, die erhalten werden durch Division der aktuellen Frequenzen der betreffenden Streutafel durch die entsprechenden elementaren Teilfrequenzen u_{ik} ,

$$f_{ik} = \frac{a_{ik}}{u_{ik}} . \quad (90)$$

Die Randkolonnen bieten die Quotienten aus den aktuellen und elementaren Klassenfrequenzen

$$f_i^{(s)} = \frac{A_i^{(s)}}{U_i^{(s)}} \quad (91a)$$

und

$$f_k^{(y)} = \frac{A_k^{(y)}}{U_k^{(y)}} . \quad (91b)$$

In diesen Tafeln werden nur vier Dezimalen angegeben, was für die Übersicht und die Erkenntnis etwaiger Gesetzmässigkeiten hinreicht.

Die Übereinstimmung der Reduktionsfaktoren f_{ik} mit den ihnen entsprechenden Funktionswerte $f(\bar{s}_{ik})$ mögen die Tabellen 12-15 darstellen. Es ist klar, dass für richtig gewählte $\bar{s}_{ik}$ die Übereinstimmung vollkommen werden muss, aber auch, dass sich, wie schon oben S. 46 hervorgehoben wurde, diese $\bar{s}_{ik}$ ändern je nach der Eigenart der Besetzungsfunktion und

TABELLE 8
Reduktionsfaktoren für die Streutafelgruppe A

A1 → A2

$S^{(a)} \backslash S^{(a)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(a)} / U_k^{(a)}$
B	.45	1.00					.54166..
A	1.00	1.50	2.00				1.50
F		2.00	2.50	3.00			2.50
G			3.00	3.50	4.00		3.50
K				4.00	4.50	5.00	4.50
M					5.00	5.55	5.45833..
$A_i^{(a)} / U_i^{(a)}$	.54166..	1.50	2.50	3.50	4.50	5.45833..	

A1 → A3

$S^{(a)} \backslash S^{(a)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(a)} / U_k^{(a)}$
B	.2900	1.05					.4166..
A	1.05	2.35	4.05				2.4166..
F		4.05	6.35	9.05			6.4166..
G			9.05	12.35	16.05		12.4166..
K				16.05	20.35	25.05	20.4166..
M					25.5	30.89	29.9166..
$A_i^{(a)} / U_i^{(a)}$	.4166..	2.4166..	6.4166..	12.4166..	20.4166..	29.9166..	

A1 → A4

$S^{(a)} \backslash S^{(a)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(a)} / U_k^{(a)}$
B	4.3448	12.5322					5.7094
A	12.5322	21.6963	23.7216				20.5065
F		23.7216	18.1069	11.8698			18.0032
G			11.8698	8.8029	7.9840		9.1776
K				7.9840	11.0809	13.5625	10.9783
M					13.5625	7.0375	8.1250
$A_i^{(a)} / U_i^{(a)}$	5.7094	20.5065	18.0032	9.1776	10.9783	8.1250	

TABELLE 9
Reduktionsfaktoren für die Streutafelgruppe B

B1 → B2

$S^{(a)} \backslash S^{(c)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)} / U_k^{(c)}$
B	.4623	1.0004					.5571
A	1.0500	1.5135	1.9048				1.5053
F		2.0953	2.5675	3.1509	3.6500		2.6889
G			3.2000	3.6242	3.9223		3.6667
K				4.1409	4.4648	4.9000	4.4667
M				4.4025	4.9023	5.5104	5.3653
$A_i^{(a)} / U_i^{(a)}$	.5417	1.5000	2.5000	3.5000	4.5000	5.4583	

B1 → B3

$S^{(a)} \backslash S^{(c)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)} / U_k^{(c)}$
B	.3033	1.0508					.4350
A	1.1430	2.3755	3.6591				2.3894
F		4.4211	6.7001	10.0042	13.3260		7.4306
G			10.2580	13.2016	15.4131		13.5283
K				17.1703	20.0634	24.0420	20.0483
M				19.8538	24.1025	30.4647	28.9467
$A_i^{(a)} / U_i^{(a)}$	.4167	2.4167	6.4167	12.4167	20.4167	29.9167	

B1 → B4

$S^{(a)} \backslash S^{(c)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)} / U_k^{(c)}$
B	4.4814	12.5399					5.9012
A	13.5775	22.1259	24.5251				21.2647
F		23.2264	17.2894	10.7147	7.9380		15.9955
G			9.8080	8.1973	7.6312		8.1626
K				8.2763	10.7826	14.1088	10.7923
M				10.2538	13.2604	7.5667	8.9169
$A_i^{(a)} / U_i^{(a)}$	5.7094	20.5065	18.0032	9.1776	10.9783	8.1250	

TABELLE 10
Reduktionsfaktoren für die Streutafelgruppe C

C1 → C2

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)} / U_k^{(c)}$
B	.4208	.9500					.5571
A	.9500	1.5239	2.0500				1.5053
F		2.1390	2.4988	3.0819	3.4002		2.6889
G			2.9783	3.5353	3.7921		3.6667
K				4.0502	4.4397	4.9000	4.4667
M					4.9898	5.5334	5.3653
$A_i^{(b)} / U_i^{(b)}$	.4647	1.5198	2.4667	3.3000	4.3678	5.4833	

C1 → C3

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)} / U_k^{(c)}$
B	.2523	.9612					.4395
A	.9269	2.4181	4.2152				2.3894
F		4.6136	6.2952	9.5529	11.5928		7.4306
G			8.7609	12.5741	14.4390		13.5283
K				16.4159	19.7892	24.0423	20.0483
M					24.9917	30.7134	28.9467
$A_i^{(b)} / U_i^{(b)}$	.3083	2.5219	6.1467	11.0217	19.3834	30.1900	

C1 → C4

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(c)} / U_k^{(c)}$
B	3.9336	11.5691					5.9012
A	11.0939	21.9828	23.9703				21.2647
F		22.7155	18.1846	11.1059	8.8900		15.9955
G			12.1087	8.4926	7.8447		8.1626
K				7.7819	10.5769	14.1090	10.7923
M					12.7052	6.7383	8.9169
$A_i^{(b)} / U_i^{(b)}$	4.5282	20.0277	18.5985	9.9339	10.3601	7.7651	

TABELLE II

Reduktionsfaktoren für die Streutafelgruppe D

D1 → D2

$S^{(b)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(b)}/U_k^{(b)}$
B	.3821	.8500					.4647
A	.8500	1.5289	2.2000				1.5198
F		2.2000	2.5000	2.8000			2.4667
G			2.8000	3.2250	3.6500		3.3000
K				3.6500	4.3766	5.1000	4.3678
M					5.1000	5.5929	5.4833
$A_i^{(b)}/U_i^{(b)}$	.4647	1.5198	2.4667	3.3000	4.3678	5.4833	

D1 → D3

$S^{(b)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(b)}/U_k^{(b)}$
B	.2109	.7630					.3083
A	.7630	2.4755	4.8720				2.5219
F		4.8720	6.2880	7.8480			6.1467
G			7.8480	10.4830	13.4070		11.0217
K				13.4070	19.3400	26.0820	19.3834
M					26.0820	31.3636	30.1900
$A_i^{(b)}/U_i^{(b)}$	.3083	2.5219	6.1467	11.0217	19.3834	30.1900	

D1 → D4

$S^{(b)} \backslash S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$A_k^{(b)}/U_k^{(b)}$
B	2.8820	9.3282					4.5282
A	9.3282	21.2704	22.1236				20.0277
F		22.1236	18.1747	14.0909			18.5984
G			14.0909	10.0988	8.2235		9.9339
K				8.2235	10.3720	12.6133	10.3601
M					12.6133	6.3799	7.7651
$A_i^{(b)}/U_i^{(b)}$	4.5282	20.0277	18.5984	9.9339	10.3601	7.7651	

der Schätzungsfunktionen. Hier sollen nun für alle Besetzungsfunktionen f_2, f_3 und f_4 dieselben mittleren Intervallstellen $\bar{s}_{ik}$ verwendet werden, die ganz unabhängig von jeder Besetzungsfunktion gewählt werden, nur nach den Ergebnissen der Integration der reinen Schätzungsfunktionen, wie sie in den Streutafeln mit der Besetzungsfunktion $f_i = 1$ auftreten.

Bezeichnen wir die mittlere Stelle der Spektralfolge über die für u_{ik} das Integral zu nehmen ist, mit $\bar{s}_{ik}$, so lässt sich diese Stelle streng berechnen aus der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\bar{s}_{ik}} w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds = \int_{\bar{s}_{ik}}^{+\infty} w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds. \quad (92)$$

Doch da es sich hier doch nur um Mittelwerte handelt, die dazu noch für die verschiedensten Besetzungsfunktionen gelten sollten, genügt auch eine einfachere Bestimmung. Für die zu den Nebenfrequenzen gehörigen $\bar{s}_{ik}$, wenn also $i \neq k$ ist, nehmen wir das einfache Mittel aus den für die betreffende Teilfrequenz u_{ik} geltenden Integrationsgrenzen, also wenn z. B. $k > i$ ist, die untere Grenze des Definitionsbereiches der Schätzungsfunktion $w_k^{(y)}$ und die obere des Definitionsbereiches der Schätzungsfunktion $w_i^{(x)}$.

Die zu den Hauptfrequenzen u_{ii} gehörigen mittleren $\bar{s}_{ii}$ wurden bestimmt zu

$$\bar{s}_{ii} = \frac{\bar{s}_i^{(x)} + \bar{s}_i^{(y)}}{2}, \quad (92a)$$

wobei $\bar{s}_i^{(x)}$ bzw. $\bar{s}_i^{(y)}$ die mittleren Koordinaten der Spektralklassen $S_i^{(x)}$ bzw. $S_i^{(y)}$ in der Spektralfolge darstellen, die man aus ähnlichen Gleichungen wie Gleichung (92) erhält:

$$\int_{-\infty}^{\bar{s}_i^{(x)}} w_i^{(x)}(s) ds = \int_{\bar{s}_i^{(x)}}^{+\infty} w_i^{(x)}(s) ds = \frac{1}{2} U_i^{(x)} \quad (92b)$$

und ebenso für $\bar{s}_i^{(y)}$. Praktisch sind diese mittleren Koordinaten der Spektralklassen also nichts anderes als die Mitten der Spektralintervalle der Klassen $S_i^{(x)}$ und $S_k^{(y)}$, wenn man ihre elementaren Häufigkeiten $U_i^{(x)}$ und $U_k^{(y)}$ als diese Intervalle auffasst und sie längs der Spektralfolge aneinanderreih.

TABELLE 12

Die Reduktionsfaktoren der Streutafelgruppe A in ihren Beziehungen zu den Besetzungsfunktionen

<i>ik</i>	A1 → A2		A1 → A3		A1 → A4	
	$\bar{s}_{ik} = f_2(\bar{s}_{ik})$	f_{ik}	$f_3(\bar{s}_{ik})$	f_{ik}	$F(\bar{s}_{ik})$	f_{ik}
BA, AB	1	1	1	1.05	12.0	12.53
AF, FA	2	2	4	4.05	25.0 (1)	23.72
FG, GF	3	3	9	9.05	11.2	11.87
GK, KG	4	4	16	16.05	7.5	7.98
KM, MK	5	5	25	25.05	16.0 (1)	13.56
BB	.5	.45	.25	.29	4.4	4.34
AA	1.5	1.5	2.25	2.35	25.0 (1)	21.70
FF	2.5	2.5	6.25	6.35	18.0	18.11
GG	3.5	3.5	12.25	12.35	8.4	8.80
KK	4.5	4.5	20.25	20.35	11.0	11.08
MM	5.5	5.55	30.25	30.89	8.0	7.04

TABELLE 13

Die Reduktionsfaktoren der Streutafelgruppe B in ihren Beziehungen zu den Besetzungsfunktionen

$i \ k$ (a) (c)	B1 $\rightarrow$ B2		B1 $\rightarrow$ B3		B1 $\rightarrow$ B4	
	$\bar{s}_{ik} = f_2(\bar{s}_{ik})$	f_{ik}	$f_3(\bar{s}_{ik})$	f_{ik}	$F(\bar{s}_{ik})$	f_{ik}
B A	1.05	1.05	1.10	1.14	13.2	13.58
A B	1.00	1.00	1.00	1.05	12.0	12.54
A F	2.10	2.10	4.41	4.42	23.6	23.23
F A	1.90	1.90	3.61	3.66	25.0	24.53
F G	3.20	3.20	10.24	10.26	9.6	9.81
G F	3.15	3.15	9.92	10.00	9.8	10.71
G K	4.15	4.14	17.22	17.17	8.3	8.28
K G	3.90	3.92	15.21	15.41	7.0	7.63
K M	4.90	4.90	24.01	24.10	15.0	13.26
M K	4.90	4.90	24.01	24.04	15.0	14.10
K F	3.65	3.65	13.32	13.33	7.9	7.94
G M	4.40	4.40	19.36	19.85	10.0	10.25
B B	.51	.46	.26	.30	4.4	4.48
A A	1.51	1.51	2.29	2.37	25.0 (!)	22.13
F F	2.59	2.57	6.70	6.70	16.8	17.29
G G	3.60	3.62	12.96	13.20	8.1	8.20
K K	4.46	4.46	19.91	20.06	10.6	10.78
M M	5.45	5.51	29.70	30.46	8.7	7.57

TABELLE 14

Die Reduktionsfaktoren der Streutafelgruppe C in ihren Beziehungen zu den Besetzungsfunktionen

$i \ k$ (b) (c)	C1 $\rightarrow$ C2		C1 $\rightarrow$ C3		C1 $\rightarrow$ C4	
	$\bar{s}_{ih} = f_2(\bar{s}_{ih})$	f_{ih}	$f_3(\bar{s}_{ih})$	f_{ih}	$F(\bar{s}_{ih})$	f_{ih}
B A	.95	.95	.72	.93	8.2	11.09
A B	.95	.95	.90	.96	10.1	11.57
A F	2.15	2.14	4.62	4.61	22.7	22.72
F A	2.05	2.05	4.20	4.22	24.2	23.97
F G	2.95	2.98	8.70	8.76	11.9	12.11
G F	3.20	3.08	10.24	9.55	9.6	11.11
G K	4.05	4.05	16.40	16.42	7.7	7.78
K G	3.65	3.79	13.32	14.44	7.9	7.84
K M	5.00	4.99	25.00	24.99	16.0 (!)	12.71
M K	4.90	4.90	24.01	24.04	15.0	14.11
K F	3.40	3.40	11.56	11.59	8.8	8.89
B B	.48	.42	.23	.25	4.2	3.93
A A	1.53	1.52	2.33	2.42	25.0 (!)	21.98
F F	2.59	2.50	6.70	6.30	16.8	18.18
G G	3.46	3.54	11.99	12.57	8.6	8.49
K K	4.40	4.44	19.36	19.79	10.0	10.58
M M	5.48	5.53	29.98	30.71	8.3	6.74

TABELLE 15

Die Reduktionsfaktoren der Streutafelgruppe D in ihren Beziehungen zu den Besetzungsfunktionen

<i>ik</i>	D1→D2		D1→D3		D1→D4	
	$\bar{s}_{ik}=f_2(\bar{s}_{ik})$	f_{ik}	$f_3(\bar{s}_{ik})$	f_{ik}	$F(\bar{s}_{ik})$	f_{ik}
BA, AB	.85	.85	.72	.76	8.2	9.33
AF, FA	2.20	2.20	4.84	4.87	22.2	22.12
FG, GF	2.80	2.80	7.84	7.85	14.0	14.09
GK, KG	3.65	3.65	13.32	13.41	7.9	8.22
KM, MK	5.10	5.10	26.01	26.08	14.4	12.61
BB	.43	.38	.18	.21	3.7	2.88
AA	1.53	1.53	2.33	2.48	25.0 (1)	21.27
FF	2.50	2.50	6.25	6.29	18.0	18.17
GG	3.23	3.23	10.40	10.48	9.5	10.10
KK	4.38	4.38	19.14	19.34	9.7	10.37
MM	5.55	5.59	30.80	31.36	7.1	6.38

Die Werte der auf diese Weise erhaltenen $\bar{s}_{ik}$ finden sich in den Tabellen gleich zu Beginn und gelten natürlich gleichzeitig auch als Funktionswerte der zugehörigen Besetzungsfunktion $f_z(s) = s$. Für $F(s)$ wurden die zugehörigen Funktionswerte aus der in Fig. 3 gebotenen Kurve für diese Besetzungsfunktion abgelesen. $F(s)$ ist eine Besetzungsfunktion, wie sie wohl nicht ganz der Forderung nach einem natürlichen Verlauf entspricht. Es braucht dann auch weiter nicht wunderzunehmen, wenn an besonders kritischen Stellen, die mit (!) markiert sind, grössere Abweichungen zwischen den Funktionswerten und den zugehörigen tatsächlichen Reduktionsfaktoren f_{ik} auftreten.

Nach diesen Vorbereitungen kann nun versucht werden, die Reduktionsfunktion, die die Nebenreduktionsfaktoren f_{ik} in Beziehung setzt zu den zugehörigen Hauptreduktionsfaktoren f_{ii} und f_{hh} , näher zu bestimmen. Es scheint allerdings nach dem vorliegenden Material ziemlich aussichtslos zu sein, in dieser Hinsicht nach irgendwelchen einfachen Gesetzmässigkeiten zu fahnden, die diese Reduktionsfaktoren beherrschen. Immerhin finden sich einige Andeutungen, die zu einem ersten Ansatz verhelfen können.

1. Es ist sofort ersichtlich, dass die Faktoren f_{ik} ($k = 1, 2, \dots, n$), die zu derselben Spektralklasse $S_i^{(n)}$ gehören, unter sich verschieden sind, auch in dem einfachsten Fall des Übergangs von A1 $\rightarrow$ A2. Es genügt also nicht, wie das schon oben S. 36 hervorgehoben wurde, die elementaren Teilfrequenzen mit den entsprechenden Klassenfrequenzen zu multiplizieren, um die gewünschte Streutafel zu erhalten.

2. Die Reduktionsfaktoren f_{ik} sind ihrem Wesen nach Funktionswerte $f(\bar{s}_{ik})$ der Besetzungsfunktion. Die Eigenart der Verknüpfung der beiden Spektralsysteme wird gegeben durch die elementaren Teilfrequenzen u_{ik} und hat nur einen mittelbaren Einfluss auf die Grösse der entsprechenden Reduktionsfaktoren durch Bestimmung der mittleren Stellen $\bar{s}_{ik}$ der Spektralfolge. $\bar{s}_{ik}$ ist allerdings auch abhängig von der Form der Besetzungsfunktion an dieser Stelle, aber nur in *weiter* Linie. In erster Näherung lassen sich für verschiedene Besetzungsfunktionen dieselben mittleren $\bar{s}_{ik}$ verwenden, wie die Zusammenstellung der Tabellen 12-15 zeigt. Nur bei der sehr unregelmässigen Besetzungsfunktion $F(s)$ ergeben sich grössere Unstimmigkeiten.

3. Die mittlere Stelle $\bar{s}_{ik}$ hängt ab von den Spektralklassen $S_i^{(s)}$ und $S_k^{(s)}$, wird also nur dann gleich $\bar{s}_{ki}$ sein, wenn es sich um den Vergleich identischer Systeme handelt, wie bei den Streutafelgruppen A und D. Immerhin liegen $\bar{s}_{ik}$ und $\bar{s}_{ki}$ gewöhnlich nahe beisammen, sodass näherungsweise auch gesetzt werden kann

$$\bar{s}_{ik} \doteq \bar{s}_{ki}, \quad (93a)$$

Daraus folgt dann

$$f_{ik} \doteq f_{ki}. \quad (93b)$$

Volle Gleichheit findet sich nur, wie gesagt, beim Vergleich derselben Systeme, wie die Tabellen 8 und 11 zeigen, sonst bestehen Unterschiede, die aber immerhin noch in mässigen Grenzen bleiben, wie aus den anderen Tabellen 9 und 10 ersichtlich ist.

4. Die mittlere Stelle $\bar{s}_{ik}$ liegt etwa halbwegs zwischen $\bar{s}_{ii}$ und $\bar{s}_{kk}$, sodass sich angenähert setzen lässt

$$\bar{s}_{ik} \doteq \frac{\bar{s}_{ii} + \bar{s}_{kk}}{2} \quad (94)$$

und in der Folge

$$f_{ik} \doteq f \left(\frac{\bar{s}_{ii} + \bar{s}_{kk}}{2} \right) \quad (95)$$

$$\doteq m(f_{ii}, f_{kk}), \quad (95a)$$

wobei $m(f_{ii}, f_{kk})$ irgendeinen mittleren Wert der Besetzungsfunktion zwischen den Werten f_{ii} und f_{kk} bedeuten soll.

Strenge arithmetische Mittelwerte finden sich in den angeführten Tabellen nur bei den Reduktionsfaktoren für die Innenklassen beim Übergang $A1 \rightarrow A2$, wo

$$f_{ik} = \frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$$

wird. Auch für $A1 \rightarrow A3$ bleibt das Bildungsgesetz noch durchsichtig:

$$f_{ik} = \frac{f_{ii} + f_{kk}}{2} \cdot 3,$$

für $k \neq i$.

Für $A1 \rightarrow A4$ ist wegen der grossen Unregelmässigkeit der Besetzungsfunktion $F(s)$ eine übersichtliche Darstellung nicht mehr möglich. Für die anderen Tabellen lässt sich ein derartiges Mittel auch nur höchstens als eine erste Näherung bezeichnen. Setzen wir aber einmal als Näherung an

$$f_{ik} \doteq \frac{f_{ii} + f_{kk}}{2},$$

so gilt dieser Ansatz nicht nur für die Reduktionsfaktoren der Nebenfrequenzen erster Ordnung, sondern auch für diejenigen, die weiter abliegen von der Hauptdiagonale, wie aus den Tabellen 9 und 10 hervorgeht.

Die *Ergebnisse* dieser Überlegungen bezüglich der Beziehungen der Nebenreduktionsfaktoren f_{ik} zu den zugehörigen Hauptfaktoren f_{ii} und f_{kk} sind im Grunde genommen wenig ermutigend. Trotz so mancher Vereinfachungen, die zugestanden wurden, lässt sich mit Sicherheit nur behaupten, dass der Faktor f_{ik} irgend einen Mittelwert darstellt zwischen den Faktoren f_{ii} und f_{kk} im Sinne der Gleichung (95a). Bei der Unkenntnis der wirklichen Schätzungs- und Besetzungsfunktionen, ja selbst der elementaren Teilfrequenzen, wie es bei den gewöhnlichen praktischen Aufgaben der Fall ist, scheint es vorderhand aussichtslos, nach genaueren Bildungsgesetzen für die Reduktionsfaktoren zu fahnden. So wird man sich mit dem Unvermeidlichen abfinden und sich von vornherein mit einer Näherungslösung bescheiden. Dementsprechend setzen wir einmal versuchsweise f_{ik} an als das arithmetische oder geometrische Mittel aus f_{ii} und f_{kk} , also

$$f_{ik} = \frac{f_{ii} + f_{kk}}{2} \quad (96)$$

oder

$$f_{ik} = \sqrt{f_{ii} f_{kk}}. \quad (97)$$

Beide Ansätze (96) und (97) ermöglichen nach den oben S. 46ff. gegebenen Darlegungen eine rein algebraische Lösung der gestellten Aufgabe. Es fragt sich nur noch, welcher der beiden Ansätze vorzuziehen ist.

Das arithmetische Mittel als Reduktionsfunktion empfiehlt sich wegen der einfacheren Handhabung bei der Auflösung der Bestimmungsgleichungen und wird auch nahegelegt – wenigstens in einigen Fällen – durch die vorhergehenden Überlegungen. Doch bietet dieser Ansatz Schwie-

rigkeiten, sobald man verlangt, dass die Reduktionsfaktoren auch bei Übergängen von einer beliebigen Streutafel zu einer ihr isogenen nach derselben Weise gebildet werden sollen. Das geometrische Mittel ist in der Handhabung etwas umständlicher, ermöglicht aber eine durchwegs konsequente Darstellung der Reduktionsfaktoren nach demselben Schema und auch der Beziehungen der beiden Grundfrequenztafeln zueinander. Diese Gedanken mögen noch etwas erläutert werden.

Zunächst möge derselbe Ansatz (96) gelten für den Übergang von den elementaren Teilfrequenzen u_{ik} auf die aktuellen Frequenzen a_{ik} und auch – im Hinblick auf die praktische Verwertung – von der Grundfrequenzen α_{ik} und β_{ik} auf die aktuellen Frequenzen a_{ik} , also auch

$$\varphi_{ik} = \frac{\varphi_{ii} + \varphi_{kk}}{2}, \quad (98)$$

wenn die φ_{ik} die Reduktionsfaktoren für den Übergang $\alpha_{ik} \rightarrow a_{ik}$ bedeuten. Andererseits ist aber nach (89) S. 68

$$\varphi_{ik} = \frac{f_{ik}^{(a)}}{f_{ik}^{(\alpha)}}, \quad (89)$$

wobei die $f_{ik}^{(a)}$ den Übergang von $u_{ik} \rightarrow a_{ik}$ vermitteln, die $f_{ik}^{(\alpha)}$ den Übergang $u_{ik} \rightarrow \alpha_{ik}$. Gilt nun dasselbe Bildungsgesetz (98) auch für die $f_{ik}^{(a)}$ und die $f_{ik}^{(\alpha)}$, dann entstehen Unstimmigkeiten; denn es ist

$$f_{ik}^{(a)} = \frac{f_{ii}^{(a)} + f_{kk}^{(a)}}{2} \quad \text{und} \quad (99)$$

$$f_{ik}^{(\alpha)} = \frac{f_{ii}^{(\alpha)} + f_{kk}^{(\alpha)}}{2}, \quad \text{also} \quad (100)$$

$$\varphi_{ik} = \frac{f_{ii}^{(a)} + f_{kk}^{(a)}}{f_{ii}^{(\alpha)} + f_{kk}^{(\alpha)}}. \quad (101)$$

Nun ist aber auch nach (89)

$$\varphi_{ii} = \frac{f_{ii}^{(a)}}{f_{ii}^{(\alpha)}} \quad (102)$$

und

$$\varphi_{kk} = \frac{f_{kk}^{(a)}}{f_{kk}^{(\alpha)}}. \quad (103)$$

Werden diese Werte (102) und (103) in (98) eingesetzt, dann erhalten wir

$$\varphi_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{f_{ii}^{(a)}}{f_{ii}^{(\alpha)}} + \frac{f_{kk}^{(a)}}{f_{kk}^{(\alpha)}} \right), \quad (104)$$

eine Gleichung, die offenbar mit (101) nur in dem Sonderfall identisch wird, wenn $f_{kk}^{(a)} = f_{ii}^{(a)}$ und $f_{kk}^{(\alpha)} = f_{ii}^{(\alpha)}$ sind.

Die Schwierigkeit verschwindet sofort, wenn statt des arithmetischen Mittels (96) das geometrische (97) als Bildungsgesetz für die Reduktionsfaktoren benützt wird. Dann wird nach (97)

$$\varphi_{ik} = \sqrt{\varphi_{ii} \varphi_{kk}}$$

und nach (89)

$$\begin{aligned} \varphi_{ik} &= \frac{f_{ik}^{(a)}}{f_{ik}^{(\alpha)}} = \frac{\sqrt{f_{ii}^{(a)} f_{kk}^{(a)}}}{\sqrt{f_{ii}^{(\alpha)} f_{kk}^{(\alpha)}}} = \sqrt{\frac{f_{ii}^{(a)}}{f_{ii}^{(\alpha)}}} \cdot \sqrt{\frac{f_{kk}^{(a)}}{f_{kk}^{(\alpha)}}} = \\ &= \sqrt{\varphi_{ii} \varphi_{kk}}. \end{aligned}$$

Der Ansatz (96) hat noch eine weitere Schwierigkeit: die Bildung der Nebenreduktionsfaktoren als das arithmetische Mittel der zugehörigen Hauptreduktionsfaktoren kann nicht gleichzeitig gelten für die Reduktionsfaktoren f_{ik} , die von den u_{ik} zu den a_{ik} führen, und für die F_{ik} , die den Rückweg besorgen. Es muss nämlich nach (71) S. 47 sein

$$F_{ik} = \frac{1}{f_{ik}}. \quad (71)$$

Gilt nun der Ansatz (96) vorerst für die f_{ik} , dann erhält man

$$\begin{aligned} F_{ik} &= \frac{1}{f_{ik}} = \frac{2}{f_{ii} + f_{kk}} = \frac{2}{\frac{1}{F_{ii}} + \frac{1}{F_{kk}}} = \\ &= \frac{2 F_{ii} F_{kk}}{F_{ii} + F_{kk}}. \end{aligned} \quad (105)$$

Auch hier ist die Verwendung des geometrischen Mittels (97) als Bildungsgesetz bedeutend einfacher; wir erhalten dann

$$F_{ik} = \frac{1}{f_{ik}} = \frac{1}{\sqrt{f_{ii} f_{kk}}} = \sqrt{\frac{1}{F_{ii} F_{kk}}} = \sqrt{F_{ii} F_{kk}}. \quad (106)$$

Da es sich doch nur um Näherungen handelt, liessen sich diese Schwierigkeiten auch umgehen durch die Festsetzung, dass – wenigstens für die Lösung der praktischen Aufgaben – die Bildung der Reduktionsfaktoren φ_{ik} und ψ_{ik} zum Übergang von den Grundfrequenzen α_{ik} oder β_{ik} zu den aktuellen Frequenzen a_{ik} mit dem arithmetischen Mittel nach Ansatz (96) vorgenommen werden soll und dementsprechend die Bildung der reziproken Reduktionsfaktoren Φ_{ik} und Ψ_{ik} nach dem Schema der Gleichung (105). Doch ergibt sich dann für die Beziehungen der *Grundfrequenztafeln* untereinander (Vgl. die Ausführungen S. 48ff.) die Schwierigkeit. Die Faktoren, die z. B. die α_{ik} in die β_{ik} überführen sind einmal aufzufassen als ζ_{ik} , die von den *Grundfrequenzen* α_{ik} zu den *aktuellen* Frequenzen β_{ik} führen durch die Vorgabe der Restfrequenzen $R_i^{(n)}$ als gewünschte Klassenfrequenzen nach den Bedingungsgleichungen

$$\sum_k \alpha_{ik} \zeta_{ik} = R_i^{(n)} ;$$

dann können sie aber auch aufgefasst werden als Faktoren Z_{ik} , die von der Tafel der *aktuellen* Frequenzen zu den *Grundfrequenzen* β_{ik} führen über die entsprechenden Bedingungsgleichungen

$$\sum_i \alpha_{ik} Z_{ik} = 1 .$$

Nach dem gerade Gesagten hätte man nun anzusetzen nach (96)

$$\zeta_{ik} = \frac{\zeta_{ii} + \zeta_{kk}}{2}$$

und nach (105),

$$Z_{ik} = \frac{2 Z_{ii} Z_{kk}}{Z_{ii} + Z_{kk}}$$

welche Ansätze wegen $\zeta_{ik} = Z_{ik}$ nur bestehen können, wenn auch

$$Z_{ii} = Z_{kk} \text{ und } \zeta_{ii} = \zeta_{kk} \text{ sind.}$$

Dieser Fall ist nun allerdings formal auch verwirklicht, wenn nämlich die beiden Tafeln der Grundfrequenzen zusammenfallen wie bei der Streutafelgruppe A und D, wobei dann

$$\zeta_{ii} = Z_{ii} = 1$$

ist für alle i .

Auch hier überwindet das geometrische Mittel als Bildungsgesetz für die Reduktionsfaktoren die Schwierigkeit.

Ähnliche Unstimmigkeiten ergeben sich schliesslich, wenn die weiteren gegenseitigen Beziehungen der Streutafeln der Grundfrequenzen untereinander aufrecht erhalten werden sollen, wie sie in Gleichung (84a) S. 50 niedergelegt wurden, nämlich

$$\zeta_{ik} = Z_{ik} = \frac{1}{\xi_{ik}} = \frac{1}{\Xi_{ik}} = \frac{\Psi_{ik}}{\Phi_{ik}} = \frac{\varphi_{ik}}{\psi_{ik}}. \quad (84a)$$

Hier ist nur das geometrische Mittel als Ansatz der Nebenfaktoren möglich, wenn eine befriedigende Darstellung erstrebt wird.

Nach dem Gesagten dürfte es also nicht gerade schwer fallen, sich für den *geometrischen Ansatz* (97) zu entscheiden. Es bleibt allerdings noch das Unbehagen, dass uns das arithmetische Mittel als Reduktionsfunktion geradezu nahegelegt wird bei einigen Übergängen, wie z. B. bei $A1 \rightarrow A2$ und vielleicht auch noch bei $A1 \rightarrow A3$. Doch führt auch der arithmetische Ansatz (96) nicht weiter als zu einer Näherung, die auch nicht viel besser oder schlechter ist als die beim geometrischen Ansatz erreichte. In den Tabellen 16-19 werden die mit beiden Ansätzen berechneten Nebenreduktionsfaktoren mit den wirklichen f_{ik} verglichen, so weit sie in dem bisherigen Material auftreten. Die Abweichungen sind absolut und prozentuell angeführt, und man erkennt auf den ersten Blick, dass die Näherung bei beiden Ansätzen nicht gerade hervorragend genannt werden kann; andererseits halten sich beide ungefähr die Waage, was die Genauigkeit der Näherung betrifft.

Für die Bestimmung der Reduktionsfaktoren ergeben sich dann in der Praxis die entsprechenden Gleichungssysteme:

$$\sum_k \alpha_{ik} = \sum_k a_{ik} \Phi_{ik} = \sum_k a_{ik} \sqrt{\Phi_{ii} \Phi_{kk}} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (107)$$

$$\sum_i \beta_{ik} = \sum_i a_{ik} \Psi_{ik} = \sum_i a_{ik} \sqrt{\Psi_{ii} \Psi_{kk}} = 1 \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (108)$$

$$\sum_k \alpha_{ik} = \sum_k \alpha_{ik} \varphi_{ik} = \sum_k \alpha_{ik} \sqrt{\varphi_{ii} \varphi_{kk}} = A_i^{(s)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (109)$$

$$\sum_i \alpha_{ik} = \sum_i \beta_{ik} \psi_{ik} = \sum_i \beta_{ik} \sqrt{\psi_{ii} \psi_{kk}} = A_k^{(p)} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (110)$$

TABELLE 16

Abweichungen der Nebenreduktionsfaktoren von den arithmetischen und geometrischen Mitteln der zugehörigen Hauptreduktionsfaktoren der isogenen Streutafelgruppe A

Tafel	ik	BA, AB	AF, FA	FG, GF	GK, KG	KM, MK
A1→A2	f_{ik}	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00
	$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	.98	2.00	3.00	4.00	5.03
	Δ	— .02	.0	.0	.0	+ .03
	$\Delta \%$	— 2.0	.0	.0	.0	+ .6
	$\sqrt{f_{ii} f_{kk}}$	.82	1.94	2.96	3.97	5.00
	Δ	— .18	— .06	— .04	— .03	.00
A1→A3	f_{ik}	1.05	4.05	9.05	16.05	25.05
	$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	1.32	4.35	9.35	16.35	25.62
	Δ	+ .27	+ .30	+ .30	+ .30	+ .57
	$\Delta \%$	+ 25.7	+ 7.4	+ 3.3	+ 1.9	+ 2.3
	$\sqrt{f_{ii} f_{kk}}$	.83	3.86	8.86	15.85	25.07
	Δ	— .22	— .19	— .19	— .20	+ .02
A1→A4	f_{ik}	12.53	23.72	11.87	7.98	13.56
	$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	13.02	19.90	13.45	9.94	9.06
	Δ	+ .49	— 3.82	+ 1.58	+ 1.96	— 4.50
	$\Delta \%$	+ 3.9	— 16.1	+ 13.3	+ 24.6	— 33.2
	$\sqrt{f_{ii} f_{kk}}$	9.71	19.82	12.63	9.88	8.83
	Δ	— 2.82	— 3.90	+ .76	+ 1.90	— 4.73
A1→A4	$\Delta \%$	— 22.5	— 16.4	+ 6.4	+ 23.8	— 34.9

TABELLE 17

Abweichungen der Nebenreduktionsfaktoren von den arithmetischen und geometrischen Mitteln der zugehörigen Hauptreduktionsfaktoren der isogenen Streutafelgruppe B

ik	BA	AB	AF	FA	FG	GF	GK	KG	KM	MK	GM	KF
f_{ik}	1.05	1.00	2.10	1.90	3.20	3.15	4.14	3.92	4.90	4.90	4.40	3.65
$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	.99	.99	2.04	2.04	3.10	3.10	4.04	4.04	4.99	4.99	4.57	3.52
Δ	.06	.01	.06	.14	.10	.05	.10	.12	.09	.09	.17	.13
$\Delta \%$	5.7	1.0	2.9	7.4	3.1	1.6	2.4	3.1	1.8	1.8	3.9	3.6
$\sqrt[3]{f_{ii} f_{kk}}$	.84	.84	1.97	1.97	3.05	3.05	4.02	4.02	4.96	4.96	4.47	3.39
Δ	.21	.16	.13	.07	.15	.10	.12	.10	.06	.06	.07	.26
$\Delta \%$	20.0	16.0	6.2	3.7	4.7	3.2	2.9	2.6	1.2	1.2	1.6	7.1
f_{ik}	1.14	1.05	4.42	3.66	10.26	10.00	17.17	15.41	24.10	24.04	19.85	13.33
$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	1.34	1.34	4.54	4.54	9.95	9.95	16.63	16.63	25.26	25.26	21.83	13.38
Δ	.20	.29	.12	.88	.31	.05	.44	.122	1.16	1.22	1.98	.05
$\Delta \%$	17.5	27.6	2.7	24.0	3.0	.5	2.6	7.9	4.8	5.1	10.0	.4
$\sqrt[3]{f_{ii} f_{kk}}$	.85	.85	3.99	3.99	9.40	9.40	16.27	16.27	24.72	24.72	20.05	11.59
Δ	.29	.20	.43	.33	.86	.60	.90	.86	.62	.68	.20	1.74
$\Delta \%$	25.4	19.0	9.7	9.0	8.4	6.0	5.2	5.6	2.6	2.8	1.0	13.1
f_{ik}	13.58	12.54	23.23	24.53	9.81	10.71	8.28	7.63	13.26	14.11	10.25	7.94
$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	13.30	13.30	19.71	19.71	12.74	12.74	9.49	9.49	9.17	9.17	7.88	14.04
Δ	.28	.76	3.52	4.82	2.93	2.03	1.21	1.86	4.09	4.94	2.37	6.10
$\Delta \%$	2.1	6.1	15.2	19.6	29.9	19.0	14.6	24.4	30.8	35.0	23.1	76.8
$\sqrt[3]{f_{ii} f_{kk}}$	9.96	9.96	19.56	19.56	11.90	11.90	9.40	9.40	9.03	9.03	7.88	13.65
Δ	3.62	2.38	3.67	4.97	2.09	1.19	1.12	1.77	4.23	5.08	2.37	5.71
$\Delta \%$	26.7	20.6	15.8	20.3	21.3	11.1	13.5	23.2	31.9	36.0	23.1	71.9

TABELLE 18

Abweichungen der Nebenreduktionsfaktoren von den arithmetischen und geometrischen Mitteln der zugehörigen Hauptreduktionsfaktoren der isogenen Streutafelgruppe C

ik	BA	AB	AF	FA	FG	GF	GK	KG	KM	MK	FK
f_{ik}	.95	.95	2.14	2.05	2.98	3.08	4.05	3.79	4.99	4.90	3.40
$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	.97	.97	2.01	2.01	3.02	3.02	3.99	3.99	4.99	4.99	3.47
Δ	+	+	—	—	+	—	—	+	.00	+	+
$\Delta \%$	2.1	2.1	6.1	2.0	1.3	1.9	1.5	5.3	.0	1.8	2.1
$\sqrt{f_{ii} f_{kk}}$	.80	.80	1.95	1.95	2.97	2.97	3.96	3.96	4.96	4.96	3.33
Δ	.15	.15	.19	.10	.01	.09	.09	.17	.03	+	—
$\Delta \%$	15.8	15.8	8.9	4.9	.3	2.9	2.2	4.5	.6	1.2	2.1
f_{ik}	.93	.96	4.61	4.22	8.76	9.55	16.42	14.44	24.99	24.04	11.59
$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	1.34	1.34	4.36	4.36	9.43	9.43	16.18	16.18	25.25	25.25	13.04
Δ	+	+	.25	.14	+	—	—	+	.26	+	+
$\Delta \%$	44.1	39.6	5.4	3.3	7.6	1.3	1.5	12.0	1.0	5.0	12.5
$\sqrt{f_{ii} f_{kk}}$	.78	.78	3.90	3.90	8.90	8.90	15.77	15.77	24.65	24.65	11.16
Δ	.15	.18	.71	.32	+	.65	.65	+	.34	+	.43
$\Delta \%$	16.1	18.8	15.4	7.6	+	6.8	4.0	+	1.4	+	3.7
f_{ik}	11.09	11.57	22.72	23.97	12.11	11.11	7.78	7.84	12.71	14.11	8.89
$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	12.96	12.96	20.08	20.08	13.34	13.34	9.53	9.53	8.66	8.66	14.38
Δ	+	+	2.64	3.89	+	2.23	+	+	4.05	—	+
$\Delta \%$	16.9	12.0	11.6	16.2	10.2	20.1	22.5	+	31.9	—	+
$\sqrt{f_{ii} f_{kk}}$	9.30	9.30	20.00	20.00	12.43	12.43	9.48	9.48	8.44	8.44	13.87
Δ	1.79	2.27	2.72	3.97	+.32	1.32	1.70	1.64	4.27	—	+
$\Delta \%$	16.1	19.6	12.0	16.6	2.6	11.9	21.9	20.9	33.6	—	+

TABELLE 19

Abweichungen der Nebenreduktionsfaktoren von den arithmetischen und geometrischen Mitteln der zugehörigen Hauptreduktionsfaktoren der isogenen Streutafelgruppe D

Tafel	ik	BA, AB	AF, FA	FG, GF	GK, KG	KM, MK
D1→D2	f_{ik}	.85	2.20	2.80	3.65	5.10
	$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	.96	2.01	2.86	3.80	4.98
	Δ	+ .11	— .19	+ .06	+ .15	— .12
	$\Delta \%$	+ 12.9	— 8.6	+ 2.1	+ 4.1	— 2.4
	$\sqrt[3]{f_{ii} f_{kk}}$	.76	1.95	2.84	3.76	4.95
	Δ	— .09	— .25	+ .04	+ .11	— .15
	$\Delta \%$	— 10.6	— 11.4	+ 1.4	+ 3.0	— 2.9
D1→D3	f_{ik}	.76	4.87	7.85	13.41	26.08
	$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	1.34	4.38	8.39	14.91	25.35
	Δ	+ .58	— .49	+ .54	+ 1.50	— .73
	$\Delta \%$	+ 76.3	— 10.1	+ 6.9	+ 11.2	— 2.8
	$\sqrt[3]{f_{ii} f_{kk}}$	.72	3.95	8.12	14.24	24.63
	Δ	— .04	— .92	+ .27	+ .83	— 1.45
	$\Delta \%$	— 5.3	— 18.9	+ 3.4	+ 6.2	— 5.9
D1→D4	f_{ik}	9.33	22.12	14.09	8.22	12.61
	$\frac{f_{ii} + f_{kk}}{2}$	12.08	19.72	14.14	10.24	8.38
	Δ	+ 2.75	— 2.40	+ .05	+ 2.02	— 4.23
	$\Delta \%$	+ 29.5	— 10.8	+ .4	+ 24.6	— 33.5
	$\sqrt[3]{f_{ii} f_{kk}}$	7.83	19.66	13.55	10.23	8.14
	Δ	— 1.50	— 2.46	— .54	+ 2.01	— 4.47
	$\Delta \%$	— 16.1	— 11.1	— 3.8	+ 24.5	— 35.4

Die praktische Auflösung dieser Gleichungssysteme werden wir später S. 175ff. behandeln; es ist genügend hier zu erkennen, dass sich die Systeme lösen lassen.

Dieser unbestreitbare Vorteil des geometrischen Mittels über das arithmetische als Reduktionsfunktion soll nun aber nicht über die Tatsache hinwegtäuschen, dass es sich immer nur um ein *Näherungsverfahren* handelt. Andererseits dürfen auch die in den Tabellen 16-19 auftretenden Abweichungen nicht überschätzt werden. Zunächst ist festzuhalten, dass bei den gewöhnlich vorkommenden Streutafeln die Nebenfrequenzen stark gegen die Hauptfrequenzen abfallen, sodass diese Abweichungen der Nebenreduktionsfaktoren weniger Einfluss auf das Gesamtergebnis haben werden. Ausserdem muss berücksichtigt werden, dass durch den oben angegebenen Prozess der Bestimmung der Reduktionsfaktoren auch die Hauptfaktoren nicht genau bestimmt werden, sodass ein Teil der Abweichungen auch von diesen getragen wird. Schliesslich kann nur eine probeweise Durchrechnung über die wirkliche Brauchbarkeit des Verfahrens entscheiden, was im nächsten Abschnitt erfolgen soll.

