PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

COMMENTARII

Vol. II N. 52

M. A. SNEIDER LUDOVICI

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLE FORMULE DI QUADRATURA APPROSSIMATA

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

COMMENTARII
Vol. II - N. 52
pag. 1-16

ALCUNE OSSERVAZIONI SULLE FORMULE DI QUADRATURA APPROSSIMATA

M. A. SNEIDER LUDOVICI

SVMMARIVM — Disceptat Auctor de methodis classicis calculi numerarii integralium definitorum in functionibus unius variabilis realis, modo ut possit existimari efficientia appropinquationis quam methodus Gauss videtur maxime possidere.

In diverse questioni di Analisi Numerica riveste notevole interesse poter stabilire se una data formula di quadratura approssimata fornisce valori per difetto oppure per eccesso dell'integrale definito, che si ha in vista di calcolare.

Interessanti osservazioni, a questo proposito, si trovano in [1] e in [2]. In base ad esse è possibile, per taluni metodi di quadratura numerica, stabilire se il valore, fornito dalla corrispondente formula, approssima, per difetto oppure per eccesso, l'integrale definito, che si desidera calcolare.

Scopo della presente Nota è quello di riesporre i due teoremi, nei quali si concretizzano le osservazioni anzidette, dedurre da esse talune generali conseguenze, le quali, per diverse

Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. MAURO PICONE il 14 Aprile 1972 durante la Sezione Plenaria della Pontificia Accademia delle Scienze.

formule di quadratura, stabiliscono se trattasi di formule di quadratura per difetto o per eccesso. Infine corredare i risultati ottenuti con alcuni esempi numerici.

1. Sia $f(x)$ una funzione, definita in un intervallo chiuso dell'asse reale ed ivi dotata di tutte quelle derivate continue, delle quali faremo uso.

Senza ledere la generalità, può supporsi che $f(x)$ sia definita nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$.

Se $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$ sono r punti dell'intervallo $[-1, 1]$ e $n_1, n_2, \ldots, n_r$ interi non negativi, detto ${}^{(n-1)}\mathrm{P}(x)$ il polinomio di grado

$$n - 1 = n_1 + \ldots + n_r + r - 1 ,$$

che, nel punto x_h, ha con $f(x)$ un contatto di ordine n_h, è noto che riesce

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_n(x) = f(x) - {}^{(n-1)}\mathrm{P}(x) = \\ = (x - x_1)^{n_1+1} \ldots (x - x_r)^{n_r+1} f^{(n)}(\xi) , \end{aligned}$$

essendo ξ un punto di $[-1,1]$, che dipende, oltre che da $n_1, \ldots, n_r$, anche da $x_1, \ldots, x_r, x$.

Una *formula di quadratura approssimata* consiste nell'assumere

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \simeq \mathrm{I}_n = \int_{-1}^{1} {}^{(n-1)}\mathrm{P}(x)\, dx .$$

Il resto della formula di quadratura è fornito da

$$\varrho(x_1, \ldots, x_r; n_1, \ldots, n_r) = \int_{-1}^{1} \mathrm{R}_n(x)\, dx .$$

I. *Se il polinomio*

$$(x - x_1)^{n_1+1} \ldots (x - x_r)^{n_r+1} \tag{1}$$

è sempre non negativo nell'intervallo $[-1, 1]$, I_n *fornisce un valore per difetto (per eccesso) se la derivata* $f^{(n)}(x)$ *di* $f(x)$ *è sempre non negativa (non positiva) in* $[-1, 1]$. *Se l'anzidetto polinomio è sempre non positivo nell'intervallo* $[-1, 1]$, I_n *fornisce un valore per difetto (per eccesso) se la derivata* $f^{(n)}(x)$ *è sempre non positiva (non negativa) in* $[-1, 1]$ (1).

La dimostrazione è ovvia.