Zusammenfassend möge noch einmal festgestellt werden:

1. Es gibt kein einfaches Verfahren, die Reduktionsfaktoren streng zu bestimmen, die den Übergang von einer Streutafel auf die Tafeln ihrer Grundfrequenzen und umgekehrt regeln.
2. Für eine erste Näherung lassen sich die Nebenreduktionsfaktoren darstellen als die arithmetischen oder geometrischen Mittel der zugehörigen Hauptreduktionsfaktoren.
3. Bezüglich der Geschlossenheit und Einheit des Verfahrens scheint die Verwendung des geometrischen Mittels vor dem arithmetischen den Vorzug zu haben.
4. Es soll nicht ausgeschlossen werden, dass bei bestimmten Annahmen über die Form der Schätzungsfunktionen und der in der Verteilung der Spektralhäufigkeiten sich in etwa ausdrückenden Besetzungsfunktionen noch bessere Näherungsverfahren vielleicht entwickelt werden können.
5. Schliesslich möge noch einmal darauf hingewiesen werden, dass eine strenge Lösung der Aufgabe immer noch möglich ist, wenn es gelingt, für den Vergleich zweier Spektralsysteme genügend, voneinander unabhängige isogene Streutafeln aufzustellen.

c. Ueber die Brauchbarkeit des geometrischen Mittels als Reduktionsfunktion.

Nach den wenig ermutigenden Ergebnissen des vorigen Abschnittes bleibt nur noch die praktische Bewährung als Kennzeichen für die Brauchbarkeit des gewählten Reduktionsverfahrens. Für eine solche Prüfung bieten die berechneten Streutafeln ein sicheres Material.

Der einfachste Weg führt über die Bestimmung der Grundfrequenzen für die vorliegenden Tafeln. Isogene Streutafeln müssen theoretisch dieselben Grundfrequenzen besitzen. Werden also für eine Gruppe von isogenen Tafeln diese Grundfrequenzen nach der gewählten Reduktionsmethode bestimmt, so lassen sich die Ergebnisse miteinander vergleichen, und die Abweichungen, die etwa auftreten, bieten ein Mittel, die Brauchbarkeit der Methode zu beurteilen.

In den vorliegenden Tafeln ist der theoretische Sollwert der Grundfrequenzen allerdings nur dort vorhanden, wo die Grundfrequenzen mit den elementaren Teilfrequenzen zusammenfallen, in **A1** und in **B1** α_{ik} . Für die Grundfrequenzen der Gruppe der Streutafeln **C** und **D** und für die **B1** β_{ik} besteht leider keine Möglichkeit, die Sollwerte der Grundfrequenzen zum Vergleich heranzuziehen. Für diese Fälle wurden als Bezugspunkte die *Mittelwerte* genommen, die man erhält, wenn die aus allen vier isogenen Tafeln berechneten Grundfrequenzen zusammengezogen werden. Dieses Vorgehen erscheint nicht unberechtigt, da theoretisch für jede Tafel einer Gruppe dieselben Grundfrequenzen erscheinen sollten. Es ist allerdings zuzugeben, dass die Reduktionsmethode, so wie sie vorgeschlagen wurde, systematisch nach einer Richtung hin arbeitet, wodurch die Abweichungen von diesen Mittelwerten im Mittel vielleicht etwas geringer werden können, als wenn die berechneten Werte mit den theoretischen Sollwerten verglichen werden.

Die Berechnung der Grundfrequenzen erfolgte nicht durch direkte Lösung der Bestimmungsgleichungen für die Reduktionsfaktoren, sondern durch schrittweise Näherung nach den Verfahren, die später S. 175ff. noch ausführlicher dargelegt werden sollen.

Die auf diese Weise erhaltenen Grundfrequenzen finden sich in den folgenden Tabellen 20-25. Dabei wurden die theoretisch als gleich geforderten Werte so zusammengegeben, dass die Abweichungen leicht übersehen werden können. In den Tabellen 26-31 werden dann die tatsächlichen Abweichungen $m - m_0$ geboten, wobei m_0 nur für die Gruppe **A**

und für die $B_{\alpha_{ik}}$ die *Sollwerte* bedeuten, sonst die *Mittelwerte* aus den Grundfrequenzen, die für alle vier Tafeln gewonnen wurden. Die entsprechenden *relativen* Abweichungen werden in den Tabellen 32-37 aufgeführt.

Die grössten Abweichungen ergeben sich an den Abbruchstellen der Tafeln, bei der unregelmässigen Besetzungsfunktion $f_4(s)$ und bei den unregelmässigen Schätzungsfunktionen. Es scheint auch hier ziemlich müssig, nach etwaigen besonderen Gesetzmässigkeiten zu suchen, wenn auch nicht auszuschliessen ist, dass sich vielleicht solche noch finden liessen.

Um irgend ein objektives Bild zu gewinnen von der Grösse der Abweichungen im allgemeinen, wurden die *mittleren* Abweichungen gebildet als die quadratische Wurzel aus dem Mittel der quadratischen Abweichungen

$$\pm \sqrt{\frac{(m - m_0)^2}{n}}.$$

Diese mittleren Abweichungen sind in Tabelle 38 S. 110 für die einzelnen Tafeln der Grundfrequenzen zusammengestellt. Die Abweichungen von den bekannten Sollwerten sind im allgemeinen etwas grösser als die Abweichungen von den Mittelwerten, was, wie schon bemerkt, darauf hinweist, dass die Reduktion nach dem vorgeschlagenen Verfahren mit einer leichten systematischen Verschiebung behaftet ist; doch sind die Differenzen so gering, dass bei der Mittlung für das Gesamtmaterial darauf weiterhin keine Rücksicht genommen wurde.

Bezüglich der *relativen* Abweichungen, die in Prozenten angegeben werden, wurden die Mittelwerte für die Haupt- und Nebenfrequenzen getrennt aufgeführt. Wenn auch die absoluten Abweichungen für die beiden Gruppen von der gleichen Grössenordnung sind, so erscheinen bei den Nebenfrequenzen, die oft um eine Grössenordnung und mehr kleiner sind als die Hauptfrequenzen, entsprechend bedeutend höhere Werte für die relativen Abweichungen. Natürlich haben dann dort die Dezimalen in den Wertangaben wenig Sinn; doch wurden sie der Gleichmässigkeit wegen noch mitgenommen.

Der eigentliche Zweck der vorgelegten Reduktionsmethode ist die praktische Bestimmung äquivalenter Klassenfrequenzen. Es ist deshalb vor allem von Interesse, die Grösse der Abweichungen in den Angaben

TABELLE 20

Grundfrequenzen $\alpha_{ik} = \beta_{ik} = u_{ik}$ der Streutafeln der Gruppe A

$S^{(a)}$ \ $S^{(a)}$		B	A	F	G	K	M	$R_k^{(a)}$
B	A1	.8333	.1667					1.0000
	A2	.8051	.1949					1.0000
	A3	.7984	.2016					1.0000
	A4	.7986	.2014					1.0000
A	A1	.1667	.6667	.1667				1.0001
	A2	.1949	.6372	.1679				1.0000
	A3	.2016	.6294	.1691				1.0001
	A4	.2014	.6099	.1887				1.0000
F	A1		.1667	.6667	.1667			1.0001
	A2		.1679	.6638	.1683			1.0000
	A3		.1691	.6617	.1692			1.0000
	A4		.1887	.6519	.1595			1.0001
G	A1			.1667	.6667	.1667		1.0001
	A2			.1683	.6641	.1676		1.0000
	A3			.1692	.6627	.1681		1.0000
	A4			.1595	.7060	.1346		1.0001
K	A1				.1667	.6667	.1667	1.0001
	A2				.1676	.6658	.1666	1.0000
	A3				.1681	.6655	.1664	1.0000
	A4				.1346	.6278	.2376	1.0000
M	A1					.1667	.8333	1.0000
	A2					.1666	.8334	1.0000
	A3					.1664	.8336	1.0000
	A4					.2376	.7624	1.0000
$R_i^{(a)}$	A1	1.0000	1.0001	1.0001	1.0001	1.0001	1.0000	6.0004
	A2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	6.0000
	A3	1.0000	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	6.0001
	A4	1.0000	1.0000	1.0001	1.0001	1.0000	1.0000	6.0002

TABELLE 22
Grundfrequenzen β_{ik} der Streutafeln der Gruppe B

$S^{(e)} \backslash S^{(a)}$		B	A	F	G	K	M	$R_k^{(e)}$
B	B1	.8116	.1884					1.0000
	B2	.7821	.2179					1.0000
	B3	.7759	.2241					1.0000
	B4	.7777	.2223					1.0000
A	B1	.1375	.7463	.1162				1.0000
	B2	.1669	.7239	.1092				1.0000
	B3	.1779	.7200	.1022				1.0001
	B4	.1756	.6837	.1407				1.0000
F	B1		.1162	.5108	.3684	.0046		1.0000
	B2		.1201	.4982	.3768	.0049		1.0000
	B3		.1234	.4867	.3847	.0052		1.0000
	B4		.1332	.5197	.3444	.0027		1.0000
G	B1			.0383	.7399	.2218		1.0000
	B2			.0397	.7439	.2164		1.0000
	B3			.0410	.7482	.2108		1.0000
	B4			.0328	.7844	.1828		1.0000
K	B1				.1562	.7562	.0876	1.0000
	B2				.1609	.7526	.0866	1.0001
	B3				.1663	.7483	.0854	1.0000
	B4				.1396	.7353	.1251	1.0000
M	B1				.0014	.2916	.7070	1.0000
	B2				.0014	.2882	.7104	1.0000
	B3				.0014	.2850	.7136	1.0000
	B4				.0017	.3912	.6071	1.0000
$R_i^{(a)}$	B1	.9491	1.0509	.6653	1.2659	1.2742	.7946	6.0000
	B2	.9490	1.0619	.6471	1.2830	1.2620	.7970	6.0001
	B3	.9538	1.0675	.6299	1.3006	1.2493	.7990	6.0001
	B4	.9533	1.0392	.6932	1.2701	1.3120	.7322	6.0000

TABELLE 24
Grundfrequenzen β_{ik} der Streutafeln der Gruppe C

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$	$S^{(b)}$	B	A	F	G	K	M	$R_i^{(c)}$
B	C1	.7291	.2709					1.0000
	C2	.6894	.3106					1.0000
	C3	.6800	.3200					1.0000
	C4	.6781	.3219					1.0000
A	C1	.0707	.8956	.0338				1.0001
	C2	.0810	.8848	.0342				1.0000
	C3	.0805	.8854	.0341				1.0000
	C4	.0805	.8787	.0407				.9999
F	C1		.1894	.3142	.4324	.0640		1.0000
	C2		.2000	.2954	.4412	.0634		1.0000
	C3		.2095	.2782	.4498	.0625		1.0000
	C4		.2165	.3243	.4181	.0411		1.0000
G	C1			.0004	.4941	.5055		1.0000
	C2			.0004	.5088	.4908		1.0000
	C3			.0004	.5236	.4760		1.0000
	C4			.0004	.5605	.4391		1.0000
K	C1				.0451	.8828	.0721	1.0000
	C2				.0468	.8821	.0711	1.0000
	C3				.0483	.8817	.0700	1.0000
	C4				.0389	.8573	.1039	1.0001
M	C1					.3761	.6239	1.0000
	C2					.3780	.6220	1.0000
	C3					.3799	.6201	1.0000
	C4					.4881	.5119	1.0000
$R_i^{(b)}$	C1	.7998	1.3559	.3484	.9716	1.8284	.6960	6.0001
	C2	.7704	1.3954	.3300	.9968	1.8143	.6931	6.0000
	C3	.7605	1.4149	.3127	1.0217	1.8001	.6901	6.0001
	C4	.7586	1.4171	.3654	1.0175	1.8256	.6158	6.0000

TABELLE 25
Grundfrequenzen $\alpha_{ik} = \beta_{ik}$ der Streutafeln D

$S^{(b)}$		B	A	F	G	K	M	$R_k^{(b)}$
B	D1	.8637	.1363					1.0000
	D2	.8521	.1479					1.0000
	D3	.8596	.1404					1.0000
	D4	.8556	.1444					1.0000
A	D1	.1363	.7144	.1493				1.0000
	D2	.1479	.6886	.1636				1.0001
	D3	.1404	.6823	.1773				1.0001
	D4	.1444	.6923	.1632				.9999
F	D1		.1493	.7488	.1019			1.0000
	D2		.1636	.7363	.1001			1.0000
	D3		.1773	.7249	.0979			1.0001
	D4		.1632	.7297	.1071			1.0000
G	D1			.1019	.7077	.1904		1.0000
	D2			.1001	.7141	.1857		.9999
	D3			.0979	.7212	.1810		1.0001
	D4			.1071	.7409	.1520		1.0000
K	D1				.1904	.6386	.1711	1.0001
	D2				.1857	.6384	.1758	.9999
	D3				.1810	.6388	.1802	1.0000
	D4				.1520	.6023	.2457	1.0000
M	D1					.1711	.8289	1.0000
	D2					.1758	.8242	1.0000
	D3					.1802	.8198	1.0000
	D4					.2457	.7543	1.0000
$R_i^{(b)}$	D1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0001	1.0000	6.0001
	D2	1.0000	1.0001	1.0000	.9999	.9999	1.0000	5.9999
	D3	1.0000	1.0001	1.0001	1.0001	1.0000	1.0000	6.0003
	D4	1.0000	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	5.9999

TABELLE 26

Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen $\alpha_{ik} = \beta_{ik}$ vom Sollwert in den Streutafeln der Gruppe A

$S(a) \backslash S(a)$		B	A	F	G	K	M
B	A2	— .0282	+ .0282				
	A3	— .0349	+ .0349				
	A4	— .0347	+ .0347				
A	A2	+ .0282	+ .0295	+ .0012			
	A3	+ .0349	— .0373	+ .0024			
	A4	+ .0347	— .0568	+ .0220			
F	A2		+ .0012	— .0029	+ .0016		
	A3		+ .0024	— .0050	+ .0025		
	A4		+ .0220	— .0148	— .0072		
G	A2			+ .0016	— .0026	+ .0009	
	A3			+ .0025	— .0040	+ .0014	
	A4			— .0072	+ .0393	— .0321	
K	A2				+ .0009	— .0009	— .0001
	A3				+ .0014	— .0012	— .0003
	A4				— .0321	— .0389	+ .0709
M	A2					— .0001	+ .0001
	A3					— .0003	+ .0003
	A4					+ .0709	— .0709

Mittlere Abweichungen der Hauptfrequenzen: $\pm .0308$ (18)
 Mittlere Abweichungen der Nebenfrequenzen: $\pm .0256$ (30)
 Mittlere Abweichungen aller Frequenzen: $\pm .0277$ (48)

TABELLE 27

Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen α_{ik} vom Sollwert in den Streutafeln der Gruppe B

$S^{(a)} \backslash S^{(e)}$		B	A	F	G	K	M	$\Delta A_k^{(e)}$
B	B2	— .0276	+ .0273					— .0003
	B3	— .0371	+ .0318					— .0053
	B4	— .0380	+ .0339					— .0041
A	B2	+ .0276	— .0330	— .0076				— .0130
	B3	+ .0371	— .0430	— .0148				— .0207
	B4	+ .0380	— .0517	+ .0266				+ .0129
F	B2	+ .0057	+ .0060	+ .0094	+ .0004			+ .0215
	B3	+ .0112	+ .0119	+ .0180	+ .0009			+ .0420
	B4	+ .0178	— .0205	— .0284	— .0023			— .0334
G	B2			+ .0016	— .0118	— .0049		— .0151
	B3			+ .0029	— .0228	— .0099		— .0298
	B4			— .0061	+ .0433	— .0322		+ .0050
K	B2				+ .0025	+ .0062	— .0005	+ .0082
	B3				+ .0049	+ .0125	— .0012	+ .0162
	B4				— .0152	— .0651	+ .0373	— .0430
M	B2				.0000	— .0017	+ .0005	— .0012
	B3				.0000	— .0034	+ .0012	— .0022
	B4				.0000	+ .0996	— .0373	+ .0627

Mittlere Abweichungen der Teilfrequenzen: $\pm .0273$ (54)

Mittlere Abweichungen der Klassenfrequenzen: $\pm .0252$ (18)

TABELLE 28

Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen β_{ik} vom Mittel in den Streutafeln der Gruppe B

$S^{(c)} \backslash S^{(a)}$		B	A	F	G	K	M	$\Delta A_i^{(a)}$
B	Mittel	.7868	.2132					.9513
	B1	+ .0248	— .0248					— .0022
	B2	— .0047	+ .0047					— .0023
	B3	— .0109	+ .0109					+ .0025
	B4	— .0091	+ .0091					+ .0020
A	Mittel	.1645	.7185	.1171				1.0549
	B1	— .0270	+ .0378	— .0009				— .0040
	B2	+ .0024	+ .0054	— .0079				+ .0070
	B3	+ .0135	+ .0015	— .0149				+ .0126
	B4	+ .0111	— .0348	+ .0236				— .0152
F	Mittel		.1232	.5039	.3686	.0044		.6589
	B1		— .0070	+ .0069	— .0002	+ .0002		+ .0064
	B2		— .0031	— .0057	+ .0082	+ .0005		— .0118
	B3		+ .0002	— .0172	+ .0161	+ .0008		— .0290
	B4		+ .0100	+ .0158	— .0242	— .0017		+ .0343
G	Mittel			.0380	.7541	.2080		1.2799
	B1			+ .0003	— .0142	+ .0138		— .0140
	B2			+ .0017	— .0102	+ .0084		+ .0031
	B3			+ .0030	— .0059	+ .0028		+ .0207
	B4			— .0052	+ .0303	— .0252		— .0098
K	Mittel				.1558	.7481	.0962	1.2744
	B1				+ .0004	+ .0081	— .0086	— .0002
	B2				+ .0051	+ .0045	— .0096	— .0124
	B3				+ .0105	+ .0002	— .0108	— .0251
	B4				— .0162	— .0128	+ .0289	+ .0378
M	Mittel				.0015	.3140	.6845	.7807
	B1				— .0001	— .0224	+ .0225	+ .0139
	B2				— .0001	— .0258	+ .0259	+ .0163
	B3				— .0001	— .0290	+ .0291	+ .0183
	B4				+ .0002	+ .0772	— .0774	— .0485

Mittlere Abweichungen der Teilfrequenzen: $\pm .0194$ (72)

Mittlere Abweichungen der Klassenfrequenzen: $\pm .0191$ (24)

TABELLE 29

Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen α_{ih} vom Mittel in den Streutafeln der Gruppe C

$S^{(e)} \backslash S^{(b)}$		B	A	F	G	K	M	$\Delta A_h^{(e)}$
B	Mittel	.9337	.2596					1.1933
	C1	+ .0054	— .0262					— .0208
	C2	— .0025	+ .0043					+ .0018
	C3	— .0012	+ .0087					+ .0075
	C4	— .0019	+ .0132					+ .0113
A	Mittel	.0664	.4756	.0463				.5883
	C1	— .0055	+ .0405	— .0016				+ .0334
	C2	+ .0025	— .0024	— .0014				— .0014
	C3	+ .0011	— .0217	— .0010				— .0216
	C4	+ .0018	— .0162	+ .0041				— .0103
F	Mittel		.2648	.9531	.6299	.0661		1.9138
	C1		— .0142	+ .0016	+ .0004	+ .0054		— .0067
	C2		— .0018	+ .0014	+ .0122	+ .0075		+ .0194
	C3		+ .0130	+ .0011	+ .0233	+ .0095		+ .0470
	C4		+ .0030	— .0041	— .0361	— .0226		— .0597
G	Mittel			.0006	.3468	.2491		.5965
	C1			.0000	— .0013	+ .0215		+ .0202
	C2			.0000	— .0133	+ .0077		— .0056
	C3			.0000	— .0247	— .0056		— .0303
	C4			.0000	+ .0394	— .0237		+ .0157
K	Mittel				.0234	.3584	.0639	.4456
	C1				+ .0008	+ .0035	— .0072	— .0041
	C2				+ .0011	+ .0102	— .0073	+ .0041
	C3				+ .0013	+ .0168	— .0075	+ .0107
	C4				— .0034	— .0306	+ .0219	— .0120
M	Mittel					.3265	.9361	1.2626
	C1					— .0304	+ .0072	— .0232
	C2					— .0256	+ .0073	— .0183
	C3					— .0208	+ .0075	— .0133
	C4					+ .0768	— .0219	+ .0549

Mittlere Abweichungen der Teilfrequenzen: $\pm .0169$ (68)

Mittlere Abweichungen der Klassenfrequenzen: $\pm .0245$ (24)

TABELLE 30

Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen β_{ik} vom Mittel in den Streutafeln der Gruppe C

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$		B	A	F	G	K	M	$\Delta A_i^{(b)}$
B	Mittel	.6942	.3059					.7723
	C1	+ .0349	— .0350					+ .0275
	C2	— .0048	+ .0047					— .0019
	C3	— .0142	+ .0141					— .0118
	C4	— .0161	+ .0160					— .0137
A	Mittel	.0782	.0861	.0357				1.3958
	C1	— .0075	+ .0095	— .0019				— .0399
	C2	+ .0028	— .0013	— .0015				— .0004
	C3	+ .0023	— .0007	— .0016				+ .0191
	C4	+ .0023	— .0074	+ .0050				+ .0213
F	Mittel		.2039	.3030	.4354	.0578		.3391
	C1		— .0145	+ .0112	— .0030	+ .0062		+ .0093
	C2		— .0039	— .0076	+ .0058	+ .0056		— .0091
	C3		+ .0056	— .0248	+ .0144	+ .0047		— .0264
	C4		+ .0126	+ .0213	— .0173	— .0167		+ .0263
G	Mittel			.0004	.5218	.4779		1.0019
	C1			.0000	— .0277	+ .0276		— .0303
	C2			.0000	— .0130	+ .0129		— .0051
	C3			.0000	+ .0018	— .0019		+ .0198
	C4			.0000	+ .0387	— .0388		+ .0156
K	Mittel				.0448	.8760	.0793	1.8171
	C1				+ .0003	+ .0068	— .0071	+ .0113
	C2				+ .0020	+ .0061	— .0082	— .0028
	C3				+ .0035	+ .0057	— .0093	— .0170
	C4				— .0059	— .0187	+ .0246	+ .0085
M	Mittel					.4055	.5945	.6738
	C1					— .0294	+ .0294	+ .0222
	C2					— .0275	+ .0275	+ .0193
	C3					— .0256	+ .0256	+ .0163
	C4					+ .0826	— .0826	— .0580

Mittlere Abweichungen der Teilfrequenzen: $\pm .0212$ (68)

Mittlere Abweichungen der Klassenfrequenzen: $\pm .0220$ (24)

TABELLE 31

Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen $\alpha_{ik} = \beta_{ik}$ vom Mittel
in den Streutafeln der Gruppe D

$S^{(b)}$		$S^{(b)}$							
		B	A	F	G	K	M		
B	Mittel	.8578 .1423							
	D1	+ .0059 — .0060							
	D2	— .0057 + .0056							
	D3	+ .0018 — .0019							
	D4	— .0022 + .0021							
A	Mittel	.1423 .6944 .1634							
	D1	— .0060 + .0200 — .0141							
	D2	+ .0056 — .0058 + .0002							
	D3	— .0019 — .0121 + .0139							
	D4	+ .0021 — .0021 — .0002							
F	Mittel	.1634 .7349 .1018							
	D1	— .0141 + .0139 + .0001							
	D2	+ .0002 + .0014 — .0017							
	D3	+ .0139 — .0100 — .0039							
	D4	— .0002 — .0052 + .0053							
G	Mittel	.1018 .7210 .1773							
	D1	+ .0001 — .0133 + .0131							
	D2	— .0017 — .0069 + .0084							
	D3	— .0039 + .0002 + .0037							
	D4	+ .0053 + .0199 — .0253							
K	Mittel	.1773 .6295 .1932							
	D1	+ .0131 + .0091 — .0221							
	D2	+ .0084 + .0089 — .0174							
	D3	+ .0037 + .0093 — .0130							
	D4	— .0253 — .0272 + .0525							
M	Mittel	.1932 .8068							
	D1	— .0221 + .0221							
	D2	— .0174 + .0174							
	D3	— .0130 + .0130							
	D4	+ .0525 — .0525							

Mittlere Abweichungen der Nebenfrequenzen: $\pm .0160$ (40)

Mittlere Abweichungen der Hauptfrequenzen: $\pm .0162$ (24)

Mittlere Abweichungen aller Frequenzen: $\pm .0161$ (64)

TABELLE 32

Relative prozentuelle Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen
 $\alpha_{ik} = \beta_{ik}$ vom Sollwert in den Streutafeln der Gruppe A

$S(a) \backslash S(a)$		B	A	F	G	K	M
B	A2	— 3.38	+ 16.92				
	A3	— 4.19	+ 20.94				
	A4	— 4.16	+ 20.82				
A	A2	+ 16.92	— 4.43	+ .72			
	A3	+ 20.94	— 5.60	+ 1.44			
	A4	+ 20.82	— 8.52	+ 13.20			
F	A2		+ .72	— .44	+ .96		
	A3		+ 1.44	— .75	+ 1.50		
	A4		+ 13.20	— 2.22	— 4.32		
G	A2			+ .96	— .39	+ .54	
	A3			+ 1.50	— .60	+ .84	
	A4			— 4.32	+ 5.90	— 19.26	
K	A2				+ .54	— .14	— .06
	A3				+ .84	— .18	— .18
	A4				— 19.26	— 5.84	+ 42.54
M	A2					— .06	+ .01
	A3					— .18	+ .04
	A4					+ 42.54	— 8.51

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen
 der Hauptfrequenzen:

$\pm 4.20 \%$ (18)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen
 der Nebenfrequenzen:

$\pm 15.32 \%$ (30)

TABELLE 33

Relative prozentuelle Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen α_{ik}
vom Sollwert in den Streutafeln der Gruppe B

$S^{(a)}$		B	A	F	G	K	M	$\Delta A_k^{(a)}$
B	B2	— 3.19	+ 14.76					— .03
	B3	— 4.29	+ 17.19					— .50
	B4	— 4.39	+ 18.32					— .39
A	B2	+ 20.44	— 4.89	— 5.43				— 1.37
	B3	+ 27.48	— 6.37	— 10.57				— 2.18
	B4	+ 28.15	— 7.60	+ 19.00				+ 1.36
F	B2		+ 4.07	+ .73	+ 2.44	+ 8.00		+ 1.59
	B3		+ 8.00	+ 1.45	+ 4.68	+ 18.00		+ 3.11
	B4		+ 12.71	— 2.50	— 7.38	— 46.00		— 2.47
G	B2			+ 4.00	— 2.34	— 3.13		— 2.16
	B3			+ 7.25	— 4.53	— 6.32		— 4.26
	B4			— 15.25	+ 8.60	— 20.55		+ .71
K	B2				+ 2.27	+ 1.12	— .59	+ 1.09
	B3				+ 4.44	+ 2.26	— 1.41	+ 2.16
	B4				— 13.78	— 11.74	+ 43.73	— 5.73
M	B2				.00	— .60	+ .05	— .01
	B3				.00	— 1.20	+ .13	— .18
	B4				+ 28.57	+ 35.07	— 4.08	+ 5.23

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Hauptfrequenzen: $\pm 4.94\%$ (18)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Nebenfrequenzen: $\pm 17.56\%$ (36)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Klassenfrequenzen: $\pm 2.54\%$ (18)

TABELLE 34

Relative prozentuelle Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen β_{ik}
vom Mittelwert in den Streutafeln der Gruppe B

$S^{(a)} \backslash S^{(c)}$		B	A	F	G	K	M	$\Delta A_k^{(a)}$
B	B1	+ 3.15	— 11.63					— .23
	B2	— .60	+ 2.20					— .24
	B3	— 1.39	+ 5.11					+ .26
	B4	— 1.16	+ 4.27					+ .21
A	B1	— 16.41	+ 3.87	— .77				— .38
	B2	+ 1.46	+ .75	— 6.75				+ .66
	B3	+ 8.21	+ .21	— 12.72				+ 1.19
	B4	+ 6.75	— 4.84	+ 20.15				— 1.44
F	B1		— 5.68	+ 1.37	— .05	+ 4.55		+ .97
	B2		— 2.52	— 1.13	+ 2.22	+ 11.36		— 1.79
	B3		+ .16	— 3.41	+ 4.37	+ 18.18		— 4.40
	B4		+ 8.12	+ 3.14	— 6.57	— 38.64		+ 5.21
G	B1			+ .79	— 1.88	+ 6.63		— 1.09
	B2			+ 4.47	— 1.35	+ 4.04		+ .24
	B3			+ 7.89	— .78	+ 1.35		+ 1.62
	B4			— 13.68	+ 4.02	— 12.12		— .77
K	B1				+ .26	+ 1.08	— 8.94	— .02
	B2				+ 3.27	+ .60	— 9.98	— .97
	B3				+ 6.74	+ .03	— 11.23	— 1.97
	B4				— 10.40	— 1.71	+ 30.04	+ 2.97
M	B1				— 6.67	— 7.13	+ 3.29	+ 1.78
	B2				— 6.67	— 8.22	+ 3.78	+ 2.09
	B3				— 6.67	— 9.24	+ 4.25	+ 2.34
	B4				+ 13.33	+ 24.59	— 11.31	— 6.21

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Hauptfrequenzen: $\pm 3.38\%$ (24)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Nebenfrequenzen: $\pm 10.70\%$ (48)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Klassenfrequenzen: $\pm 2.28\%$ (24)

TABELLE 35

Relative prozentuelle Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen α_{ik}
vom Mittelwert in den Streutafeln der Gruppe C

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$		B	A	F	G	K	M	$\Delta A_k^{(e)}$
B	C1	+ .58	— 10.09					— 1.74
	C2	— .27	+ 1.66					+ .15
	C3	— .13	+ 3.35					+ .63
	C4	— .20	+ 5.08					+ .95
A	C1	— 8.28	+ 8.52	— 3.46				+ 5.68
	C2	+ 3.77	— .50	— 3.02				— .24
	C3	+ 1.66	— 4.56	— 2.16				— 3.67
	C4	+ 2.71	— 3.41	+ 8.85				— 1.75
F	C1		— 5.36	+ .17	+ .06	+ 8.17		— .35
	C2		— .68	+ .15	+ 1.94	+ 11.35		+ 1.01
	C3		+ 4.91	+ .12	+ 3.70	+ 14.37		+ 2.46
	C4		+ 1.13	— .43	— 5.73	— 34.19		— 3.12
G	C1			.00	— .37	+ 8.63		+ 3.39
	C2			.00	— 3.84	+ 3.09		— .94
	C3			.00	— 7.12	— 2.25		— 5.08
	C4			.00	+ 11.36	— 9.51		+ 2.63
K	C1				+ 3.42	+ .98	— 11.27	— .63
	C2				+ 4.70	+ 2.85	— 11.42	+ .92
	C3				+ 5.56	+ 4.69	— 11.74	+ 2.40
	C4				— 14.53	— 8.54	+ 34.27	— 2.69
M	C1					— 9.31	+ .77	— 1.84
	C2					— 7.84	+ .78	— 1.45
	C3					— 6.37	+ .80	— 1.05
	C4					+ 23.52	— 2.34	+ 4.35

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Hauptfrequenzen: $\pm 4.14\%$ (24)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Nebenfrequenzen: $\pm 10.42\%$ (44)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Klassenfrequenzen: $\pm 2.54\%$ (24)

TABELLE 36

Relative prozentuelle Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen β_{ik}
vom Mittelwert in den Streutafeln der Gruppe C

$S(c) \backslash S(b)$		B	A	F	G	K	M	$\Delta A_i^{(b)}$
B	C1	+ 5.03	— 11.44					+ 3.56
	C2	— .69	+ 1.54					— .25
	C3	— 2.05	+ 4.61					— 1.53
	C4	— 2.32	+ 5.23					— 1.77
A	C1	— 9.59	+ 1.07	— 5.32				— 2.86
	C2	+ 3.58	— .15	— 4.20				— .03
	C3	+ 2.94	— .08	— 4.48				+ 1.37
	C4	+ 2.94	— .84	+ 14.07				+ 1.53
F	C1		— 7.11	+ 3.70	— .69	+ 10.83		+ 2.74
	C2		— 1.91	— 2.51	+ 1.33	+ 9.69		— 2.68
	C3		+ 2.75	— 8.18	+ 3.31	+ 8.13		— 7.79
	C4		+ 6.18	+ 7.03	— 3.19	— 28.89		+ 7.76
G	C1				.00	— 5.31	+ 5.78	— 3.02
	C2				.00	— 2.49	+ 2.70	— .51
	C3				.00	+ .34	— .40	+ 1.98
	C4				.00	+ 7.42	— 8.12	+ 1.56
K	C1				+ .67	+ .78	— 8.95	+ .62
	C2				+ 4.46	+ .70	— 10.34	— .15
	C3				+ 7.81	+ .65	— 11.73	— .94
	C4				— 13.17	— 2.13	+ 31.02	+ .47
M	C1					— 7.25	+ 4.95	+ 3.29
	C2					— 6.78	+ 4.63	+ 2.86
	C3					— 6.31	+ 4.31	+ 2.42
	C4					+ 21.37	— 13.89	— 8.61

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Hauptfrequenzen: $\pm 4.68\%$ (24)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Nebenfrequenzen: $\pm 9.56\%$ (44)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Klassenfrequenzen: $\pm 3.37\%$ (24)

TABELLE 37

Relative prozentuelle Abweichungen der berechneten Grundfrequenzen
 $\alpha_{ih} = \beta_{ih}$ vom Mittelwert in den Streutafeln der Gruppe D

$S^{(b)}$		$S^{(b)}$		B	A	F	G	K	M			
B	D1	+	.69	—	4.22							
	D2	—	.66	+	3.94							
	D3	+	.21	—	1.34							
	D4	—	.26	+	1.48							
A	D1	—	4.22	+	2.80	—	8.63					
	D2	+	3.94	—	.84	+	.12					
	D3	—	1.34	—	1.74	+	8.51					
	D4	+	1.48	—	.30	—	.12					
F	D1			—	8.63	+	1.89	+	.10			
	D2			+	.12	+	.19	—	1.67			
	D3			—	8.51	—	1.36	—	3.83			
	D4			+	.12	—	.71	+	5.21			
G	D1					+	.10	—	1.84	+	7.39	
	D2					—	1.67	—	.96	+	4.74	
	D3					—	3.83	+	.03	+	2.08	
	D4					+	5.21	+	2.76	—	14.27	
K	D1						+	7.39	+	1.45	—	11.44
	D2						+	4.74	+	1.41	—	9.01
	D3						+	2.08	+	1.48	—	6.73
	D4						—	14.27	—	4.32	+	27.17
M	D1								—	11.44	+	2.74
	D2								—	9.01	+	2.16
	D3								—	6.73	+	1.61
	D4								+	27.17	—	6.51

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Hauptfrequenzen: $\pm 2.17\%$ (24)

Mittlere relative prozentuelle Abweichungen der Nebenfrequenzen: $\pm 7.93\%$ (40)

TABELLE 38

Mittlere Abweichungen der berechneten Grundfrequenztafeln

Tafel	Absolute Abweichungen Einheit .01		Relative Abweichungen %		
	Teilfrequenzen	Klassen- frequenzen	Haupt- frequenzen	Neben- frequenzen	Klassen- frequenzen
A	± 2.77	—	± 4.20	± 15.22	—
B α_{ih}	± 2.73	± 2.52	± 4.94	± 17.56	± 2.55
B β_{ik}	± 1.94	± 1.91	± 3.38	± 10.70	± 2.28
C α_{ik}	± 1.69	± 2.45	± 4.14	± 10.42	± 2.54
C β_{ik}	± 2.12	± 2.20	± 4.68	± 9.56	± 3.37
D	± 1.61	—	± 2.17	± 7.93	—
Mittel $\sqrt{\frac{\sum \Delta^2}{n}}$	± 2.19	± 2.28	$\pm 4.03\%$	$\pm 12.36\%$	$\pm 2.72\%$

dieser Klassenfrequenzen zu kennen, weshalb diese noch getrennt angeführt werden. Die absoluten Abweichungen bei den Klassenfrequenzen betragen im Mittel $\pm .023$, die relativen $\pm 2.7\%$. Die Kleinheit dieser Werte ist sicher überraschend für ein so einfaches und dazu noch mit solch grundsätzlichen Bedenken belastetes Verfahren. Und wenn man dann noch beachtet, dass die Unsicherheiten in den aus der Erfahrung gewonnenen Streutafeln oft sicher nicht geringer sind, und ferner, dass hier Besetzungs- und Schätzungsfunktionen zugrundegelegt wurden, wie sie in Wirklichkeit kaum je so „schlecht“ vorkommen mögen, so darf man sich wohl mit der vorgeschlagenen Reduktionsmethode zur Bestimmung äquivalenter Klassenfrequenzen zufrieden geben, solange nicht ein genaueres Verfahren zur Verfügung steht, wenn auch hie und da Einzelabweichungen bis zu etwa 10 % auftreten mögen.

3. Die Verwendung von Tafeln minimaler Streuungen (Rumpffrequenzen)

Es kann der Fall eintreten, dass die Beziehungen zwischen zwei Spektラルsystemen nicht unmittelbar durch eine Streutafel gegeben sind, sondern nur durch ihre Beziehungen zu einem und demselben dritten System, oder auch bloss durch einen Satz äquivalenter Klassenfrequenzen in beiden Systemen.

Im *ersten* Fall lassen sich zu einer beliebigen Häufigkeitsverteilung $(A_i^{(x)})$ im System $S^{(x)}$ die äquivalenten Häufigkeiten $A_k^{(y)}$ im System $S^{(y)}$ auf dem Umweg über das dritte System $S^{(z)}$ finden: Man sucht zu der vorgegebenen Verteilung $(A_i^{(x)})$ des Systems $S^{(x)}$ die äquivalente Verteilung $(A_h^{(z)})$ im System $S^{(z)}$ und dann über die entsprechende Streutafel $S^{(z)} \rightarrow S^{(y)}$ zu $(A_h^{(z)})$ die ihr äquivalente $(A_k^{(y)})$ im System $S^{(y)}$. Da nun

$(A_k^{(y)})$ äquivalent $(A_h^{(z)})$ und

$(A_h^{(z)})$ äquivalent $(A_i^{(x)})$, muss auch

$(A_k^{(y)})$ äquivalent $(A_i^{(x)})$ sein,

womit die Aufgabe gelöst ist.

Der *zweite* Fall bietet nun keine derartige Möglichkeit einer Lösung. Auch wird es nicht gelingen, die zu dem Satz der äquivalenten Häufig-

keiten ($A_i^{(x)}$) und ($A_k^{(y)}$) gehörigen n^2 Teilfrequenzen a_{ik} aus den $2 \times n$ Bedingungsgleichungen

$$\sum_k a_{ik} = A_i^{(x)} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad \text{und}$$

$$\sum_i a_{ik} = A_k^{(y)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

zu bestimmen.

Immerhin lassen sich aber mit einem derartigen Satz äquivalenter Häufigkeiten beliebig viele Streutafeln herstellen und unter ihnen eine ausgezeichnete (a_{ik}^*) in der Weise, dass die Hauptfrequenzen a_{ii}^* die höchsten und die Nebenfrequenzen a_{ik}^* ($k \neq i$) die geringsten Werte besitzen, die gerade noch mit den Angaben der vorgelegten äquivalenten Klassenhäufigkeiten $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(y)}$ verträglich sind.

Eine solche Streutafel hat vor all den andern, die an und für sich den vorgegebenen Satz der äquivalenten Klassenhäufigkeiten befriedigen, das voraus, dass sie die Tafel ist, in der die *geringsten* Streuungen auftreten, weshalb wir sie die *Tafel der minimalen Streuungen* nennen. Denn alle Hauptfrequenzen sind im Maximum, alle Nebenfrequenzen im Minimum, und etwaige Korrekturen zur Gewinnung der wahren Streutafel erfolgen nur in *dem* Sinne, dass die Hauptfrequenzen erniedrigt, die Nebenfrequenzen erhöht werden müssen. Überdies enthalten solche Tafeln nur die Hauptfrequenzen a_{ii}^* und immer nur *eine* der Nebenfrequenzen a_{ik}^* oder a_{ki}^* , da die andere verschwindet. Sie stellen also ein *Mindestmass* dar an Teilfrequenzen, die das gegebene System der äquivalenten Klassenhäufigkeiten unbedingt benötigt. Wir möchten sie deshalb auch die Tafel der *Rumpffrequenzen* nennen. In der Folge bezeichnen wir die Teilfrequenzen der Rumpffrequenztafeln mit einem *, also a_{ik}^* , um sie von den wahren Teilfrequenzen a_{ik} zu unterscheiden.

Eine solche Tafel minimaler Streuungen ist natürlich nicht mehr isogen zu der ursprünglichen, da die mittleren Streuungen $^{(x)}\sigma_i$ und $^{(y)}\sigma_k$ notwendig kleiner werden müssen als die der Ausgangstafel. Die funktionale Beziehung aber, oder die neutrale Regression, zwischen den beiden Systemen bleibt vermutlich erhalten. Für den linearen Ansatz der neutralen Regression lässt sich das unmittelbar aus ihrer Gleichung (21) entnehmen, in die nur die mittleren Gesamtklassen $\bar{S}^{(x)}$ und $\bar{S}^{(y)}$ mit ihren bezüglichen Streuungen $^{(x)}\sigma$ und $^{(y)}\sigma$ eingehen. Diese Grössen sind ihrerseits wieder nur abhängig von den Klassenhäufigkeiten $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(y)}$, die

für die Tafeln der Rumpffrequenzen und die ursprüngliche Streutafel dieselben geblieben sind. Ähnliche Verhältnisse dürften wohl auch aus den Gleichungen für *nichtlineare* neutrale Regressionen hervorgehen. Doch da wir seiner Zeit (s.S. 17f.) die entsprechenden Gleichungen für nicht-lineare neutrale Regressionen explizit nicht angegeben haben, steht der entsprechende strenge Nachweis dieses Umstandes noch aus. Wir möchten hier nur noch auf die graphische Darstellung dieser Verhältnisse hinweisen, die wir später in anderem Zusammenhange (S. 152ff.) bringen werden. Aus der dort wiedergegebenen Fig. 11 lässt sich leicht entnehmen, dass die für $C3\eta_{ik}$ graphisch ermittelte neutrale Regression tatsächlich immer zwischen den individuellen Regressionen für $C3a_{ik}^*$, $C3\alpha_{ik}^*$ und $C3\beta_{ik}^*$ verbleibt, was etwa einem praktischen Beweis nahekommt für die Erscheinung, dass bei Bildung von Rumpffrequenzen die funktionale Beziehung zwischen den beiden Systemen *nicht* gestört wird.

Bevor wir auf die Brauchbarkeit solcher Streutafeln mit Rumpffrequenzen eingehen, möchten wir zur weiteren Klärung noch einiges sagen über ihre Herstellung und einige Beispiele anführen.

Zur *Herstellung* einer solchen Tafel von Rumpffrequenzen beginnt man am besten mit einer der Abbruchstellen, praktisch mit a_{11}^* . a_{11}^* ist nur abhängig von $A_1^{(s)}$ und $A_1^{(y)}$ nach den Gleichungen

$$\sum_k a_{1k}^* = A_1^{(s)} \quad \text{und} \quad \sum a_{1k}^* = A_1^{(y)}.$$

Als Höchstwert kann für a_{11}^* nur der kleinere Wert der beiden Werte $A_1^{(s)}$ und $A_1^{(y)}$ in Frage kommen. Ist z. B. $A_1^{(s)} < A_1^{(y)}$, dann wird

$$a_{11}^* = A_1^{(s)}.$$

Zu diesem a_{11}^* wird dann die geeignete Nebenfrequenz a_{12}^* oder a_{21}^* entsprechend bestimmt, und zwar

$$\begin{aligned} a_{12}^* &= A_1^{(s)} - A_1^{(y)}, \quad \text{für } A_1^{(s)} > A_1^{(y)} \quad \text{oder} \\ a_{21}^* &= A_1^{(y)} - A_1^{(s)}, \quad \text{für } A_1^{(s)} < A_1^{(y)}, \end{aligned}$$

während alle anderen Nebenfrequenzen in der entsprechenden Zeile 1 oder Spalte 1 verschwinden.

Sodann wird der Höchstwert für a_{22}^* gesucht, der abhängt von den Klassenfrequenzen $A_2^{(s)}$ und $A_2^{(y)}$ und der bereits bestimmten Nebenfrequenzen

quenz a_{12}^* oder a_{21}^* . Auch hier wird wieder beachtet, dass der Wert für a_{22}^* nicht im Widerspruch steht mit den Bedingungen

$$\sum_k a_{2k}^* = A_2^{(x)} \quad \text{und} \quad \sum_i a_{i2}^* = A_2^{(y)}.$$

Ist a_{22}^* bestimmt, dann wird die entsprechende Nebenfrequenz a_{23}^* oder a_{32}^* so gewählt, dass diese *beiden* Gleichungen auch wirklich erfüllt werden, wobei zu beachten ist, dass über a_{12}^* bzw. a_{21}^* schon verfügt wurde.

Dieser Prozess des schrittweisen Auffüllens wird nun weitergeführt, bis die Tafel hergestellt ist.

Für symmetrische Streutafeln, wo $A_i^{(x)} = A_i^{(y)}$ ist, existieren nur die Hauptfrequenzen

$$a_{ii}^* = A_i^{(x)} = A_i^{(y)},$$

die also die Werte der entsprechenden Klassenfrequenzen annehmen. Diese Verknüpfungen bieten allerdings auch von vornherein kein Problem für die Bestimmung „äquivalenter“ Klassenhäufigkeiten, da es sich um *identische* Systeme handelt, wo die Häufigkeitsverteilung der Klassen auch für verschiedene Schätzungen gleich bleiben müssen, wofern der Beobachter sich in seiner Grundhaltung beim Spektralschätzen auch wirklich konstant geblieben ist.

Für die Verknüpfung verschiedener Systeme mögen zur Erläuterung einige *Beispiele* von Rumpffrequenztafeln angeführt werden, und zwar für die Tafel der aktuellen Teilfrequenzen von C3 und für die aus ihr gewonnenen Grundfrequenzen C3 α_{ik} und C3 β_{ik} . Eine weitere Besprechung dieser Tafeln, die in den Tabellen 39-41 zu finden sind, erübrigt sich. Nur in Tabelle 40 wurde aus „Schönheitsgründen“ $R_3^{(e)} = 1.9607$ gesetzt statt 1.9608 wie in Tab. 23 und ebenso in der Folge $R_3^{(b)} = 1.0000$ statt 1.0001.

Solche Tafeln der Rumpffrequenzen können selbstverständlich zunächst nur einmal als eine erste Näherung betrachtet werden, und die aus ihnen abgeleiteten Grundfrequenzen werden erst recht immer Näherungen bleiben. Ohne weitere Angaben, wie z. B. über die den einzelnen Spektralklassen entsprechenden mittleren Klassen im anderen System oder über die mittleren Streuungen, lassen sich auch keine weiteren Verbesserungen anbringen, sodass man für diese Fälle sich mit den genäherten Werten begnügen muss. Es ist nur noch zu zeigen, dass *diese Näherung für die praktischen Aufgaben oft genügt*, sodass es einen Sinn hatte, von solchen Tafeln der Rumpffrequenzen überhaupt zu sprechen.

TABELLE 39

Rumpffrequenzen $C3a_{ik}^*$ der Streutafel $C3a_{ik}$ aus Tabelle 6 S. 65

$S^{(b)} \backslash S^{(c)}$	B ^(b)	A ^(b)	F ^(b)	G ^(b)	K ^(b)	M ^(b)	$A_k^{(c)}$
B ^(c)	.26208	.19467					.45675
A ^(c)		2.26991					2.26991
F ^(c)		.94000	3.68800	5.40325			10.03125
G ^(c)				3.96517	5.50466		9.46983
K ^(c)					15.03625		15.03625
M ^(c)					7.56501	27.17100	34.73601
$A_i^{(b)}$	.26208	3.40458	3.68800	9.36842	28.10592	27.17100	72.00000

TABELLE 40

Rumpf-Grundfrequenzen $C3\alpha_{ik}^*$ zur Streutafel $C3\alpha_{ik}$ aus Tab. 23 S. 95

$S^{(b)} \backslash S^{(c)}$	B ^(b)	A ^(b)	F ^(b)	G ^(b)	K ^(b)	M ^(b)	$R_k^{(c)}$
B ^(c)	1.0000	.2008					1.2008
A ^(c)		.5667					.5667
F ^(c)		.2365	1.0000	.7282			1.9607
G ^(c)				.2718	.2944		.5662
K ^(c)					.4563		.4563
M ^(c)					.2493	1.0000	1.2493
$R_i^{(b)}$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	6.0000

TABELLE 41

Rumpf-Grundfrequenzen $C3\beta_{ik}^*$ zur Streutafel $C3\beta_{ik}$ aus Tab. 24 S. 96

$S^{(b)} \backslash S^{(c)}$	B ^(b)	A ^(b)	F ^(b)	G ^(b)	K ^(b)	M ^(b)	$R_k^{(c)}$
B ^(c)	.7605	.2395					1.0000
A ^(c)		1.0000					1.0000
F ^(c)		.1754	.3127	.5119			1.0000
G ^(c)				.5098	.4902		1.0000
K ^(c)					1.0000		1.0000
M ^(c)					.3099	.6901	1.0000
$R_i^{(b)}$	.7605	1.4149	.3127	1.0217	1.8001	.6901	6.0000

Als erstes Beispiel sollen aus der gegebenen Tafel der Rumpffrequenzen für C3 in Tabelle 39 die zugehörigen Grundfrequenzen berechnet werden, die dann natürlich auch Rumpffrequenzen sein werden. Die zugehörigen Restfrequenzen werden dann mit den aus den normal abgeleiteten Tafeln aus Tabelle 23 und 24 verglichen, was einen Anhaltspunkt bietet zur Bewertung der erreichten Genauigkeit der Näherung.

Da die Streutafel C3 einen Extremfall darstellt, sowohl was die Schätzungsfunktionen angeht als auch die Besetzungsfunktion, wird noch ein Beispiel aus der Literatur herangezogen, der Spektralvergleich der Schätzungen von VANĀS mit den Schätzungen der *Henry Draper Extension*, der später noch einmal in anderem Zusammenhang gebracht wird (Vgl. Tab. 76 S. 200). Auch hier werden aus der Tafel der Rumpffrequenzen die entsprechenden Grundfrequenzen abgeleitet und dann mit den auf gewöhnlichem Weg erhaltenen Tafeln verglichen.

Wir beschränken uns bei diesen Angaben auf zwei Dezimalen, da ja die Reduktionsmethode, die dabei verwendet wird, an sich keine bessere Genauigkeit verbürgen kann. Im ersten Fall der Streutafel C3 ergibt sich zwischen den aus Rumpffrequenzen gewonnenen Restfrequenzen gegen die aus der vollen Tafel berechneten eine mittlere relative Differenz von etwa $\pm 3-4\%$. Im zweiten Fall des Spektralvergleichs VANĀS-HDE ist die Übereinstimmung bei Einrechnung der Auf- und Abrundungsfehler so gut, dass wir uns begnügen, die wirklichen Differenzen stehen zu lassen, die nur in einem Fall $-.03$ und $+.03$ erreichen. Die Einzelheiten ergeben sich ohne weiteres aus den folgenden Tabellen 42 und 43.

Rückblickend lässt sich über die Verwendung von Rumpffrequenzen also vielleicht sagen:

Stehen für den Vergleich von zwei Spektralsystemen nur die Häufigkeiten der Spektralklassen zur Verfügung, die sich in einem besonderen Fall entsprechen, so lassen sich zu einer beliebigen Häufigkeitsverteilung in einem System die ihr äquivalente im andern System immer noch annähert bestimmen über eine Tafel von Rumpffrequenzen, die das Mindestmass an Teilfrequenzen darstellen, die den gegebenen Satz der äquivalenten Häufigkeiten der Spektralklassen befriedigen. Zu der Ungenauigkeit der Reduktionsmethode in sich, die, wie wir oben gesehen haben, im Mittel etwa $\pm 2.5\%$ beträgt, kommt dann noch die Ungenauigkeit, die durch die Unzulänglichkeit der Rumpffrequenzen verursacht wird, die in sehr ungünstigen Fällen in Mittel mit etwa $\pm 3.5\%$ anzusetzen

TABELLE 42

Rumpffrequenzen der Tafel C3 (auf $N = 6$ reduziert) und die aus ihnen berechneten Grundfrequenzen α_{ik}^* und β_{ik}^*

a_{ik}^*								
$S^{(b)} \backslash S^{(c)}$	B(b)	A(b)	F(b)	G(b)	K(b)	M(b)	$A_k^{(c)}$	
B(c)	.022	.016						.038
A(c)		.189						.189
F(c)		.079	.307	.450				.836
G(c)				.331	1.458			.789
K(c)					1.253			1.253
M(c)					.631	2.264		2.895
$A_i^{(b)}$	.022	.284	.307	.781	2.342	2.264		6.000

α_{ik}^*											
$S^{(b)}$	B(b)	A(b)	F(b)	G(b)	K(b)	M(b)	$R_k^{(c)*}$	$R_k^{(c)}$	$R_k^{(c)*} - R_k^{(c)}$		
$S^{(c)}$										Δ	%
B(c)	1.00	.19					1.19	1.20	— .01	—	.83%
A(c)		.56					.56	.57	— .01	—	1.75
F(c)		.25	1.00	.73			1.98	1.96	+ .02	+	1.02
G(c)				.27	.26		.53	.57	— .04	—	7.02
K(c)					.48		.48	.46	+ .02	+	4.35
M(c)					.26	1.00	1.26	1.25	+ .01	+	.80
$R_i^{(b)*}$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	6.00	6.01	Mittel	$\pm$ 3.5	%

β_{ik}^*									
$S^{(b)}$	$S^{(c)}$	B(b)	A(b)	F(b)	G(b)	K(b)	M(b)	$R_k^{(c)*}$	
B(c)		.78	.22					1.00	
A(c)			1.00					1.00	
F(c)			.18	.29				1.00	
G(c)					.53			1.00	
K(c)					.50	.50		1.00	
M(c)						1.00	.69	1.00	
$R_i^{(b)*}$		.78	1.40	.29	1.03	1.81	.69	6.00	
$R_i^{(b)}$		.76	1.41	.31	1.02	1.80	.69	5.99	
$R_i^{(b)*} - R_i^{(b)}$		+ .02	— .01	— .02	+ .01	+ .01	.00	— .01	
$\Delta \%$		+ 2.63	— .71	— 6.45	+ .98	+ .56	.00	Mittel	$\pm 2.9 \%$

TABELLE 43

Rumpffrequenzen für den Spektralvergleich VANAS-HDE aus Tab. 76
und die aus ihnen abgeleiteten Grundfrequenzen

$a_{ik}^{(V,E)*}$							
$S(V) \backslash S(E)$	B(V)	A(V)	F(V)	G(V)	K(V)	M(V)	$A_k^{(E)}$
B(E)	26						26
A(E)	8	141					149
F(E)		27	67				94
G(E)			11	113			124
K(E)				18	107		125
M(E)					52	27	79
$A_i^{(V)}$	34	168	78	131	159	27	597

$\alpha_{ik}^{(V,E)*}$									
	B(V)	A(V)	F(V)	G(V)	K(V)	M(V)	$R_k^{(E)*}$	$R_k^{(E)}$	$R_k^{(E)*} - R_k^{(E)}$
B(E)	.88						.88	.87	+ .01
A(E)	.11	.77					.88	.87	+ .01
F(E)		.23	.89				1.12	1.15	— .03
G(E)			.11	.90			1.01	1.01	.00
K(E)				.10	.40		.50	.49	+ .01
M(E)					.61	1.00	1.61	1.61	.00
$R_i^{(V)*}$	.99	1.00	1.00	1.00	1.01	1.00	6.00	6.00	.00

$\beta_{ik}^{(E,V)*}$									
	B(E)	A(E)	F(E)	G(E)	K(E)	M(E)	$R_i^{(V)*}$	$R_i^{(V)}$	$R_i^{(V)*} - R_i^{(V)}$
B(V)	1.00	.12					1.12	1.14	— .02
A(V)		.88	.23				1.11	1.11	.00
F(V)			.77	.11			.88	.85	+ .03
G(V)				.90	.14		1.04	1.04	.00
K(V)					.86	.58	1.44	1.44	.00
M(V)						.42	.42	.42	.00
$R_k^{(E)*}$	1.00	1.00	1.00	1.01	1.00	1.00	6.01	6.00	+ .01

ist. Es muss demnach für die Bestimmung einer äquivalenten Häufigkeitsverteilung auf diesem Wege mit einem mittleren Fehler von etwa $\pm 4.3\%$ gerechnet werden. Immerhin kann man sich mit einem solchen Resultat noch zufrieden geben, wenn keine anderen Wege zur genaueren Lösung der gestellten Aufgabe beschritten werden können. Unter Umständen besteht allerdings noch ein solcher Ausweg der Ermittlung äquivalenter Klassenhäufigkeiten ohne jede Verwendung von Teilfrequenzen in einer Streutafel, wenn es nämlich gelingt, die Besetzungsfunktion zu bestimmen oder eine ihr äquivalente Hilfsfunktion, wie wir im nächsten Abschnitt noch kurz darlegen möchten.

4. Die unmittelbare Bestimmung äquivalenter Klassenhäufigkeiten unter Verwendung der Besetzungsfunktion oder einer ihr äquivalenten Hilfsfunktion

Die Verwendung der im vorigen Abschnitt besprochenen Rumpffrequenzen zur Lösung der gestellten Aufgabe wurde angeregt vor allem durch den Sonderfall, dass zur Charakterisierung der Verknüpfung zweier Spektralsysteme nur ein Satz von äquivalenten Klassenhäufigkeiten $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(y)}$ vorliegt ohne die zugehörige Streutafel der Teilfrequenzen, und dass zu einer gegebenen neuen Häufigkeitsverteilung der Klassen ($B_i^{(x)}$) im System $S^{(x)}$ die ihr äquivalente Verteilung ($B_k^{(y)}$) im System $S^{(y)}$ zu suchen ist. Nun unterscheiden sich die entsprechenden Klassenhäufigkeiten $A_i^{(x)}$ und $B_i^{(x)}$ und in gleicher Weise auch $A_k^{(y)}$ und $B_k^{(y)}$ nur durch ihre Besetzungsfunktionen, die für $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(y)}$ $f_a(s)$ sei und für $B_i^{(x)}$ und $B_k^{(y)}$ $f_b(s)$; dagegen stimmen sie überein in den Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_k^{(y)}(s)$. So liegt es nahe von diesen Gegebenheiten aus ohne den Umweg über Teilfrequenzen eine direkte Lösung der Aufgabe zu versuchen.

Zu diesem Zweck gehen wir zurück auf die analytische Darstellung der Klassenfrequenzen durch die Gleichungen (35) und (36) S. 29:

$$A_i^{(x)} = \int f_a(s) w_i^{(x)}(s) ds \quad (35)$$

und

$$A_k^{(y)} = \int f_a(s) w_k^{(y)}(s) ds . \quad (36)$$

Auch hier lässt sich die Besetzungsfunktion $f_a(s)$ aus den Integralen heraus-

ziehen, ähnlich wie es in (67) S. 39 geschah zur Ableitung der Bedeutung der Reduktionsfaktoren f_{ik} , nämlich:

$$A_i^{(x)} = f_a(\bar{s}_i^{(x)}) \int w_i^{(x)}(s) ds = f_a(\bar{s}_i^{(x)}) U_i^{(x)} \quad (111)$$

und

$$A_k^{(y)} = f_a(\bar{s}_k^{(y)}) \int w_k^{(y)}(s) ds = f_a(\bar{s}_k^{(y)}) U_k^{(y)}. \quad (112)$$

$U_i^{(x)}$ und $U_k^{(y)}$ sind die bekannten elementaren Klassenfrequenzen (65) und (66), $f_a(\bar{s}_i^{(x)})$ und $f_a(\bar{s}_k^{(y)})$ Funktionswerte der Besetzungsfunktion $f_a(s)$ für die Stellen $\bar{s}_i^{(x)}$ und $\bar{s}_k^{(y)}$ im Inneren der benützten Intervalle der Spektralfolge s . Die Stellen $\bar{s}_i^{(x)}$ und $\bar{s}_k^{(y)}$ sind in erster Linie abhängig von den bezüglichen Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_k^{(y)}(s)$, sind aber nicht ohne weiteres identisch mit den oben S. 73 Gl. (92 b) ebenso bezeichneten mittleren Koordinaten der Spektralklassen $S_i^{(x)}$ und $S_k^{(y)}$, auch nicht wenn es sich um vollkommen symmetrische Schätzungsfunktionen handelt; denn sie werden in zweiter Ordnung noch beeinflusst von der Gestalt der Besetzungsfunktion $f_a(s)$ an der betreffenden Stelle, sodass für verschiedene Besetzungsfunktionen unter Umständen auch verschiedene mittlere Intervallstellen $\bar{s}_i^{(x)}$ und $\bar{s}_k^{(y)}$ erscheinen. Doch werden im allgemeinen die Unterschiede gering sein, sodass man – wenigstens einmal versuchsweise – für alle Besetzungsfunktionen dieselben mittleren Intervallstellen ansetzen kann, und dann wird man doch, als am nächsten liegend, die oben in (92 b) definierten mittleren Koordinaten der betreffenden Spektralklassen wählen können.

Sind nun die elementaren Klassenfrequenzen $U_i^{(x)}$ und $U_k^{(y)}$ und damit auch die mittleren Koordinaten $\bar{s}_i^{(x)}$ und $\bar{s}_k^{(y)}$ der Spektralklassen $S_i^{(x)}$ und $S_k^{(y)}$ bekannt, so lässt sich die in einer vorgegebenen Häufigkeitsverteilung der Klassen ($A_i^{(x)}$) im System $S^{(x)}$ enthaltene Besetzungsfunktion $f_a(s)$ für ihre Werte an den Stellen $\bar{s}_i^{(x)}$ angenähert bestimmen zu

$$f_a(\bar{s}_i^{(x)}) = \frac{A_i^{(x)}}{U_i^{(x)}}. \quad (113)$$

In den meisten Fällen dürften diese Punkte ausreichen, um die ganze Besetzungsfunktion $f_a(s)$, wenigstens graphisch, einigermaßen sicherzustellen. Aus ihr lassen sich für die Stellen $\bar{s}_k^{(y)}$ die Funktionswerte $f_a(\bar{s}_k^{(y)})$

entnehmen, womit dann die Häufigkeiten $A_k^{(y)}$ der Spektralklassen $S_k^{(y)}$ des anderen Spektralsystems $S^{(y)}$ gemäss den Gleichungen

$$A_k^{(y)} = f_a(\bar{s}_k^{(y)}) U_k^{(y)} \cdot (k = 1, 2, \dots, n) \quad (113 a)$$

bestimmt werden können.

Natürlich handelt es sich hier immer nur um Näherungen, wenn die entsprechenden Beziehungen auch als Gleichungen dargestellt wurden, und für solche Näherungen muss erst der Brauchbarkeitserweis erbracht werden. Deshalb wurden auf diese Weise mit Hilfe des in den Streutafelgruppen **B** und **C** niedergelegten Materials zu den $A_i^{(x)}$ die ihnen äquivalenten $A_k^{(y)}$ berechnet unter der einzigen Annahme, dass der Satz der elementaren Teilfrequenzen $U_i^{(x)}$ und $U_k^{(y)}$ aus den Streutafeln **B1** und **C1** bekannt sind. In Tabelle 44 sind die mittleren Koordinaten $\bar{s}_i^{(x)}$ und $\bar{s}_k^{(y)}$ der Spektralklassen in den vorkommenden Systemen mit den zugehörigen elementaren Klassenfrequenzen $U_i^{(x)}$ und $U_k^{(y)}$ zusammengestellt.

TABELLE 44

Mittlere Koordinaten $\bar{s}_i$ und elementare Klassenfrequenzen U_i der Klassen der Spektralsysteme $S^{(a)}$, $S^{(b)}$ und $S^{(c)}$

<i>i</i>	$S^{(a)}$		$S^{(b)}$		$S^{(c)}$	
	$\bar{s}_i$	U_i	$\bar{s}_i$	U_i	$\bar{s}_i$	U_i
B	.5	1.00	.425	.85	.525	1.05
A	1.5	1.00	1.525	1.35	1.50	.95
F	2.5	1.00	2.50	.60	2.675	1.35
G	3.5	1.00	3.225	.85	3.70	.70
K	4.5	1.00	4.375	1.45	4.425	.75
M	5.5	1.00	5.55	.90	5.40	1.20

Die Werte für die $f(\bar{s}_i^{(x)})$ finden sich schon vorbereitet in den Tabellen über die Reduktionsfaktoren (Tab. 9 und 10) als die Quotienten

$$\frac{A_i^{(x)}}{U_i^{(x)}} = f(\bar{s}_i^{(x)}) .$$

In den Tabellen 45 und 46 werden dann die berechneten $A_k^{(y)}(C)$ mit den wirklichen $A_k^{(y)}(O)$ zusammengestellt und die Abweichungen absolut und prozentuell angegeben. Die Näherung ist eigentlich überraschend gut, besonders bei der Streutafelgruppe B, wo wegen der Symmetrie der Schätzungsfunktionen $w_i^{(a)}(s)$ die zugehörigen mittleren Koordinaten $\bar{s}_i^{(a)}$ praktisch erlauben, die wirklichen Besetzungsfunktionen $f_2(s)$ und $f_3(s)$ wieder herauszufinden. Die Rekonstruktion der unregelmässigen $F(s)$ ist natürlich weitgehenden Schwankungen ausgesetzt, aber auch hier sind die Näherungen immerhin noch zufriedenstellend, wenn auch nicht grossartig.

Bei der Streutafelgruppe C verursachen neben der Asymmetrie der Schätzungsfunktionen der beiden Spektralsysteme $S^{(b)}$ und $S^{(c)}$ auch die zuweilen grossen Differenzen der mittleren Koordinaten entsprechender Spektralklassen, wie z. B. $G^{(b)}$ und $G^{(c)}$ grössere Abweichungen. Doch dürfte auch hier die Näherung noch zu brauchen sein.

Um auch einen anschaulichen Begriff vom Verlauf dieser rekonstruierten Besetzungsfunktionen zu geben, wurden in Fig. 4 die auf diese Weise gezeichneten Besetzungsfunktionen f_2, f_3 und f_4 für die Gruppe C im Bild geboten. Wie ersichtlich, ist f_4 wirklich sehr unregelmässig und lässt Interpolationsmöglichkeiten einen allzugrossen Spielraum.

Bei praktischen Aufgaben werden allerdings die elementaren Klassenfrequenzen nicht bekannt sein. Es liegen dann nur vor die aktuellen Klassenhäufigkeiten $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(y)}$, die aus den unbekannten $U_i^{(x)}$ und $U_k^{(y)}$ hervorgehen durch die Verknüpfung mit der Besetzungsfunktion $f_a(s)$. Dieselben unbekannten $U_i^{(x)}$ und $U_k^{(y)}$ stecken nun auch in den vorgegebenen neuen aktuellen Klassenhäufigkeiten $B_i^{(x)}$ und in den gesuchten $B_k^{(y)}$, diesmal aber verbunden mit der neuen Besetzungsfunktion $f_b(s)$. Setzen wir

$$\varphi(s) = \frac{f_a(s)}{f_b(s)} , \quad (114)$$

TABELLE 45

Berechnete Klassenhäufigkeiten $A_k^{(e)}(C)$ der Streutafelgruppe B mit konstruierten Besetzungsfunktionen

	k	$f(\bar{s}_k)$	$A_k^{(e)}(C)$	$A_k^{(e)}(O)$	$O - C$	$(O - C) \%$
B1 $\rightarrow$ B2	B	.56	.59	.59	.00	.0
	A	1.50	1.43	1.43	.00	.0
	F	2.68	3.62	3.63	+ .01	+ .3
	G	3.70	2.59	2.57	— .02	— .8
	K	4.425	3.32	3.35	+ .03	+ .9
	M	5.36	6.43	6.44	+ .01	+ .2
B1 $\rightarrow$ B3	B	.44	.46	.46	.00	.0
	A	2.42	2.30	2.27	— .03	— 1.2
	F	7.12	9.61	10.03	+ .32	+ 3.2
	G	13.75	9.63	9.47	— .16	— 1.7
	K	19.6	14.70	15.03	+ .33	+ 2.2
	M	29.4	35.28	34.74	— .54	— 1.6
B1 $\rightarrow$ B4	B	6.0	6.2	6.3	— .1	— 1.6
	A	20.5	19.5	20.2	+ .7	+ 3.5
	F	16.3	22.0	21.6	— .4	— 1.9
	G	8.3	5.8	5.7	— .1	— 1.8
	K	10.5	7.8	8.1	+ .3	+ 3.7
	M	9.1	10.9	10.7	— .2	— 1.9

TABELLE 46

Berechnete Klassenhäufigkeiten $A_k^{(c)}(C)$ der Streutafelgruppe C mit konstruierten Besetzungsfunktionen

	k	$f(\bar{s}_k)$	$A_k^{(c)}(C)$	$A_k^{(c)}(O)$	$O - C$	$(O - C) \%$
C1 $\rightarrow$ C2	B	.57	.60	.59	— .01	— 1.7
	A	1.50	1.43	1.43	.00	.0
	F	2.67	3.60	3.63	+ .03	+ .8
	G	3.75	2.63	2.57	— .06	— 2.3
	K	4.44	3.33	3.35	+ .02	+ .6
	M	5.33	6.40	6.44	+ .04	+ .6
C1 $\rightarrow$ C3	B	.45	.47	.46	— .01	— 2.2
	A	2.45	2.33	2.37	— .06	— 2.6
	F	7.20	9.72	10.03	+ .31	+ 3.1
	G	14.40	10.08	9.47	— .61	— 6.4
	K	19.85	14.89	15.04	+ .15	+ 1.0
	M	28.70	34.44	34.74	+ .30	+ .9
C1 $\rightarrow$ C4	B	5.65	5.9	6.2	+ .3	+ 4.8
	A	19.9	18.9	20.2	+ 1.3	+ 6.4
	F	15.0	20.3	21.6	+ 1.3	+ 6.0
	G	8.8	6.2	5.7	— .5	— 8.8
	K	10.55	7.9	8.1	+ .2	+ 2.5
	M	8.8	10.6	10.7	+ .1	+ .9

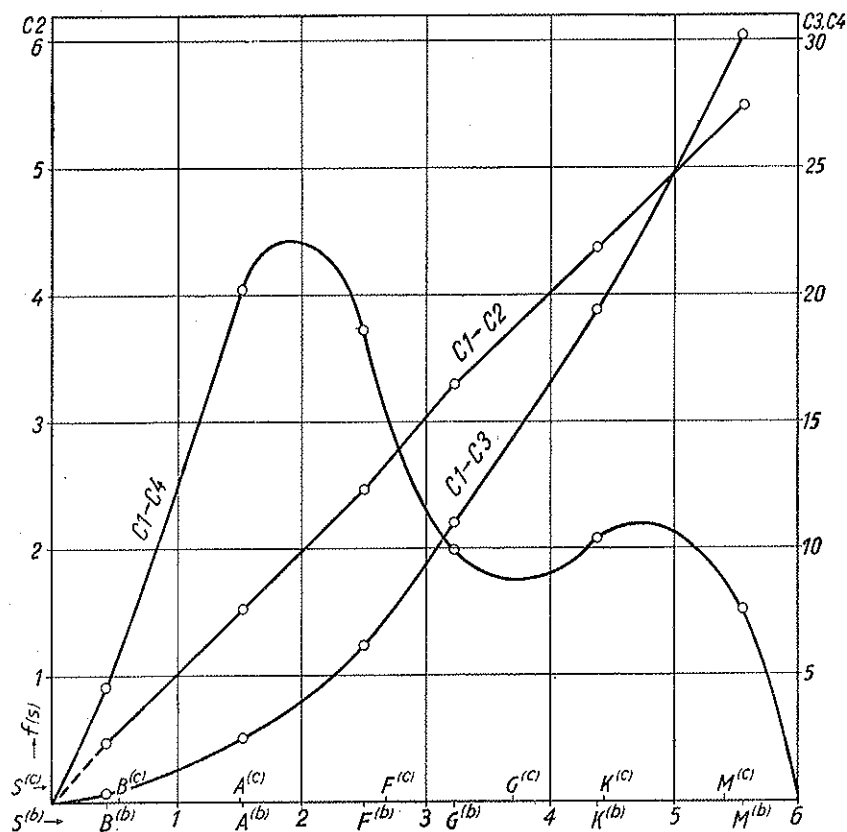


FIG. 4. Besetzungsfunktionen zur Berechnung der Klassenhäufigkeiten $A_k^{(c)}$ der Streutafelgruppe C.

dann lässt sich schreiben

$$B_i^{(x)} = \int f_b(s) w_i^{(x)}(s) ds = \int \varphi(s) f_a(s) w_i^{(x)}(s) ds \quad (115a)$$

und

$$B_i^{(y)} = \int f_b(s) w_k^{(y)}(s) ds = \int \varphi(s) f_a(s) w_k^{(y)}(s) ds. \quad (115b)$$

Wir ziehen auch hier, analog zu (111) und (112), die Funktion $\varphi(s)$ aus den Integralen heraus und erhalten

$$B_i^{(x)} = \varphi(\bar{s}_i^{(x)}) \int f_a(s) w_i^{(x)}(s) ds = \varphi(\bar{s}_i^{(x)}) A_i^{(x)} \quad \text{und} \quad (116a)$$

$$B_k^{(y)} = \varphi(\bar{s}_k^{(y)}) \int f_a(s) w_k^{(y)}(s) ds = \varphi(\bar{s}_k^{(y)}) A_k^{(y)}, \quad (116b)$$

wobei in erster Näherung als mittlere Intervallstellen $\bar{s}_i^{(x)}$ und $\bar{s}_k^{(y)}$ die mittleren Koordinaten der Intervalle $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(y)}$ benützt werden könnten nach den Gleichungen

$$\int_{-\infty}^{\bar{s}_i^{(x)}} f_a(s) w_i^{(x)}(s) ds = \int_{\bar{s}_i^{(x)}}^{+\infty} f_a(s) w_i^{(x)}(s) ds = \frac{1}{2} A_i^{(x)} \quad (117a)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\bar{s}_k^{(y)}} f_a(s) w_k^{(y)}(s) ds = \int_{\bar{s}_k^{(y)}}^{+\infty} f_a(s) w_k^{(y)}(s) ds = \frac{1}{2} A_k^{(y)}. \quad (117b)$$

Die Funktion $\varphi(s)$ spielt also ganz die Rolle der Besetzungsfunktion in den Gleichungen (111) und (112).

Wird nun, wie früher, auch der Einfluss zweiter Ordnung auf die mittleren Koordinaten $\bar{s}_i^{(x)}$ und $\bar{s}_k^{(y)}$ vernachlässigt, der von der Eigenart der Hilfsfunktion $\varphi(s)$ stammt, dann lässt sich setzen

$$\varphi(\bar{s}_i^{(x)}) = \frac{B_i^{(x)}}{A_i^{(x)}}, \quad (118)$$

womit nun die Hilfsfunktion $\varphi(s)$ genähert festgelegt werden kann. Mit den Koordinaten $\bar{s}_k^{(y)}$ lassen sich dann aus der Kurve $\varphi(s)$ die zugehörigen Funktionswerte $\varphi(\bar{s}_k^{(y)})$ entnehmen und die gesuchten Klassenhäufigkeiten $B_k^{(y)}$ berechnen nach der Gleichung

$$B_k^{(y)} = \varphi(\bar{s}_k^{(y)}) A_k^{(y)}. \quad (119)$$

Auch hier mag es wohl kaum nötig sein, zu bemerken, dass diese Gleichungen eigentlich nur Näherungen vorstellen, und die Brauchbarkeit des Verfahrens muss auch hier wie früher, durch praktische Beispiele erwiesen werden. Zu diesem Zwecke nehmen wir als Ausgangsstreutafel die Tafel C2 und versuchen die Klassenhäufigkeiten $A_k^{(y)}$ zu bestimmen nach den vorgegeben $A_i^{(x)}$ für die Streutafeln C3, C4 und C1.

Die mittleren Intervallkoordinaten für die entsprechenden Spektralklassen $\bar{s}_i^{(x)}$ und $\bar{s}_k^{(y)}$ finden sich mit den zugehörigen Klassenhäufigkeiten der Streutafel C2 in Tabelle 47, wobei die Tafel auf die Gesamtmenge der Objekte $N = 6$ reduziert wurde, um die Bestimmungen mit den

TABELLE 47

Mittlere Koordinaten $\bar{s}_i^{(b)}$ und $\bar{s}_k^{(c)}$ und Klassenhäufigkeiten $A_i^{(b)}$ und $A_k^{(c)}$ der Spektralklassen in Streutafel C1, reduziert auf $N = 6$

i, k	$\bar{s}_i^{(b)}$	$A_i^{(b)}$	$\bar{s}_k^{(c)}$	$A_k^{(c)}$
B	.065	.13	.10	.20
A	.47	.68	.44	.48
F	1.055	.49	1.285	1.21
G	1.77	.94	2.32	.86
K	3.295	2.11	3.31	1.12
M	5.175	1.65	4.935	2.13

früheren vergleichbar zu machen. Natürlich werden nun die Intervalle für die einzelnen Spektralklassen zufolge der zugrundeliegenden Besetzungsfunktion $f_2(s) = s$ nicht mehr gleich gross ausfallen. Das bedeutet im Grunde eine Skalenänderung und hat auf die Lösung der Aufgabe nur einen mittelbaren Einfluss, da damit unter Umständen die möglichen Abweichungen der benützten mittleren Koordinaten $\bar{s}_i^{(s)}$ und $\bar{s}_k^{(y)}$ von den wahren grösser werden können und auch ganz allgemein die Interpolation der Hilfsfunktion $\varphi(s)$ unsicherer wird. Zur Veranschaulichung dieser Verhältnisse sind diese Hilfsbesetzungen in Fig. 5 wiedergegeben mit den entsprechenden Bestimmungspunkten $\circ$. Die zur Erstellung der Kurven benötigten Funktionswerte $\varphi(\bar{s}_i^{(b)})$ sind in Tabelle 48 zu finden. Dort werden auch die abgelesenen $\varphi(\bar{s}_k^{(c)})$ geboten zusammen mit den berechneten (C) und wahren (O) Klassenhäufigkeiten $A_k^{(c)}$ und den entsprechenden absoluten und prozentuellen Abweichungen ($O - C$).

Die Differenzen sind verhältnismässig gering – abgesehen von einigen besonders kritischen Stellen – und eine solche Näherung dürfte noch immer als zufriedenstellend bezeichnet werden, besonders, wenn man

TABELLE 48

Berechnete Klassenhäufigkeiten $A_k^{(c)}(C)$ der Streutafelgruppe C mit konstruierten Hilfs-Besetzungsfunktionen

	i, k	$\varphi(s_i)$	$\varphi(\tilde{s}_k)$	$A_k^{(c)}(C)$	$A_k^{(c)}(O)$	$O - C$	$(O - C) \%$
C2 $\rightarrow$ C3	B	2.02	2.40	.48	.46	— .02	— 4.3
	A	5.01	4.80	2.30	2.27	— .03	— 1.3
	F	7.53	8.35	10.10	10.03	— .07	— .7
	G	9.97	11.30	9.72	9.47	— .25	— 2.6
	K	13.32	13.35	14.95	15.04	+ .09	+ .6
	M	16.47	16.10	34.29	34.74	+ .45	+ 1.3
C2 $\rightarrow$ C4	B	30.0	32.0	6.4	6.2	— .2	— 3.2
	A	39.75	39.5	20.0	20.2	— .2	+ 1.0
	F	22.8	15.3	18.5	21.6	+ 3.1	+ 14.4(!)
	G	9.0	7.3	6.3	5.7	— .6	— 10.0
	K	7.1	7.2	8.1	8.1	.0	.0
	M	4.25	5.15	11.0	10.7	— .3	— 2.8
C2 $\rightarrow$ C1	B	6.46	4.95	.99	1.05	+ .06	+ 5.7
	A	1.97	2.04	.98	.95	— .03	— 3.2
	F	1.22	1.08	1.31	1.35	+ .04	+ 3.0
	G	.91	.81	.70	.70	.00	.0
	K	.69	.69	.77	.75	— .02	— 2.7
	M	.55	.56	1.19	1.20	+ .01	+ .8

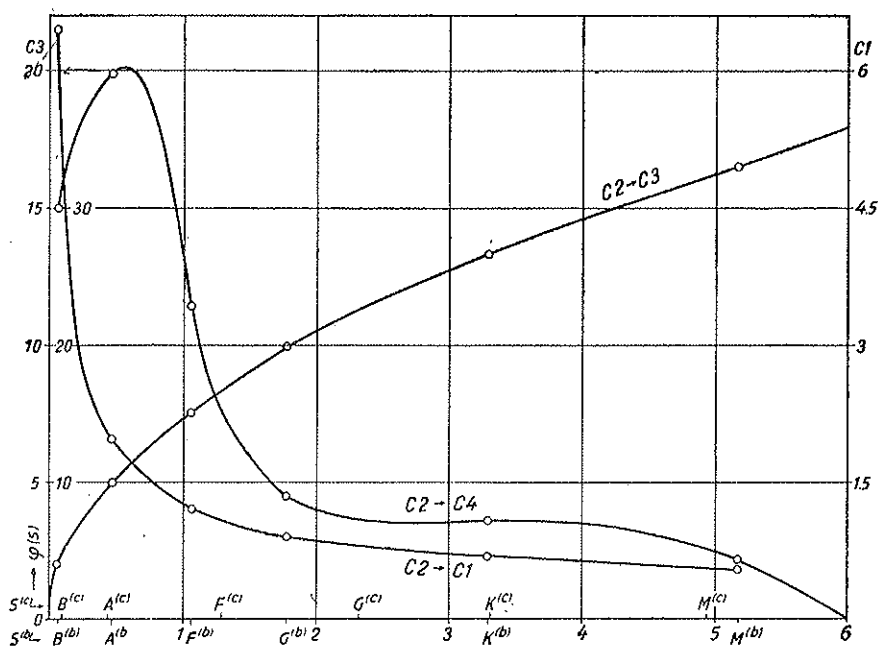


FIG. 5. Hilfsbesetzungsfunktionen bezogen auf C2 zur Berechnung der Klassenhäufigkeiten $A_k^{(c)}$ der übrigen Streutafeln der Gruppe C.

bedenkt, dass das Näherungsverfahren mit den umständlich zu berechnenden Reduktionsfaktoren oft auch nicht zu viel besseren Ergebnissen führt. Ja es hat den Anschein, dass eine solche direkte Bestimmung der äquivalenten Klassenhäufigkeiten bei entsprechenden Voraussetzungen bedeutend sicherer und einfacher arbeitet als die Bestimmung über Rumpffrequenzen, ja oft auch einer Bestimmung durch Reduktionsfaktoren vorzuziehen sein wird.

Mit ganz besonderem Vorteil wird man dieses direkte Verfahren verwenden, wenn es sich um zahlreiche und enge Klassenintervalle handelt und die Streuungen über mehrere Klassen sich erstrecken, wo dann das Verfahren mit Reduktionsfaktoren ausserordentlich verwickelt und mühsam werden kann. Zudem ist es für dieses direkte Verfahren ganz belanglos, ob die beiden zum Vergleich stehenden Spektralsysteme die gleiche Anzahl von Klassen haben oder nicht, was sich für die Verwendung von Reduktionsfaktoren nicht sagen lässt, wo wir ausdrücklich gleiche Klassenzahl für die beiden Systeme voraussetzen mussten.

IV. Die Ermittlung äquivalenter Spektralklassen

Die bisher besprochene Reduktion von Spektralstreutafeln hat in erster Linie die beschränkte Aufgabe, für die in Frage stehenden Spektralsysteme die Bestimmung verlässlicher äquivalenter *Häufigkeitsverteilungen* der Spektralklassen in beliebigen Fällen zu ermöglichen. Die Ermittlung äquivalenter Spektralklassen erfolgt hingegen nach wie vor mit den gewöhnlichen Verfahren der Korrelationstheorie, wie sie S. 14ff. für diesen speziellen Zweck angeführt wurden.

Wenn auch Spektralstreutafeln, wie jede andere Beobachtungstreutafel, unter den gewöhnlichen Korrelationstafeln eine Sonderstellung einnehmen (wie oben S. 16ff. eingehender dargelegt wurde) und die Übertragung der allgemeinen statistischen Begriffe manches Mal etwas gezwungen erscheinen mögen, so lässt sich doch nicht leugnen, dass diese Methoden bei Beachtung der nötigen Vorsichtsmassregeln und unter gewissen Vorbehalten in der Hand gewandter Autoren zu brauchbaren Ergebnissen führen, wie die Arbeiten von HOLMBERG ⁽³⁾, VYSSOTSKY ⁽¹⁴⁾ und SEARES und JOYNER ⁽⁸⁾ zeigen.

Gewöhnlich wird von diesen Autoren der ausdrückliche Vorbehalt gemacht, dass die Ergebnisse strenge nur für das verwendete Beobachtungsmaterial gelten und nicht ohne weiteres verallgemeinert werden dürften. Es ist nun richtig, dass die Häufigkeitsverteilung in die Aufstellung der Regressionen einfließt. Dabei wird gewöhnlich kein Unterschied gemacht, ob die zufällige Verteilung nur eine Folge der verschiedenen Besetzungsfunktionen ist, oder ob es sich um wirklich selektives Material handelt. Ferner ist zu bemerken, dass bei wirklich repräsentativem Material die zufällige Verteilung nur in die individuellen Regressionen eingeht, die funktionale Beziehung aber unberührt lassen muss.

Es liegt deshalb nahe, an Hand der vorliegenden reichen Sammlung von isogenen Streutafeln verschiedenster Art, diesen Einfluss der Häufigkeitsverteilungen auf die Bestimmung der Regressionen und damit auch auf die Bestimmung äquivalenter Klassen etwas näher zu betrachten, wenn auch eine solche Untersuchung, streng genommen, nicht mehr in den Bereich der vorliegenden Abhandlung gehört, aber doch vielleicht eine erwünschte Abrundung bietet.

1. Der Einfluss der zufälligen Klassenhäufigkeiten auf die Bestimmung äquivalenter Klassen bei repräsentativem Material

Für den hier vorliegenden Zweck des Vergleiches zweier Spektralsysteme nennen wir ein gegebenes Material dann *repräsentativ*, wenn dafür eine natürliche Besetzungsfunktion existiert. Dabei wird als selbstverständlich vorausgesetzt, dass diese Gesamtheit auch ausreichend viele Objekte umfasst, wie es für statistische Untersuchungen verlangt wird. Diese Eigenschaften kommen nun dem Material zu *vor* jeder spektralen Bearbeitung. Dieser Fall ist sicher verwirklicht für die Gesamtheit der Objekte in einem grösseren zusammenhängenden Gebiete im Raum. Die Beschränkung auf Objekte in grösseren Gebieten des Himmels bis zu einer gewissen scheinbaren Helligkeit oder auch in bestimmten Helligkeitsintervallen, bedeutet zwar eine „Auslese“; aber solange die Kriterien für die Auswahl nicht mit einer Spektralschätzung *innerlich* zusammenhängen, kann das Material immer noch als repräsentativ angesehen werden, da sich ja nur die Besetzungsfunktion dabei ändert. Auch die Beschränkung auf gewisse Intervalle von absoluten Helligkeiten, Farbenindizes oder Eigenbewegungen belässt das Material noch „repräsentativ“ für Untersuchungen, die sich nur auf den Vergleich von Spektralsystemen beziehen. Erfolgt aber die Auswahl nach gewissen Gesichtspunkten, die mit einem Spektralsystem *nach* erfolgter Klassifikation zusammenhängen, dann kann das Material unter Umständen seine Repräsentativität in dieser Hinsicht einbüßen und *selektiv* werden, z. B. wenn nach erfolgter Bestimmung der Spektralklassen für jede Klasse gleichviel Objekte – wenn auch wahllos – entnommen werden. Eine solche Menge kann in Hinsicht auf den Vergleich zweier Spektralsysteme nicht mehr repräsentativ genannt werden.

Diese enge Auffassung der Repräsentativität mag vielleicht etwas befremden. Doch ist festzuhalten, dass ein Material immer in *Rücksicht auf eine besondere Eigenheit* repräsentativ genannt wird, und dass es wohl in *einer* Hinsicht repräsentativ bleiben und gleichzeitig in einer *anderen* selektiv werden kann. Ein Gebiet in der Milchstrasse hat sicher eine andere Spektralverteilung als ein aussergalaktisches Feld, das bis zur selben scheinbaren Grösse geht, auch *vor* jeder spektralen Untersuchung. Doch ist die Auswahl nur eine Folge der Eigenart der Besetzungsfunktion, die in beiden Gebieten verschieden sein mag, während die Beziehungen zwischen zwei bestimmten Spektralsystemen, nach denen in den betref-

fenden Gegenden Schätzungen vorgenommen werden, dieselben bleiben müssen, und auch als dieselben erkannt werden können, mag nun das eine Gebiet z. B. einen Überschuss an weissen Sternen haben, das andere an roten.

Im vorliegenden Abschnitt beschäftigen wir uns nur mit Streutafeln, die nicht durch einen Ausleseeffekt entstellt sind, und möchten zeigen, wie weit die zufällige Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen in die Bestimmung der äquivalenten Klassen oder, was dasselbe ist, in die Bestimmung der neutralen Regression einfließt, und wie gegebenenfalls dafür gesorgt werden kann, für diese Kurven die zuverlässigsten Werte zu erhalten. Im nächsten Abschnitt mag dann auch noch der Einfluss der Auslese oder Selektivität auf die Bestimmung der äquivalenten Klassen zur Sprache kommen.

Das Hauptziel, das mit Hilfe der korrelationstheoretischen Verfahren erstrebt wird, ist, wie gesagt, die Ermittlung äquivalenter Spektralklassen, sodass man von einem Spektralsystem auf ein anderes damit verknüpftes übergehen kann. Dieser Übergang erfolgt über die Regressionskurven, insbesondere die neutrale Kurve, die zwischen den beiden individuellen Regressionen liegt, wie oben S. 17f. näher ausgeführt wurde.

Die zur Aufstellung der Regressionslinien für die in den Tabellen 4-7 gebotenen Streutafeln erforderlichen Daten sind in den folgenden Tabellen 49-57 zusammengestellt. Als Eingang besitzen diese Tabellen die Normalklassen B, A, F, G, K, M, die nach dem Vorgang bei statistischen Aufgaben fortlaufend den entsprechenden ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 zugeordnet werden. Diese Zahlen gelten einmal für die Normalklassen $S_i^{(x)}$ des ersten Systems $S^{(x)}$, dann aber auch für die $S_k^{(y)}$ des zweiten Spektralsystems $S^{(y)}$, je nachdem dazu die entsprechenden mittleren Klassen $\bar{S}_i^{(y)}$ oder $\bar{S}_k^{(x)}$ gehören. Unter den die mittleren Klassen bezeichnenden Werten finden sich gleich die zugehörigen mittleren quadratischen Streuungen $^{(y)}\sigma_i$, bezw. $^{(x)}\sigma_k$, deren Definitionen oben S. 14ff. gegeben wurden.