II. *Se sussistono le* m *eguaglianze*

$$\int_{-1}^{1} (x - x)^{n_1+1} \ldots (x - x_r)^{n_r+1} x^k \, dx = 0 \; , \; k = 0, \ldots, m - 1 \; , \tag{2}$$

detti $\nu_1, \ldots, \nu_r$ *numeri non negativi tali che*

$$\nu_1 + \ldots + \nu_r \leqslant m \; ,$$

si ha

$$\varrho\,(x_1, \ldots, x_r, n_1, \ldots, n_r) = \varrho\,(x_1, \ldots, x_r, n_1 + \nu_1, \ldots, n_r + \nu_r). \tag{3}$$ (2)

Sia ${}^{(s-1)}\Pi(x)$ il polinomio di grado

$$s - 1 = n_1 + \ldots + n_r + \nu_1 + \ldots + \nu_r + r - 1 \; ,$$

(1) Cfr. [2], teorema VI pag. 423.
(2) Cfr. [2], teorema V pag. 422.

il quale in x_h ha un contatto di ordine $n_h+\nu_h$ con $f(x)$ $(h=1, \ldots, r)$.

Il polinomio

$$^{(s-1)}\Pi(x) - {}^{(n-1)}P(x)$$

ha grado $s-1$ e, d'altronde, nel punto x_h si annulla con le sue derivate fino all'ordine n_h $(h=1, \ldots, r)$. Deve, allora, essere

$$^{(s-1)}\Pi(x) - {}^{(n-1)}P(x) = (x-x_1)^{n_1+1} \ldots (x-x_r)^{n_r+1}\, Q(x) \quad ,$$

essendo

$$\text{grado } Q(x) = \nu_1 + \ldots + \nu_r - 1 \leqslant m - 1 \quad .$$

Ne viene, in virtù della (2),

$$\int_{-1}^{1} {}^{(s-1)}\Pi(x)\, dx = \int_{-1}^{1} {}^{(n-1)}P(x)\, dx \quad .$$

Segue da ciò la (3).

Assumiamo, ora, $r=1$, $x_1=0$; sia n_1 un intero non negativo. Il polinomio (1) assume, in tale caso, la forma

$$x^{n_1+1} \quad .$$

Poniamo $n = n_1 + 1$. Se n_1 è pari, è verificata la (2) assumendo $m=1$; pertanto dai teoremi I e II seguono i risultati riassunti nella tabella seguente [3].

---

[3] Le diseguaglianze indicate nella seconda colonna si intendono soddisfatte in tutto l'intervallo $[-1, 1]$.

n_1	$f^{(s)}(x)$	I_n
dispari	$f^{(n)}(x) \geqslant 0$	$I_n \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
dispari	$f^{(n)}(x) \leqslant 0$	$I_n \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
pari	$f^{(n+1)}(x) \geqslant 0$	$I_n \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
pari	$f^{(n+1)}(x) \leqslant 0$	$I_n \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

La formula del rettangolo corrisponde al caso particolare $n_1 = 0$ (cfr. le ultime due righe della tabella).

Assumiamo, ora, $r = 2p + 1$, con $p \geqslant 1$; i punti $x_1, \ldots, x_{2p+1}$ siano i punti

$$x = \pm \frac{k}{p}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, p\,.$$

Ai punti $\frac{k}{p}$ e $-\frac{k}{p}$ corrisponda lo stesso intero non negativo n_k ($k = 1, \ldots, p$), talché il polinomio (1) assuma la forma

$$\prod_{k=1}^{p} \left(x^2 - \frac{k^2}{p^2}\right)^{n_k+1} x^{n_0+1}\,.$$

Poniamo

$$n = n_0 + 2n_1 + \ldots + 2n_p + 2p + 1\,.$$

Come in precedenza, indicheremo con I_n l'integrale del polinomio, che, nei punti $\pm \frac{k}{p}$, ha un contatto di ordine n_k con $f(x)$ ($k = 0, 1, \ldots, p$).