Bei den symmetrischen Streutafeln der Gruppen A und D (Tab. 49 und 57) genügen die Angaben in *einer* Richtung, da für den umgekehrten Weg wegen der Symmetrie die sich entsprechenden Klassen gleiche Zahlenwerte aufweisen müssen.

Am Ende der Tabellen werden dann noch die für jedes System geltenden mittleren Gesamtklassen $\bar{S}^{(x)}$ und $\bar{S}^{(y)}$ angeführt mit den zugehörigen mittleren quadratischen Dispersionen $^{(x)}\sigma$ und $^{(y)}\sigma$, die bei linea-

TABELLE 49

Mittlere Klassen und Streuungen für die Regressionen der Streutafeln der Gruppe A

Tafel	$S_i^{(1)}, S_k^{(2)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
A1	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$	1.1667	2.0000	3.0000	4.0000	5.0000	5.8333
	$(2)\sigma_i, (1)\sigma_i$	.3725	.5773	.5773	.5773	.5773	.3725
A2	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$	1.3077	2.1111	3.0667	4.0476	5.0370	5.8473
	$(2)\sigma_i, (1)\sigma_i$	.4615	.5666	.5735	.5753	.5763	.3597
A3	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$	1.4199	2.2069	3.1299	4.0940	5.0735	5.8604
	$(2)\sigma_i, (1)\sigma_i$	.4936	.5558	.5687	.5728	.5745	.3466
A4	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$	1.3658	2.0933	2.8903	3.9294	5.0847	5.7218
	$(2)\sigma_i, (1)\sigma_i$	.4817	.5352	.5635	.5963	.5656	.4527
A2 η_{ik}	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$	1.1949	1.9730	3.0004	3.9993	4.9991	5.8333
	$(2)\sigma_i, (1)\sigma_i$	.3961	.6017	.5798	.5796	.5782	.3727
A3 η_{ik}	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$	1.2015	1.9676	3.0001	3.9989	4.9983	5.8336
	$(2)\sigma_i, (1)\sigma_i$	.4011	.6079	.5816	.5808	.5784	.3724
A4 η_{ik}	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$	1.2014	1.9873	2.9707	3.9752	5.1030	5.7624
	$(2)\sigma_i, (1)\sigma_i$	.4010	.6244	.5892	.5417	.6013	.4256
		A1	A2	A3	A4		
	$\bar{S}^{(1)}, \bar{S}^{(2)}$	3.5000	4.4607	4.9410	3.3253		
	$(1)\sigma, (2)\sigma$	1.7078	1.4120	1.1557	1.4943		
	r	.9524	.9303	.9043	.9281		
		A1 η_{ik}	A2 η_{ik}	A3 η_{ik}	A4 η_{ik}		
	$\bar{S}^{(1)}, \bar{S}^{(2)}$	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000		
	$(1)\sigma, (2)\sigma$	1.7078	1.7078	1.7078	1.7078		
	r	.9524	.9506	.9500	.9472		

TABELLE 50

Mittlere Klassen und Streuungen für die Regressionen der
nichtreduzierten Streutafeln der Gruppe B

Tafel	$S_i^{(a)}, S_k^{(c)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
B1	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1350	1.9550	2.9000	3.7280	5.1173	5.9147
	$(c)\sigma_i$	.3418	.5683	.4938	.6532	.6675	.2795
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.1762	2.0053	3.1889	4.1667	4.9667	5.7611
	$(a)\sigma_k$	.3809	.5380	.6066	.5032	.5097	.4290
B2	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.2617	2.0722	2.9445	3.7873	5.1647	5.9234
	$(c)\sigma_i$	.4395	.5601	.3934	.6623	.6595	.2661
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.3164	2.0874	3.2634	4.1895	4.9884	5.7820
	$(a)\sigma_k$	.4651	.5272	.6047	.5033	.5110	.4151
B3	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.3704	2.1757	2.9841	3.8465	5.2105	5.9314
	$(c)\sigma_i$	.4829	.5529	.3788	.6690	.6498	.2528
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.4256	2.1575	3.3355	4.2117	5.0105	5.8015
	$(a)\sigma_k$	.4945	.5185	.5997	.5035	.5122	.4007
B4	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.3210	2.0454	2.8311	3.6529	5.2269	5.8518
	$(c)\sigma_i$	.4669	.5192	.4290	.6590	.6441	.3552
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.3744	2.0792	3.0441	4.1406	5.0359	5.6456
	$(a)\sigma_k$	.4839	.5044	.5891	.5081	.5102	.4809
		B1	B2	B3	B4		
$\bar{S}^{(a)}$		3.5000	4.4606	4.9410	3.3253		
$(a)\sigma$		1.7078	1.4120	1.1557	1.4943		
$\bar{S}^{(c)}$		3.4583	4.4434	4.9523	3.2958		
$(c)\sigma$		1.7507	1.4941	1.2467	1.5450		
r		.9536	.9331	.8943	.9331		

TABELLE 51

Mittlere Klassen und Streuungen für die Regressionen der
Grundfrequenztafeln α_{ik} der Streutafelgruppe B

Tafel	$S_i^{(a)}, S_k^{(c)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
B2	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1626	1.9334	2.9092	3.7211	5.1197	5.9152
	$(c)\sigma_i$	.3691	.5946	.4071	.6592	.6645	.2786
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.2023	1.9678	3.1893	4.1609	4.9630	5.7623
	$(a)\sigma_k$	.4016	.5602	.6114	.5065	.5092	.4281
B3	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1721	1.9344	2.9178	3.7146	5.1220	5.9159
	$(c)\sigma_i$	.3775	.6031	.4016	.6647	.6602	.2775
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.2075	1.9495	3.1893	4.1549	4.9594	5.7637
	$(a)\sigma_k$	.4056	.5634	.6158	.5090	.5084	.4273
B4	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1730	1.9389	2.8673	3.7420	5.2537	5.8774
	$(c)\sigma_i$	.3775	.6106	.4277	.6261	.6639	.3280
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.2093	1.9934	3.1551	4.1285	5.0390	5.6935
	$(a)\sigma_k$	.4068	.5938	.6100	.4563	.5536	.4640
		$B1u_{ik}$	$B2u_{ik}$	$B3u_{ik}$	$B4u_{ik}$		
	$\bar{S}^{(a)}$	3.5000	3.5000	3.5000	3.5000		
	$(a)\sigma$	1.7078	1.7078	1.7078	1.7078		
	$\bar{S}^{(c)}$	3.4583	3.4602	3.4628	3.4754		
	$(c)\sigma$	1.7507	1.7499	1.7482	1.7648		
	r	.9536	.9518	.9512	.9494		

TABELLE 52

Mittlere Klassen und Streuungen für die Regressionen der
Grundfrequenztafeln β_{ik} der Streutafelgruppe B

Tafel	$S_i^{(a)}, S_k^{(c)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
B1	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1449	1.9313	2.8829	3.8346	5.0475	5.8897
	$(c)\sigma_i$	.3520	.5359	.4674	.6258	.6444	.3102
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.1884	1.9787	3.2614	4.1836	4.9314	5.7056
	$(a)\sigma_k$	.3873	.5032	.6593	.4758	.4890	.4569
B2	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.2670	1.9079	2.8927	3.8339	5.0492	5.8914
	$(c)\sigma_i$	.3914	.5566	.4677	.6292	.6426	.3111
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.2179	1.9423	3.2665	4.1766	4.9257	5.7090
	$(a)\sigma_k$	.4128	.5222	.6672	.4742	.4918	.4574
B3	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.2760	1.9058	2.9028	3.8342	5.0511	5.8931
	$(c)\sigma_i$	.3996	.5628	.4637	.6328	.6409	.3090
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.2241	1.9243	3.2716	4.1698	4.9191	5.7123
	$(a)\sigma_k$	.4170	.5581	.6745	.4721	.4952	.4557
B4	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1842	1.9816	2.8443	3.8415	5.1548	5.8292
	$(c)\sigma_i$	.3877	.5825	.4754	.6012	.6494	.3763
	$\bar{S}_k^{(a)}$	1.2223	1.9650	3.2165	4.1501	4.9854	5.6054
	$(a)\sigma_k$	.4158	.6309	.6644	.4394	.5153	.4922
		B1 β_{ik}	B2 β_{ik}	B3 β_{ik}	B4 β_{ik}		
$\bar{S}^{(a)}$		3.5415	3.5297	3.5368	3.5241		
$(a)\sigma$		1.6634	1.6645	1.6654	1.6488		
$\bar{S}^{(c)}$		3.5000	3.5000	3.5000	3.5000		
$(c)\sigma$		1.7078	1.7078	1.7078	1.7078		
r		.9494	.9470	.9470	.9443		

TABELLE 53

Mittlere Klassen und Streuungen für die Regressionen der
nichtreduzierten Streutafeln der Gruppe C

Tafel	$S_i^{(b)}, S_k^{(c)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
C1	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0830	1.9799	2.9284	3.4759	4.9077	5.9210
	$(c)\sigma_i$	.2759	.6167	.2608	.5699	.8344	.2698
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2577	1.9714	3.2815	4.5124	5.0521	5.6907
	$(b)\sigma_k$	.4374	.3453	.8191	.5012	.3672	.4622
C2	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1697	2.1285	2.9399	3.5216	4.9991	5.9294
	$(c)\sigma_i$	.3754	.6021	.2400	.5849	.8149	.2561
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.4394	2.0153	3.3986	4.5300	5.0653	5.7124
	$(b)\sigma_k$	.4963	.3300	.8144	.5002	.3722	.4527
C3	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.2495	2.2535	2.9515	3.5692	5.0853	5.9371
	$(c)\sigma_i$	.4328	.5848	.2200	.5979	.7921	.2429
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.5694	2.0518	3.5114	4.5471	5.0787	5.7330
	$(b)\sigma_k$	.4957	.3266	.8014	.4986	.3775	.4424
C4	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.2034	2.0887	2.9073	3.4015	5.0400	5.8564
	$(c)\sigma_i$	.4025	.5589	.2917	.5472	.8201	.3506
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.5052	2.0127	3.0496	4.4921	5.0931	5.5594
	$(b)\sigma_k$	.5000	.3002	.7870	.5019	.3822	.4965
		C1	C2	C3	C4		
	$\bar{S}^{(b)}$	3.5667	4.5242	4.9884	3.3409		
	$(b)\sigma$	2.9289	1.9094	1.1961	2.2819		
	$\bar{S}^{(c)}$	3.4583	4.4434	4.9523	3.2953		
	$(c)\sigma$	1.7507	1.4941	1.2467	1.5450		
	r	.9402	.9092	.8753	.9204		

TABELLE 54

Mittlere Klassen und Streuungen für die Regressionen der
Grundfrequenztafeln α_{ik} der Streutafelgruppe C

Tafel	$S_i^{(b)}, S_k^{(c)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
C1	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0609	2.0172	2.9559	3.3938	4.8826	5.9433
	$^{(c)}\sigma_i$	.2392	.6954	.2081	.5357	.9159	.2313
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.1990	1.9740	3.2741	4.4378	5.0736	5.7611
	$^{(b)}\sigma_k$	.3992	.4112	.7326	.4981	.4211	.4264
C2	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0689	1.9990	2.9557	3.3824	4.8968	5.9434
	$^{(c)}\sigma_i$	.2532	.7258	.2088	.5339	.9283	.2311
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2209	1.9593	3.2723	4.4336	5.0715	5.7582
	$^{(b)}\sigma_k$	.4144	.4384	.7392	.4976	.4186	.4270
C3	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0675	2.0095	2.9553	3.3715	4.9111	5.9437
	$^{(c)}\sigma_i$	.2508	.7389	.2095	.5319	.9184	.2307
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2234	1.9608	3.2686	4.4291	5.0693	5.7553
	$^{(b)}\sigma_k$	.4165	.4443	.7463	.4970	.4157	.4299
C4	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0683	1.9950	2.9502	3.4262	5.0910	5.9142
	$^{(c)}\sigma_i$	.2522	.7353	.2202	.5333	.8913	.2802
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2265	1.9691	3.2227	4.3671	5.1519	5.6936
	$^{(b)}\sigma_k$	.4186	.4520	.7134	.4841	.4700	.4609
		C1 α_{ik}	C2 α_{ik}	C3 α_{ik}	C4 α_{ik}		
$\bar{S}^{(b)}$		3.5000	3.5000	3.5000	3.5000		
$^{(b)}\sigma$		1.7078	1.7078	1.7078	1.7078		
$\bar{S}^{(c)}$		3.3756	3.3744	3.3764	3.4075		
$^{(b)}\sigma$		1.7324	1.7376	1.7395	1.7609		
r		.9421	.9406	.9398	.9420		

TABELLE 55

Mittlere Klassen und Streuungen für die Regressionen der
Grundfrequenztafeln β_{ik} der Streutafelgruppe C

Tafel	$S_i^{(b)}, S_k^{(c)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
C1	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0883	1.9399	2.9051	3.6014	4.8592	5.8964
	$(c)\sigma_i$	.2837	.5795	.2983	.5767	.7761	.3046
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2709	1.9631	3.3712	4.5051	5.0270	5.6239
	$(b)\sigma_k$	.4444	.3209	.8605	.5008	.3413	.4845
C2	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1052	1.9208	2.8976	3.6043	4.8680	5.8974
	$(c)\sigma_i$	.3068	.5997	.3072	.5771	.7753	.3035
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.3106	1.9532	3.3679	4.4903	5.0243	5.6220
	$(b)\sigma_k$	.4627	.3362	.8714	.5007	.3425	.4849
C3	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1058	1.9219	2.8921	3.6070	4.8771	5.8985
	$(c)\sigma_i$	.3076	.6067	.3143	.5771	.7741	.3020
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.3200	1.9537	3.3654	4.4756	5.0217	5.6201
	$(b)\sigma_k$	.4665	.3354	.8809	.5002	.3432	.4854
C4	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.1061	1.9256	2.8897	3.6272	4.9818	5.8313
	$(c)\sigma_i$	.3081	.6119	.3170	.5570	.7730	.3744
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.3219	1.9602	3.2839	4.4387	5.0650	5.5119
	$(b)\sigma_k$	.5672	.3460	.8476	.4971	.3722	.4999
		C1 β_{ik}		C2 β_{ik}		C3 β_{ik}	
	$\bar{S}^{(b)}$	3.6268		3.6281		3.6261	
	$(b)\sigma$	1.6707		1.6635		1.6603	
	$\bar{S}^{(c)}$	3.5000		3.5000		3.5000	
	$(c)\sigma$	1.7078		1.7078		1.7078	
	r	.9373		.9355		.9351	

TABELLE 56

Mittlere Klassen und Streuungen für die Regressionen der Tafeln der mittleren Grundfrequenzen η_{ik} der Streutafelgruppe C

Tafel	$S_i^{(b)}, S_k^{(c)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
C1	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0731	1.9727	2.9426	3.4961	4.8675	5.9240
	$(c)\sigma_i$	.2602	.6325	.2358	.5659	.8283	.2650
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2321	1.9673	3.3075	4.4794	5.0413	5.6998
	$(b)\sigma_k$	.4221	.3583	.7803	.5008	.3682	.4584
C2	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0847	1.9534	2.9413	3.4932	4.8782	5.9246
	$(c)\sigma_i$	.2784	.6565	.2390	.5668	.8287	.2642
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2617	1.9554	3.3049	4.4693	5.0390	5.6975
	$(b)\sigma_k$	.4395	.3772	.7881	.5003	.3684	.4593
C3	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0840	1.9582	2.9403	3.4905	4.8893	5.9252
	$(c)\sigma_i$	.2775	.6660	.2402	.5675	.8287	.2631
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2673	1.9562	3.3013	4.4588	5.0366	5.6952
	$(b)\sigma_k$	.4426	.3784	.7956	.4996	.3682	.4603
		C1 η_{ik}	C2 η_{ik}	C3 η_{ik}	C1 u_{ik}		
$\bar{S}^{(b)}$		3.5634	3.5650	3.5630	3.5667		
$(b)\sigma$		1.6905	1.6870	1.6854	1.7114		
$\bar{S}^{(c)}$		3.4378	3.4372	3.4382	3.4583		
$(c)\sigma$		1.7213	1.7239	1.7249	1.7507		
r		.9398	.9382	.9375	.9402		

TABELLE 57

Mittlere Klassen und Streuungen für die Regressionen der Streutafeln der Gruppe D

Tafel	$S_i^{(1)}, S_k^{(2)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
D1	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$ (2) σ_i , (1) σ_k	1.1765 .3812	1.9876 .4579	2.8890 .5666	4.1765 .5498	4.9895 .5359	5.7778 .4157
D2	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$ (2) σ_i , (1) σ_k	1.3228 .4675	2.0808 .4456	2.9279 .5649	4.2154 .5496	5.0362 .5335	5.7933 .4050
D3	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$ (2) σ_i , (1) σ_k	1.4368 .4960	2.1572 .4469	2.9657 .5628	4.2542 .5459	5.0822 .5312	5.8080 .3938
D4	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$ (2) σ_i , (1) σ_k	1.3635 .4810	2.0573 .3967	2.8198 .5222	4.0998 .5588	5.0493 .5330	5.6390 .4803
D1 η_{ik}	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$ (2) σ_i , (1) σ_k	1.1364 .3432	2.0129 .5343	2.9526 .4990	4.0884 .5334	4.9807 .6009	5.8289 .3766
D2 η_{ik}	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$ (2) σ_i , (1) σ_k	1.1479 .3550	2.0157 .5579	2.9366 .5096	4.0856 .5277	4.9901 .6012	5.8242 .3807
D3 η_{ik}	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$ (2) σ_i , (1) σ_k	1.1404 .3474	2.0368 .5624	2.9206 .5185	4.0831 .5214	4.9993 .6010	5.8198 .3843
D4 η_{ik}	$\bar{S}_i^{(2)}, \bar{S}_k^{(1)}$ (2) σ_i , (1) σ_k	1.1445 .3516	2.0188 .5543	2.9438 .5169	4.0449 .5070	5.0938 .6236	5.7543 .4306
		D1	D2	D3	D4		
	$\bar{S}^{(1)}, \bar{S}^{(2)}$ (1) σ , (2) σ	3.5667 1.7114	4.5242 1.3689	4.9884 1.0937	3.3409 1.5106		
	r	.9564	.9473	.8908	.9420		
		D1η_{ik}	D2η_{ik}	D3η_{ik}	D4η_{ik}		
	$\bar{S}^{(1)}, \bar{S}^{(2)}$ (1) σ , (2) σ	3.5000 1.7078	3.5000 1.7078	3.5000 1.7078	3.5000 1.7078		
	r	.9572	.9558	.9556	.9527		

rem Ansatz der Regressionen zur Aufstellung der Regressionsgeraden (16) und (17) dienen. Schliesslich findet sich dort auch noch der Korrelationskoeffizient r , dessen Definition wir in Gleichung (18) gebracht haben und dessen Quadrat bei Korrelationsbeziehungen als Mass für die Straffheit der stochastischen Verbundenheit angesehen werden kann.

Die Angaben in diesen Tabellen dienen vor allem zur Aufstellung der entsprechenden Regressionen, sind aber wenig anschaulich. Deshalb mögen sie noch, wenigstens teilweise, für einige charakteristische Fälle durch eine entsprechende graphische Darstellung unterstützt werden.

In den Fig. 6 und 7 werden die Regressionen $S_i^{(x)} \rightarrow \bar{S}_i^{(y)}$ für die symmetrischen Tafeln der Gruppen A und D gegeben, wobei die Stichpunkte nur mit einfachen Geraden verbunden werden, mehr um den allgemeinen Verlauf zu zeigen, als die eigentlich zukömmliche Kurve anzugeben. Bei diesen symmetrischen Tafeln genügt eine einzige Regression, da die andere symmetrisch dazu liegen muss und leicht in Gedanken ergänzt werden kann. Um diese Ergänzung leichter zu machen und auch um den Gang der Kurve besser beurteilen zu können, wurde noch die Gerade $S_i^{(y)} = S_i^{(x)}$ leicht eingezeichnet. Die Ordinate für alle Kurven ist dieselbe, die Abszisse dagegen wurde für jede neue Tafel ohne Benachteiligung der Deutlichkeit um zwei Spektraleinheiten weitergerückt, womit einerseits Platz gespart, andererseits aber auch erreicht wird, dass die Unterschiede der Regressionen für die einzelnen Tafeln besser zum Ausdruck kommen. Von den reduzierten Tafeln der Grundfrequenzen – die ja theoretisch alle gleich sein müssten und nur infolge der Unvollkommenheit der Reduktionsmethode sich von einander unterscheiden – wurden nur die Tafeln von A3 α_{ik} und D3 α_{ik} angeführt, als jene, die mit den Sollwerten A1 und D1 am wenigsten gut zusammenstimmen.

Die *neutrale* Regressionskurve für beide Gruppen A und D sind offenbar die identischen Geraden $S_i^{(y)} = S_i^{(x)}$ und $S_k^{(x)} = S_k^{(y)}$, was sich nicht nur unmittelbar aus der Zeichnung wegen der Symmetrie der individuellen Regressionen ablesen lässt, sondern auch ohne weiteres analytisch folgt aus der Symmetrie der mittleren Gesamtklassen $\bar{S}^{(x)} = \bar{S}^{(y)}$ und ihrer mittleren Streuungen $^{(x)}\sigma = ^{(y)}\sigma$, die in die Gleichung für die neutrale Gerade eingehen (Vgl. oben Gl. (16) u. (17) S. 16). Dies ist übrigens auch selbstverständlich und zu erwarten, da es sich hier um Vergleiche identischer Systeme handelt.

Bezüglich der Lage der individuellen Regressionskurven zu der neutralen Geraden ergibt sich für die einzelnen Tafeln die bemerkenswerte

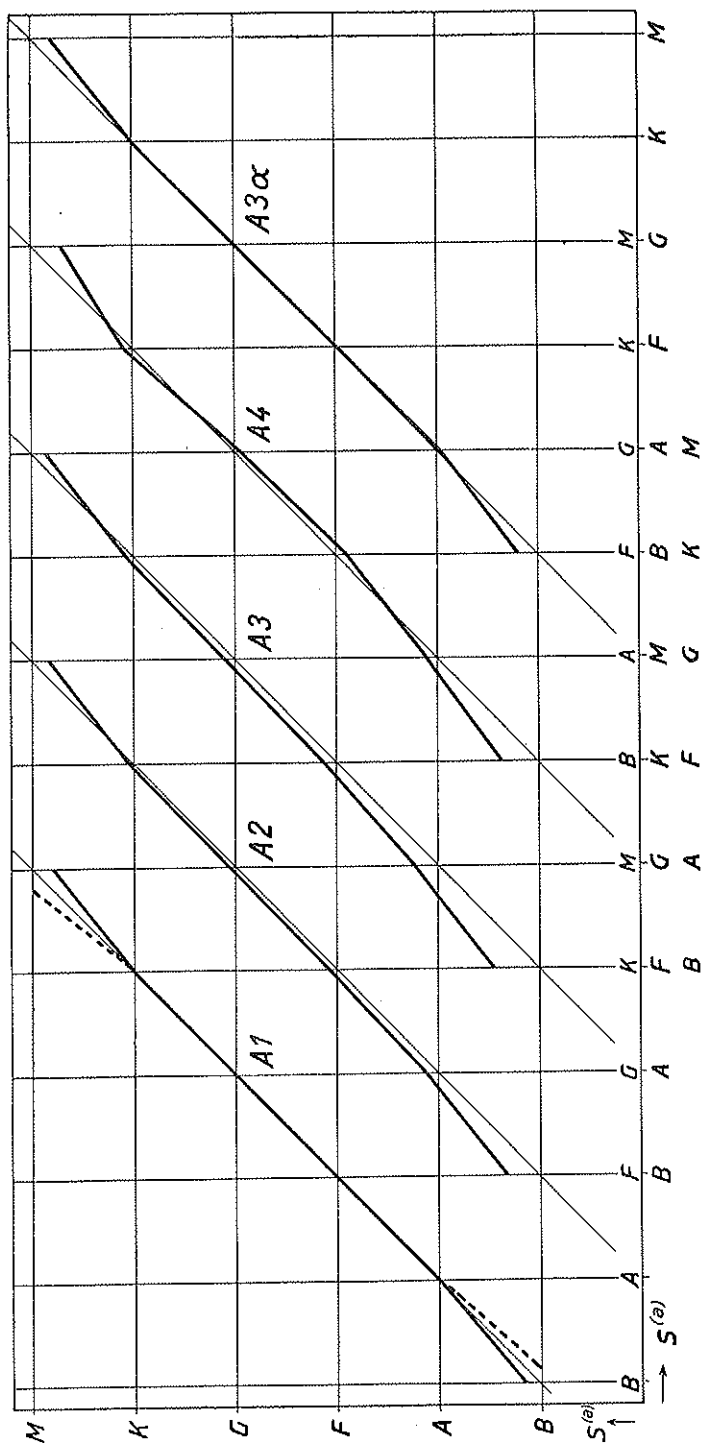


Fig. 6. Regression für die Streutafeln der Streutafelgruppe A.

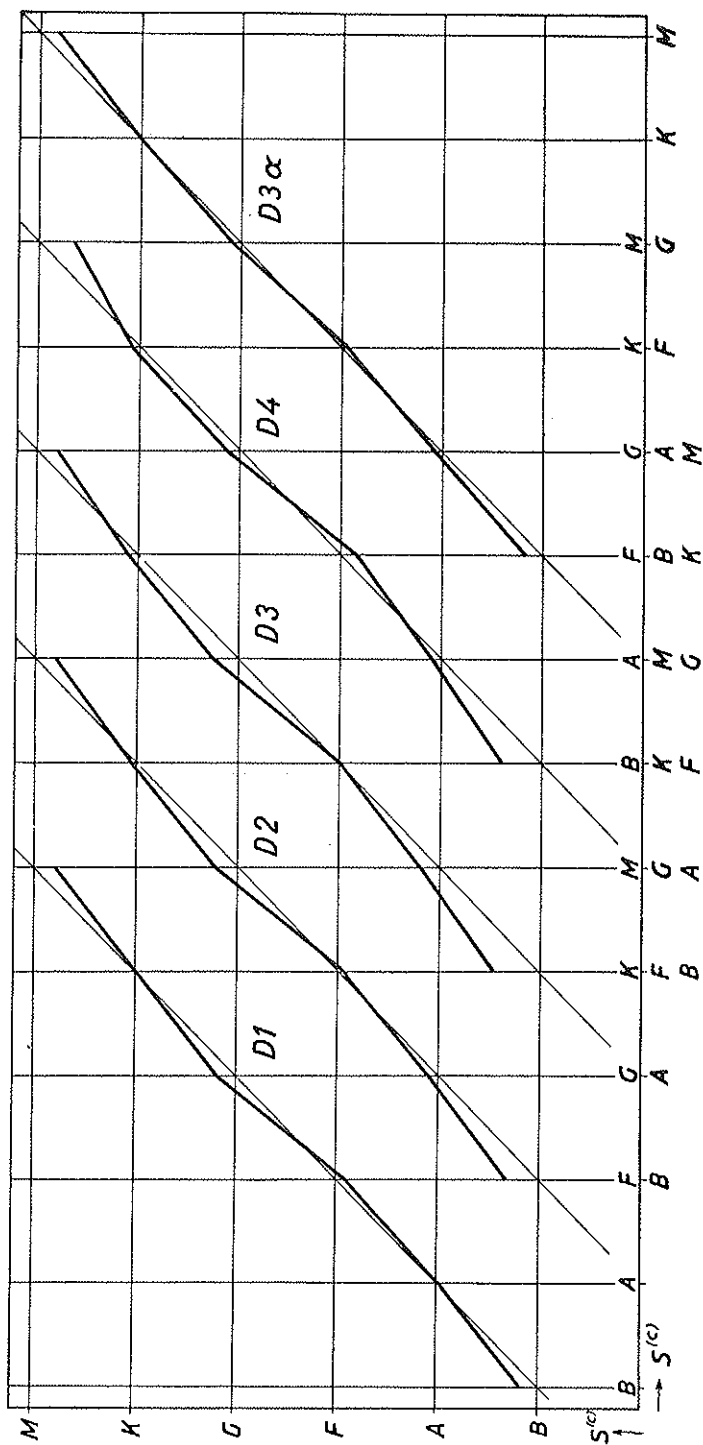


Fig. 7. Regression für die Streutafeln der Streutafelgruppe D.

Erscheinung, dass mit dem Geringwerden des Korrelationskoeffizienten die individuellen Regressionen sich immer weiter von der neutralen Linie entfernen: die Straffheit der Verknüpfung der beiden Systeme, als deren Mass der Korrelationskoeffizient erscheint, findet also hier einen anschaulichen Ausdruck. Nun ist aber die „Verknüpfung“ zweier Spektralsysteme einzig und allein abhängig von der Grundhaltung der Beobachter, oder anders ausgedrückt, von dem Zusammenspiel der beiden Sätze von Schätzungsfunktionen, die für alle isogenen Streutafeln einer Gruppe konstant bleiben. Es geht also offenbar in den Korrelationskoeffizienten für Spektralstreutafeln noch ein Moment ein, das abhängig sein muss von der Art der Besetzungsfunktion, und es ist zu vermuten, dass nur für die Einheitsbesetzung – wenn $f(s) = 1$ ist – der Korrelationskoeffizient r erst jenen Wert erreicht, der die Straffheit der Verknüpfung der beiden Spektralsysteme richtig zum Ausdruck bringt.

Die neutrale Linie stellt, wie schon oben S. 17ff. gezeigt wurde, die funktionale Beziehung dar, die zwischen den beiden korrelierten Systemen herrscht, wenn von den zufälligen Streuungen abgesehen wird. In dem Fall einer streuungslosen funktionalen Beziehung fallen die beiden individuellen Regressionen zusammen mit der neutralen Linie zur funktionalen Kurve, und der Korrelationskoeffizient für diesen Fall wird zu Eins. Es lässt sich also sagen, dass die individuellen Regressionen sich der neutralen Linie um so mehr nähern müssen, je näher der Korrelationskoeffizient der Streutafel gegen Eins geht. Das hat nun zur Folge, dass für die graphische Aufstellung der neutralen Linie unter all den möglichen isogenen Streutafeln jene am besten geeignet sind, die den höchsten Korrelationskoeffizienten besitzen. Das sind aber hier die Tafeln der elementaren Teilfrequenzen und die Tafeln der Grundfrequenzen, seien es nun die getrennten Grundfrequenzen α_{ik} und β_{ik} oder deren Mittel, die mittleren Grundfrequenzen η_{ik} , wie sich aus der Zusammenstellung in Tabelle 58 ergibt.

Dieses eigentümliche Verhalten der beiden individuellen Regressionslinien, nämlich ihr Konvergieren mit dem Konvergieren des Korrelationskoeffizienten gegen Eins, zeigt sich sehr auffallend bei den beiden Gruppen der unsymmetrischen Streutafeln **C** und **B** (Fig. 8 und 9). Hier wurden *beide* Regressionen angegeben, und zwar mit $\circ$ die Regressionen von $S_i^{(x)} \rightarrow \bar{S}_i^{(y)}$ und mit $\square$ die umgekehrten Regressionen von $S_k^{(y)} \rightarrow \bar{S}_k^{(x)}$. Auch hier wurden wie früher die Stichpunkte nur mit geraden Linien untereinander verbunden, um den allgemeinen Verlauf der Kurve klarer

TABELLE 58

Korrelationskoeffizienten r für die verschiedenen Streutafeln

Gruppe	Tafel	Aktuelle Frequenzen a_{ik}	Grundfrequenzen		
			α_{ik}	β_{ik}	$\eta_{ik} = \frac{\alpha_{ik} + \beta_{ik}}{2}$
A	1	.9524	(.9524)	—	—
	2	.9303	.9506	—	—
	3	.9043	.9500	—	—
	4	.9281	.9472	—	—
B	1	.9536	(.9536)	.9494	.9515
	2	.9331	.9518	.9470	.9494
	3	.8943	.9512	.9443	.9469
	4	.9331	.9494	.9443	.9469
C	1	.9402	.9421	.9373	.9398
	2	.9092	.9406	.9355	.9382
	3	.8753	.9398	.9351	.9375
	4	.9204	.9420	.9337	.9379
D	1	.9564	.9572	—	—
	2	.9473	.9558	—	—
	3	.8908	.9556	—	—
	4	.9420	.9527	—	—

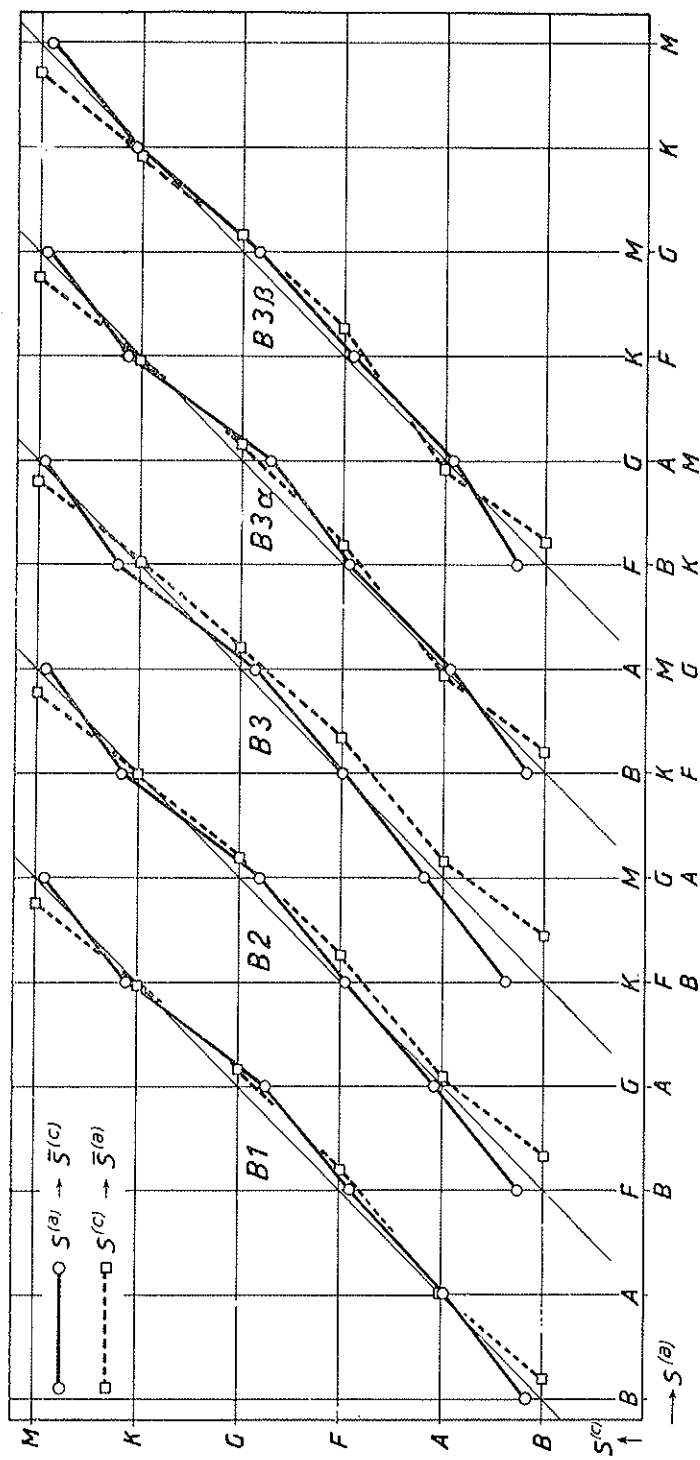


FIG. 9. Regression für die Streutafeln der Streutafelgruppe B.

heraustreten zu lassen, und zwar voll ausgezeichnete Geraden für die Regression $S_i^{(x)} \rightarrow \bar{S}_i^{(y)}$ und gerissene Linien für den umgekehrten Weg.

Von den reduzierten Tafeln wurden bei der Gruppe C die Tafel der mittleren Grundfrequenzen C3 η_{ik} gewählt, für die Gruppe B dagegen die beiden Tafeln der Grundfrequenzen B3 α_{ik} und B3 β_{ik} .

Die neutrale Regression muss auch hier zwischen den beiden individuellen Regressionen liegen, und es ist auf den ersten Blick aus den Abbildungen ersichtlich, dass sie am engsten eingeschlossen wird bei C1 und B1, und dann wieder bei C3 η_{ik} und B3 α_{ik} und B3 β_{ik} , also bei jenen Tafeln, die den höheren Korrelationskoeffizienten besitzen.

Theoretisch müssen isogene Streutafeln, wie früher S. 21f. auseinandergesetzt wurde, trotz der Verschiedenheit der Besetzungsfunktionen die gleichen funktionalen Beziehungen aufweisen, also dieselbe neutrale Regressionskurve zeigen. Das ist nun schon oben bemerkt worden für die Streutafelgruppen A und D, wo es sich um die Verknüpfung identischer Systeme handelt, bei der die neutrale Regression immer die Gerade

$$S_y^{(y)} = S_x^{(x)}$$

ist. Um den Nachweis zu erbringen für die Verknüpfungen ungleicher Systeme, wie sie dargestellt werden durch die Streutafeln der Gruppen B und C, müssten die entsprechenden Regressionsgleichungen $\Phi(S_x^{(x)})$ und $\Psi(S_y^{(y)})$ aufgestellt und mit ihrer Hilfe die Gleichung für die neutrale Regression bestimmt werden. Es liesse sich dann vermutlich zeigen, dass für alle Streutafeln derselben Gruppe dieselben neutralen Regressionen erscheinen. Doch sind uns diese Rechnungen für den Augenblick zu umständlich und auch nicht wesentlich, da wir die Übereinstimmung der Theorie mit der Praxis ziemlich gut auch an Hand der graphisch dargestellten neutralen Regressionen ersehen können. Hingegen genügt es nicht, die genäherten linearen Regressionen für einen solchen Nachweis zu benützen, da unter Umständen für verschiedene Besetzungsfunktionen verschieden gut genäherte Regressionen erscheinen, die dann verschiedenen Einfluss haben können auf die Bestimmung der ebenfalls nur genäherten neutralen linearen Regressionen, wie eine Zusammenstellung der Steigungen dieser so gewonnenen neutralen Kurven in Tabelle 59 zeigt. Besonders Gruppe C zeigt erhebliche Abweichungen, was nicht wundernimmt, wenn man einen Blick wirft auf die starken Unregelmässigkeiten der Regressionen, wie sie in Fig. 8 zum Ausdruck kommen.

TABELLE 59

Steigungen $\frac{^{(v)}\sigma}{^{(w)}\sigma}$ der neutralen Regressionsgeraden für die Streutafeln der Gruppen B und C

Tafel	B1	B2	B3	B4
a_{ik}	1.0251	1.0581	1.0787	1.0339
α_{ik}	1.0251	1.0247	1.0237	1.0334
β_{ik}	1.0267	1.0260	1.0255	1.0358
	C1	C2	C3	C4
a_{ik}	.5977	.7825	1.0423	.6771
α_{ik}	1.0144	1.0174	1.0186	1.0311
β_{ik}	1.0222	1.0266	1.0286	1.0401

Die graphische Interpolation der neutralen Regression ist nun allerdings etwas abhängig von der Lage der beiden individuellen Regressionen zueinander: je enger diese liegen, desto sicherer kann man die neutrale Linie zwischen die beiden interpolieren. Zur praktischen Erläuterung dieses Umstandes wurden die neutralen Kurven für C3 a_{ik} und C3 η_{ik} graphisch ermittelt und in Fig. 10 miteinander verglichen, indem sie ineinander gezeichnet wurden. Die Abweichungen sind nicht gerade sehr gross, können aber stellenweise doch über ein Zehntel einer Spektralklasse erreichen.

Andrerseits lässt sich aber doch auch aus der ersten Kurve der Fig. 10 abnehmen, dass die mit grösserer Zuverlässigkeit gewonnene neutrale Regression für C3 η_{ik} noch vollständig im Bereich des Feldes liegt, das von den beiden individuellen Regressionen der Tafel C3 a_{ik} eingeschlossen wird. Offenbar hätte die Kurve auch mit Hilfe dieser Regressionen bestimmt werden können, wäre sie nach der eigentlichen Vorschrift des wahren Bildungsgesetzes und nicht bloss „irgendwie halbwegs“ zwischen die beiden individuellen Regressionen eingezeichnet worden.

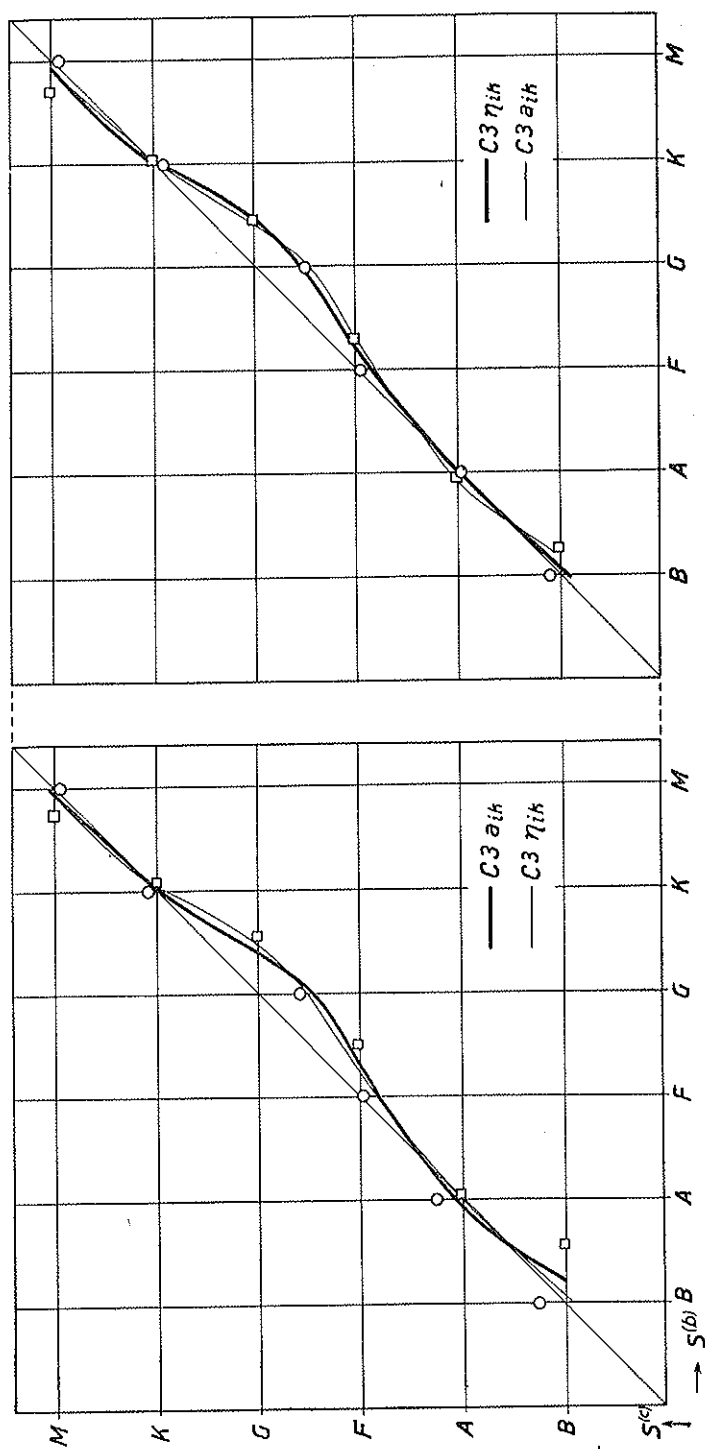


FIG. 10. Neutrale Regressionen für $C3a_{ik}$ und $C3\eta_{ik}$.

Es lässt sich demnach aus jeder Streutafel – wofern das ihr zugrunde liegende Material repräsentativ ist – die richtige neutrale Regression bestimmen. So bestehen denn die in der Literatur gebotenen Ergebnisse zurecht, wenn das verwendete Material im oben S. 131. dargestellten Sinne repräsentativ war. Die zufällige Verteilung der Spektralklassen hat keinen Einfluss auf die *Richtigkeit* der Bestimmung der neutralen Regressionen, höchstens auf die *Sicherheit* der graphischen Festlegung; solange man sich mit jener neutralen Linie zwischen den beiden Regressionen begnügen muss, die „irgendwie halbwegs“ zwischen ihnen – deren gegenseitige Lage so weitgehend abhängig ist von der zufälligen Verteilung der Klassenhäufigkeiten – zu interpolieren ist. Bei praktischen Bestimmungen der funktionalen Beziehung zwischen zwei Systemen wird man unter den verfügbaren isogenen Streutafeln demnach solche wählen, die einen möglichst hohen Korrelationskoeffizienten haben, da dann die beiden individuellen Regressionen möglichst nahe kommen und damit die Sicherheit der Interpolation erhöhen. Es dürfte sich zu diesem Zwecke empfehlen, die vorliegenden Tafeln auf die Streutafel der mittleren Grundfrequenzen zu reduzieren, womit praktisch wohl die beste Gewähr für eine sichere Bestimmung der neutralen Regression gegeben sein wird.

Es mag an dieser Stelle vielleicht noch von Interesse sein, das Verhalten der *Rumpffrequenzen* in den Bereich der Betrachtungen zu ziehen, wenn sie gegebenenfalls zur Bestimmung äquivalenter Klassen verwendet werden sollten.