Faremo la seguente ipotesi:

se è p $>$ I, *il numero* n_k (k = I, ..., p − I) *è dispari.*

Poiché, se n_o + I è dispari, è verificata la (2) assumendo m = I, dai teoremi I e II conseguono i risultati, che sintetizziamo nella seguente tabella ([4]).

n_p	n_o	$f^{(\cdot)}(x)$	I_n
dispari	dispari	$f^{(n)}(x) \geqslant 0$	$I_n \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
dispari	dispari	$f^{(n)}(x) \leqslant 0$	$I_n \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
pari	dispari	$f^{(n)}(x) \leqslant 0$	$I_n \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
pari	dispari	$f^{(n)}(x) \geqslant 0$	$I_n \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
dispari	pari	$f^{(n+1)}(x) \geqslant 0$	$I_n \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
dispari	pari	$f^{(n+1)}(x) \leqslant 0$	$I_n \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
pari	pari	$f^{(n+1)}(x) \leqslant 0$	$I_n \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
pari	pari	$f^{(n+1)}(x) \geqslant 0$	$I_n \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

([4]) Le diseguaglianze indicate nella terza colonna si intendono soddisfatte in tutto l'intervallo [— I, I].

La formula di CAVALIERI-SIMPSON corrisponde al caso particolare $p = 1$, $n_0 = 0$ (cfr. le ultime due righe della tabella).

Assumiamo, ora, $r = 2p$, con $p \geqq 1$; i punti $x_1, \ldots, x_{2p}$ siano i punti

$$x = \pm \frac{2k-1}{2p-1}, \quad k = 1, \ldots, p .$$

Ai punti $\frac{2k-1}{2p-1}$ e $-\frac{2k-1}{2p-1}$ corrisponda lo stesso intero non negativo n_k $(k = 1, \ldots, p)$, talché il polinomio (1) assuma la forma

$$\prod_{k=1}^{p} \left(x^2 - \frac{(2k-1)^2}{(2p-1)^2} \right)^{n_k+1} .$$

Poniamo

$$n = 2n_1 + 2n_2 + \ldots + 2n_p + 2p .$$

Come in precedenza, sia I_n l'integrale del polinomio che, nei punti $\pm \frac{2k-1}{2p-1}$, ha un contatto di ordine n_k con $f(x)$ $(k = 1, \ldots, p)$.

Faremo la seguente ipotesi

se è $p > 1$, *il numero* n_k $(k = 1, \ldots, p-1)$ *è dispari.*

Poiché, se $n_p + 1$ è dispari, è verificata la (2) assumendo $m = 1$, dai teoremi I e II si deducono i risultati sintetizzati nella seguente tabella [5].

---

(5) Le diseguaglianze indicate nella seconda colonna si intendono soddisfatte in tutto l'intervallo $[-1, 1]$.

n_p	$f^{(n)}(x)$	I_n
dispari	$f^{(n)}(x) \geqslant 0$	$I_n \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
dispari	$f^{(n)}(x) \leqslant 0$	$I_n \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
pari	$f^{(n)}(x) \geqslant 0$	$I_n \leqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$
pari	$f^{(n)}(x) \leqslant 0$	$I_n \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$

La regola del trapezio corrisponde al caso particolare $p = 1$, $n_1 = 0$ (cfr. le ultime due righe della tabella).

I teoremi I e II si applicano, anche, al metodo d'integrazione di LEGENDRE-GAUSS, nel quale, come punti $x_1, \dots, x_r$, si assumono gli zeri del polinomio di LEGENDRE $X_r(x)$ e $n_1 = \dots = n_r = 0$. In tale caso [6] la formula di quadratura fornisce un valore per difetto se nell'intervallo $[-1, 1]$ è sempre $f^{(2r)}(x) \geqslant 0$ ed un valore per eccesso se in $[-1, 1]$ è sempre $f^{(2r)}(x) \leqslant 0$.

2. *Esperimenti numerici eseguiti.*

Esempio n. 1.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin\left[\frac{\pi}{4}(1 + x)\right].$$

[6] Cfr. [2], pag. 428.

Riesce:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} = 0{,}63661977236758.$$

In tale caso la derivata di ordine $2n$ *della* $f(x)$ ha la seguente espressione:

$$f^{(2n)} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \sin\left[\frac{\pi}{4}(1 + x)\right] ;$$

pertanto, nell'intervallo $[-1,1]$, riesce sempre $f^{(2n)} \geqslant 0$ per n pari e $f^{(2n)} \leqslant 0$ per n dispari.

Ne segue che la formula di CAVALIERI-SIMPSON e la formula di LEGENDRE-GAUSS per r dispari forniscono approssimazioni per eccesso dell'integrale, mentre la regola del trapezio e la formula di LEGENDRE-GAUSS per r pari ne danno approssimazioni per difetto.

I risultati numerici relativi a tale esempio sono riassunti nelle seguenti tabelle.

Regola del trapezio

r	$I_n < \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin\left[\frac{\pi}{4}(1+x)\right] dx$	errore relativo
11	0,635310	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$
21	0,636292	$5{,}0 \cdot 10^{-4}$
31	0,636474	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$
41	0,636537	$1{,}3 \cdot 10^{-4}$
51	0,636567	$8{,}0 \cdot 10^{-5}$
61	0,636583	$6{,}0 \cdot 10^{-5}$
71	0,636593	$4{,}2 \cdot 10^{-5}$
81	0,636599	$3{,}2 \cdot 10^{-5}$
91	0,636603	$2{,}6 \cdot 10^{-5}$
101	0,636606	$2{,}0 \cdot 10^{-5}$

Formula di CAVALIERI-SIMPSON

r	$I_n > \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin\left[\frac{\pi}{4}(1+x)\right] dx$	errore relativo
11	0,6366219319	$-3,4 \cdot 10^{-6}$
21	0,6366199070	$-2,5 \cdot 10^{-7}$
31	0,6366197989	$-4,2 \cdot 10^{-8}$
41	0,6366197808	$-9,0 \cdot 10^{-9}$
51	0,6366197758	$-6,0 \cdot 10^{-9}$
61	0,6366197740	$-3,0 \cdot 10^{-9}$
71	0,6366197733	$-1,4 \cdot 10^{-9}$
81	0,6366197729	$-8,3 \cdot 10^{-10}$
91	0,6366197727	$-6,0 \cdot 10^{-10}$
101	0,6366197726	$-4,0 \cdot 10^{-10}$

Formula di LEGENDRE-GAUSS

r pari	$I_n < \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin\left[\frac{\pi}{4}(1+x)\right] dx$	errore relativo
4	0,63661975785080	$2,2 \cdot 10^{-8}$
6	0,63661977236754	$5,0 \cdot 10^{-14}$
8	0,63661977236757	$4,4 \cdot 10^{-15}$

Esempio n. 2.

$$f(x) = x\, e^x \; .$$

Il valore esatto dell'integrale è il seguente:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \frac{2}{e} = 0{,}7357588823428844644.$$

La derivata di ordine n della $f(x)$ e data da

$$f^{(n)}(x) = e^x (n + x) \; .$$

Dato che, nell'intervallo $[-1,1]$, le derivate della $f(x)$ riescono tutte non negative, la regola del trapezio e la formula di CAVALIERI-SIMPSON forniscono valori per eccesso dell'integrale, mentre la formula di LEGENDRE-GAUSS ne fornisce un'approssimazione per difetto.

I risultati numerici relativi a questo esempio sono riportati nelle tabelle seguenti:

Regola del trapezio

r	$I_n > \int_{-1}^{1} x\, e^x\, dx$	errore relativo
11	0,75386	$-2{,}5 \cdot 10^{-2}$
21	0,74029	$-7{,}0 \cdot 10^{-3}$
31	0,73778	$-2{,}8 \cdot 10^{-3}$
41	0,73690	$-1{,}6 \cdot 10^{-3}$
51	0,73649	$-1{,}0 \cdot 10^{-3}$
61	0,73627	$-7{,}0 \cdot 10^{-4}$
71	0,73613	$-5{,}2 \cdot 10^{-4}$
81	0,73605	$-4{,}0 \cdot 10^{-4}$
91	0,73598	$-3{,}0 \cdot 10^{-4}$
101	0,73594	$-2{,}8 \cdot 10^{-4}$