Wie oben S. 113 schon festgestellt wurde, müssen die Tafeln der Rumpffrequenzen mit den Ausgangstafeln die funktionale Beziehung zwischen den beiden Beobachtungssystemen gemeinsam haben. Eigentlich bewiesen ist das dort nur für den linearen Ansatz der neutralen Geraden. Dasselbe liesse sich wohl auch zeigen, wenn Regressionsgleichungen höheren Grades verwendet werden; doch dürfte das etwas schwieriger sein, und wir möchten weiterhin auf einen solchen strengen Beweis nicht eingehen. Es mag hier genügen, die Verhältnisse graphisch zu veranschaulichen.

Zu diesem Zweck wurden die individuellen Regressionen für die oben S. 115 Tab. 39-41 angeführten Rumpffrequenztafeln $C3a_{ik}^*$, $C3\alpha_{ik}^*$ und $C3\beta_{ik}^*$ in Fig. 11 veranschaulicht. Überdies wurde noch die Tafel der Rumpffrequenzen für die mittleren Grundfrequenzen $C3\eta_{ik}^*$ hinzugefügt. Bei $C3a_{ik}^*$ wurden vergleichshalber auch noch die Stichpunkte für die individuellen Regressionen der ursprünglichen Tafel $C3a_{ik}$ eingezeichnet.

net. Als die allen Tafeln gemeinsame funktionale Beziehung nehmen wir die aus $C3\eta_{ik}$ erhaltene neutrale Kurve, die wohl als die beste Näherung betrachtet werden kann. Sie wurde jedesmal zwischen die beiden individuellen Regressionen eingefügt. Die Daten zur Aufstellung der einzelnen Regressionen finden sich in Tabelle 60, an deren Schluss noch die für die einzelnen Tafeln geltenden mittleren Gesamtklassen und die Korrelationskoeffizienten beigelegt wurden.

Der Korrelationskoeffizient ist natürlich verhältnismässig hoch, handelt es sich doch um Tafeln *geringster* Streuungen. Die neutrale Kurve, die

TABELLE 60

Mittlere Klassen der Rumpffrequenztafeln $C3a_{ik}^*$, $C3\alpha_{ik}^*$, $C3\beta_{ik}^*$ und $C3\eta_{ik}^*$

Tafel	$S_i^{(b)}, S_k^{(c)}$	1 = B	2 = A	3 = F	4 = G	5 = K	6 = M
$C3a_{ik}^*$	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0000	2.2189	3.0000	3.4232	5.0733	6.0000
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.4262	2.0000	3.4449	4.5813	5.0000	5.7822
$C3\alpha_{ik}^*$	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0000	2.0437	3.0000	3.2718	4.9549	6.0000
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.1672	2.0000	3.2569	4.5200	5.0000	5.8004
$C3\beta_{ik}^*$	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0000	1.9547	3.0000	3.4990	4.8998	6.0000
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2395	2.0000	3.3365	4.4902	5.0000	5.6901
$C3\eta_{ik}^*$	$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0000	1.9866	3.0000	3.3866	4.9195	6.0000
	$\bar{S}_k^{(b)}$	1.2001	2.0000	3.2811	4.5010	5.0000	5.7514
		$C3a_{ik}^*$	$C3\alpha_{ik}^*$	$C3\beta_{ik}^*$	$C3\eta_{ik}^*$		
	$\bar{S}^{(b)}$	4.9884	3.5000	3.6261	3.5630		
	$\bar{S}^{(c)}$	4.9523	3.3764	3.5000	3.4382		
	r	.9528	.9550	.9524	.9537		

aus $C3\eta_{ik}$ abgeleitet wurde, fügt sich gut in das durch die individuellen Regressionen abgesteckte Gebiet ein. Sollte sie allerdings aus den blossen Angaben der Tafeln der Rumpffrequenzen bestimmt werden, so dürften ähnlich wie bei den verschiedenen Tafeln der Gruppe C Verschiedenheiten zu erwarten sein, da infolge der sehr starken Unregelmässigkeiten der Regressionskurven und der Unkenntnis des eigentlichen Konstruktionsgesetzes der neutralen Regression Unsicherheiten in der Interpolation auftreten dürften. Doch wäre auch hier das Gleiche wie früher zu sagen: Aus den jeweils gegebenen Daten lassen sich bei genügender Kenntnis des Bildungsgesetzes die *richtigen* neutralen Kurven finden, die geringere oder grössere *Sicherheit* der graphischen Interpolation ist abhängig von der grösseren oder geringeren Entfernung der beiden individuellen Regressionen.

So sind also die Rumpffrequenztafeln bezüglich der Bestimmung der funktionalen Beziehung zwischen den beiden Spektralsystemen *völlig gleichwertig*, wenn auch dasselbe nicht behauptet werden kann für die Aufstellung der individuellen Regressionen oder die Ermittlung äquivalenter Klassenhäufigkeiten.

Von wesentlich anderer Natur hingegen sind die Abweichungen bei der Bestimmung äquivalenter Klassen, die bei Streutafeln auftreten, die nicht mehr repräsentativ sondern durch *Auslese* verfälscht sind, wie aus den Ausführungen des nächsten Abschnittes hervorgeht.

2. Der Einfluss der zufälligen Klassenhäufigkeiten auf die Bestimmung äquivalenter Klassen bei selektivem Material

Um den Einfluss der *Auslese* auf die Ermittlung äquivalenter Klassen zu zeigen, wurden von der Streutafel $C3a_{ik}$ künstlich zwei selektive Tafeln abgeleitet, indem für jede Spektralklasse des Systems $S^{(b)}$ bzw. $S^{(c)}$ *gleichviel* Objekte *wahllos* entnommen wurden. Werden die so erhaltenen Streutafeln auf $N = 6$ reduziert, dann gleichen sie den Tafeln der Grundfrequenzen insofern, als die Klassenhäufigkeit in einem System immer zur Einheit wird. Sie unterscheiden sich durch die verschiedenen Teil- und Restfrequenzen. Wir bezeichnen die Teilfrequenzen in Anlehnung an die Grundfrequenzen mit α_{ik}^{**} und β_{ik}^{**} , je nachdem die Klassenfrequenzen in $S^{(b)}$ oder in $S^{(c)}$ zur Einheit werden. Rechnerisch ist die Bestimmung

TABELLE 61
Selektive Streutafel $C3\alpha_{ik}^{**}$

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$	B ^(b)	A ^(b)	F ^(b)	G ^(b)	K ^(b)	M ^(b)	$A_k^{(c)}$	$\bar{S}_k^{(b)}$
B ^(c)	.7505	.0764					.8269	1.0924
A ^(c)	.2495	.5938	.0496				.8929	1.7761
F ^(c)		.3298	.9493	.4869	.0301		1.7961	3.1210
G ^(c)			.0011	.4569	.1845		.6425	4.2854
K ^(c)				.0562	.4554	.0629	.5745	5.0117
M ^(c)					.3300	.9371	1.2671	5.7396
$A_i^{(b)}$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	6.0000	
$\bar{S}_i^{(c)}$	1.2495	2.2534	2.9515	3.5692	5.0853	5.9371		
	$\bar{S}^{(b)} = 3.5000, \bar{S}^{(c)} = 3.5077, r = .9437$							

TABELLE 62
Selektive Streutafel $C3\beta_{ik}^{**}$

$S^{(c)} \backslash S^{(b)}$	B ^(b)	A ^(b)	F ^(b)	G ^(b)	K ^(b)	M ^(b)	$A_k^{(c)}$	$\bar{S}_k^{(b)}$
B ^(c)	.4306	.5694					1.0000	1.5694
A ^(c)	.0288	.8906	.0806				1.0000	2.0518
F ^(c)		.1119	.3490	.4548	.0843		1.0000	3.5114
G ^(c)			.0004	.4520	.5476		1.0000	4.5471
K ^(c)				.0350	.8513	.1137	1.0000	5.0787
M ^(c)					.2670	.7330	1.0000	5.7330
$A_i^{(b)}$	.4594	1.5719	.4300	.9418	1.7502	.8467	6.0000	
$\bar{S}_i^{(c)}$	1.0627	1.7090	2.8135	3.5543	4.7433	5.8657		
	$\bar{S}^{(b)} = 3.7486, \bar{S}^{(c)} = 3.5000, r = .9358$							

dieser Tafeln nichts anderes als die *partial-proportionale Reduktion* der Klassenhäufigkeiten $A_i^{(b)}$ bzw. $A_k^{(c)}$ auf Eins von deren Unzulänglichkeit schon oben S. 36f. die Rede war. Die beiden selektiven Tafeln finden sich in den Tabellen 61 und 62 S. 156. Die zur Aufstellung der Regressionen nötigen mittleren Klassen wurden gleich mitgegeben, ebenso die mittleren Gesamtklassen, wie die Korrelationskoeffizienten.

Die mittleren Klassen $\bar{S}_i^{(c)}$ in (α_{ik}^{**}) und $\bar{S}_k^{(b)}$ in (β_{ik}^{**}) entsprechen natürlich den betreffenden mittleren Klassen der Ausgangstafel C3a_{ik}. Das hat zur Folge, dass sich wegen des hohen Korrelationskoeffizienten die zweite individuelle Regression an diese Regressionen anschliesst und damit notwendigerweise die neutrale Regression nach dieser Seite hin verlagert, und zwar bei C3 α_{ik}^{**} gegen die Regression $S_i^{(b)} \rightarrow \bar{S}_i^{(c)}$ der ursprünglichen Tafel C3a_{ik}, bei C3 β_{ik}^{**} gegen $S_k^{(c)} \rightarrow \bar{S}_k^{(b)}$. Diese Verlagerung lässt sich sehr deutlich in Fig. 12 erkennen, wo die individuellen Regressionen für die beiden neuen Tafeln graphisch dargestellt sind. Die Regressionen aus der ursprünglichen Tafel C3a_{ik} wurden vorausgeschickt zu einem leichteren Vergleich. Aus demselben Grunde wurden in die Regressionen noch die neutrale Linie eingezeichnet, die sich aus der Tafel der mittleren Grundfrequenzen C3 η_{ik} ergibt, die die eigentliche Regression der beiden Spektralsysteme aufeinander darstellt. Es ist leicht ersichtlich, dass die mit dem selektiven Material erhaltenen Regressionen ziemlich *bedeutend* abweichen von der neutralen Regression, und dass die richtige Kurve nicht mehr in dem Gebiet liegt, das die Stichpunkte für die individuellen Regressionen der selektiven Tafeln begrenzen.

Es muss nun allerdings zugegeben werden, dass es sich hier um einen *künstlich* erzeugten Spezialfall von Selektivität handelt, der in dieser groben Weise in der Praxis wohl kaum vorkommen mag. Doch ist das eine ersichtlich, dass die aus solchen selektiven Tafeln gewonnenen Regressionen mit einem Fehler behaftet sind, der eine wesentlich andere Struktur hat als der oben besprochene Fehler, der eingeführt wird durch die zufällige Verteilung der Klassenhäufigkeiten bei repräsentativem Material. Dort steht nur die *Sicherheit* der Bestimmung der Regression in Frage, da die beiden Regressionen unter Umständen zu weit auseinander liegen und keine genaue Vorschrift für die Konstruktion der neutralen Kurve angegeben wird; selektives Material dagegen führt zu einer sicheren *Fehlbestimmung*.

Gleichzeitig zeigt dieses Beispiel auch, dass eine partial-proportionale Reduktion, die die Klassenhäufigkeiten in einem System zur Einheit

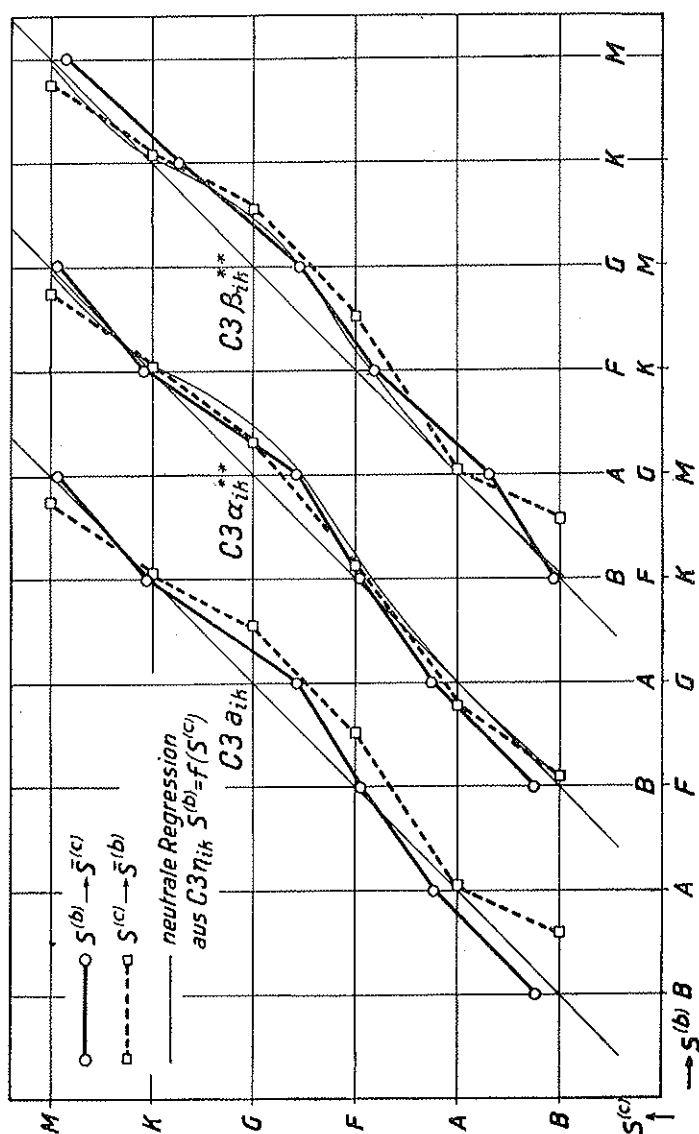


Fig. 12. Zur Regression bei durch Auswahl gefälschten Streutafeln.

bringt, nicht geeignet ist zur Gewinnung einer normalen Streutafel, die die Verknüpfung der beiden in Frage stehenden Spektralsysteme wirklich charakterisiert. Denn die auf diese Weise reduzierten Tafeln leiden an einem Auslesefehler, wodurch sie mit der ursprünglichen Ausgangstafel nicht mehr isogen sind. Die bloße Verbesserung des Korrelationskoeffizienten, der ja auch hier sehr auffallend ist – er wächst von .88 bei $C3a_{ik}$ zu .94 bei $C3\alpha_{ik}^{**}$ und $C3\beta_{ik}^{**}$, genau wie bei den eigentlichen Grundfrequenzen α_{ik} und β_{ik} – ist also kein eindeutiges Merkmal für die Zuverlässigkeit und Berechtigung der Reduktionsweise.

V. Zu EDDINGTONs Verfahren zur Verbesserung einer beobachteten Häufigkeitsverteilung

EDDINGTON (^{1, 2, 4}) hat ein Verfahren angegeben, nach dem eine beobachtete Häufigkeitsverteilung $u(s)$ verbessert werden kann, um die wahre Verteilung $v(s)$ zu erhalten, wenn die Beobachtungsfehler bekannt sind und gewisse Bedingungen erfüllen.

Es liegt nahe, dieses Verfahren auch auf die vorgelegte Aufgabe der Reduktion einer Spektralverteilung anzuwenden. Es liesse sich z. B. die vorgelegte Verteilung ($B_i^{(o)}$) der Klassenhäufigkeiten als die beobachtete Verteilung $u(s)$ ansetzen und die gesuchte ($B_k^{(y)}$) als die wahre $v(s)$. Die Grösse und Gesetzmässigkeit des Beobachtungsfehlers ergäbe sich aus der gegebenen Streutafel (a_{ik}). Eine derartige Übertragung ist sicher verlockend; doch stehen ihr einige Bedenken gegenüber, auf die wir im folgenden noch etwas hinweisen müssen.

1. EDDINGTONs Korrekturformel

Um der Diskussion die nötige Grundlage zu geben, möge das Prinzip des Verfahrens zunächst kurz dargelegt werden. Bezüglich weiterer Einzelheiten verweisen wir auf die angeführten Arbeiten EDDINGTONs oder auch auf die klare Darstellung von VON DER PAHLEN (⁵) in seinem *Lehrbuch der Stellarstatistik* (S. 52).

Sei $u(s)$ eine beobachtete Häufigkeitsverteilung, die mit einem Beobachtungsfehler x behaftet ist. Das Gesetz der Häufigkeitsverteilung der Beobachtungsfehler x sei über das gesamte Gebiet der s dasselbe und folge einem GAUSSschen Verteilungsgesetz, etwa

$$H(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (120)$$

wobei $H(x)$ die Häufigkeit des Fehlers x ist, h das GAUSSsche Präzisionsmass und σ die mittleren quadratischen Streuungen, die bekanntlich zusammenhängen über die Gleichung (121):

$$h = \frac{1}{\sigma \sqrt{2}}. \quad (121)$$

Ist die wahre Anzahl der Objekte im Intervall ds um s_0 gleich $v(s_0)$, dann ist die Zahl der Objekte, die mit einem Fehler x_λ , also als $s_0 + x_\lambda$ beobachtet wurden,

$$v(s_0) H(x_\lambda) ds.$$

Sind die Intervalle nun so bemessen, dass die Δs gleich gross sind in beiden Systemen u und v und auch gleich sind den Fehlerintervallen Δx , dann ergibt sich für endliche Intervalle eine Streutafel nach der Art von Tabelle 63. Die beobachteten Häufigkeiten $u(s_0)$ lassen sich darstellen als die Summe

$$u(s_0) = \sum_{\lambda} v(s_0 + x_\lambda) H(x_\lambda), \quad (122)$$

oder, wenn zur Grenze übergegangen wird, als

$$u(s_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(s_0 + x) H(x) dx. \quad (123)$$

Aus diesem Entstehungsgesetz für die beobachteten $u(s)$ leitet EDDINGTON seine bekannte Korrekturformel ab:

$$v(s) = u(s) - \frac{1}{4h^2} u''(s) + \frac{1}{2} \frac{1}{(4h^2)^2} u^{(IV)}(s) - + \dots \quad (124)$$

oder

$$v(s) = u(s) - \frac{\sigma^2}{2} u''(s) + \frac{1}{2} \frac{\sigma^4}{4} u^{(IV)}(s) - + \dots \quad (124a)$$

Diese summarische Darlegung des Grundgedankens möge genügen für die folgenden Ausführungen über die Schwierigkeiten, die sich einer Verwendung dieser Korrektionsformel für die vorgelegte Aufgabe entgegenstellen.

TABELLE 63

Streutafel zum Ansatz von EDDINGTONS Korrekionsverfahren

$s \backslash s$	...	s_{-2}	s_{-1}	s_0	s_1	s_2	...	$v(s)$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
s_{-2}	...	$v_{-2}H_0$	$v_{-2}H_1$	$v_{-2}H_2$	$v_{-2}H_3$	$v_{-2}H_4$	...	v_{-2}
s_{-1}	...	$v_{-1}H_{-1}$	$v_{-1}H_0$	$v_{-1}H_1$	$v_{-1}H_2$	$v_{-1}H_3$	...	v_{-1}
s_0	...	$v_0 H_{-2}$	$v_0 H_{-1}$	$v_0 H_0$	$v_0 H_1$	$v_0 H_2$	...	v_0
s_1	...	$v_1 H_{-3}$	$v_1 H_{-2}$	$v_1 H_{-1}$	$v_1 H_0$	$v_1 H_1$	...	v_1
s_2	...	$v_2 H_{-4}$	$v_2 H_{-3}$	$v_2 H_{-2}$	$v_2 H_{-1}$	$v_2 H_0$	...	v_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$u(s)$	...	u_{-2}	u_{-1}	u_0	u_1	u_2	...	N

2. Einige Schwierigkeiten

a. Das Fehlergesetz.

EDDINGTON setzt für sein Verfahren ein für alle Klassen konstantes Fehlergesetz voraus. Ausserdem sollen sich die einzelnen Fehler nach einem GAUSSschen Häufigkeitsgesetz verteilen.

Diese Voraussetzungen bedeuten eine starke Einschränkung für Aufgaben über Spektralverteilungen, wo wir es mit sehr verschiedenen Fehlergesetzen zu tun haben, die dazu noch für jede Klasse verschieden sein können.

b. Die Klassenintervalle.

EDDINGTONS Verfahren setzt gleich grosse Klassenintervalle voraus, und zwar so, dass sie identisch sind in beiden Systemen.

Eine solche Einschränkung ist nun für Spektralvergleiche kaum mehr

zulässig. Die Spektralklassen eines Systems haben oft sehr verschieden grosse Intervalle und decken sich keineswegs notwendig mit den Klassenintervallen des anderen Systems.

Zudem sind die Klassenintervalle, wie sie für das EDDINGTONSche Verbesserungsverfahren gewöhnlich in Frage kommen, verhältnismässig klein, sodass die Streuungen sich über mehrere Klassen hin verteilen. Es steht nun nichts im Wege, auch die Spektralklassen kleiner zu wählen, als es hier geschah; doch lässt sich nicht ganz ausschliessen, dass die folgende Schwierigkeit zum Teil mit dieser Verschiedenheit der Intervallgrössen zusammenhängen mag.

c. Das partial-proportionale Reduktionsverfahren.

Lassen sich auch Fälle denken, wenigstens theoretisch, für die die beiden erwähnten Schwierigkeiten des Fehlergesetzes und der Klassenintervalle nicht bestehen, so stossen wir hier auf einen grundsätzlichen Unterschied zwischen dem Ansatz EDDINGTONS und dem von uns vorgelegten Reduktionsverfahren: EDDINGTONS Ansatz kommt schliesslich auf eine partial-proportionale Reduktion hinaus, auf deren Unzulänglichkeit wir oben schon des öfteren hingewiesen haben (Vgl. S. 25 und 36). Das ist ohne weiteres ersichtlich aus Tabelle 63, die den Ansatz in Form eines Ausschnittes aus einer entsprechenden Streutafel wiedergibt. Die Elemente der Häufigkeitsfunktion des Beobachtungsfehlers $H(x)$ werden proportional mit den entsprechenden Häufigkeiten $v_k(s)$ der betreffenden Zeile multipliziert, ohne irgendwie Rücksicht zu nehmen auf einen etwaigen Einfluss der Häufigkeiten $v_{k \pm \lambda}(s)$ der Nachbarklassen, wie es nach den bisherigen Erörterungen unumgänglich notwendig sein sollte zur Gewinnung einer mit der Ausgangsstreutafel isogenen neuen Streutafel.

Es mag nun sein, dass bei Verwendung sehr kleiner Klassenintervalle das partial-proportionale Reduktionsverfahren berechtigt ist, bei grösseren Intervallen führt es notwendig zu den oben angeführten Unzuträglichkeiten eines selektiven Fehlers. Wir möchten die Frage offen lassen, so verlockend es auch wäre, sie näher zu betrachten. Nur Eines möchten wir hier noch untersuchen, und zwar auch nur rein empirisch, wie weit EDDINGTONS Korrektur trotz dieser grundsätzlichen Bedenken zu einer etwaigen Lösung der vorgelegten Aufgabe der Reduktion von Spektralverteilungen verwendbar sein könnte.

3. EDDINGTONs Korrektur und die Reduktion von Spektralverteilungen

Um ein praktisches Urteil gewinnen zu können, wie weit sich dieses Verbesserungsverfahren eignet zur Reduktion von Spektralverteilungen, möchten wir das Verfahren an entsprechenden Streutafeln erproben. Natürlich muss dafür Sorge getragen werden, dass die wesentlichen Voraussetzungen, so weit als möglich auch erfüllt sind.

Zur Herstellung der Streutafeln wählen wir als das System, das mit einem Beobachtungsfehler behaftet ist, das oben verwendete System $S^{(a)}$ mit den symmetrischen Schätzungsfunktionen, die für alle Klassen gleich sind mit Ausnahme der Randklassen, die aber dann bei der besonderen Betrachtung ja unberücksichtigt bleiben können. Zwar folgen hier die Beobachtungsfehler nicht einem GAUSSschen Gesetz, doch scheint dieser Punkt von geringerer Bedeutung zu sein. Als System mit der wahren Häufigkeitsverteilung müssen wir ein neues System $S^{(v)}$ ansetzen mit den entsprechenden Schätzungsfunktionen $w_k^{(v)}(s) = 1$, da das System fehlerfrei sein soll. Diese Schätzungsfunktionen sind gleich Eins im Intervall $s = k - 1$ bis $s = k$ und für alle anderen Stellen der Folge s gleich Null.

Die Streutafeln für diese beiden Systeme werden für fünf verschiedene Besetzungsfunktionen berechnet: $f(s) = 1, = s, = s^2, = s^3$ und $= s^4$ nach den oben in den Gleichungen (35), (36) und (37) angegebenen Formeln. Als Eingang in die Tafeln wählen wir statt der Klassen $S_i^{(a)}$ und $S_k^{(v)}$ deren Intervallmitten $s_i^{(a)}$ und $s_k^{(v)}$, die nach Voraussetzung unter sich gleich und für beide Systeme identisch sein sollen, also: $s_i^{(a)} = s_i^{(v)} = .5, = 1.5, = 2.5, = 3.5, = 4.5, = 5.5$.

Die entsprechenden Klassenfrequenzen bezeichnen wir mit $u_i(s)$ und $v_k(s)$ statt wie gewöhnlich mit $A_i^{(a)}$ und $A_k^{(v)}$, sodass beim Übergang zu den kontinuierlichen Häufigkeitsfunktionen $u(s)$ und $v(s)$ nur die Indizes fallen gelassen werden. Am Ende jeder Einzeltafel werden die Gleichungen für diese kontinuierlichen Häufigkeitsfunktionen angegeben, wobei zu beachten ist, dass für ihre Ableitung die Häufigkeiten der Randklassen *nicht* verwendet werden, da die entsprechenden Schätzungsfunktionen, wie bemerkt, die geforderten Bedingungen nicht erfüllen: sie sind unsymmetrisch und stimmen mit denen der andern Klassen nicht überein.

Neben diesen integral-proportional berechneten Streutafeln, die in Tabelle 64 zusammengestellt sind, bieten die folgenden Tafeln der Tabelle 65 partial-proportional reduzierte Streutafeln mit den gleichen

TABELLE 64

Integral-proportional reduzierte Streutafeln mit verschiedenen
Besetzungsfunktionen zum Vergleich einer beobachteten
mit der wahren Häufigkeitsverteilung

$$f(s) = 1$$

$s_i \backslash s_k$	.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	$v_k(s)$	$v_k(s)-1$
.5	.875	.125					1.00	.00
1.5	.125	.75	.125				1.00	.00
2.5		.125	.75	.125			1.00	.00
3.5			.125	.75	.125		1.00	.00
4.5				.125	.75	.125	1.00	.00
5.5					.125	.875	1.00	.00
$u_i(s)$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	6.00	

$$v(s) = 1 \quad u(s) = 1$$

$$f(s) = s$$

								$v_h(s)-s_h$
.5	.39583..	.10416..					.5	.00
1.5	.14583..	1.125	.22916..				1.5	.00
2.5		.27083..	1.875	.35416..			2.5	.00
3.5			.39583..	2.625	.47916..		3.5	.00
4.5				.52083..	3.375	.60416..	4.5	.00
5.5					.64583..	4.85416..	5.5	.00
$u_i(s)$	.5416...	1.5	2.5	3.5	4.5	5.4583...		
$u_i(s)-s_i$	+ .0416...	.00	.00	.00	.00	— .0416...		

$$v(s) = s \quad u(s) = s$$

TABELLE 64 (Forts.)

$f(s) = s^k$		$f(s) = s^k$							$v_k(s)$	$v_k(s) - s_k^k$
s_i	k	.5	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5			
.5		.1328125	.0671875					.2	+	.1375
1.5		.24635416..	4.50729166..	1.44635416..				6.2	+	1.1375
2.5			2.8046875	31.25729166..	8.13802083..			42.2	+	3.1375
3.5				12.67552083..	116.3822916..	27.1421875		156.2	+	6.1375
4.5					37.85885416..	313.88229166..	68.45885416..	420.2	+	10.1375
5.5						89.3546875	840.8453125	930.2	+	15.1375
$u_i(s)$		.37916666..	7.379166..	45.379166..	162.379166..	430.379166..	909.304166..	1555.2		
s_i^k		.0625	5.0625	39.0625	150.0625	410.0625	915.0625			
$u_i(s) - s_i^k$		+.3916..	+ 2.3166..	+ 6.3166..	+ 12.3166..	+ 20.3166..	— 5.75833..			

$$v(s) = s^4 + .5s^2 + .0125 \quad u(s) = s^4 + s^2 + .0666..$$

TABELLE 65 (Forts.)

$f(s) = s^3$		s_i	1.5	2.5	3.5	4.5	5.5	$v_k(s) = s_k^3$
s_k								
.5	.109375	.015625						.125
1.5	.421875	2.53125	.421875					3.375
2.5		1.953125	11.71875	1.953125				15.0625
3.5			5.359375	32.15625	5.359375			42.875
4.5				11.390625	68.34375	11.390625		91.125
5.5					20.796875	145.578125		166.375
$u_i(s)$	.53125	4.5	17.5	45.5	94.5	156.96875		319.5
$u_i(s) - s_i^3$	+.40625	+1.125	+1.875	+2.625	+3.375	—	9.796875	
$v(s) = s^3 \quad u(s) = s^3 + .75s$								
$f(s) = s^4$								
								$v_k(s) = s_k^4$
.5	.0546875	.0078125						.0625
1.5	.6328125	3.796875	.6328125					5.0625
2.5		4.8828125	29.296875	4.8828125				39.0625
3.5			18.7578125	112.546875	18.7578125			159.0625
4.5				51.2578125	307.546875	51.2578125		410.0625
5.5					114.3828125	800.6796875		915.0625
$u_i(s)$	.6875	8.6875	48.6875	168.6875	440.6875	851.9375		1519.375
$u_i(s) - s_i^4$	+.625	+3.625	+9.625	+18.625	+30.625	—	63.125	

Systemen und Besetzungsfunktionen, also mit Hilfe eines Verfahrens, das dem EDDINGTONSchen Ansatz eher entspricht. Die Tafel der elementaren Grundfrequenzen ist für beide Verfahren notwendig die gleiche. Die Differenzen erscheinen erst bei den andern Besetzungsfunktionen. Als die wahre Häufigkeitsfunktion, die mit dem in Tafel $f(s) = 1$ enthaltenen Fehlergesetz die Streutafeln erzeugt, setzen wir

$$v(s) = f(s), \quad (125)$$

wählen aber als entsprechende Klassenhäufigkeiten $v_k(s)$ nicht das zu erwartende Integral

$$v_k(s) = \int_{k-1}^k f(s) ds, \quad (126)$$

sondern einfach den Funktionalwert für die Intervallmitte s_k , also

$$v_k(s) = f(s_k), \quad (127)$$

weil dies dem Verfahren, das ja verhältnismässig kleine Intervalle benützt, mehr angepasst scheint, und es übrigens auch ganz belanglos ist, welcher von den beiden Werten (125) oder (126) als Erzeugerfunktion verwendet wird. Denn die Differenz

$$v(s) - u(s)$$

ist für beide Fälle gleich, wie man sich leicht durch Nachrechnen überzeugen kann.

In die EDDINGTONSche Korrektur geht nun noch wesentlich die mittlere quadratische Streuung σ ein. Ein Wert für diese Streuung, σ_1 , ergibt sich aus der Streutafel mit der Besetzungsfunktion $f(s) = 1$ nach den Gleichungen (12) oder (13) zu

$$\sigma_1 = .5. \quad (128)$$

Einen *anderen* Wert, σ_2 , erhält man, wenn die Streuung aus den Schätzungs- oder Fehlerfunktionen durch Übergang zur Grenze berechnet wird. Sind die Fehler gleich $s - s_i$ und ist ihre Häufigkeit gleich der

Schätzungsfunktion $w_i(s)$, dann ergibt sich das Quadrat der mittleren Streuung σ_2 zu

$$\sigma_i^2 = \int_{(w_i)} w_i(s) (s - s_i)^2 ds, \quad (129)$$

was für die hier verwendeten Schätzungsfunktionen der Innenklassen zu

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{6} \quad (130)$$

führt.

Versuchen wir nun EDDINGTONS Korrektur auf die vorliegenden Streutafeln anzuwenden, dann erhalten wir die in Tabelle 66 zusammengestellten Verhältnisse. In den zwei ersten Spalten finden sich die für jede Besetzungsfunktion beobachteten Verbesserungen $v(s) - u(s)$, getrennt für beide Tafelreihen. In den beiden nächsten Spalten stehen die zweiten bzw. vierten Ableitungen der beobachteten Häufigkeitsfunktionen $u(s)$: $u''(s)$ und $u^{(IV)}(s)$, die bis $f(s) = s^3$ für beide Tafelreihen gleich sind. Die beiden nächsten Spalten bieten dann die nach EDDINGTONS Formel (124a) berechneten Werte für die jeweilige Korrektur

$$K = -\frac{\sigma^2}{2} u''(s) + \frac{\sigma^4}{8} u^{(IV)}(s),$$

und zwar zuerst für die aus der Grundtafel gewonnenen Streuungen σ_1 , verknüpft mit den Ableitungen der partial-proportional gefundenen Häufigkeitsfunktion, und dann die mit dem über das Integral (129) gewonnenen σ_2 berechneten Korrekturen, verknüpft mit den Ableitungen der integral-proportional bestimmten Häufigkeitsfunktion.

Aus dieser Zusammenstellung ergibt sich nun folgendes:

1. Für die *partial-proportional* reduzierten Tafeln der Tabelle 65 gilt durchwegs

$$v(s) - u(s) = -\frac{\sigma_1^2}{2} u''(s) + \frac{\sigma_1^4}{8} u^{(IV)}(s) = K, \quad (131)$$

wenn wir absehen von der kleinen Differenz von

$$K_4 - [v(s) - u(s)] = + \frac{1}{16},$$

TABELLE 66

Zur Verbesserung der in den Streutafeln Tab. 64 und 65 auftretenden Häufigkeitsfunktionen $u(s)$

$f(s)$	$v(s) - u(s)$		$u''(s)$	$u^{(IV)}(s)$	$-\frac{\sigma^2}{2} u''(s) + \frac{\sigma^4}{8} u^{(IV)}(s)$	
	Partial-proportionale Reduktion	Integral-proportionale Reduktion			$\sigma^2 = \frac{1}{4}$	$\sigma^2 = \frac{1}{6}$
s	0	0	0	0	0	0
s^2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{12}$	2	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{6}$
s^3	$-\frac{3}{4}s$	$-\frac{1}{4}s$	$6s$	0	$-\frac{3}{4}s$	$-\frac{1}{2}s$
s^4	$-\frac{3}{2}s^2$	$-\frac{1}{2}s^2$	P: $12s^2 + 3$ I: $12s^2 + 2$	$\frac{24}{24}$	$-\frac{3}{2}s^2$	$-\frac{1}{12}s^2$

die bei der Besetzungsfunktion $f(s) = s^4$ auftritt und die offenbar nur von der vierten Ableitung herrührt.

Die Klassenhäufigkeiten partial-proportional reduzierter Streutafeln lassen sich also ohne weiteres mit EDDINGTONS Formel richtig verbessern, wenn dazu als mittlere Streuung der aus der Grundtafel $f(s) = 1$ entnommene Streuungswert σ_1 verwendet wird, solange nicht höhere als die zweite Ableitung der Häufigkeitsfunktion in die Verbesserungsformel eingehen. Woher diese Differenz bei Benützung höherer Ableitungen stammt, soll hier nicht weiter untersucht werden (*). Jedenfalls ist sie verhältnismässig gering, sodass die Verbesserungen wohl noch brauchbar sein werden.

2. Für *integral-proportional* reduzierte Streutafeln ergibt sich als Korrektur

$$v(s) - u(s) = -\frac{\sigma_2^2}{4} u''(s) + \frac{\sigma_2^4}{16} u^{(IV)}(s) = \frac{K}{2}, \quad (132)$$

wenn auch hier wieder abgesehen wird von der kleinen Differenz

$$\frac{K_4}{2} - [v(s) - u(s)] = + \frac{1}{80},$$

die wieder bei der Besetzungsfunktion $f(s) = s^4$ auftritt und von der Benützung der vierten Ableitung von $u(s)$ stammt (*).

Bei dieser Art reduzierten Streutafeln bleibt also das eigentliche infinitesimale Fehlergesetz erhalten sodass σ_2 genommen werden muss, aber die Korrektur beträgt bloss die Hälfte des von der EDDINGTONSchen Formel (124a) geforderten Betrages, solange nicht höhere Ableitungen als die zweiten verwendet werden müssen. Auch hier sind diese Abweichungen verhältnismässig gering, wenigstens für $f(s) = s^4$.

Dieses Ergebnis gilt natürlich zunächst nur für das vorliegende Material: Häufigkeitsverteilungen, die sich durch Potenzreihen darstellen lassen und Fehlergesetze, die wenigstens symmetrisch und für alle Klassen dieselben sind und über den gesamten Beobachtungsbereich konstant bleiben. Die Korrektur EDDINGTONS ist genau, solange nicht höhere als

(*) Sie hängt vermutlich mit der Eigenart des hier verwendeten Fehlergesetzes zusammen.

zweite Ableitungen verwendet zu werden brauchen, beträgt aber nur die Hälfte des von EDDINGTON verlangten Wertes. Bei Verwendung höherer Ableitungen treten kleinere Abweichungen auf, die vielleicht von der Eigenart des hier verwendeten linearen Fehlergesetzes herrühren, die aber die Brauchbarkeit der Verbesserung nicht bedeutend zu vermindern scheinen. Es wäre aber wohl sehr interessant, die eigentliche Ursache dieses Verhaltens aufzufinden, vor allem, warum bei integral-proportional aufgebauten Tafeln nur die *Halfte* des EDDINGTONSchen Wertes zu nehmen ist. EDDINGTONS Ansatz setzt wesentlich das partial-proportionale Verfahren beim Aufbau solcher Streutafeln voraus, während in Wirklichkeit der Einfluss der Häufigkeiten der Nachbarklassen wohl nicht ausser acht gelassen werden dürfte.

Die Frage mag wohl von allgemeinerem Interesse sein, ganz gleich ob die in dieser Arbeit vertretene Ansicht der einzigen Zulässigkeit des integral-proportionalen Verfahrens zur Reduktion von solchen Streutafeln zurecht besteht oder nicht. Vermutlich sind beide Verfahren im Infinitesimalen gleichwertig oder sogar identisch. Jedenfalls müssen bei grösseren endlichen Klassenintervallen integral-proportionale Reduktionsmethoden verwendet, werden, und es wäre wünschenswert, diese Unstimmigkeiten zu klären.

B. PRAKTISCHER TEIL

Aus den bisherigen Ausführungen ergibt sich, dass wir nicht über ein strenges Verfahren verfügen, um ganz allgemein zu einer beliebigen Spektralstreutafel eine ihr isogene mit einer vorgegebenen Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen zu bestimmen, oder, was auf dasselbe herauskommt, die eine solche Transformation leistenden Reduktionsfaktoren für die Einzelfrequenzen der Tafel zu berechnen. Der Ansatz der Nebenfaktoren als das geometrische Mittel aus den zugehörigen Hauptfaktoren führt zu einem Ergebnis, das keine strenge Lösung darstellt, aber doch eine Näherung bietet, mit der man für die praktischen Ziele der Stellarstatistik vielleicht zufrieden sein kann, wenigstens solange kein genaueres Reduktionsverfahren zur Verfügung steht.

Im folgenden möge zunächst das vorgeschlagene Verfahren zur Bestimmung der Grundfrequenzen aus einer vorliegenden Streutafel, und umgekehrt, zur Ermittlung einer aktuellen Streutafel aus Grundfrequenzen unter Vorgabe einer gewünschten Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen für die praktische Rechnung hergerichtet werden. Dann folgen Anwendungen auf einige aus der Literatur zusammengestellte Streutafeln. Zuletzt wird versucht, die Beziehungen zwischen den Spektralsystemen des *Henry Draper Catalogue* und der *Henry Draper Extension* in Form von Streutafeln festzulegen, da diese Spektralsysteme bekanntermassen nicht identisch sind und für ihre Verknüpfung in der Literatur keine brauchbaren direkten Streutafeln vorliegen.

I. Die praktische näherungsweise Berechnung isogener Streutafeln

1. Die Ermittlung der Reduktionsfaktoren durch schrittweise Näherung

Rein formal sind die Bestimmungsgleichungen für die Reduktionsfaktoren dieselben, ob nun von einer gegebenen Streutafel aus die Grundfrequenzen zu ermitteln sind, oder umgekehrt, ob unter Vorgabe einer bestimmten Verteilung der Klassenhäufigkeiten von den Grundfrequenzen

auf eine aktuelle Streutafel übergegangen werden soll. Im ersten Falle sind die Bestimmungsgleichungen nach den Ausführungen S. 84:

$$\sum_k a_{ik} \Phi_{ik} = \sum_k a_{ik} \sqrt{\Phi_{ii} \Phi_{kk}} = 1, \text{ zur Gewinnung der } \alpha_{ik}, \text{ und} \quad (107)$$

$$\sum_i a_{ik} \Psi_{ik} = \sum_i a_{ik} \sqrt{\Psi_{ii} \Psi_{ik}} = 1, \text{ zur Gewinnung der } \beta_{ik}. \quad (108)$$

Im zweiten Falle lauten sie

$$\sum_k \alpha_{ik} \varphi_{ik} = \sum_k \alpha_{ik} \sqrt{\varphi_{ii} \varphi_{kk}} = A_i^{(x)}, \quad (109)$$

wenn die Verteilung der Klassenfrequenzen ($A_i^{(x)}$) im System $S^{(x)}$ vorgegeben werden,

$$\text{und } \sum_i \beta_{ik} \psi_{ik} = \sum_i \beta_{ik} \sqrt{\psi_{ii} \psi_{ik}} = A_k^{(y)}, \quad (110)$$

wenn die Verteilung der Klassenfrequenzen ($A_k^{(y)}$) im System $S^{(y)}$ vorgegeben werden.

Für die nun folgenden Überlegungen wählen wir den ersten Fall (107) der Bestimmung der Grundfrequenzen α_{ik} aus einer Streutafel a_{ik} ; die Übertragung der Formeln in entsprechender Weise auf die drei anderen Fälle ist dann nur noch eine rein formale Angelegenheit.

Es ist nun zwar möglich, die Reduktionsfaktoren *direkt* zu berechnen; doch erfordern diese Rechnungen einen grossen Aufwand an Arbeit, da die Auflösung dieser Gleichungssysteme zu Gleichungen n^{ten} Grades führen, was man vielleicht durch ein einfaches Näherungsverfahren vermeiden kann. Wir legen hier zwei solcher schrittweisen Näherungsbestimmungen vor: das eine, das in diesem Abschnitt besprochen wird, zielt hin auf die unmittelbare Bestimmung der Reduktionsfaktoren. Das zweite, das wir im nächsten Abschnitt bringen, geht aus von plausibeln Näherungswerten für die Hauptfrequenzen, aus denen dann die Reduktionsfaktoren berechnet werden. Dieses letzte Verfahren ist vielleicht etwas übersichtlicher und auch freier; doch sind beide brauchbar.

Die Bestimmung der Reduktionsfaktoren kann sich zunächst beschränken auf die Bestimmung der Hauptreduktionsfaktoren Φ_{ii} , da sich

die Nebenfaktoren ohne weiteres aus ihnen ergeben als das geometrische Mittel nach der Gleichung

$$\Phi_{ik} = \sqrt{\Phi_{ii} \Phi_{kk}}.$$

So gilt es also zunächst für die Hauptfaktoren Φ_{ii} einen plausibeln Ansatz zu finden, der ein schrittweises Nähern gestattet. In den einfachsten „Streutafeln“ (die diesen Namen wegen Mangel an Streuung nicht verdienen), die nur aus Hauptfrequenzen a_{ii} bestehen, werden die Hauptfrequenzen gleich den Klassenfrequenzen

$$a_{ii} = A_i^{(x)} = A_i^{(y)}, \quad (133)$$

und die Reduktion der $A_i^{(x)}$ zu Eins erfolgt durch einfache Division durch $A_i^{(x)}$, sodass für diesen Fall

$$\Phi_{ii} = \frac{1}{A_i^{(x)}} \quad (134)$$

wird. Für eine erste Näherung liesse sich also setzen:

$$\sqrt{\Phi_{ii}} = \frac{1}{\sqrt{A_i^{(x)}}} = P_i. \quad (135)$$

Für gewöhnliche Tafeln fügen wir dann noch einen Proportionalitätsfaktor

$$\rho_i = 1 + \delta_i \quad (136)$$

hinzu und setzen

$$\sqrt{\Phi_{ii}} = \rho_i P_i = (1 + \delta_i) P_i, \quad (137)$$

und entsprechend

$$\Phi_{ik} = \sqrt{\Phi_{ii} \Phi_{kk}} = \rho_i P_i \rho_k P_k = (1 + \delta_i) P_i \times (1 + \delta_k) P_k.$$

Demnach wird

$$\begin{aligned} \sum_k a_{ik} \Phi_{ik} &= \sum_k a_{ik} \rho_i \rho_k P_i P_k = \\ &= \sum_k a_{ik} P_i P_k (1 + \delta_i) (1 + \delta_k). \end{aligned} \quad (138)$$

Setzen wir

$$a_{ik} P_i P_k = \alpha_{ik}^{(0)}, \quad (139)$$

so bildet die Tafel $(\alpha_{ik}^{(0)})$ eine erste Näherung unter der Annahme, dass

$$\delta_i = \delta_k = 0 \text{ werden.}$$

Es wird also

$$\begin{aligned} \sum_k a_{ik} \Phi_{ik} &= \sum_k \alpha_{ik}^{(0)} (1 + \delta_i) (1 + \delta_k) = \\ &= \sum_k \alpha_{ik}^{(0)} (1 + \delta_i + \delta_k + \delta_i \delta_k) = \\ &= \sum_k \alpha_{ik}^{(0)} + \delta_i \sum_k \alpha_{ik}^{(0)} + \sum_k \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k + \delta_i \sum_k \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k. \end{aligned} \quad (140)$$

Die beiden letzten Summen in (140) können auch geschrieben werden

$$\sum_k \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k = \alpha_{ii}^{(0)} \delta_i + \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k \quad \text{und} \quad (141)$$

$$\delta_i \sum_k \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k = \alpha_{ii}^{(0)} \delta_i^2 + \delta_i \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k. \quad (141a)$$

Setzen wir nun noch zur Abkürzung

$$\sum_k \alpha_{ik}^{(0)} = \Sigma_i^{(0)}$$

und bedenken, dass nach (107)

$$\sum_k a_{ik} \Phi_{ik} = 1$$

st, dann ergibt sich:

$$1 = \Sigma_i^{(0)} + \delta_i \Sigma_i^{(0)} + \delta_i \alpha_{ii}^{(0)} + \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k + \delta_i^2 \alpha_{ii}^{(0)} + \delta_i \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k. \quad (142)$$

Die Nebenfrequenzen $\alpha_{ik}^{(0)} (k \neq i)$ sind meist klein gegenüber den Hauptfrequenzen, sodass für eine erste Näherung zur Bestimmung der δ_i die

drei letzten Terme der vorhergehenden Gleichung (142) vernachlässigt werden können. Wir erhalten dann

$$1 - \Sigma_i^{(0)} = \delta_i (\Sigma_i^{(0)} + \alpha_{ii}^{(0)}) \quad (143)$$

oder

$$\delta_i = \frac{1 - \Sigma_i^{(0)}}{\Sigma_i^{(0)} + \alpha_{ii}^{(0)}}. \quad (144)$$

Die so erhaltenen ersten Näherungen für δ_i , die wir mit $\delta_i^{(0)}$ bezeichnen, lassen sich nun verwenden, um eine zweite Näherung zu erreichen, indem diese Werte in die vorhin vernachlässigten Glieder der obigen Gleichung (142) eingeführt werden, und wir erhalten

$$1 - \Sigma_i^{(0)} = \delta_i^{(1)} [\Sigma_i^{(0)} + (1 + \delta_i^{(0)}) \alpha_{ii}^{(0)}] + (1 + \delta_i^{(0)}) \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k^{(0)} \quad (143a)$$

oder

$$\delta_i^{(1)} = \frac{1 - \Sigma_i^{(0)} - (1 + \delta_i^{(0)}) \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k^{(0)}}{\Sigma_i^{(0)} + (1 + \delta_i^{(0)}) \alpha_{ii}^{(0)}} \quad (144a)$$

Für die praktische Rechnung empfiehlt es sich, einige Abkürzungen einzuführen. Wir setzen:

$$(1 + \delta_i^{(0)}) \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k^{(0)} = E_{ik}^{(0)}, \quad (145)$$

$$(1 + \delta_i^{(0)}) \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k^{(0)} = \Sigma E_{ik}^{(0)}, \quad (146)$$

$$1 - \Sigma_i^{(0)} - \Sigma E_{ik}^{(0)} = Z_i^{(0)}, \quad (147)$$

$$\Sigma_i^{(0)} + (1 + \delta_i^{(0)}) \alpha_{ii}^{(0)} = N_i^{(0)}. \quad (148)$$

Dann wird

$$\delta_i^{(1)} = \frac{Z_i^{(0)}}{N_i^{(0)}},$$

$$\delta_i^{(2)} = \frac{Z_i^{(1)}}{N_i^{(1)}},$$

.....

$$\delta_i^{(t)} = \frac{Z_i^{(t-1)}}{N_i^{(t-1)}}.$$

Durch iterative Verwendung der auf diese Weise neu gewonnenen $\delta_i^{(t)}$ ($t = 1, 2, 3, \dots$) lässt sich der wahre Wert für die δ_i beliebig genau berechnen.

Handelt es sich um die umgekehrte Aufgabe, um den Übergang von den Grundfrequenzen α_{ik} zu den aktuellen Frequenzen a_{ik} , dann sind die (138) entsprechenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\sum_k \alpha_{ik} \varphi_{ik} &= \sum_k \alpha_{ik} \sigma_i \sigma_k Q_i Q_k = \\ &= \sum_k \alpha_{ik} Q_i Q_k (1 + \varepsilon_i) (1 + \varepsilon_k),\end{aligned}\quad (138a)$$

wenn $\sigma_i = 1 + \varepsilon_i$ gesetzt wird. Q_i ist dann entsprechend $\sqrt{A_i^{(x)}}$, wobei wir, da Missverständnisse nicht zu befürchten sind, den oberen Index weglassen und einfach schreiben können

$$Q_i = \sqrt{A_i}.$$

Auch hier erhalten wir dann eine erste grobe Näherung

$$a_{ik}^{(0)} = \alpha_{ik} Q_i Q_k, \quad (139a)$$

wenn $\sigma_i = \sigma_k = 1$ gesetzt wird.

Schreiben wir jetzt wieder, aber mit einer anderen Bedeutung

$$\sum_k a_{ik}^{(0)*} = \sum_i^{(0)}$$

und beachten, dass nach (109)

$$\sum_k \alpha_{ik} \varphi_{ik} = A_i^{(x)},$$

dann ergibt sich ähnlich wie (142)

$$A_i = \sum_i^{(0)} + \varepsilon_i \sum_i^{(0)} + \varepsilon_i a_{ii}^{(0)} + \sum_{k \neq i} a_{ik}^{(0)} \varepsilon_k + \varepsilon_i^2 a_{ii}^{(0)} + \varepsilon_i \sum_{k \neq i} a_{ik}^{(0)} \varepsilon_k. \quad (149)$$

Die erste Näherung für ε_i ist dann

$$\varepsilon_i^{(0)} = \frac{A_i - \Sigma_i^{(0)}}{\Sigma_i^{(0)} + a_{ii}^{(0)}} \quad (150)$$

und die zweite

$$\varepsilon_i^{(1)} = \frac{A_i - \Sigma_i^{(0)}}{\Sigma_i^{(0)} + (1 + \varepsilon_i^{(0)}) a_{ii}^{(0)}} - \sum_{k \neq i} \frac{(1 + \varepsilon_i^{(0)}) a_{ik}^{(0)} \varepsilon_k^{(0)}}{\Sigma_i^{(0)} + (1 + \varepsilon_i^{(0)}) a_{ii}^{(0)}}. \quad (151)$$

Auch hier lassen sich dann durch fortgesetzte Verwendung der neu gewonnenen $\varepsilon_i^{(t)}$ ($t = 1, 2, 3, \dots$) für die ε_i beliebig genaue Werte erreichen.

Ein *praktisches* Beispiel einer solchen Berechnung dürfte den Gebrauch der eben entwickelten Formeln noch anschaulicher erläutern und überzeugen, dass sich beim Gebrauch einer guten Rechenmaschine und einer rationellen Anordnung der Einzelergebnisse die Rechnungen verhältnismässig einfach gestalten, wenn auch die Formeln auf den ersten Blick etwas kompliziert erscheinen mögen. Als Beispiel wählen wir die Bestimmung der Grundfrequenzen α_{ik} für die später in Tab. 75 S. 200 angeführte Streutafel des Vergleiches der Spektralschätzungen VANÄS mit dem HDC.

Zur Vermeidung von Dezimalfehlern empfiehlt es sich, bei solchen Aufgaben gleich von vornherein Ausgangs- und Endstreutafel durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor auf die gleiche Grössenordnung zu bringen. Es liegt nahe, die Ausgangsstreutafel mit dem Faktor n/N auf die Zahl der Objekte der Grundfrequenzen zu reduzieren, wobei n die Zahl der Objekte der Tafel der Grundfrequenzen bedeutet und N die Zahl der Objekte der Ausgangsstreutafel. Im vorliegenden Falle multiplizieren wir mit $6/467$ und erhalten die in Tabelle 67 gebotene reduzierte a_{ik} -Tafel für den Spektralvergleich VANÄS-HDC. Wenn auch mehr als zwei Dezimalen für Grundfrequenztafeln, die nach der vorgeschlagenen Methode gewonnen werden, keine Bedeutung haben, so haben wir doch die Rechnungen mit vier Dezimalen durchführen wollen, einmal, weil dann die Genauigkeit auf zwei Dezimalen besser gesichert wird; dann aber auch, um zu zeigen, wie diese schrittweise Näherung konvergiert. Es zeigt sich, dass die Näherung bald erreicht ist, wenn die δ_i nicht weit von Null entfernt sind, wie zum Beispiel bei den letzten vier δ_3 bis δ_6 , aber lange währen kann für grössere Werte wie z. B. für δ_1 , wobei dann natürlich auch die Werte für die Nachbarklassen in Mitleidenschaft gezogen werden.

Die einzelnen Schritte der Berechnung werden in Tabelle 68 geboten in der Weise, wie sich die Anordnung praktisch am besten bewährt hat. Bei der praktischen Berechnung wird man natürlich die gesicherten Ergebnisse, die sich nicht mehr ändern, nicht weiter mitschleppen, sondern sich auf die Bestimmung der noch nicht erreichten Werte beschränken. Hier wurden sie nur mitgeführt, um die Tabelle vollständig zu machen. Doch wurden die Werte mit einem Asteriskus versehen, sobald der Endwert erreicht war.

Im vorliegenden Falle ist die Bestimmung des ganzen Satzes der δ_i erst mit $\delta_i^{(s)}$ erreicht, und weitere Schritte sind nutzlos, wenn man sich auf die vier Dezimalen beschränken will.

Die mit den so gewonnenen $\delta_i^{(s)}$ berechneten Reduktionsfaktoren Φ_{ii} und Φ_{ik} , und noch mehr die gewünschten Grundfrequenzen α_{ik} , leiden stark an *Abrundungsfehlern*, sodass das Endergebnis bei einer Rechnung mit vier Dezimalen nur knapp auf drei Dezimalen genau ist. Es scheint deshalb vorteilhafter, von den zu erwartenden α_{ik} auszugehen und von hier aus die entsprechenden Reduktionsfaktoren zu bestimmen, wie es in dem nächst zu besprechenden Näherungsverfahren geschieht.

TABELLE 67

Vergleich der Spektralschätzungen VANÄS-HDC
reduziert auf $N = 6$

$S^{(V)} \backslash S^{(C)}$	B ^(V)	A ^(V)	F ^(V)	G ^(V)	K ^(V)	M ^(V)	$A_k^{(C)}$
B ^(C)	.1927	.0385					.2313
A ^(C)	.3340	2.3383	.0771				2.7495
F ^(C)		.0771	.5268	.0257			.6296
G ^(C)			.1670	.5258	.0128		.7066
K ^(C)			.0385	.0642	1.0664	.0385	1.2077
M ^(C)					.0899	.3854	.4574
$A_i^{(V)}$	.5268	2.4540	.8094	.6167	1.1692	.4240	6.0000

TABELLE 68

Zur Berechnung der Grundfrequenzen α_{ik} für die Streutafel a_{ik} für den Spektralvergleich VANÄS-HDC der vorhergehenden Tab. 67

	B(V)	A(V)	F(V)	G(V)	K(V)	M(V)
P_i	1.3778	.6384	1.1115	1.2734	.9248	1.5357
$P_i P_k$	.8796	.7096	1.4154	1.1776	1.4202	
$P_3 P_5$		1.0279				
$\alpha_{ik}^{(0)}$	.3658 .2938	.0339 .9529 .0547	.0547 .6509 .2364 .0396	.0364 .8542 .0756	.0151 .9121 .1277	.0547 .9090
$\Sigma^{(0)}$	.6596	1.0415	.9816	.9662	1.0549	.9637
$1 - \Sigma^{(0)}$	+ .3404	— .0415	+ .0184	+ .0338	— .0549	+ .0363
$\Sigma^{(0)} + \alpha_{ii}^{(0)}$	1.0254	1.9944	1.6325	1.8204	1.9670	1.8727
$\delta^{(0)}$	+ .3320	— .0208	+ .0113	+ .0186	— .0279	+ .0194
$1 + \delta^{(0)}$	1.3320	.9792	1.0113	1.0186	.9721	1.0194
$-E_{ik}^{(0)}$	+ .0081	— .0110 — .0006	+ .0012 — .0044 + .0011	— .0004 + .0021	— .0003 — .0024	+ .0016
$Z_{ik}^{(0)}$	+ .3485	— .0531	+ .0163	+ .0355	— .0576	+ .0379
$N_{ik}^{(0)}$	1.1468	1.9746	1.6399	1.8363	1.9416	1.8903
$\delta^{(1)}$	+ .3039	— .0269	+ .0099	+ .0193	— .0297*	+ .0200
$1 + \delta^{(1)}$	1.3039	.9731	1.0099	1.0193	.9703	1.0200
$-E_{ik}^{(1)}$	+ .0103	— .0100 — .0005	+ .0015 — .0046 + .0012	— .0004 + .0023	— .0003 — .0025	+ .0017
$Z_i^{(1)}$	+ .3507	— .0520	+ .0165	+ .0357	— .0577	+ .0380
$N_i^{(1)}$	1.1366	1.9688	1.6389	1.8369	1.9399	1.8909
$\delta^{(2)}$	+ .3086	— .0264	+ .0101*	+ .0194*	— .0297*	+ .0201*
$1 + \delta^{(2)}$	1.3086	.9736	1.0101	1.0194	.9703	1.0201
$-E_{ik}^{(2)}$	+ .0101	— .0102 — .0005	+ .0015 — .0046 + .0012	— .0004 + .0023	— .0003 — .0025	+ .0017
$Z_i^{(2)}$	+ .3505	— .0522	+ .0165	+ .0357	— .0577	+ .0380
$N_i^{(2)}$	1.1383	1.9692	1.6391	1.8370	1.9399	1.8910

TABELLE 68 (Forts.)

$\delta^{(3)}$ $1 + \delta^{(3)}$	+	.3079	—	.0265*	+	.0101*	+	.0194*	—	.0297*	+	.0201*
		1.3079		.9735		1.0101		1.0194		.9703		1.0201
$-E_{ik}^{(3)}$	+	.0102	—	.0102	+	.0015	—	.0004	—	.0003	+	.0017
				.0005	—	.0046	+	.0023	—	.0025		
$Z_i^{(3)}$	+	.3506	—	.0522	+	.0165	+	.0357	—	.0577	+	.0207
$N_i^{(3)}$		1.1380		1.9691		1.6391		1.8370		1.9399		1.8910
$\delta^{(4)}$ $1 + \delta^{(4)}$	+	.3081*	—	.0265*	+	.0101*	—	.0194*	—	.0297*	+	.0201*
		1.3081		.9735		1.0101		1.0194		.9703		1.0201
$-E_{ik}^{(4)}$	+	.0102	—	.0102	+	.0015	—	.0004	—	.0003	+	.0017
				.0005	—	.0046	+	.0023	—	.0025		
$Z_i^{(4)}$	+	.3506	—	.0522	+	.0165	+	.0357	—	.0577	+	.0207
$N_i^{(4)}$		1.1381		1.9691		1.6391		1.8370		1.9399		1.8910
$\delta_i^{(5)}$	+	.3081*	—	.0265*	+	.0101*	+	.0194*	—	.0297*	+	.0201*
$1 + \delta_i^{(5)} = p_i$		1.3081		.9735		1.0101		1.0194		.9703		1.0201
$p_i P_i$		1.8023		.6216		1.1227		1.2981		.8973		1.5666
$\Phi_{ii} = p_i^2 P_i^2$		3.2483		.3864		1.2605		1.6851		.8051		2.4542
$\Phi_{ik} = p_i P_i p_k P_k$				1.1203		.6979		1.4574		1.1648		1.4057
Φ_{35}						1.0074						

α_{ik}							
$S^{(C)}$	$S^{(V)}$	B ^(V)	A ^(V)	F ^(V)	G ^(V)	K ^(V)	M ^(V)
B ^(C)		.6259	.0431				
A ^(C)		.3742	.9035	.0538			
F ^(C)			.0538	.6640	.0375		
G ^(C)				.2434	.8877	.0149	
K ^(C)				.0388	.0748	.8586	.0541
M ^(C)						.1264	.9458
$R_i^{(V)}$		1.0001	1.0004	1.0000	1.0000	.9999	.9999

2. Die schrittweise Berechnung der Reduktionsfaktoren über genäherte Hauptfrequenzen

Aus der Gleichung

$$\alpha_{ii} = a_{ii} \Phi_{ii} \quad (152)$$

folgt

$$\Phi_{ii} = \frac{\alpha_{ii}}{a_{ii}}. \quad (152a)$$

Werden zunächst einmal plausible $\alpha_{ii}^{(0)}$ angenommen und mit ihrer Hilfe die dazugehörigen Reduktionsfaktoren $\Phi_{ii}^{(0)}$ und in der Folge auch die

$$\Phi_{ik}^{(0)} = \sqrt{\Phi_{ii}^{(0)} \Phi_{kk}^{(0)}}$$

bestimmt, so lässt sich eine Tafel der $\alpha_{ik}^{(0)}$ in erster Näherung festlegen, aus der sich dann ablesen lässt, wie weit die Näherung gelungen ist. Die Differenzen $1 - \Sigma_i^{(0)}$ geben Anhaltspunkte für die Wahl eines neuen verbesserten Satzes von Hauptfrequenzen $\alpha_{ii}^{(1)}$ und damit eines neuen Systems von Reduktionsfaktoren $\Phi_{ik}^{(1)}$, mit deren Hilfe eine verbesserte Streutafel $\alpha_{ik}^{(1)}$ gebildet werden kann. Die neuen Differenzen $1 - \Sigma_i^{(1)}$ leiten zu einer weiteren verbesserten Gruppe von Hauptfrequenzen $\alpha_{ii}^{(2)}$ und sofort, bis schliesslich eine Streutafel $\alpha_{ik}^{(t)}$ erreicht wird, in der die Differenzen $1 - \Sigma_k \alpha_{ik}^{(t)}$ verschwinden.

Zur ersten Näherung wird man wieder mit Vorteil die oben (139) schon benutzte $\alpha_{ik}^{(0)}$ -Tafel nehmen, die man erhält, wenn

$$\Phi_{ii}^{(0)} = \frac{1}{A_i} \quad (134)$$

gesetzt wird. Die gefundenen Hauptfrequenzen $\alpha_{ii}^{(0)}$ bedürfen dann noch einer Korrektur $\Delta \alpha_{ii}$, die sie zu den wahren Hauptfrequenzen α_{ii} verbessern in dem Sinne, dass

$$\alpha_{ii} = \alpha_{ii}^{(0)} + \Delta \alpha_{ii}. \quad (153)$$

Es kommt nun alles darauf an, für die $\Delta \alpha_{ii}$ möglichst gute Werte zu finden, dass die Näherung rasch voranschreitet.

Es steht nichts im Wege, die $\Delta \alpha_{ii}$ nach dem *Augenmass* zu wählen. Einen ersten Fingerzeig für ihre Grösse bieten die Differenzen

$$1 - \sum_k \alpha_{ik}^{(0)} \text{ oder kürzer } 1 - \Sigma_i^{(0)} ;$$

denn es ist unmittelbar einleuchtend, dass die $\Delta \alpha_{ii}$ dass gleiche Vorzeichen der $(1 - \Sigma_i^{(0)})$ haben müssen und ihr absoluter Wert nie grösser sein darf als der absolute Wert der Differenzen, da auch die Nebenfrequenzen zu den Differenzen einen Beitrag geliefert haben. Die Annäherung an die wahre Tafel geht auf diese Weise etwas langsam voran; doch hat sie den Vorteil, dass sich die neuen $\alpha_{ii}^{(1)}$ oft sofort hinschreiben und für die Ermittlung der Reduktionsfaktoren $\Phi_{ii}^{(1)}$ und $\Phi_{ik}^{(1)}$ auswerten lassen, was dann besonders einfach ist, wenn man sich zum Beginn des Näherungsverfahrens erst mit möglichst wenig Dezimalen begnügt und die Stellen erst nach und nach vermehrt.

Eine etwas rascher konvergierende Näherung erreicht man, wenn auch die *Beiträge der Nebenfrequenzen* gleich rechnerisch einbezogen werden, indem man die Differenzen $(1 - \Sigma_i^{(0)})$ *prozentuell* auf die $\alpha_{ik}^{(0)}$ verteilt. Wir setzen also

$$\Delta \alpha_{ii}^{(0)} = (1 - \Sigma_i^{(0)}) \frac{\alpha_{ii}^{(0)}}{\Sigma_i^{(0)}} \quad (154)$$

und bilden die erste Näherungstafel ($\alpha_{ik}^{(1)}$) mit Hilfe der gewonnenen

$$\alpha_{ii}^{(1)} = \alpha_{ii}^{(0)} + \Delta \alpha_{ii}^{(0)} ,$$

woraus sich dann neue Differenzen $(1 - \Sigma_i^{(1)})$ ergeben, aus denen eine zweite Verbesserung hergestellt werden kann

$$\Delta \alpha_{ii}^{(1)} = (1 - \Sigma_i^{(1)}) \frac{\alpha_{ii}^{(1)}}{\Sigma_i^{(1)}} ,$$

die zu der zweiten Näherung

$$\alpha_{ii}^{(2)} = \alpha_{ii}^{(1)} + \Delta \alpha_{ii}^{(1)}$$

führt.

Der Prozess wird dann weitergeführt, bis schliesslich die Differenzen

$$1 - \sum_k \alpha_{ik}^{(n)} = 0$$

werden.

TABELLE 69

Berechnung der Grundfrequenzen α_{ik} für die Streutafel a_{ik} der Tabelle 53
mit prozentueller Angleichung der Hauptfrequenzen

Klasse	B	A	F	G	K	M
a_{ik} (Vgl. Tab. 67)	.1927 .3340	.0385 2.3382 .0771	.0771 .5268 .1670 .0385	.0257 .5268 .0642	.0128 1.0664 .0899	.0385 .3854
$A_i^{(1)}$	.5268	2.4540	.8094	.6167	1.1692	.4240
$\alpha_{ik}^{(0)}$ (Vgl. Tab. 68)	.3658 .2938	.0339 .9529 .0547	.0547 .6509 .2364 .0396	.0364 .8542 .0756	.0151 .9121 .1277	.0547 .9090
$\Sigma_i^{(0)}$	.6596	1.0415	.9816	.9662	1.0549	.9637
$1 - \Sigma_i^{(0)}$	+ .3404	— .0415	+ .0184	+ .0338	— .0549	+ .0363
$\Delta \alpha_{ii}^{(0)}$	+ .1888	— .0380	+ .0122	+ .0299	— .0475	+ .0342
$\alpha_{ii}^{(1)}$	.5546	.9149	.6631	.8841	.8646	.9423
$\Phi_{ii}^{(1)}$	2.8780	.3913	1.2587	1.6782	.8108	2.4473
$\sqrt{\Phi_{ii}^{(1)}}$	1.6965	.6255	1.1219	1.2955	.9004	1.5644
$\Phi_{ik}^{(1)}$	1.0612		.7017 1.0102	1.4534	1.1665	1.4086
$\alpha_{ik}^{(1)}$	.5546 .3544	.0409 .9149 .0541	.0541 .6631 .2427 .0389	.0374 .8841 .0749	.0149 .8646 .1266	.0542 .9432
$\Sigma_i^{(1)}$	.9090	1.0099	.9988	.9964	1.0061	.9974

TABELLE 69 (Forts.)

Klasse	B	A	F	G	K	M
$1 - \Sigma_i^{(1)}$	+ .0910	— .0099	+ .0012	+ .0036	— .0061	+ .0026
$\Delta \alpha_{ii}^{(1)}$	+ .0555	— .0090	+ .0008	+ .0032	— .0052	+ .0025
$\alpha_{ii}^{(2)}$	.6101	.9059	.6639	.8873	.8594	.9457
$\Phi_{ii}^{(2)}$	3.1661	.3874	1.2603	1.6843	.8059	2.4538
$\sqrt{\Phi_{ii}^{(2)}}$	1.7794	.6224	1.1226	1.2978	.8977	1.5665
$\Phi_{ik}^{(2)}$	1.1075	.6987	1.4569	1.1650	1.4062	
			1.0078			
$\alpha_{ik}^{(2)}$	.6101	.0426				
	.3699	.9059	.0539			
		.0539	.6639	.0374		
			.2433	.8873	.0149	
			.0388	.0748	.8594	.0541
					.1264	.9457
$\Sigma_i^{(2)}$	.9800	1.0024	.9999	.9995	1.0007	.9998
$1 - \Sigma_i^{(2)}$	+ .0200	— .0024	+ .0001	+ .0005	— .0007	+ .0002
$\Delta \alpha_{ii}^{(3)}$	+ .0125	— .0022	+ .0001	+ .0004	— .0006	+ .0002
$\alpha_{ii}^{(3)}$	.6226	.9037	.6640	.8877	.8588	.9459
$\Phi_{ii}^{(3)}$	3.2309	.3865	1.2604	1.6851	.8053	2.4543
$\sqrt{\Phi_{ii}^{(3)}}$	1.7975	.6217	1.1227	1.2981	.8974	1.5666
$\Phi_{ik}^{(3)}$	1.1175	.6980	1.4574	1.1649	1.4059	
			1.0075			
$\alpha_{ik}^{(3)}$	.6226	.0430				
	.3732	.9037	.0538			
		.0538	.6640	.0375		
			.2434	.8877	.0149	
			.0388	.0748	.8588	.0541
					.1264	.9459
$\Sigma_i^{(3)}$	.9958	1.0005	1.0000	1.0000	1.0001	1.0000

TABELLE 69 (Forts.)

Klasse	B	A	F	G	K	M
$1 - \Sigma_i^{(3)}$	+ .0042	— .0005	.0000	.0000	— .0001	.0000
$\Delta \alpha_{ii}^{(3)}$	+ .0026	— .0005	.0000	.0000	— .0001	.0000
$\alpha_{ii}^{(4)}$	.6252	.9032	.6640	.8877	.8587	.9459
$\Phi_{ii}^{(4)}$	3.2444	.3863	1.2604	1.6851	.8052	2.4543
$\sqrt{\Phi_{ii}^{(4)}}$	1.8012	.6215	1.1227	1.2981	.8973	1.5666
$\Phi_{ih}^{(4)}$	1.1194	.6978	1.4574	1.1648	1.4057	
			1.0074			
$\alpha_{ih}^{(4)}$	.6252	.0431				
	.3739	.9032	.0538			
		.0538	.6640	.0375		
			.2434	.8877	.0149	
			.0388	.0748	.8587	.0541
					.1264	.9459
$\Sigma_i^{(4)}$	.9991	1.0001	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$1 - \Sigma_i^{(4)}$	+ .0009	— .0001	.0000	.0000	.0000	.0000
$\Delta \alpha_{ii}^{(4)}$	+ .0007	— .0001				
$\alpha_{ii}^{(5)}$	.6259	.9031	.6640	.8877	.8587	.9459
$\Phi_{ii}^{(5)}$	3.2481	.3862	1.2604			
$\sqrt{\Phi_{ii}^{(5)}}$	1.8022	.6214	1.1227			
$\Phi_{ih}^{(5)}$	1.1199	.6976				
$\alpha_{ih}^{(5)}$	.6259	.0431				
	.3740	.9031	.0538			
		.0538	.6640	.0375		
			.2434	.8877	.0149	
			.0388	.0748	.8587	.0541
					.1264	.9459
$\Sigma_i^{(5)}$	.9999	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Wie sich dann die Rechnungen für das im vorigen Abschnitt gebrachte Beispiel der Ermittlung der Grundfrequenzen α_{ih} für den Spektralvergleich VANÄS-HDC gestalten, zeigt die Zusammenstellung in Tab. 69. Mit $\alpha_{ih}^{(s)}$ ist die Näherung auf vier Dezimalen praktisch erreicht. Eine weitere Verbesserung von $\alpha_{ii}^{(s)}$ von .6259 auf .6260, um $\sum_k \alpha_{ik}^{(s)}$ von .9999 auf 1.0000 zu bringen, bedingt auch eine Erhöhung von $\alpha_{12}^{(s)}$ auf .3741, verbessert also die Lage nicht, sodass diese Tabelle als endgültig angesehen werden kann.

Eine noch bessere Konvergenz wird erreicht, wenn auch der *Einfluss der Nachbarklassen* auf die Nebenfrequenzen in Rechnung gezogen wird. Um hier auf eine brauchbare Näherungsformel zu gelangen, greifen wir zurück auf die im ersten Abschnitt gewonnenen Ergebnisse.

Es ist

$$\Delta \alpha_{ii} = \alpha_{ii} - \alpha_{ii}^{(0)}. \quad (153)$$

$$\alpha_{ii} = a_{ii} \Phi_{ii} = \quad (152)$$

$$\begin{aligned} &= a_{ii} (1 + \delta_i)^2 P_i^2 = \\ &= \alpha_{ii}^{(0)} (1 + \delta_i)^2 = \\ &= \alpha_{ii}^{(0)} + \alpha_{ii}^{(0)} (2 \delta_i + \delta_i^2). \end{aligned} \quad (155)$$

Es wird demnach

$$\Delta \alpha_{ii} = 2 \delta_i \alpha_{ii}^{(0)} \left(1 + \frac{\delta_i}{2}\right). \quad (156)$$

Setzen wir für eine erste Näherung $(1 + \frac{\delta_i}{2}) = 1$, dann ergibt sich

$$\Delta \alpha_{ii}^{(0)} = 2 \delta_i \alpha_{ii}^{(0)}. \quad (157)$$

Als Näherungswert für δ_i erhielten wir oben S. 179 (144a)

$$\delta_i^{(1)} = \frac{1 - \sum_i^{(0)} - (1 + \delta_i^{(0)}) \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}^{(0)} \delta_k^{(0)}}{\sum_i^{(0)} + (1 + \delta_i^{(0)}) \alpha_i^{(0)}}, \quad (144a)$$

wobei

$$\delta_i^{(0)} = \frac{1 - \sum_i^{(0)}}{\sum_i^{(0)} + \alpha_{ii}^{(0)}}. \quad (144)$$

Setzen wir diesen Wert für $\delta_i^{(1)}$ in die obige Gleichung (157) für $\Delta \alpha_{ii}^{(o)}$ ein und vereinfachen noch, indem wir im Zähler und Nenner $(1 + \delta_{ii}^{(o)}) = 1$ setzen, dann ergibt sich für ein erstes angenähertes $\Delta \alpha_{ii}^{(o)}$:

$$\begin{aligned}\Delta \alpha_{ii}^{(o)} &= \frac{2 \alpha_{ii}^{(o)} (1 - \Sigma_i^{(o)}) - \sum_{k \neq i} \alpha_{ik}^{(o)} \delta_k^{(o)}}{\Sigma_i^{(o)} + \alpha_{ii}^{(o)}} \quad (158) \\ &= d_i^{(o)} - \sum_{k \neq i} e_{ik}^{(o)},\end{aligned}$$

wobei

$$d_{ii}^{(o)} = \frac{2 \alpha_{ii}^{(o)} (1 - \Sigma_i^{(o)})}{\Sigma_i^{(o)} + \alpha_{ii}^{(o)}} \quad \text{und} \quad (159a)$$

$$e_{ik}^{(o)} = \frac{2 \alpha_{ii}^{(o)} \alpha_{ik}^{(o)} \delta_k^{(o)}}{\Sigma_i^{(o)} + \alpha_{ii}^{(o)}} \quad \text{sind.} \quad (159b)$$

Nun ist nach (144) und (159 a)

$$\delta_k^{(o)} = \frac{1 - \Sigma_k^{(o)}}{\Sigma_k^{(o)} + \alpha_{kk}^{(o)}} = \frac{d_k^{(o)}}{2 \alpha_{kk}^{(o)}},$$

sodass

$$e_{ik}^{(o)} = \frac{2 \alpha_{ii}^{(o)} \alpha_{ik}^{(o)} d_k^{(o)}}{2 \alpha_{kk}^{(o)} (\Sigma_i^{(o)} + \alpha_{ii}^{(o)})} \quad (159c)$$

wird. Bedenkt man ferner, dass die Hauptfrequenzen $\alpha_{ii}^{(o)}$ und $\alpha_{kk}^{(o)}$ praktisch von gleicher Grössenordnung sind, die $e_{ik}^{(o)}$ andererseits aber nur kleine Korrektionswerte darstellen, so lässt sich für die hier beabsichtigten Näherungswecke gefahrlos setzen

$$e_{ik}^{(o)} = \frac{\alpha_{ik}^{(o)} d_k^{(o)}}{\Sigma_i^{(o)} + \alpha_{ii}^{(o)}}, \quad (159d)$$

da sich die $\alpha_{ii}^{(o)}$ gegen die $\alpha_{kk}^{(o)}$ ungefähr herausheben.

Wir erhalten also endgültig für die ersten genäherten Differenzen $\Delta \alpha_{ii}^{(0)}$:

$$\Delta \alpha_{ii}^{(0)} = d_i^{(0)} - \sum_{k \neq i} e_{ik}^{(0)}, \quad (160)$$

wobei

$$d_i^{(0)} = \frac{2 \alpha_{ii}^{(0)} (1 - \Sigma_i^{(0)})}{\Sigma_i^{(0)} + \alpha_{ii}^{(0)}} \quad \text{und} \quad (159a)$$

$$e_{ik}^{(0)} = \frac{\alpha_{ik}^{(0)} d_k^{(0)}}{\Sigma_i^{(0)} + \alpha_{ii}^{(0)}} \quad (159d)$$

zu nehmen sind. Die eingeführten Vereinfachungen verzögern zwar theoretisch die Näherung, sind aber doch so gering, dass die praktischen Berechnungen sehr schnell den gewünschten Endwerten nahe kommen.

Es wird also

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}^{(1)} &= \alpha_{ii}^{(0)} + \Delta \alpha_{ii}^{(0)} = \\ &= \alpha_{ii}^{(0)} + d_i^{(0)} - \sum_{k \neq i} e_{ik}^{(0)}, \\ \alpha_{ii}^{(2)} &= \alpha_{ii}^{(1)} + d_i^{(1)} - \sum_{k \neq i} e_{ik}^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots \\ \alpha_{ii}^{(t)} &= \alpha_{ii}^{(t-1)} + d_i^{(t-1)} - \sum_{k \neq i} e_{ik}^{(t-1)}. \end{aligned}$$

Aus den jeweils erhaltenen genäherten Hauptfrequenzen $\alpha_{ii}^{(t)}$ werden dann jedesmal die zugehörigen Hauptreduktionsfaktoren

$$\Phi_{ii}^{(t)} = \frac{\alpha_{ii}^{(t)}}{a_{ii}}$$

bestimmt und die zugehörigen Nebenreduktionsfaktoren

$$\Phi_{ik}^{(t)} = \sqrt{\Phi_{ii}^{(t)} \Phi_{kk}^{(t)}},$$

mit deren Hilfe sich dann die ganze genäherte Streutafel ableiten lässt über die Formeln

$$\alpha_{ik}^{(t)} = a_{ik} \Phi_{ik}^{(t)}.$$

TABELLE 70

Berechnung der Grundfrequenzen α_{ik} mit verbesserter Angleichung der Hauptfrequenzen unter Berücksichtigung des Einflusses der Nachbarklassen

	B	A	F	G	K	M
$\alpha_{ik}^{(0)}$	ist identisch mit $\alpha_{ik}^{(0)}$ der Tabellen 68 und 69					
$\Sigma_i^{(0)}$	.6596	1.0415	.9816	.9662	1.0549	.9637
$1 - \Sigma_i^{(0)}$	+ .3404	— .0415	+ .0184	+ .0338	— .0549	+ .0363
$\Sigma_i^{(0)} + \alpha_{ii}^{(0)}$	1.0254	1.9944	1.6325	1.8204	1.9670	1.8727
$d_i^{(1)}$	+ .2429	— .0397	+ .0147	+ .0317	— .0509	+ .0352
$e_{ik}^{(1)}$	+ .0114	— .0041	+ .0013	— .0003	— .0002	+ .0015
		— .0004	— .0046	+ .0021	— .0023	
			+ .0012			
$\alpha_{ii}^{(1)}$	.6201	.9087	.6635	.8877	.8587	.9457
$\Phi_{ii}^{(1)}$	3.2180	.3886	1.2595	1.6851	.8052	2.4538
$\sqrt{\Phi_{ii}^{(1)}}$	1.7939	.6234	1.1222	1.2981	.8973	1.5665
$\Phi_{ik}^{(0)}$		1.1183	.6996	1.4567	1.1648	1.4056
			1.0070			
$\alpha_{ik}^{(1)}$	.6201	.0431				
	.3735	.9087	.0539			
		.0539	.6635	.0374		
			.2433	.8877	.0149	
			.0388	.0748	.8587	.0541
					.1264	.9457
$\Sigma_i^{(1)}$	.9936	1.0057	.9995	.9999	1.0000	.9998
$1 - \Sigma_i^{(1)}$	+ .0064	— .0058	+ .0005	+ .0001	.0000	+ .0002
$\Sigma_i^{(1)} + \alpha_{ii}^{(1)}$	1.6137	1.9144	1.6630	1.8876	1.8587	1.9455
$d_i^{(2)}$	+ .0049	— .0055	+ .0004	+ .0001	.0000	+ .0002
$e_{ik}^{(2)}$	+ .0013	— .0001	+ .0002	.0000	.0000	.0000
		.0000	.0000	.0000	.0000	
			.0000			
$\alpha_{ii}^{(2)}$	.6263	.9031	.6641	.8878	.8587	.9459

TABELLE 70 (Forts.)

	B	A	F	G	K	M
$\Phi_{ii}^{(2)}$	3.2501	.3862	1.2606	1.6853	.8052	2.4543
$\sqrt{\Phi_{ii}^{(2)}}$	1.8028	.6215	1.1228	1.2982	.8973	1.5666
$\Phi_{ik}^{(2)}$	1.1204	.6978	1.4576	1.1649	1.4057	
			1.0075			
$\alpha_{ik}^{(2)}$	.6263	.0431				
	.3742	.9031	.0538			
		.0538	.6641	.0375		
			.2434	.8878	.0149	
			.0388	.0748	.8587	.0541
					.1264	.9459
$\Sigma_i^{(2)}$	1.0005	1.0000	1.0001	1.0001	1.0000	1.0000
$1 - \Sigma_i^{(2)}$	— .0005	.0000	— .0001	— .0001	.0000	.0000
$\Sigma_i^{(2)} + \alpha_{ii}^{(2)}$	1.6268	1.9033	1.6642	1.8879	1.8587	1.9459
$d_i^{(3)}$	— .0004	.0000	— .0001	— .0001	.0000	.0000
	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
$e_{ik}^{(3)}$		.0000	.0000	.0000	.0000	
			.0000			
$\alpha_{ik}^{(3)}$	.6259	.9031	.6640	.8877	.8587	.9459

Mit $\alpha_{ii}^{(3)}$ ist der letzte Stand $\alpha_{ii}^{(5)}$ der Tabelle 59 erreicht und damit auch die entsprechende Tafel der Grundfrequenzen α_{ik} .

In Tabelle 70 wird das oben benützte Beispiel der Bestimmung der Grundfrequenzen α_{ik} aus der Spektralstreutafel VANÄS-HDC nach der angegebenen Weise durchgerechnet. Wie man sieht, ist die Konvergenz bedeutend besser, als bei der bloss prozentuellen Verteilung der Differenzen auf die Teilfrequenzen einer Spektralklasse. Mit $\alpha_{ii}^{(3)}$ ist der letzte Stand $\alpha_{ii}^{(5)}$ der Tabelle 69 schon erreicht. Auch hier hat es keinen Sinn, die Näherung weiter zu treiben, es sei denn, dass man noch mehr Dezimalen wünscht.

Die Korrekturen e_{ik} werden immer kleiner, und man wird bald merken, dass sich die Rechnungen vereinfachen lassen, da schliesslich für die Bestimmung dieser Grössen nicht die vielen Dezimalen mitgeschleppt zu werden brauchen, wie es hier des Beispiels wegen geschah. Ja, meistens wird man sich mit den früher bestimmten Divisoren $\Sigma_i^\circ + \alpha_{ii}$ begnügen können, ohne die Konvergenz der Näherung zu beeinträchtigen.

Für den *umgekehrten Weg*, nämlich die Bestimmung der aktuellen Frequenzen aus den Grundfrequenzen α_{ik} und einem vorgegebenen Satz von Klassenfrequenzen $(A_i^{(x)})$, ergeben sich entsprechend ähnliche Ausdrücke.

Die Bestimmung der Hauptreduktionsfaktoren aus den Hauptfrequenzen erfolgt nun über die Gleichungen

$$\varphi_{ii} = \frac{a_{ii}}{\alpha_{ii}}, \quad (160)$$

und für die erste angenäherte Tafel $a_{ik}^{(o)}$ werden als Reduktionsfaktoren jene verwendet, die sich aus den gewünschten Klassenfrequenzen ergeben:

$$\varphi_{ii}^{(o)} = A_i^{(x)}, \quad \varphi_{ik}^{(o)} = \sqrt{A_{ii}^{(x)} A_{kk}^{(x)}}, \quad (161)$$

wo wir wieder ohne Beeinträchtigung der Eindeutigkeit die oberen Indizes der $A_i^{(x)}$ weglassen und einfacher A_i statt dessen schreiben können. Die Streutafel der ersten groben Näherung berechnet sich dann zu

$$a_{ik}^{(o)} = \alpha_{ik} \varphi_{ik}^{(o)}. \quad (162)$$

Die Summen der Teilfrequenzen, die wir wieder mit Σ_i° bezeichnen wollen, sind jetzt

$$\Sigma_i^{(o)} = \sum_k a_{ik}^{(o)}$$

und sollten sich den Klassenfrequenzen A_i nähern. Die zwischen beiden entstehenden Differenzen

$$(A_i - \Sigma_i^{(o)})$$

bilden nun die Grundlage für die weitere Anlage der Näherungsrechnungen.

Bei *prozentueller* Aufteilung der Differenzen $(A_i - \Sigma_i^{(0)})$ ergibt sich als erste Korrektur für die Hauptfrequenzen

$$\Delta a_{ii}^{(0)} = (A_i - \Sigma_i^{(0)}) \frac{a_{ii}^{(0)}}{\Sigma_i^{(0)}}. \quad (163)$$

Die *genauere* Formel, die noch den Einfluss der Nachbarklassen berücksichtigt, ergibt für die erste Korrektur

$$\Delta a_{ii}^{(0)} = f_i^{(0)} - \sum_{k \neq i} g_{ik}^{(0)}, \quad (164)$$

wobei

$$f_i^{(0)} = \frac{2 a_{ii}^{(0)} (A_i - \Sigma_i^{(0)})}{\Sigma_i^{(0)} + a_{ii}^{(0)}} \quad \text{und} \quad (164a)$$

$$g_{ik}^{(0)} = \frac{a_{ik}^{(0)} f_k^{(0)}}{\Sigma_i^{(0)} + a_{ii}^{(0)}} \quad (164b)$$

zu setzen sind. Der weitere Verlauf der Näherung unterscheidet sich dann in keiner Weise mehr von den bisher besprochenen.

Es ist nun nicht wesentlich, von einer Grundfrequenztafel auszugehen, um eine ihr isogene Streutafel mit vorgegebener Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen zu berechnen. Jede Streutafel, die die Verknüpfung der beiden Spektralsysteme richtig darstellt, ist dazu geeignet. Lediglich die erste Annäherung $a_{ii}^{(0)}$ wird etwas vereinfacht, da hier die Hauptreduktionsfaktoren $\varphi_{ii}^{(0)} = A_i^{(x)}$ werden. Geht man hingegen aus von einer Streutafel mit den Klassenhäufigkeiten $B_i^{(x)}$, dann müssen als Hauptreduktionsfaktoren $f_{ii}^{(0)}$ für die erste Näherung die Quotienten aus den neuen und alten Häufigkeiten genommen werden, also

$$f_{ii}^{(0)} = \frac{A_i^{(x)}}{B_i^{(x)}}.$$

Die weiteren Schritte werden dann genau so gemacht werden wie bei Benützung von Grundfrequenzen.

II. Anwendung des vorgeschlagenen Reduktionsverfahrens auf praktische Aufgaben

1. Reduktion einiger Spektralvergleiche aus der Literatur

Nun möge die vorgeschlagene und bisher so ausführlich besprochene Methode zur Reduktion von Spektralstreutafeln noch angewendet werden auf einige Vergleiche von Spektralsystemen, die sich in der Literatur vorfinden. Wir wählen dafür Vergleiche, die SCHALÉN ⁽⁶⁾, WERNBERG ⁽¹⁵⁾ und VANĀS ⁽¹³⁾ angestellt haben zwischen ihren eigenen Systemen und dem Standardsystem der Harvardklassifikation. Diese Vergleiche wurden von den genannten Autoren getrennt bezogen auf das System des *Henry Draper Catalogue* (HDC) und das der *Henry Draper Extension* (HDE) in Würdigung der Tatsache, dass diese beiden Spektralsammlungen stellenweise beträchtliche Unterschiede bezüglich der Auffassung der Spektren aufweisen. So bieten die Befunde der schwedischen Astronomen eine vorzügliche Gelegenheit, die genaueren Beziehungen zwischen diesen beiden Systemen mit Hilfe der vorgeschlagenen Reduktionsmethode zu untersuchen.