Formula di quadratura di CAVALIERI-SIMPSON

r	$I_n > \int_{-1}^{1} x\, e^x\, dx$	errore relativo
11	0,735848368	$-1,3 \cdot 10^{-4}$
21	0,735764505	$-8,0 \cdot 10^{-6}$
31	0,735759994	$-1,5 \cdot 10^{-6}$
41	0,735759235	$-5,5 \cdot 10^{-7}$
51	0,735759027	$-2,0 \cdot 10^{-7}$
61	0,735758952	$-1,0 \cdot 10^{-7}$
71	0,735758920	$-5,1 \cdot 10^{-8}$
81	0,735758905	$-3,0 \cdot 10^{-8}$
91	0,735758897	$-2,0 \cdot 10^{-8}$
101	0,735758892	$-1,3 \cdot 10^{-8}$

Formula di LEGENDRE-GAUSS

r	$I_n < \int_{-1}^{1} x\, e^x\, dx$	errore relativo
4	0,735756506760842	$1,0 \cdot 10^{-6}$
6	0,735758882324004	$2,6 \cdot 10^{-11}$
8	0,735758882342882	$3,0 \cdot 10^{-15}$

Esempio n. 3.

$$f(x) = \frac{1}{3 + x} \ .$$

Il valore esatto dell'integrale è il seguente:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \log 2 = 0{,}693147180559945309.$$

La derivata di ordine n della $f(x)$ ha la seguente espressione:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(3+x)^{n+1}} \ .$$

Dato che le derivate di ordine pari della $f(x)$ riescono sempre positive nell'intervallo $[-1,1]$, la regola del trapezio e la formula di CAVALIERI-SIMPSON ne forniscono approssimazioni per eccesso e la formula di LEGENDRE-GAUSS ne fornisce un valore per difetto.

I risultati relativi a tale esempio sono raccolti nelle tabelle seguenti.

Regola del trapezio

r	$I_n > \int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\, dx$	errore relativo
11	0,6937714	$-9{,}1 \cdot 10^{-4}$
21	0,6933034	$-2{,}3 \cdot 10^{-4}$
31	0,6932167	$-1{,}0 \cdot 10^{-4}$
41	0,6931863	$-6{,}0 \cdot 10^{-5}$
51	0,6931722	$-3{,}6 \cdot 10^{-5}$
61	0,6931646	$-2{,}5 \cdot 10^{-5}$
71	0,6931599	$-1{,}7 \cdot 10^{-5}$
81	0,6931570	$-1{,}3 \cdot 10^{-5}$
91	0,6931549	$-1{,}1 \cdot 10^{-5}$
101	0,6931535	$-9{,}1 \cdot 10^{-6}$

Formula di CAVALIERI-SIMPSON

r	$I_n > \int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\, dx$	errore relativo
11	0,6931502307	$-9{,}0 \cdot 10^{-5}$
21	0,6931473747	$-2{,}8 \cdot 10^{-7}$
31	0,6931472191	$-6{,}0 \cdot 10^{-8}$
41	0,6931471928	$-2{,}0 \cdot 10^{-8}$
51	0,6931471856	$-7{,}3 \cdot 10^{-9}$
61	0,6931471830	$-3{,}5 \cdot 10^{-9}$
71	0,6931471819	$-2{,}0 \cdot 10^{-9}$
81	0,6931471814	$-1{,}2 \cdot 10^{-9}$
91	0,6931471811	$-7{,}3 \cdot 10^{-10}$
101	0,6931471809	$-4{,}4 \cdot 10^{-10}$

Formula di LEGENDRE-GAUSS

r	$I_n < \int_{-1}^{1} \frac{1}{3+x}\, dx$	errore relativo
4	0,693146417744547	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$
6	0,693147179886 52	$1{,}1 \cdot 10^{-9}$
8	0,693147180559 35	$1{,}0 \cdot 10^{-13}$

Tutti i calcoli sono stati eseguiti operando in virgola mobile in doppia precisione (16 cifre di mantissa), con programmi scritti in linguaggio Fortran IV.

BIBLIOGRAFIA

[1] M., PICONE, *Lezioni di Calcolo Numerico*, « D.U.S.A. » Città Universitaria, Roma 1940-41.

[2] M., PICONE, *Trattato di Matematiche Generali*, Ed. Tuminelli, Roma 1947.