Über das Verhältnis der beiden Harvardsysteme zueinander hat zwar schon frühe SHAPLEY ⁽⁹⁾ einige Anhaltspunkte gegeben. Doch wurde der Vergleich bloss mit 110 Objekten durchgeführt und gibt nur die mittleren Differenzen für die Hauptklassen an. Dieser Vergleich hat zwar den grossen Vorteil, dass er Objekte verwendet, die wirklich in beiden Systemen geschätzt wurden; andererseits liegt auch hierin seine Schwäche: es kann sich nur um Objekte handeln, die für den HDC verhältnismässig schwach sind, für die HDE dagegen verhältnismässig hell, was nicht ohne Einfluss bleiben kann auf das Ergebnis.

Ausführlichere Angaben über das gegenseitige Verhältnis der beiden Systeme bot später VYSSORSKY ⁽¹⁴⁾. Er bestimmte an einem reichen Material die Regressionen des McCormick-Spektralsystems auf die beiden Harvardsysteme und gewinnt durch Elimination des eigenen Systems die unmittelbaren Regressionen der beiden Harvardsysteme untereinander. Er bietet allerdings nicht die dem Vergleich zugrundeliegenden Streutafeln, sondern nur die mit dem vorhandenen Material gefundenen Klassendif-

ferenzen, sodass ein etwaiger Einfluss der zufälligen Verteilung der Klassenhäufigkeiten in dem benützten Material nicht in Rechnung gezogen werden kann.

Insofern bietet das Material der schwedischen Astronomen etwas günstigere Bedingungen, die Beziehungen der beiden Harvardsysteme untereinander zu studieren, insbesondere auch deshalb, weil die Benützung aller drei Autoren eine Kontrolle und etwaige Mittlung der Ergebnisse ermöglicht.

Die von den drei schwedischen Astronomen gebotenen Spektralangaben sind nicht gleichwertig: SCHALÉNS Spektralbestimmungen beruhen auf einfachen Schätzungen, VANÄS und WERNBERG benützen mikrophotometrische Messungen, die eine viel gleichmässigere Behandlung des Materials gestatten. Ausserdem liegen nicht für alle Autoren Angaben für die ganze Spektralfolge vor, die für einen Vergleich mit den Harvardsystemen in Betracht kommen: Die Klassen SCHALÉNS können praktisch nur von der Klasse F an benützt werden, die WERNBERGS von A an, und nur das Material von VANÄS bietet die Möglichkeit, auch die B-Sterne in den Bereich des Vergleiches zu ziehen. Diese Unvollständigkeit der Spektralfolge bietet nachher einige Schwierigkeiten, wenn die Ergebnisse dieser Autoren zusammengestellt und miteinander gemittelt werden sollen.

In den angegebenen Veröffentlichungen finden sich die Vergleiche mit den Spektralsystemen von Harvard in Form von Streudiagrammen, und zwar auch für die Unterklassen differenziert. Die hier benötigten Streutafeln müssen infolgedessen aus den Diagrammen erst wieder rekonstruiert werden, was nicht abgeht ohne einige zusätzliche Fehler, die herrühren von der Deutung der Grösse der Diagrammkreise, die die Menge der Objekte kennzeichnen.

Wenn wir uns hier auch nur auf die Hauptklassen B, A, F, G, K und M beschränken im Sinne der Harvardschen Zusammenfassung der Unterklassen, so fanden sich doch einige ziemlich weit von der Hauptdiagonale abliegende Nebenfrequenzen, die wohl als Fehlschätzungen oder Fehlidentifikationen angesehen werden dürfen und für die weitere Behandlung der Streutafeln ausser acht gelassen werden. Diese Werte sind in den Tabellen in Klammern gesetzt worden.

Die Ergebnisse der Zurichtung dieser Streudiagramme finden sich in den Tabellen 71-76 und die nach dem hier vorgelegten Verfahren errechneten Grundfrequenzen α_{ik} und β_{ik} werden in den Tabellen 77-82 geboten.

TABELLE 71
Spektralvergleich SCHALÉN-HDC

$S^{(C)} \backslash S^{(S)}$	F ^(S)	G ^(S)	K ^(S)	M ^(S)	$A_k^{(C)}$
A ^(C)	(8)				
F ^(C)	52	33			85
G ^(C)	10	136	2		148
K ^(C)		39	225	15	279
M ^(C)			21	91	112
$A_i^{(S)}$	62	208	248	106	624

TABELLE 72
Spektralvergleich SCHALÉN-HDE

$S^{(E)} \backslash S^{(S)}$	F ^(S)	G ^(S)	K ^(S)	M ^(S)	$A_k^{(E)}$
A ^(E)	(3)	(2)			(5)
F ^(E)	54	75			129
G ^(E)	8	158	18		184
K ^(E)		16	192	8	216
M ^(E)			61	42	103
$A_i^{(S)}$	62	249	271	50	632

TABELLE 73
Spektralvergleich WERNBERG-HDC

$S^{(C)} \backslash S^{(W)}$	A ^(W)	F ^(W)	G ^(W)	K ^(W)	M ^(W)	$A_k^{(C)}$
A ^(C)	173	2				175
F ^(C)	6	27	1			34
G ^(C)		9	38	4		51
K ^(C)			5	104	4	113
M ^(C)				6	20	26
$A_i^{(W)}$	179	38	44	114	24	399

TABELLE 74
Spektralvergleich WERNBERG-HDE

$S(E) \backslash S(W)$	A(W)	F(W)	G(W)	K(W)	M(W)	$A_k^{(E)}$
A(E)	73	2				75
F(E)	18	42	1			61
G(E)	1	13	68	6		88
K(E)		1	8	76	1	86
M(E)				40	15	55
$A_i^{(W)}$	92	58	77	122	16	365

TABELLE 75
Spektralvergleich VANÄS-HDC

$S(C) \backslash S(V)$	B(V)	A(V)	F(V)	G(V)	K(V)	M(V)	$A_k^{(C)}$
B(C)	15	3					18
A(C)	26	182	6				214
F(C)		6	41	2			49
G(C)			13	41	1		55
K(C)			3	5	83	3	94
M(C)					7	30	37
$A_i^{(V)}$	41	191	63	48	91	33	467

TABELLE 76
Spektralvergleich VANÄS-HDE

$S(E) \backslash S(V)$	B(V)	A(V)	F(V)	G(V)	K(V)	M(V)	$A_k^{(E)}$
B(E)	22	4					26
A(E)	10	131	8				149
F(E)	2	31	53	8			94
G(E)	(4)	2	16	102	4		124
K(E)	(1)		1	21	102	1	125
M(E)					53	26	79
$A_i^{(V)}$	34	168	78	131	159	27	597

TABELLE 77
Grundfrequenzen zum Spektralvergleich SCHALÉN-HDC

$$\alpha_{ik}^{(S,C)}$$

$S^{(C)} \backslash S^{(S)}$	F ^(S)	G ^(S)	K ^(S)	M ^(S)	R _k ^(C)
F ^(C)	.9147	.2816			1.1963
G ^(C)	.0853	.5631	.0080		.6564
K ^(C)		.1553	.8622	.0927	1.1102
M ^(C)			.1298	.9073	1.0371
R _i ^(S)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	4.0000
$\beta_{ik}^{(C,S)}$					
F ^(C)	.6910	.3090			1.0000
G ^(C)	.0936	.8971	.0093		1.0000
K ^(C)		.1810	.7346	.0844	1.0000
M ^(C)			.1181	.8819	1.0000
R _i ^(S)	.7846	1.3871	.8620	.9663	4.0000

TABELLE 78
Grundfrequenzen zum Spektralvergleich SCHALÉN-HDE

$$\alpha_{ik}^{(S,E)}$$

$S^{(E)} \backslash S^{(S)}$	F ^(S)	G ^(S)	K ^(S)	M ^(S)	R _k ^(E)
F ^(E)	.9444	.5213			1.4657
G ^(E)	.0556	.4362	.0478		.5396
K ^(E)		.0425	.4909	.0605	.5939
M ^(E)			.4613	.9395	1.4008
R _i ^(S)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	4.0000
$\beta_{ik}^{(E,S)}$					
F ^(E)	.4797	.5203			1.0000
G ^(E)	.0555	.8558	.0887		1.0000
K ^(E)		.0788	.8606	.0606	1.0000
M ^(E)			.4621	.5379	1.0000
R _i ^(S)	.5352	1.4549	1.4114	.5985	4.0000

TABELLE 79
Grundfrequenzen zum Spektralvergleich WERNBERG-HDC

$\alpha_{ik}^{(W,C)}$						
$S^{(C)} \backslash S^{(W)}$	A ^(W)	F ^(W)	G ^(W)	K ^(W)	M ^(W)	R _k ^(C)
A ^(C)	.92705	.0243				.95135
F ^(C)	.07295	.7449	.02565			.8435
G ^(C)		.2308	.9054	.05515		1.19135
K ^(C)			.06895	.8297	.0768	.97545
M ^(C)				.11515	.9232	1.03835
R _i ^(W)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	5.0000
$\beta_{ik}^{(C,W)}$						
A ^(C)	.9727	.0273				1.0000
F ^(C)	.0818	.8931	.0251			1.0000
G ^(C)		.2259	.7239	.0502		1.0000
K ^(C)			.0628	.86065	.07655	1.0000
M ^(C)				.1148	.8852	1.0000
R _i ^(W)	1.0545	1.1463	.8118	1.02565	.96175	5.0000

TABELLE 80
Grundfrequenzen zum Spektralvergleich WERNBERG-HDE

$\alpha_{ik}^{(W,E)}$						
$S^{(E)} \backslash S^{(W)}$	A ^(W)	F ^(W)	G ^(W)	K ^(W)	M ^(W)	R _k ^(E)
A ^(E)	.7438	.0272				.7710
F ^(E)	.24445	.7603	.0157			1.02045
G ^(E)	.01175	.2040	.9251	.0444		1.18525
K ^(E)		.0085	.0592	.3058	.01625	.38975
M ^(E)				.6498	.98375	1.63355
R _i ^(W)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	5.0000
$\beta_{ik}^{(E,W)}$						
A ^(E)	.9699	.0301				1.0000
F ^(E)	.2708	.71555	.01365			1.0000
G ^(E)	.01205	.1774	.7431	.06745		1.0000
K ^(E)		.01405	.0900	.8796	.01635	1.0000
M ^(E)				.6538	.3462	1.0000
R _i ^(W)	1.25275	.9371	.84675	1.60085	.36255	5.0000

Die Tabellen der Grundfrequenzen wurden auf vier Dezimalen angegeben, manchmal auch noch auf die Hälfte der fünften, wenn auch in anbetracht der Unzulänglichkeit der vorgeschlagenen Reduktionsmethode zwei Dezimalen zur Charakterisierung der Verknüpfung genügt hätten. Die Tafeln für die einzelnen Beobachter stimmen nicht gerade gut überein, ein Zeichen dass jeder sein ihm eigenes Spektralsystem besitzt. Doch zeigt sich klar, dass die Tafeln für HDC und HDE bei allen in ähnlicher Weise sich verhalten und besonders gegen das Ende der Spektralsequenz auf eine starke Differenz der beiden Harvardsysteme voneinander hinweisen.

TABELLE 81

Grundfrequenzen zum Spektralvergleich VANAS-HDC

$\alpha_{ik}^{(V,C)}$							
$S^{(C)} \backslash S^{(V)}$	B ^(V)	A ^(V)	F ^(V)	G ^(V)	K ^(V)	M ^(V)	R _k ^(C)
B ^(C)	.6259	.04315					.66905
A ^(C)	.3741	.90305	.0538				1.33095
F ^(C)		.0538	.6640	.0375			.7553
G ^(C)			.2434	.8877	.0150		1.1461
K ^(C)			.0388	.0748	.8586	.0542	1.0264
M ^(C)					.1264	.9458	1.0722
R _i ^(V)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	6.0000
$\beta_{ik}^{(C,V)}$							
B ^(C)	.95725	.04275					1.0000
A ^(C)	.3705	.5791	.0504				1.0000
F ^(C)		.0504	.9099	.0397			1.0000
G ^(C)			.2581	.7285	.0134		1.0000
K ^(C)			.0449	.0669	.8366	.0516	1.0000
M ^(C)					.1203	.8797	1.0000
R _i ^(V)	1.32775	.67225	1.2633	.8351	.9703	.9313	6.0000

TABELLE 82

Grundfrequenzen zum Spektralvergleich VANAS-HDE

$\alpha_{ik}^{(V,E)}$							
$S^{(E)} \backslash S^{(V)}$	B ^(V)	A ^(V)	F ^(V)	G ^(V)	K ^(V)	M ^(V)	R _k ^(E)
B ^(E)	.81645	.0550					.87145
A ^(E)	.13755	.66805	.0682				.8738
F ^(E)	.0460	.26425	.75515	.0848			1.1502
G ^(E)		.0127	.16955	.80405	.0212		1.0075
K ^(E)			.0071	.11115	.36265	.0116	.4925
M ^(E)					.61615	.9884	1.60455
R _i ^(V)	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	6.0000

$\beta_{ik}^{(E,V)}$							
B ^(E)	.9365	.0635					1.0000
A ^(E)	.15865	.77475	.0666				1.0000
F ^(E)	.0447	.2580	.6206	.0767			1.0000
G ^(E)		.0136	.15345	.80125	.0317		1.0000
K ^(E)			.00965	.16615	.8130	.0112	1.0000
M ^(E)					.5924	.4076	1.0000
R _i ^(V)	1.13985	1.10985	.8503	1.0441	1.4371	.4188	6.0000

2. Die Beziehungen zwischen den Spektralsystemen des HDC und der HDE

a. Äquivalente Spektralklassen zwischen HDC und HDE

Zur sicheren Bestimmung äquivalenter Spektralklassen sind eigentliche Streutafeln zwischen den beiden zum Vergleich stehenden Spektralsystemen erwünscht, und zwar am besten eine Tafel der elementaren Teilfrequenzen u_{ik} oder, in deren Ermangelung, eine Tafel der mittleren Grundfrequenzen γ_{ik} (Vgl. die Ausführungen S. 145). Alles was in dieser Hinsicht bezüglich der Beziehungen zwischen den Spektralsystemen HDC

und HDE mit den vorliegenden Daten erreicht werden kann, sind Tafeln von Grundfrequenzen „minimaler Streuung“ oder Rumpf-Grundfrequenzen, über die wir oben S. 111ff. und 152ff. das Nötige ausgeführt haben. Doch bieten diese Tafeln der Rumpffrequenzen wegen der grossen Unregelmässigkeiten der individuellen Regressionen oft keinen Vorteil für die Bestimmung der neutralen Regressionen von einem System zum andern gegenüber der gewöhnlichen Bestimmung über die Regressionskurven der verschiedenen Beobachter zu den beiden Systemen und der nachfolgenden Eliminierung des verwendeten Hilfssystems. So werden wir im folgenden graphisch die für jeden Beobachter geltenden Regressionen zu dem HDC- und HDE-Spektralsystem ermitteln und daraus die Regression von HDC auf HDE und umgekehrt bestimmen. Schliesslich lassen sich die für jeden Beobachter einzeln gefundenen Regressionen zusammenziehen zu einer mittleren neutralen Regression zwischen HDC und HDE.

Zur Aufstellung der individuellen Regressionen zwischen den einzelnen Beobachtern und den Harvardsystemen verwenden wir mit Vorteil die mittleren Grundfrequenzen η_{ik} der betreffenden Spektralvergleiche, wie oben S. 150 begründet wurde. Die sich aus diesen mittleren Grundfrequenzen für jeden einzelnen der angeführten Autoren ergebenden mittleren Spektralklassen im HDC- und HDE-System und umgekehrt werden in Tabelle 83 zusammengestellt. Die mit diesen Angaben gefundenen neutralen Regressionen werden in Fig. 13 geboten.

Um nun die zu $S_i^{(C)}$ des Systems HDC mittleren Klassen $\bar{S}_i^{(B)}$ des Systems HDE zu finden, werden für jeden Beobachter getrennt aus der ersten Kurve zunächst die zu $S_i^{(C)}$ gehörigen mittleren Klassen $\bar{S}_i^{(U)}$ im betreffenden Uppsala-System gesucht. Mit diesem Wert $\bar{S}_i^{(U)}$ wird in die zweite Kurve eingegangen, die die Regression von dem betreffenden Uppsala-System auf das System der HDE festlegt, womit sich ein Wert $\bar{S}_i^{(B)}$ ergibt, der die zu $S_i^{(C)}$ gehörende mittlere Spektralklasse in $S_i^{(B)}$ darstellt. In entsprechender Weise wird dann der umgekehrte Weg beschritten: Mit $S_k^{(B)}$ wird eingegangen in die zweiten Kurven der einzelnen Beobachter, wodurch sich ein Wert $\bar{S}_k^{(U)}$ ergibt, der seinerseits wieder, eingeführt in die erste Kurve, zu einem Wert $\bar{S}_k^{(C)}$ führt, der die $S_k^{(B)}$ entsprechende mittlere Klasse im System HDC darstellt. Die auf diese Weise gewonnenen mittleren Spektralklassen zwischen HDC und HDE und umgekehrt wurden in Tabelle 84 zusammengestellt für die einzelnen Beobachter. Die Werte, die sich aus dem Material von VANÄS und WERNBERG ergeben, stimmen

TABELLE 83

Mittlere Spektralklassen für die Vergleiche SCHALÉN, WERNBERG und VANÁS mit HDC und HDE

$S_i^{(U)}, S_k^{(H)}$		B = 1	A = 2	F = 3	G = 4	K = 5	M = 6
SCHALÉN	$\bar{S}_i^{(C)}$			3.1002	3.8935	5.1238	5.9099
	$\bar{S}_k^{(S)}$			3.2689	3.9024	4.9246	5.8783
	$\bar{S}_i^{(E)}$			3.0724	3.6251	5.3263	5.9242
	$\bar{S}_k^{(S)}$			3.4224	4.0165	4.9999	5.6154
WERNBERG	$\bar{S}_i^{(C)}$		2.0753	3.1887	4.0447	5.0615	5.9218
	$\bar{S}_k^{(W)}$		2.0264	2.9436	3.8397	5.0109	5.8872
	$\bar{S}_i^{(E)}$		2.2499	3.1906	4.0649	5.4582	5.9761
	$\bar{S}_k^{(W)}$		2.0324	2.7595	3.8549	4.8836	5.5050
VANÁS	$\bar{S}_i^{(C)}$	1.3199	2.0109	3.2495	4.0351	5.1108	5.9452
	$\bar{S}_k^{(V)}$	1.0515	1.7253	2.9846	3.7796	4.8997	5.8809
	$\bar{S}_i^{(E)}$	1.2232	2.2163	3.1198	4.0566	5.4742	5.9839
	$\bar{S}_k^{(V)}$	1.0633	1.9139	2.7479	3.8393	4.8070	5.5360

TABELLE 84

Mittlere Spektralklassen in HDC und HDE nach den verschiedenen Beobachtern

Klasse		B	A	F	G	K	M
HDC		1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00
HDE	SCHALÉN	—	—	2.92	3.85	5.07	6.10:
	WERNBERG	—	2.11	3.14	4.00	5.26	6.14:
	VANÁS	.91	2.02	3.07	4.00	5.26	6.13:
	Mittel	.91	2.07	3.07	3.97	5.22	6.13:
HDE		1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00
HDC	SCHALÉN	—	—	3.08	4.16	4.96	5.88
	WERNBERG	—	1.92	2.86	4.00	4.77	5.80
	VANÁS	1.07	1.97	2.94	4.00	4.80	5.81
	Mittel	1.07	1.95	2.94	4.03	4.82	5.82

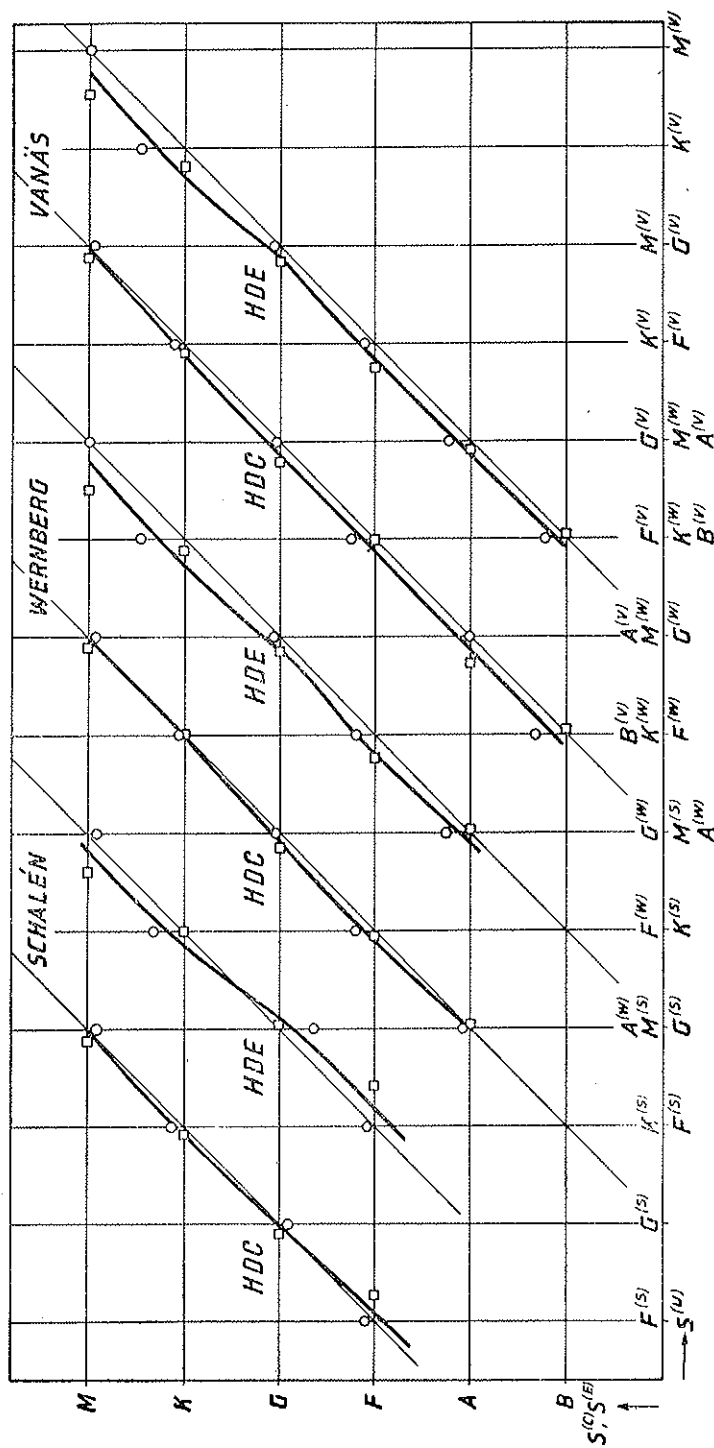


FIG. 13. Neutrale Regressionskurven für den Übergang zwischen den Systemen SCHALÉN, WERNBERG und VANÁŠ gegen HDC und HDE.

ziemlich gut miteinander überein, weichen allerdings gegenüber SCHALÉN etwas ab. Für die Mittelbildung wurden deshalb den SCHALÉNSchen Werten, die auf blossen Schätzungen beruhen, nur halbes Gewicht beigelegt. Die Mittelwerte wurden ebenfalls in der betreffenden Tabelle angegeben.

Mit Hilfe dieser mittleren Klassen wurde nun die neutrale Regressionskurve zwischen HDC und HDE in Fig. 14 hergestellt. Die Stichpunkte

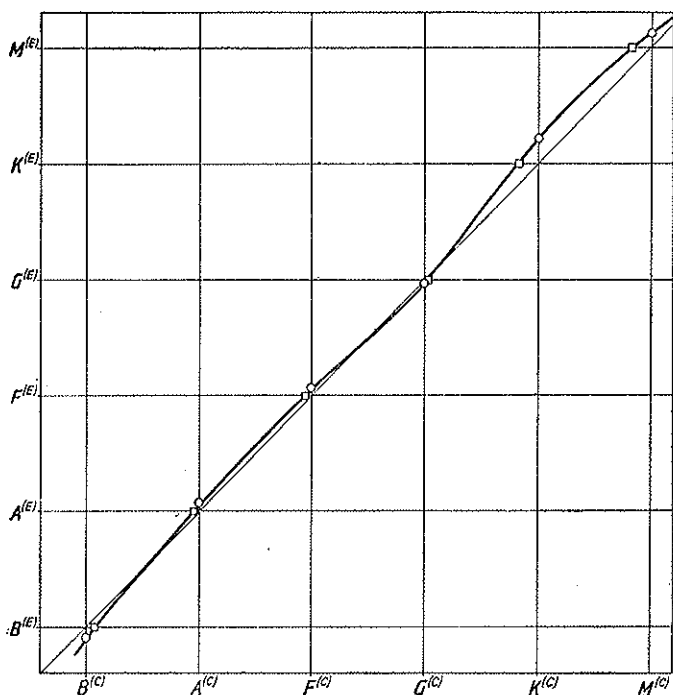


FIG. 14. Regressionen zwischen den Spektralsystemen HDC und HDE.

für die individuellen Regressionen von HDC nach HDE und HDE nach HDC liegen alle schön auf der Kurve, sodass die *mittleren* Klassen in diesem Falle mit den *äquivalenten* Klassen übereinstimmen, was sich aus dem Vorgehen erklärt, dass die entsprechenden Stichpunkte aus den *neutralen* Regressionen der einzelnen Autoren zu den beiden Spektralsystemen verwendet wurden, sodass auch hier nach der Elimination dieser Hilfssysteme sofort die neutrale Regression zwischen HDC und HDE resultieren muss.

Diese Regressionskurve gestattet nun auch für die Zwischenklassen die entsprechenden äquivalenten Spektralklassen für die beiden Systeme HDC und HDE zu interpolieren, und es dürfte von einigem Interesse sein, die hier gefundenen Ergebnisse mit den Ergebnissen der von SHAPLEY und VYSSOTSKY angestellten Vergleiche zwischen HDC und HDE zu vergleichen, was in den beiden Tabellen 85 und 86 erfolgt.

SHAPLEY (9) beschränkt sich bei seiner kleinen Untersuchung auf die Hauptklassen und gibt die Differenzen HDC—HDE an, die sich der Tabelle 85 an erster Stelle finden. Die aus dem vorliegenden Material gewonnenen Ergebnisse werden in ähnlicher Weise dargestellt unter der Spalte HDC—HDE (Uppsala). Die Übereinstimmung ist nicht gerade glänzend; nur bei der letzten Spektralklasse M zeigt sich ungefähr der gleiche Betrag der Abweichung zwischen HDC und HDE.

Weit besser ist die Zusammenstimmung mit den Ergebnissen VYSSOTSKYS, die in Tab. 86 aufgeführt werden. VYSSOTSKYS (14) Untersuchung ist etwas eingehender und beruht auf der Verwendung eines reichen Materials. Ähnlich wie hier, bestimmt er die ausgeglichenen neutralen Regressionen von seinem System auf die Spektralsysteme von HDC und HDE und gewinnt die Regression unter den beiden Harvardsystemen durch Elimination des eigenen Systems. In seiner Zusammenstellung gibt er die Korrekturen an, die an die in einem System gegebenen Werte anzubringen sind, um die ihnen entsprechenden Werte im andern System zu erhalten. Dabei beschränkt er sich nicht auf die Hauptklassen, sondern benützt auch die Unterklassen, soweit sie in seinem Spektralsystem verwendet werden. Um die hier erhaltenen Ergebnisse vergleichbar zu machen, verwenden wir die gleichen Unterklassen, zu denen sich die äquivalenten Klassen ohne Schwierigkeit durch Interpolation aus der Regressionskurve Fig. 14 ablesen lassen. Die Umformung auf die Differenzen HDE—HDC und HDC—HDE bietet dann weiter keine Schwierigkeiten mehr. Die dafür erhaltenen Ergebnisse sind in Tab. 86 unter der Spalte „Uppsala“ eingetragen.

Auch hier ist deutlich eine teilweise sogar sehr gute Übereinstimmung VYSSOTSKYS mit den hier gefundenen Ergebnissen zu erkennen, besonders bei den späteren Klassen. Bei den früheren Klassen treten einige Unterschiede auf, die nicht ohne weiteres auf Auswertefehler des Materials zurückgeführt werden können. Sie sind zwar nicht gerade sehr bedeutend, aber doch immerhin von einer Grössenordnung, dass sie nicht ohne weiteres übergangen zu werden verdienen. Es ist allerdings schwer

TABELLE 85

Zum Vergleich des HDC mit der HDE nach SHAPLEY

Spektrum	Zahl	HDC — HDE	HDC — HDE (Uppsala)
A	51	+ 0.65	— 0.7
F	9	+ 1.1	— 0.7
G	7	+ 3.1	+ 0.3
K	30	+ 1.2	— 2.2
M	13	— 1.6	— 1.6

TABELLE 86

Zum Vergleich des HDC mit der HDE nach VYSSOTSKY

Spektrum	VYSSOTSKY		Uppsala	
	HDE — HDC	HDC — HDE	HDE — HDC	HDC — HDE
A 0	— 0.2	+ 0.3	— 0.5	+ 0.7
A 2	0.0	0.0	— 0.6	+ 0.7
A 5	+ 0.5	— 0.6	— 0.7	+ 0.7
A 8	+ 0.6	— 0.6	— 0.6	+ 0.6
F 0	+ 1.0	— 0.7	— 0.6	+ 0.6
F 2	+ 1.3	— 1.3	— 0.5	+ 0.4
F 5	+ 0.4	— 0.6	0.0	0.0
F 8	0.0	0.0	+ 0.3	— 0.3
G 0	0.0	0.0	+ 0.3	— 0.4
G 2	0.0	0.0	— 0.2	+ 0.2
G 5	— 0.5	+ 0.6	— 0.8	+ 1.0
G 8	— 1.2	+ 1.6	— 1.5	+ 1.8
K 0	— 1.7	+ 2.1	— 1.8	+ 2.2
K 2	— 2.1	+ 3.0	— 2.1	+ 2.3
K 5	— 3.0	+ 3.8	— 2.3	+ 2.3
K 8	— 3.8		— 2.1	+ 1.8
M 0			— 1.8	+ 1.2
M 2			— 1.1	

abzuschätzen, woher diese Unterschiede kommen. Es kann hier hereinspielen ein Einfluss der zufälligen Klassenhäufigkeiten, der bei unserer Ableitung durch die Verwendung der Grundfrequenzen zu einem grossen Teil eliminiert werden konnte. Ferner ist möglich, dass auch die Verschiedenheit des benützten Materials hereinspielt. Denn es ist ja bekannt, dass die HDE nicht von einem einzigen Beobachter allein geschätzt wurde, sodass für verschiedene Partien wohl auch etwas verschiedene Systeme möglich wären. Ausserdem ist vor Augen zu halten, dass die von uns benützten Kurven mit den Hauptklassen allein abgeleitet wurden, während Vyssorsky auch die Unterklassen zur Aufstellung seiner Regressionen benützt. Immerhin ist das eine festzuhalten, dass zwischen den beiden Harvardsystemen des HDC und der HDE ein „objektiver“ Unterschied besteht, der es notwendig macht, bei Spektralvergleichen beide Systeme getrennt zu behandeln, und dass Spektralvergleiche, die diese Unterschiede nicht berücksichtigen, mit grosser Vorsicht zu behandeln sind.

b. Äquivalente Spektralverteilungen bezüglich der Systeme HDC und HDE.

Zur Ermittlung äquivalenter Spektralverteilungen zwischen den Systemen HDC und HDE wären entsprechende Tafeln von Grundfrequenzen α_{ik} und β_{ik} benötigt. Doch lässt sich die Aufgabe auch ohne Benützung von Grundfrequenzen lösen, wenn die Beziehungen dieser Systeme zu einem dritten System bekannt sind, wie wir oben S. 111 kurz angedeutet haben.

Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich dann im vorliegenden Falle folgendermassen:

Seien $\alpha_{ik}^{(U,C)}$ und $\beta_{ik}^{(C,U)}$ die Grundfrequenzen der Verknüpfung eines Uppsala-Systems, das wir allgemein mit $S^{(U)}$ bezeichnen wollen, mit dem System HDC ($S^{(C)}$), und $\alpha_{ik}^{(U,E)}$ und $\beta_{ik}^{(E,U)}$ die entsprechenden Grundfrequenzen der Verknüpfung desselben Systems $S^{(U)}$ mit HDE ($S^{(E)}$). Es wird nun die Aufgabe gestellt, zu einer gegebenen Verteilung der Klassenhäufigkeiten $(A_k^{(C)})$ im System HDC die ihr äquivalente Verteilung $(A_k^{(E)})$ im System HDE zu suchen. Mit Hilfe der $\beta_{ik}^{(C,U)}$ wird nun zuerst die zu $(A_k^{(C)})$ äquivalente Verteilung $(A_i^{(U)})$ im System $S^{(U)}$ gesucht, was symbolisch vielleicht folgendermassen ausgedrückt werden kann:

$$(\beta_{ik}^{(C,U)}) (A_k^{(C)}) \rightarrow (A_i^{(U)}) . \quad (165)$$

In einem zweiten Gang berechnet man mit Hilfe der Grundfrequenzen $\alpha_{ik}^{(U,E)}$ zu der Häufigkeitsverteilung der Klassen $(A_i^{(U)})$ in $S^{(U)}$ die ihr äquivalente $(A_k^{(E)})$ im System HDE, also symbolisch

$$(\alpha_{ik}^{(U,E)}) (A_i^{(U)}) \rightarrow (A_k^{(E)}). \quad (166)$$

Es ist dann ohne weiteres einleuchtend, dass wenn $(A_k^{(E)})$ äquivalent $(A_i^{(U)})$ und $(A_i^{(U)})$ äquivalent $(A_k^{(C)})$, auch $(A_k^{(E)})$ äquivalent $(A_k^{(C)})$ sein muss.

Entsprechend gestaltet sich dann auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe, zu einer gegebenen Verteilung $(A_k^{(E)})$ im System $S^{(E)}$ die ihr äquivalente Verteilung $(A_k^{(C)})$ im System $S^{(C)}$ zu suchen, nach dem Vorgang:

$$(\beta_{ik}^{(E,U)}) (A_k^{(E)}) \rightarrow (A_i^{(U)}) \quad \text{und} \quad (165a)$$

$$(\alpha_{ik}^{(U,C)}) (A_i^{(U)}) \rightarrow (A_k^{(C)}). \quad (166a)$$

Grundsätzlich steht also nichts im Wege, zu einer beliebigen Verteilung der Spektralhäufigkeiten in einem der Harvardsysteme die ihr äquivalente Verteilung im andern System zu finden über die aus dem Material der schwedischen Astronomen gewonnenen Beziehungen zu diesen beiden Systemen. Der Weg bleibt allerdings etwas umständlich, da es sich jedesmal um die Berechnung von zwei verschiedenen Streutafeln handelt, die beim Vorhandensein von Grundfrequenztafeln zwischen den beiden Harvard-Systemen auf die Berechnung *einer* Tafel für *eine* Aufgabe beschränkt werden könnte. Wie wir oben S. 111ff., schon ausgeführt haben, ist es nicht möglich, mit dem vorliegenden Material eine solche Tafel der Grundfrequenzen aufzustellen, die die beiden Harvardspektralsysteme miteinander verknüpft. Doch lassen sich in diesem Falle Rumpf-Grundfrequenzen angeben, wenn nur die entsprechenden Restfrequenzen in den entsprechenden Systemen bekannt sind. Und solche Tafeln dürften für die allgemeinen Aufgaben der Praxis ausreichend genau sein.

Die für die Aufstellung dieser Rumpf-Grundfrequenztafeln benötigten Restfrequenzen $(R_k^{(E)})$ und $(R_i^{(C)})$ lassen sich nun ohne weiteres mit den vorhandenen Mitteln berechnen; es sind dies nichts anderes als die zu den vorgegebenen Einheitsfrequenzen $A_i^{(C)} = 1$ und $A_k^{(E)} = 1$ (für alle i und k) äquivalenten Klassenfrequenzen, nach den Formeln:

$$(\beta_{ik}^{(C,U)}) (1^{(C)}) \rightarrow (A_i^{(U)}) = (R_i^{(U,C)}) (= \text{Restfrequenzen der } \beta_{ik}^{(C,U)}\text{-Tafel}) \quad (167)$$

$$(\alpha_{ik}^{(U,E)}) (A_i^{(U)}) \rightarrow (R_k^{(E)}) \quad \text{und} \quad (168)$$

$$(\beta_{ik}^{(E,U)}) (1^{(E)}) \rightarrow (A_i^{(U)}) = (R_k^{(U,E)}) (= \text{Restfrequenzen der } \beta_{ik}^{(E,U)}\text{-Tafel}) \quad (169)$$

$$(\alpha_{ik}^{(U,C)}) (A_i^{(U)}) \rightarrow (R_k^{(C)}) . \quad (170)$$

Die auf diese Weise über die einzelnen Beobachter gefundenen Restfrequenzen sind in Tabelle 87 zusammengestellt. Die Vereinigung der Ergebnisse zu Mittelwerten hat allerdings einige Schwierigkeiten, da nicht alle Klassen bei allen Beobachtern vertreten sind, wodurch bei einer gewöhnlichen Mittelung der Beitrag der verschiedenen Beobachter zu einer bestimmten Klasse verschieden sein kann nach der folgenden Übersicht:

Klasse	B	A	F	G	K	M
<i>Beitrag</i> VANĀS	1	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3
<i>zum</i> WERNBERG ..	—	1/2	1/3	1/3	1/3	1/3
<i>Mittel:</i> SCHALÉN ..	—	—	1/3	1/3	1/3	1/3
Summe	1	1	1	1	1	1

Nun fließen aber die Häufigkeiten der Nachbarklassen etwas ein in die Werte für die Teilfrequenzen und damit auch in ihre Summen, die Klassenfrequenzen, im andern System, worauf Rücksicht zu nehmen ist. Es sind deshalb zur Ermittlung gemittelter Restfrequenzen als Ausgangshäufigkeiten für VANĀS nicht zu setzen $(A_i^{(V)}) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ sondern $(A_i^{(V)}) = (1, 1/2, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3,)$ und ähnlich bei WERNBERG $(A_i^{(W)}) = (1/2, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)$. Die Ergebnisse dieser Berechnungen finden sich in Tabelle 88.

Das einfache Mittel der Restfrequenzen weicht nur für die ersten Spektralklassen merklich ab von dem Mittel, das den Beitrag der einzelnen Beobachter zum Mittel in Rechnung zieht, sodass man sich für die Praxis wohl ohne Gefahr eines bedeutenden Fehlers mit dem einfachen Mittel hätte begnügen können.

Die einzelnen Werte für die Restfrequenzen bei den einzelnen Autoren stimmen nicht gerade sehr gut überein, bedeutend schlechter, als man es nach der guten Übereinstimmung bei der Ermittlung der äquivalenten

TABELLE 87

Berechnete Restfrequenzen in HDE und HDC nach den verschiedenen Beobachtern

Spektrum	B	A	F	G	K	M
HDC	I	I	I	I	I	I
V	1.1908	.5652	1.4021	.8517	.4781	1.5121
HDE W	.0000	.8021	1.1942	.9930	.4072	1.6035
S	.0000	.0000	1.3156	.8623	.5005	1.3216
<i>Einfaches Mittel</i>	1.1908	.6837	1.3040	.9027	.4619	1.4791
HDE	I	I	I	I	I	I
V	.7654	1.4843	.6196	1.1564	1.4990	.4753
HDC W		1.1993 ₆	.8096	1.0111 ₅	1.5883	.3916
S			.7154	1.0415	1.6106	.6325
<i>Einfaches Mittel</i>	.7654	1.3418	.7149	1.0697	1.5660	.4998

TABELLE 88

Mittlere Restfrequenzen unter Berücksichtigung der fehlenden Klassen

Spektrum	B	A	F	G	K	M
V	1.0000	.5000	.3333	.3333	.3333	.3333
HDC W	0.0000	.5000	.3333	.3333	.3333	.3333
S	0.0000	.0000	.3333	.3333	.3333	.3333
V	1.1299	.2663	.4893	.2843	.1594	.5041
HDE W		.4175	.4138	.3318	.1358	.5345
S			.4385	.2874	.1668	.4405
<i>Mittel:</i>						
HDC	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
HDE	1.1299	.6838	1.3416	.9035	.4620	1.4791
V	1.0000	.5000	.3333	.3333	.3333	.3333
HDE W	.0000	.5000	.3333	.3333	.3333	.3333
S	.0000	.0000	.3333	.3333	.3333	.3333
V	.8259	.7764	.1906	.3830	.4990	.1583
HDC W	.0000	.5792	.2579	.3361	.5294	.1306
S	.0000	.0000	.2385	.3472	.5369	.2108
<i>Mittel:</i>						
HDE	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
HDC	.8259	1.3556	.6870	1.0663	1.5653	.4997

Klassen erwartet hätte. Deshalb wurde den Werten von SCHALÉN auch das gleiche Gewicht gegeben wie den andern.

Auf Grund der in Tab. 88 erhaltenen Restfrequenzen wurden für die Beziehungen zwischen den beiden Harvardsystemen HDC und HDE nach der oben S. 113ff. angegebenen Methode die Rumpffrequenzen $\alpha_{ik}^{(C,E)}$ und $\beta_{ik}^{(E,C)}$ gewonnen und in Tab. 89 zusammengestellt. Wie weit diese Rumpf-Grundfrequenzen geeignet sind zur Berechnung äquivalenter Spektralverteilungen, lässt sich an diesen Tafeln selbst erproben nach den oben S. 49f. gemachten Bemerkungen über die gegenseitigen Beziehungen der beiden Grundfrequenztafeln untereinander. Es ist zwar nicht zu erwarten, dass sich eine Tafel von Rumpf-Grundfrequenzen dabei gleich verhält wie eine normale Tafel von Grundfrequenzen; immerhin ist aber doch zu verlangen, dass die Abweichungen in erträglichen Grenzen bleiben, sonst verlieren solche Hilfsmittel jeden praktischen Wert.

Werden also die Restfrequenzen $R_k^{(y)}$ einer Grundfrequenztafel $\alpha_{ik}^{(x,y)}$ auf EINS reduziert, oder die Restfrequenzen $R_i^{(x)}$ der zugehörigen $\beta_{ik}^{(y,x)}$ -Tafel eingesetzt, so muss als Ergebnis der Reduktion die $\beta_{ik}^{(y,x)}$ -Tafel erscheinen; und umgekehrt, werden die Restfrequenzen $R_i^{(x)}$ der $\beta_{ik}^{(y,x)}$ -Tafel auf EINS reduziert oder die Restfrequenzen $R_k^{(y)}$ der zugehörigen $\alpha_{ik}^{(x,y)}$ -Tafel eingesetzt, dann muss sich die $\alpha_{ik}^{(x,y)}$ -Tafel ergeben.

Für die beiden vorliegenden Rumpffrequenztafeln zwischen HDC und HDE wurden beide Operationen durchgeführt und ihre Ergebnisse in den folgenden Tabellen 90 und 91 zusammengestellt. Dem Sinn der Probe entsprechend, legen wir nicht so sehr darauf Gewicht, dass dieselben Teilfrequenzen erscheinen, sondern dieselben *Klassenhäufigkeiten*. Deshalb werden nur die Abweichungen der berechneten von den zu erwartenden Klassenfrequenzen angegeben. Für alle vier Bestimmungen ergibt sich im Mittel eine prozentuelle Abweichung von $\pm 1.8\%$, also bedeutend weniger, als wir oben S. 116 für derartige Rechnungen mit Rumpffrequenzen eingeräumt haben. Dabei mag noch bedacht werden, dass ein Teil dieser Abweichungen auf Abrundungsfehler zurückgeht, die bei Benützung von nur zwei Dezimalen schon etwas zu dem mittleren Fehler beitragen können.

Zum Schlusse dieses Abschnittes dürfte es vielleicht noch von Interesse sein, die gewonnenen Beziehungen zwischen den beiden Spektralsystemen des HDC und der HDE zu einer *praktischen* Reduktion zu verwenden. In der schon öfter erwähnten Arbeit gibt SHAPLEY ⁽⁹⁾ eine Übersicht über die Verteilung der Spektralhäufigkeiten in einem Gebiet des Cygnus

TABELLE 89

Rumpf-Grundfrequenzen $\alpha_{ik}^{(C,E)}$ und $\beta_{ik}^{(E,C)}$ zum Vergleich HDC — HDE

$$\alpha_{ik}^{(C,E)}$$

$S_k^{(E)} \backslash S_i^{(C)}$	B ^(C)	A ^(C)	F ^(C)	G ^(C)	K ^(C)	M ^(C)	$R_k^{(E)}$
B ^(E)	1.00	.13					1.13
A ^(E)		.68					.68
F ^(E)		.19	1.00	.15			1.34
G ^(E)				.85	.06		.91*
K ^(E)					.46		.46
M ^(E)					.48	1.00	1.48
$R_i^{(C)}$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	6.00

$$\beta_{ik}^{(E,C)}$$

B ^(E)	.83	.17					1.00
A ^(E)		1.00					1.00
F ^(E)		.18	.69	.13			1.00
G ^(E)				.94	.06		1.00
K ^(E)					1.00		1.00
M ^(E)					.50	.50	1.00
$R_i^{(C)}$	.83	1.35	.69	1.07	1.56**	.50	6.00

* erhöht um eine Einheit der letzten Dezimale

** letzte Dezimale nicht aufgerundet

TABELLE 90

Rückrechnung der $\alpha_{ik}^{(C,E)}$ -Tafel aus der $\beta_{ik}^{(E,C)}$ -Tafel
(Die vorgegebenen Werte sind mit * bezeichnet)

1. Durch Einsetzen der $R_k^{(E)*}$ aus $\alpha_{ik}^{(C,E)}$ in $\beta_{ik}^{(E,C)}$

$S^{(E)} \backslash S^{(C)}$	B ^(C)	A ^(C)	F ^(C)	G ^(C)	K ^(C)	M ^(C)	$R_k^{(E)*}$
B ^(E)	.98	.15					1.13
A ^(E)		.68					.68
F ^(E)		.18	1.01	.15			1.34
G ^(E)				.87	0.4		.91
K ^(E)					.46		.46
M ^(E)					.48	1.00	1.48
$R_i^{(C)}$	.98	1.01	1.01	1.02	.98	1.00	6.00
$R_i^{(C)*}$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	6.00
$R_i^{(C)} - R_i^{(C)*}$	— .02	+ .01	+ .01	+ .02	— .02	.00	
$(R_i^{(C)} - R_i^{(C)*})\%$	— 2	+ 1	+ 1	+ 2	— 2	0	

2. Durch Reduktion der $R_i^{(C)*}$ in $\beta_{ik}^{(E,C)}$ auf EINS

$S^{(E)} \backslash S^{(C)}$	B ^(C)	A ^(C)	F ^(C)	G ^(C)	K ^(C)	M ^(C)	$R_k^{(E)}$	$R_k^{(E)*}$	$R_k^{(E)} - R_k^{(E)*}$	$(R_k^{(E)} - R_k^{(E)*})\%$
B ^(E)	1.00	.15					1.15	1.13	+ .02	+ 1.8
A ^(E)		.68					.68	.68	.00	0.0
F ^(E)		.18	1.00	.15			1.33	1.34	— .01	— .7
G ^(E)				.85	.04		.89	.91	— .02	— 2.2
K ^(E)					.47		.47	.46	+ .01	+ 2.2
M ^(E)					.48	1.00	1.48	1.48	.00	.0
$R_i^{(C)*}$	1.00	1.01	1.00	1.00	.99	1.00	6.00			

TABELLE 91

Rückrechnung der $\beta_{ik}^{(C,E)}$ -Tafel aus der $\alpha_{ik}^{(C,E)}$ -Tafel
 (Die vorgegebenen Werte sind mit* bezeichnet)

1. Durch Einsetzen der $R_i^{(C)*}$ aus $\beta_{ik}^{(E,C)}$ in $\alpha_{ik}^{(C,E)}$

$S^{(E)} \backslash S^{(C)}$	B ^(C)	A ^(C)	F ^(C)	G ^(C)	K ^(C)	M ^(C)	$R_k^{(E)}$	$R_k^{(E)*}$	$R_k^{(E)} - R_k^{(E)*}$	$(R_k^{(E)} - R_k^{(E)*})\%$
B ^(E)	.83	.17					.98	1.00	— .02	— 2
A ^(E)		1.02					1.02	1.00	+ .02	+ 2
F ^(E)		.19	.69	.13			1.01	1.00	+ .01	+ 1
G ^(E)				.94	.09		1.03	1.00	+ .03	+ 3
K ^(E)					.98		.98	1.00	— .02	— 2
M ^(E)					.50	.50	1.00	1.00	0	0
$R_i^{(C)*}$	.83	1.36	.69	1.07	1.57	.50	6.02			

2. Durch Reduktion der $R_k^{(E)*}$ in $\alpha_{ik}^{(C,E)}$ zu EINS

$S^{(E)} \backslash S^{(C)}$	B ^(C)	A ^(C)	F ^(C)	G ^(C)	K ^(C)	M ^(C)	$R_k^{(E)*}$
B ^(E)	.85	.15					1.00
A ^(E)		1.00					1.00
F ^(E)		.19	.69	.11			.99
G ^(E)				.91	.09		1.00
K ^(E)					1.00		1.00
M ^(E)					.50	.50	1.00
$R_i^{(C)}$	.85	1.34	.69	1.02	1.59	.50	5.99
$R_i^{(C)*}$	.83	1.35	.69	1.07	1.56	.50	
$R_i^{(C)} - R_i^{(C)*}$	+ .02	— .01	.00	— .05	+ .03	.00	
$(R_i^{(C)} - R_i^{(C)*})\%$	+ 2.4	— .7	.0	— 4.7	+ 1.9	.0	

von rund 80 Quadratgrad mit dem Zentrum etwa bei 20^h , $+37^\circ$. Es handelt sich hier um Spektralanangaben der HDE, die wir mit Hilfe der vorgeschlagenen Methode und den soeben erhaltenen Beziehungen zwischen HDE und HDC auf das System des HDC reduzieren wollen. In Tab. 1 der erwähnten Arbeit werden die Anzahl der Objekte gegeben für jedes Helligkeitsintervall in Stufen von einer Zehntel Grössenklasse und getrennt nach den Hauptspektralklassen. In der darauffolgenden graphischen Darstellung von Fig. 1 wird die Häufigkeitsverteilung der Spektralklassen für grössere Helligkeitsintervalle dargeboten, und zwar für 9^m , $9 - 10^m$, $10 - 11^m$, und $11 - 12^m$. Die entsprechenden Zahlen, die dieser Figur zugrundeliegen, lassen sich aus der vorhergehenden Tab. 1 berechnen und werden hier in Tabelle 92 zusammengestellt. Für die Zwecke der beabsichtigten Reduktion wurden sie hier ausserdem noch auf $N = 6$ reduziert.

TABELLE 92

Verteilung der Spektralklassen in einem Cygnus-Feld (20^h , $+37^\circ$) nach dem HDE-System

Klasse	B	A	F	G	K	M	Summe
$] 9^m$	73	246	31	23	52	14	439
$9^{m,0} - 9^{m,9}$	75	291	97	79	127	28	697
$10^{m,0} - 10^{m,9}$	85	739	303	257	335	141	1860
$11^{m,0} - 11^{m,9}$	16	618	176	186	259	239	1494
Summe	249	1894	607	545	773	422	4490

Relative Häufigkeiten für $N = 6$

$] 9$	1.00	3.36	.425	.315	.71	.19	6.00
$9^{m,0} - 9^{m,9}$	.645	2.505	.835	.68	1.095	.24	6.00
$10^{m,0} - 10^{m,9}$	.275	2.385	.975	.83	1.08	.455	6.00

Das erste Intervall, dass die hellen Objekte bis 9^m umfasst, ist für eine Reduktion auf das System des HDC nicht brauchbar; denn die Spektralanangaben stammen meist aus dem HDC selbst und wurden nur dort der

HDE entnommen, wo sie im HDC fehlten, also etwa von 8^m25 an, der Vollständigkeitsgrenze des HDC. So ist das Material nicht mehr einheitlich, und wir lassen die Verteilung bestehen und beziehen sie auf den HDC. Auch das letzte Intervall von $11 - 12^m$ wird nicht für die Reduktion verwendet, da die Angaben offenbar unvollständig sind.

Zur Reduktion der beiden verbliebenen Intervalle von $9 - 10^m$ und $10 - 11^m$ wurde die Rumpf-Grundfrequenztafel $\beta_{ik}^{(E,C)}$ aus Tabelle 89 verwendet. Die sich ergebenden Streutafeln $\text{HDE} \rightarrow \text{HDC}$ sind in Tabelle 93 angeführt, aus denen sich ohne weiteres die neuen äquivalenten Verteilungen in HDC ablesen lassen.

In Fig. 15 finden sich die relativen Häufigkeiten der Spektralklassen in diesem Felde für die gegebenen Helligkeitsintervalle anschaulich zusammengestellt, und zwar zuerst nach der Klassifizierung der HDE, und daneben, korrigiert auf das Spektralsystem des HDC. Das Intervall 9^m wurde aus den oben angeführten Gründen nicht korrigiert und beide Mal so dargestellt, wie es sich aus den Angaben SHAPLEYS ergibt.

Ein oberflächlicher Vergleich zeigt, dass die Reduktion eine Zunahme der relativen Häufigkeiten der A-Sterne bewirkt auf Kosten der B- und F-Sterne, und ebenso eine Zunahme der K-Sterne auf Kosten der M-Sterne. Besonders auffallend ist der starke Rückgang der M-Sterne, was nicht wundernimmt, wenn man die Rumpf-Grundfrequenzen an dieser Stelle betrachtet, wo von 100 im HDE-System geschätzten Objekten nur 50 auch im System des HDC als M bezeichnet werden.

Jedenfalls ist leicht zu sehen, dass die Reduktion das Bild der relativen Spektralhäufigkeiten in diesem konkreten Falle ziemlich stark ändert. Es dürfte somit zur Genüge gezeigt sein, dass derartig reduzierte Verteilungen – selbst wenn dabei auch im Mittel Fehler bis zu 4–5 % mit in Kauf genommen werden müssten – noch immer einen Vorteil bieten gegenüber den ursprünglichen Verteilungen in dem Falle, dass die benutzten Spektralsysteme nicht identisch sind.

Schliesslich mag es vielleicht noch interessieren, wie die oben S. 119ff. besprochene direkte Bestimmung äquivalenter Klassenhäufigkeiten unter Benützung einer Hilfsbesetzungsfunktion in diesem konkreten Falle arbeitet.

Zum Ausgang nehmen wir die zur Bildung der Grundfrequenzen $\beta_{ik}^{(E,C)}$ (Vgl. Tab. 89 S. 216) verwendeten Klassenhäufigkeiten in den beiden Spektralsystemen HDE und HDC. Die Koordinaten für die zur Konstruktion der Hilfsfunktion $\varphi_i^{(E)}$ benötigten Punkte ergeben sich dann besonders einfach: ihre Abszissen sind die Mittelstellen der Klassenintervalle

in HDE, nämlich .5, 1.5, 2.5 usw. und die Ordinaten die entsprechenden Klassenhäufigkeiten $A_i^{(B)}$ in HDE der Tabelle 92. Die mit diesen Angaben angefertigten Kurven sind in Fig. 16 wiedergegeben. Die Werte der Hilfsfunktion $\varphi_k^{(C)}$ für die entsprechenden Koordinaten $\bar{s}_k^{(C)}$ der HDC-Klassen,

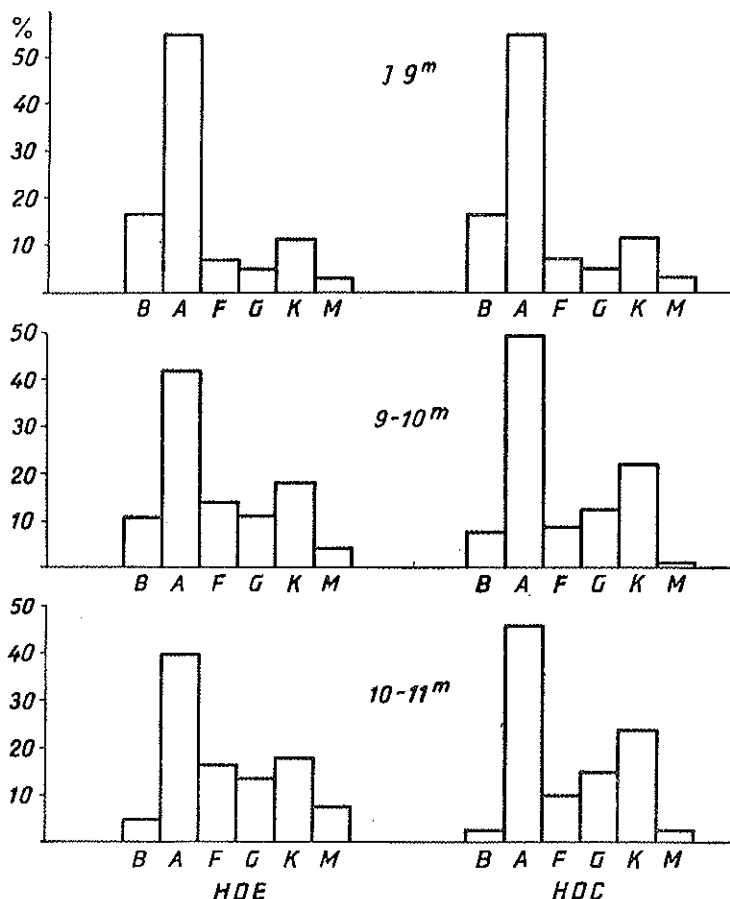


FIG. 15. Spektralverteilung in einem Cygnusfeld nach HDE und korrigiert auf HDC.

lassen sich dann aus der Kurve ablesen und ergeben mit den Restfrequenzen $R_k^{(C)}$ multipliziert, die gesuchten Klassenhäufigkeiten $A_k^{(C)}$ im HDC-System.

Die mittleren Klassenkoordinaten mit den zugehörigen Klassenfrequenzen aus Tabelle 89 sind in Tabelle 94 noch einmal übersichtlich zusammengestellt worden.

TABELLE 93

Äquivalente Klassenhäufigkeiten in HDC

1) für das Intervall $9^m.0 - 9^m.9$

$S^{(C)} \backslash S^{(E)}$	$B^{(E)}$	$A^{(E)}$	$F^{(E)}$	$G^{(E)}$	$K^{(E)}$	$M^{(E)}$	$A_k^{(C)}$
$B^{(C)}$	.445						.445
$A^{(C)}$	.20	2.505	.24				2.945
$F^{(C)}$			.505				.505
$G^{(C)}$			.09	.63			.72
$K^{(C)}$				.05	1.095	.18	1.325
$M^{(C)}$						.06	.06
$A_i^{(E)}$	.645	2.505	.835	.68	1.095	.24	6.00

2) für das Intervall $10^m.0 - 10^m.9$

$B^{(C)}$	.16						.16
$A^{(C)}$	.115	2.385	.26				2.76
$F^{(C)}$			.605				.605
$G^{(C)}$			.11	.775			.885
$K^{(C)}$				.055	1.08	.295	1.43
$M^{(C)}$						.16	.16
$A_i^{(E)}$	.275	2.385	.975	.83	1.08	.455	6.00

In Tabelle 95 werden die Ergebnisse dieser Reduktion (H) mit Hilfe einer Hilfsbesetzungsfunktion geboten im Vergleich mit den über Rumpffrequenzen (R) erhaltenen Klassenhäufigkeiten $A_k^{(C)}$ nach Tabelle 93. Auch die für die Berechnung benötigten und aus den Kurven der Fig. 16 abgelesenen Funktionswerte $\varphi(\bar{s}_k^{(C)})$, kurz als $\varphi_H^{(C)}$ bezeichnet, werden dort zusammengestellt mit jenen Werten $\varphi_R^{(C)}$, die nach den durch Reduktion mit Rumpffrequenzen gewonnenen Klassenhäufigkeiten $A_k^{(C)}$ zu erwarten gewesen wären. Diese Werte $\varphi_k^{(C)}$ wurden auch in Fig. 16 eingetragen und mit $\times$ oder $+$ bezeichnet.

TABELLE 94

Mittlere Koordinaten $\bar{s}_i^{(E)}$ und $\bar{s}_k^{(C)}$ und Klassenhäufigkeiten $R_i^{(E)}$ und $R_k^{(C)}$ aus der Streutafel $\beta_{ik}^{(E,C)}$ der Tabelle 89

i, k	$\bar{s}_i^{(E)}$	$R_i^{(E)}$	$\bar{s}_k^{(C)}$	$R_k^{(C)}$
B	.5	1.00	.425	.83
A	1.5	1.00	1.505	1.35
F	2.5	1.00	2.525	.69
G	3.5	1.00	3.405	1.07
K	4.5	1.00	4.72	1.56
M	5.5	1.00	5.75	.50

TABELLE 95

Vergleich der mit der Hilfsfunktion (H) und mit Rumpffrequenzen (R) berechneten Klassenhäufigkeiten $A_k^{(C)}$ im System HDC

$S_k^{(C)}$	$\varphi_H^{(C)}$	$\varphi_R^{(C)}$	$A_k^{(C)}(H)$	$A_k^{(C)}(R)$	$(R)-(H)$	$((R)-(H))/\%$
-------------	-------------------	-------------------	----------------	----------------	-----------	----------------

9^m — 10^m

B	.53	.54	.44	.45	+ .01	+ 2.2
A	2.51	2.19	3.39	2.95	— .44	— 14.9
F	.83	.74	.57	.51	— .06	— 11.8
G	.66	.67	.71	.72	+ .01	+ 1.4
K	1.01	.85	1.58	1.33	— .25	— 18.8
M	.07	.12	.04	.06	+ .02	+ 33.3

10^m — 11^m

B	.22	.19	.18	.16	— .02	— 12.5
A	2.40	2.04	3.24	2.76	— .48	— 17.4
F	.96	.88	.66	.61	— .05	— 8.2
G	.79	.83	.85	.89	+ .04	+ 4.5
K	1.03	.92	1.61	1.43	— .18	— 12.6
M	.20	.32	.10	.16	+ .06	+ 37.5

Das Bild dieses Vergleiches ist wenig erhehend: die Abweichungen der Ergebnisse der beiden Verfahren sind beträchtlich. Gewiss werden auch die mit Hilfe von Rumpffrequenzen berechneten Klassenhäufigkeiten nicht fehlerfrei sein; doch dürften sie unter den gegebenen Umständen

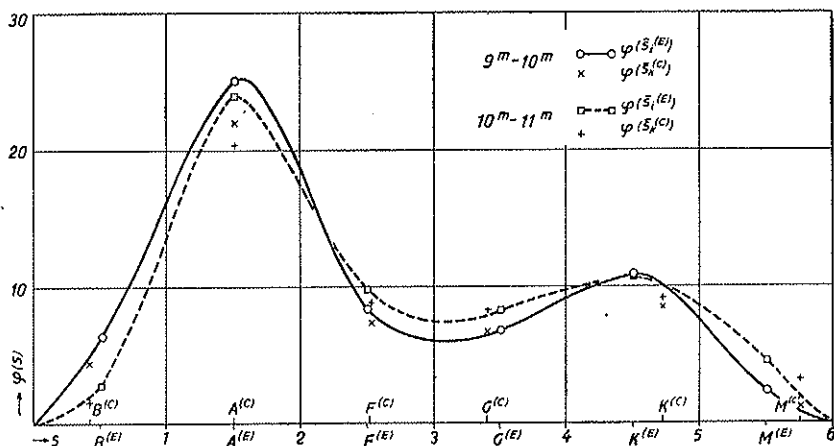


FIG. 16. Hilfsbesetzungsfunktionen bezogen auf $\beta_{ih}^{(E,C)}$ zur Reduktion der Klassenhäufigkeiten $A_i^{(E)}$ der Tabelle 93 auf das System des HDC.

die verlässlicheren Werte darstellen. Die Variation der Hilfsbesetzungsfunktion ist offenbar so stark, dass der Einfluss auf die effektiven Klassenmitten nicht mehr vernachlässigt werden darf. Diese Art der Bestimmung äquivalenter Klassenhäufigkeiten mit Hilfe einer Hilfsbesetzungsfunktion ist demnach bei so grossen Klassenintervallen und einer solch grossen Unregelmässigkeit der Hilfsfunktion nur mit der grössten Vorsicht zu behandeln.

ZUSAMMENFASSENDE SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die gewöhnlichen Methoden der Korrelationstheorie werden schon lange und mit Erfolg benützt, um Spektralangaben eines Spektralsystems auf ein anderes System zu reduzieren. Solange es sich nur um die Beziehungen zwischen den Spektralklassen der verschiedenen Systeme handelt, findet man auch mit diesen Methoden das Auslangen.

Doch sieht sich der Stellarstatistiker häufig vor die Aufgabe gestellt, die relative Verteilung der Häufigkeiten der Spektralklassen in verschiedenen Himmelsgegenden und Helligkeitsintervallen ebenfalls von einem Spektralsystem auf ein anderes zu übertragen, und muss zu seinem Leidwesen feststellen, dass für eine solche Reduktion ihm die Korrelationstheorie keine Mittel an die Hand gibt. Deshalb wurde hier versucht, ein Verfahren ausfindig zu machen, das solche Übergänge ermöglichen soll.

Eine allseitig befriedigende Lösung des Problems wurde allerdings *nicht* gefunden; es wird nur ein empirisches Näherungsverfahren vorgeschlagen, das zur Lösung praktischer Aufgaben brauchbar zu sein scheint.

Die zu *lösende Aufgabe* kann etwa folgendermassen formuliert werden:

Gegeben sind die Häufigkeiten $B_i^{(x)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) der entsprechenden Spektralklassen $S_i^{(x)}$ in einem Spektralsystem $S^{(x)}$. Es wird gefragt nach den äquivalenten Häufigkeiten $B_k^{(y)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) der entsprechenden Spektralklassen $S_k^{(y)}$ im Spektralsystem $S^{(y)}$. Die beiden Spektralsysteme $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$ sind zwar zwei wohl definierte Systeme; bekannt ist aber nur ihr gegenseitiges Verhältnis zueinander, wie es in einer Streutafel (a_{ik}) zum Ausdruck kommt. Die Elemente a_{ik} dieser Streutafel bedeuten die Häufigkeiten des Zusammentreffens einer Schätzung $S_i^{(x)}$ mit einer Schätzung $S_k^{(y)}$ bei einer ganz bestimmten Gruppe von Objekten, die nach beiden Spektralsystemen untersucht wurden. Die an diesem Material beobachteten Klassenhäufigkeiten sind dann

$$A_i^{(x)} = \sum_k a_{ik} \quad \text{und}$$

$$A_k^{(y)} = \sum_i a_{ik}.$$

Die Lösung der Aufgabe erfolgt offenbar über eine neue Streutafel (b_{ik}) , die

1. im System $S^{(x)}$ die geforderten Klassenhäufigkeiten

$$B_i^{(x)} = \sum_k b_{ik}$$

besitzt, und die

2. mit (a_{ik}) isogen ist, d.h. dieselben Spektralsysteme $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$ zur Grundlage hat, sodass also die b_{ik} auch hier die Häufigkeiten des Zusammentreffens der Schätzungen $S_i^{(x)}$ mit $S_k^{(y)}$ bedeuten für das entsprechende Material.

Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, dann ergeben sich die gesuchten zu $B_i^{(x)}$ äquivalenten Klassenhäufigkeiten im System $S^{(y)}$ zu

$$B_k^{(y)} = \sum_i b_{ik}.$$

Setzt man

$$b_{ik} = f_{ik} a_{ik},$$

so läuft die Aufgabe auf die Bestimmung der geeigneten Reduktionsfaktoren f_{ik} hinaus, für die die erste Bedingung aber nur n Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stellt, nämlich

$$\sum_k f_{ik} a_{ik} = B_i^{(x)}.$$

Unter Auswertung der zweiten Forderung, der Isogenität, muss nun eine geeignete Beziehung zwischen den Reduktionsfaktoren gesucht werden, sodass die Zahl der Unbekannten auf n vermindert wird.

Am nächsten liegt, zu setzen

$$f_{ik} = f_{ii} = c_i^{(x)} = B_i^{(x)} / A_i^{(x)}.$$

Die mit derartig gewonnenen Reduktionsfaktoren gebildete Streutafel (b_{ik}) ist aber mit der Ausgangstafel nicht mehr isogen, da sich damit die funktionale Beziehung zwischen den beiden Spektralsystemen geändert hat. Weil bei diesem Ansatz nur ein Teil des Einflusses der Spektralklassen auf f_{ik} berücksichtigt wird, nämlich der von Seiten der Klasse $S_i^{(x)}$, nennen

wir diese Art von Reduktion eine partial-proportionale. Wird dagegen der gesamte Einfluss in Rechnung gezogen, wie etwa durch den Ansatz

$$f_{ik} = f(f_{ii}, f_{kk}),$$

dann sprechen wir von einer integral-proportionalen Reduktion.

Die Ermittlung der Eigenschaften der Reduktionsfunktion $f(f_{ii}, f_{kk})$ aus den blossen korrelativen Charakteristiken einer Streutafel dürfte nicht gerade einfach sein. Deshalb wurden die eine Spektralstreutafel aufbauenden Funktionen aufgesucht, um mit ihrer Hilfe unter Einsetzung bestimmter numerischer Werte künstliche Streutafeln herzustellen, an denen die Art der Reduktionsfunktion erkannt werden kann.

Zu diesem Zwecke wird der objektiven Spektralfolge ein Parameter s zugeordnet. Die Zahl der Objekte, die sich der Stelle s zuordnen lassen, sei gegeben durch die Besetzungsfunktion $f(s)$. Die Spektralsysteme $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$ lassen sich festlegen durch je einen Satz von Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_k^{(y)}(s)$, die die Wahrscheinlichkeit ausdrücken, mit der ein der Stelle s zugeordnetes Objekt als Spektrum $S_i^{(x)}$ bzw. $S_k^{(y)}$ geschätzt wird.

Mit Hilfe dieser Grundfunktionen lassen sich alle Gegebenheiten einer Spektralstreutafel als entsprechende Integrale angeben, etwa

$$a_{ik} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(s) w_i^{(x)}(s) w_k^{(y)}(s) ds,$$

$$A_i^{(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(s) w_i^{(x)}(s) ds,$$

$$A_k^{(y)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_a(s) w_k^{(y)}(s) ds.$$

Isogene Streutafeln sind dann solche, die dieselben Spektralsysteme darstellen, denen also dieselben Schätzungsfunktionen zugrundeliegen, die aber verschiedene Häufigkeiten der Klassen aufweisen, sich also nur durch ihre verschiedenen Besetzungsfunktionen unterscheiden.

Was nun die Reduktionsfaktoren betrifft, die eine Streutafel in eine ihr isogene überführen sollen, so sind sie enge verknüpft mit den Besetzungsfunktionen der beiden Tafeln, hier etwa

$$f_{ik} = \frac{f_b(s_{ik})}{f_a(s_{ik})},$$

wobei $\bar{s}_{ik}$ einen Wert der Spektralfolge s bedeutet, der irgendwo im gemeinsamen Definitionsbereich der beiden Spektralklassen $S_i^{(w)}$ und $S_k^{(y)}$ liegt. Da aber die Besetzungsfunktionen praktisch unbekannt sind, ergibt sich damit die Unmöglichkeit einer einfachen Darstellung der Reduktionsfunktion. Immerhin lässt sich auf Grund dieses Zusammenhanges der Reduktionsfaktoren mit den Besetzungsfunktionen und aus Beobachtungen an den künstlichen Streutafeln in erster (wenn auch manchmal recht grober) Näherung setzen

$$f_{ik} = f_{ki} \quad \text{und}$$

$$f_{ik} = \bar{m}(f_{ii}, f_{kk}).$$

Aus Gründen der Geschlossenheit des Verfahrens – es soll die gleiche Form des Bildungsgesetzes gelten für alle Arten solcher Reduktionen, besonders auch für die Umkehrungen – entscheiden wir uns für das *geometrische Mittel* und setzen.

$$f_{ik} = \sqrt{f_{ii}f_{kk}},$$

sodass nun die Bestimmungsgleichungen lauten

$$\sum_k a_{ik} \sqrt{f_{ii}f_{kk}} = B_i^{(w)}.$$

An Hand der künstlichen Streutafeln wird diese Näherung erprobt und gefunden, dass bei ihrer Reduktion auf die Tafeln der Grundfrequenzen – wenn nämlich die Klassenhäufigkeiten in einem der Spektralsysteme zur Einheit gebracht werden – bezüglich der Klassenhäufigkeiten eine Näherung von $\pm 2-3\%$ erreicht wird, die für die praktischen Zwecke ausreichen dürfte.

Die algebraische Lösung der Bestimmungsgleichungen für die Gewinnung der Reduktionsfaktoren ist unständlich; deshalb werden im praktischen Teil der Arbeit zunächst zwei brauchbare iterative Lösungsverfahren ausführlich beschrieben und dann auch verwendet zur Ermittlung der Grundfrequenzen für die Spektralvergleiche einiger Autoren mit den Spektralsystemen des HDC und der HDE.

Der Wunsch, die Beziehungen zwischen den beiden Spektralsystemen HDC und HDE auch in Form einer Streutafel darstellen zu können (für

die keine derartigen Tafeln vorliegen) führt zur Frage, ob die Lösung der gestellten Aufgabe auch noch möglich ist, wenn zur Charakterisierung der Beziehungen zwischen den beiden Spektralsystemen $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$ nur die beiden Häufigkeitsverteilungen $(A_i^{(x)})$ und $(A_k^{(y)})$ vorliegen. Es lässt sich dann eine Tafel von *Rumpffrequenzen* a_{ik}^* aufstellen, die unter allen möglichen Streutafeln, die mit den gegebenen Klassenfrequenzen verträglich sind, jene Tafel darstellt, die ein Mindestmass von Teilfrequenzen aufweist und die geringste Streuung besitzt. Mit solchen Tafeln lässt sich genau so verfahren, wie mit den vollen Streutafeln, nur wird die Näherung weniger genau sein, und besonders schlecht, wenn die wirklichen Streuungen bedeutend grösser sind, als die in der Tafel der Rumpffrequenzen zum Ausdruck gebrachten.

Ein weiteres, mehr *graphisches Verfahren* zur Bestimmung der zu $B_i^{(x)}$ äquivalenten Häufigkeiten $B_k^{(y)}$ lässt sich aus folgender Überlegung ableiten:

Die Klassenhäufigkeiten $A_i^{(x)}$ und $B_i^{(x)}$ unterscheiden sich nur durch ihre bezüglichen Besetzungsfunktionen $f_a(s)$ und $f_b(s)$, während die den Klassenhäufigkeiten $A_i^{(x)}$ und $A_k^{(y)}$ zugrundeliegenden Schätzungsfunktionen $w_i^{(x)}(s)$ und $w_k^{(y)}(s)$ für alle Streutafeln, die sich von denselben Spektralsystemen $S^{(x)}$ und $S^{(y)}$ ableiten, dieselben bleiben müssen. Betrachtet man nun die Intervallmitten

$$\sum_{\lambda=1}^{i-1} A_{\lambda}^{(x)} + A_i^{(x)}/2 = \bar{s}_i^{(x)}$$

als die Abszissen der Spektralklassen $S_i^{(x)}$, so ergeben die Werte

$$\varphi_i^{(x)} = B_i^{(x)}/A_i^{(x)}$$

die Ordinaten einer Hilfsfunktion φ an der Stelle $\bar{s}_i^{(x)}$, die auch die Werte

$$\varphi_k^{(y)} = B_k^{(y)}/A_k^{(y)}$$

für die Stellen

$$\bar{s}_k^{(y)} = \sum_{\lambda=1}^{k-1} A_{\lambda}^{(y)} + A_k^{(y)}/2,$$

die Abszissen der Spektralklassen $S_k^{(y)}$, befriedigen muss. Die gesuchten $B_k^{(y)}$ berechnen sich mit Hilfe der aus der Kurve φ entnommenen Werten $\varphi_k^{(y)}$ zu

$$B_k^{(y)} = \varphi_k^{(y)} A_k^{(y)}.$$

Es ist klar, dass die vorhergehenden Ansätze nur Näherungen sein können. Bei sehr unregelmässigen Schätzungs- und Besetzungsfunktionen dürfte eine solche Bestimmung nicht mehr genau genug sein. Doch wird man oft zu einem solchen Verfahren greifen, wenn es sich um kleine Klassenintervalle handelt und wo für beide Systeme nicht die gleiche Zahl von Klassen vorliegt.

In diesem Zusammenhange schien es auch notwendig, EDDINGTONS Verfahren zur *Verbesserung einer beobachteten Häufigkeitsverteilung* in seinen Beziehungen zu der vorgelegten Aufgabe zu behandeln. Abgesehen davon, dass dieses Verfahren ganz besondere Fälle voraussetzt, wie gleich-grosse Klassenintervalle in beiden Systemen, ein GAUSSSches Fehlergesetz, das über den gesamten Beobachtungsbereich dasselbe ist und bekannt sein muss, analytische Darstellbarkeit der beobachteten Häufigkeitsfunktion, beruht es auf der Voraussetzung, dass die Streutafeln partial-proportional zu reduzieren sind, verträgt sich also von vornherein nicht mit der hier dargelegten und begründeten Forderung eines integral-proportionalen Vorgehens. Immerhin ist es interessant festzustellen, dass es auch auf integral-proportional reduzierte Tafeln verwendet werden könnte zur Bestimmung äquivalenter Häufigkeiten; die Korrektur beträgt dann aber nur die Hälfte des Wertes, den EDDINGTONS Ansatz fordert.

Schliesslich bleibt noch die Frage nach der *Bestimmung äquivalenter Klassen*, die mit Hilfe korrelationstheoretischer Methoden erfolgt. Spektralstreutafeln, wie auch andere Beobachtungsstreutafeln nehmen unter den üblichen Korrelationstafeln eine Sonderstellung ein. Ihnen liegt eine funktionale Beziehung zwischen den beiden Systemen zugrunde, die infolge der durch die Beobachtungsfehler und die zufälligen Häufigkeiten der Klassen hervorgerufenen Streuungen einer stochastischen Verknüpfung ähnlich sieht. Sie kann aus jeder Streutafel, die auf repräsentativem Material beruht, gewonnen werden als die *mittlere* oder *neutrale Regression*, die zwischen den beiden individuellen Regressionen, die den Übergang von einem System zum andern darstellen, liegt. Sie ist gleich für alle Tafeln einer isogenen Gruppe, trotz der Verschiedenheit der individuellen Regressionen. Wird sie nur graphisch ermittelt, dann eignen sich dafür die Tafeln der Grundfrequenzen am ehesten, da dann die individuellen Regressionen einander praktisch am nächsten kommen.

Wie schon eingangs bemerkt, hat die Suche nach der Lösung eines einfach scheinenden Problems zwar zur Erörterung gar mancher Fragen

geführt, nur nicht zu der eigentlichen Lösung, an deren Stelle nicht *mehr* als ein *empirisches Näherungsverfahren* angegeben werden kann, das zwar für die Lösung praktischer Aufgaben brauchbar sein dürfte, theoretisch aber unbefriedigt lassen muss. Weitere Versuche in dieser Hinsicht mögen nach dem Dargelegten nicht ganz hoffnungslos sein, und so schien es angebracht, den ganzen Fragenkomplex einmal in dieser Ausführlichkeit vorzulegen.

Zum Schlusse möchte der Verfasser noch seinen Dank aussprechen: zuerst seinem verehrten, nunmehr schon verewigten Herrn Direktor Pater JOHAN W. STEIN S. J., mit dem er die einschlägigen Fragen öfters durchbesprechen durfte, und der es für angebracht hielt, die Arbeit der Päpstlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegen; sodann Herrn Professor Dr. ED. VON DER PAHLEN, Vorstand der Astronomisch-Meteorologischen Anstalt der Universität Basel, mit dem einige Fragen durchbesprochen wurden; und nicht zuletzt Herrn Dr. WALTER FRICKE, Hamburg, der sich der grossen Mühe unterzog, das Manuskript durchzulesen und mit kritischen Bemerkungen zu versehen.

ZUSAMMENFASSUNG

Der Spektralstatistiker steht nicht selten vor der Aufgabe, eine Häufigkeitsverteilung von Spektralklassen von einem System auf ein anderes Spektralsystem zu übertragen. Sind die Beziehungen zwischen den beiden Spektralsystemen festgelegt über eine Streutafel, dann geht die Aufgabe darauf hinaus, eine neue Streutafel so zu finden, dass sie im betreffenden System die vorgeschriebenen Klassenhäufigkeiten aufweist, aber dieselben Beziehungen zwischen den beiden Spektralsystemen beibehält, also mit der Ausgangstafel „isogen“ ist. Untersuchungen an künstlichen isogenen Streutafeln zeigen, dass diese Transformation nicht erreicht wird, wenn die entsprechenden Teilfrequenzen der Klassen proportional der Häufigkeiten der zugehörigen Klassen geändert werden (partial-proportionale Reduktion), wie es bei vielen Operationen in der Statistik gebräuchlich ist, sondern dass eine Transformation eigener Art erforderlich ist, (integral-proportionale Reduktion), die auch den Einfluss der zufälligen Häufigkeiten der Nachbarklassen gebührend berücksichtigt.

Eine strenge Lösung der Aufgabe steht noch aus. Es wird dafür ein empirisches Näherungsverfahren vorgeschlagen, bei dem die Elemente der Ausgangsstreutafel mit geeigneten Reduktionsfaktoren multipliziert werden, von denen nur verlangt wird, dass die bei den Nebenfrequenzen benützten Faktoren das geometrische Mittel sind aus den bei den Hauptfrequenzen benützten, und dass die transformierte Tabelle in dem entsprechenden System die vorgeschriebenen Klassenhäufigkeiten aufweist. Dann entsprechen die aus der Tafel resultierenden Klassenhäufigkeiten im anderen System den gesuchten Häufigkeiten. Bei den vorliegenden künstlichen Streutafeln wurden die theoretischen Werte auf etwa $\pm 2-3\%$ erreicht, was für praktische Zwecke meist genügen dürfte.

Im praktischen Teil werden einige iterative Verfahren angegeben, um diese Transformationen in einfacher Weise vornehmen zu können. Sodann wird die Methode angewendet auf einige Spektralvergleiche aus der Literatur und benützt zur Untersuchung der Beziehungen zwischen den Spektralsystemen des HDC und der HDE.

Im Verlauf dieser Untersuchung wurden einige Fragen berührt, wie die Sonderstellung der Spektralstreutafel bezüglich der ähnlichen Korrelationstabellen; die Repräsentativität oder Selektivität des benützten Materials; die Beziehungen der vorgelegten Methode zu EDDINGTONS Verfahren, eine beobachtete Häufigkeitsverteilung auf die wahre zu verbessern; die vielleicht von allgemeinerem Interesse sind und noch einer weiteren Klärung bedürfen, weshalb das benützte Material möglichst ausführlich zur Diskussion vorgelegt wird.

S O M M A R I O

Nella statistica spettrale, non raramente si incontra il problema di ridurre una distribuzione di frequenze spettrali da un sistema spettrale ad un altro. Quando le relazioni caratteristiche tra i due sistemi spettrali sono espresse con una tabella di dispersione (i cui elementi rappresentano la frequenza delle coincidenze delle indicazioni spettrali nei rispettivi sistemi) il problema si riduce al compito di trasformare questa tabella di dispersione in maniera tale che le frequenze spettrali del primo sistema siano quelle proposte, e che le relazioni caratteristiche fra i due sistemi spettrali rimangano inalterate; in breve che la tavola trasformata sia « isogena » a quella di partenza. Allora le frequenze cercate sono quelle risultanti dalla tabella per l'altro sistema spettrale. Attraverso osservazioni di tavole di dispersione isogene, sinteticamente costruite, si arriva alla conclusione che, per tali trasformazioni, occorre una operazione speciale in quanto le frequenze parziali di una classe sono influenzate non soltanto dalla frequenza della corrispondente, ma anche dalle frequenze delle classi a questa vicine.

Non si è ancora arrivati ad una soluzione rigorosa del problema. Si propone, in sostituzione, una soluzione approssimativa: gli elementi della tavola di dispersione di partenza vengono moltiplicati con fattori tali che quelli secondari (non riferentisi cioè alla diagonale principale della tavola) siano il medio geometrico dei rispettivi fattori principali, e che la tabella in tal modo trasformata, nel sistema spettrale rispettivo, mostri le frequenze prescritte. L'applicazione del metodo proposto alle tavole isogene artificiali, permette di raggiungere i valori teorici con una approssimazione di circa $\pm 2-3\%$: approssimazione che, per gli scopi pratici, è generalmente sufficiente.

Nella parte pratica si propongono due metodi iterativi per poter eseguire queste trasformazioni senza ricorrere a delle equazioni troppo complicate. Il metodo viene, poi, usato per caratterizzare alcune comparazioni spettrali trovate nella letteratura e per stabilire le relazioni tra i sistemi spettrali del HDC e della HDE.

Nel corso di queste ricerche si sono presentate alcune questioni, come: la posizione speciale delle tavole spettrali di dispersione riguardo a tavole di correlazione, i concetti della rappresentatività o selettività di un materiale da usare per scopi statistici, la relazione fra questo nuovo metodo di trasformazione e quello noto dell'EDDINGTON, che consente di ricavare la vera distribuzione di frequenze da una osservata con errori accidentali; questioni che sono probabilmente di interesse generale e ancora da chiarire. Il materiale usato per queste ricerche viene, quindi, ampiamente proposto per ulteriori discussioni.

ABSTRACT

In spectral statistics there often arises the problem of reducing a certain frequency distribution of spectral types from one spectral system to another. When the characteristic relations between the two spectral systems are expressed by means of a scatter table, the problem is reduced to transforming the given scatter table in such a way that the given frequencies appear in the respective spectral system, while at the same time the characteristic relations between the two systems remain unchanged in the new scatter table. In other words, the new table should be "isogenous" to the original scatter table. Comparisons of artificial isogenous scatter tables show that for this purpose a new kind of transformation is required, since the partial frequencies of a class are affected not only by the frequency of this class but also by the frequencies of the adjacent spectral classes.

Though an accurate solution of the problem is still lacking, an empirical approximation is proposed, as follows. The elements of the original scatter table are to be multiplied by certain factors. The factors connected with the secondary elements (i.e., those outside the principal diagonal) must be the geometric means of the factors connected with the principal elements, and the transformed table must show the required frequencies in the respective spectral system. This method, when applied to the present artificial scatter tables, is accurate within about $\pm 2 - 3 \%$, which seems sufficient for most practical purposes.

In the practical part of the paper, two iterative methods are proposed to effect such transformations of scatter tables without using formulae that are too complicated. The method is applied to normalizing some spectral comparisons taken from the astronomical literature, and especially to studying the relations between the spectral systems of the HDC and the HDE.

In connection with these researches some questions have arisen, such as the special features of such scatter tables when compared with the usual correlation tables, the true meaning of whether the material of observation is representative or selective, the connection between the new transformation method and EDDINGTON's correction of statistics for accidental error,—questions which probably are of some general interest and need to be more clearly answered. Therefore, the entire material used in these researches has been published in full, in order that it might serve for further discussions.

INHALTSÜBERSICHT

	Seite
EINLEITUNG	7
A. THEORETISCHER TEIL	13
I. ZUR ALLGEMEINEN CHARAKTERISIERUNG EINER SPEKTRALSTREUTAFEL	13
1. Das allgemeine Schema	13
2. Die Spektralstreutafel als Korrelationstafel	15
3. Sonderstellung der Spektralstreutafel	17
II. ANALYTISCHE ERFASSUNG DER EINER SPEKTRALSTREUTAFEL ZUGRUN- DE LIEGENDEN FAKTOREN	23
1. Allgemeine Betrachtung der in eine Spektralstreutafel einge- henden Faktoren	23
2. Mathematische Formulierung der in eine Spektralstreutafel eingehenden Faktoren	25
3. Isogene Streutafeln	31
III. VORSCHLAG EINES VERFAHRENS ZUR REDUKTION VON SPEKTRAL- STREUTAFELN	35
1. Die Aufgabe und ihre Eindeutigkeit	35
2. Lösungsversuche mit Reduktionsfaktoren	45
a. <i>Elementare Teilfrequenzen, Grundfrequenzen und Reduk-</i> <i>tionsfaktoren</i>	45
b. <i>Zur Wahl einer geeigneten Reduktionsfunktion</i>	52
c. <i>Über die Brauchbarkeit des geometrischen Mittels als Re-</i> <i>duktionsfunktion</i>	90
3. Die Verwendung von Tafeln minimaler Streuungen (Rumpf- frequenzen)	111
4. Die unmittelbare Bestimmung äquivalenter Klassenhäufig- keiten unter Verwendung der Besetzungsfunktion oder einer ihr äquivalenten Hilfsfunktion	119

	Seite
IV. DIE ERMITTLUNG ÄQUIVALENTER SPEKTRALKLASSEN	130
1. Der Einfluss der zufälligen Klassenhäufigkeiten bei repräsentativem Material	131
2. Der Einfluss der zufälligen Klassenhäufigkeiten bei selektivem Material	155
V. ZU EDDINGTONS VERFAHREN ZUR VERBESSERUNG EINER BEOBSCHTETEN HÄUFIGKEITSVERTEILUNG	160
1. EDDINGTONS Korrekturformel	160
2. Einige Schwierigkeiten	162
3. EDDINGTONS Korrektur und die Reduktion von Spektralverteilungen	164
B. PRAKTISCHER TEIL	175
I. DIE PRAKTISCHE NÄHERUNGSWEISE BERECHNUNG ISOGENER STREUTATFELN	175
1. Die Ermittlung der Reduktionsfaktoren durch schrittweise Näherung	175
2. Die schrittweise Berechnung der Reduktionsfaktoren über genäherte Hauptfrequenzen	185
II. ANWENDUNG DES VORGESCHLAGENEN REDUKTIONSVERFAHRENS AUF PRAKTISCHE AUFGABEN	197
1. Reduktion einiger Spektralvergleiche aus der Literatur	197
2. Die Beziehungen zwischen den Spektralsystemen der HDC und HDE	204
a. Äquivalente Spektralklassen zwischen HDC und HDE	204
b. Äquivalente Spektralverteilungen bezüglich der Systeme HDC und HDE	211
ZUSAMMENFASSENDE SCHLUSSBEMERKUNGEN	225
ZUSAMMENFASSUNG in verschiedenen Sprachen	233
LITERATURVERZEICHNIS	237