PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

COMMENTARII

VOL. I N. 47

LUIGI BROGLIO

CAMPO FLUIDO SUPERSONICO DIETRO ONDA D'URTO ADERENTE

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

COMMENTARII
Vol. I - N. 47
pag. 1-28

CAMPO FLUIDO SUPERSONICO DIETRO ONDA D'URTO ADERENTE

LUIGI BROGLIO

SOMMARIO — Si analizza il campo fluido supersonico dietro onda d'urto aderente alla prora aguzza di un corpo di forma qualsiasi. Si sviluppa la soluzione in serie di potenze r^n della distanza r dall'estremo della prora, si dimostra che ciascun termine delle serie è indipendente dai successivi e come la soluzione risulti dalla sovrapposizione ad un campo non lineare (campo conico senza simmetria corrispondente a $n = 0$) di successivi campi lineari. Si esamina in particolare il caso di una prora non troppo differente da un corpo di rivoluzione e si dimostra come in tal caso il procedimento si riduca alla integrazione al passo di un certo numero di equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine indipendenti.

INTRODUZIONE

L'analisi del campo supersonico tra la superficie del corpo e l'onda d'urto, supposta aderente alla prora aguzza del corpo stesso, può eseguirsi, come è noto, col metodo delle « caratteristiche ». Il calcolo richiede però di consueto, la conoscenza a « priori » della porzione iniziale del campo fluido, cioè di quella situata nella immediata vicinanza della estremità della prora:

Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gaetano Arturo Crocco il 2 ottobre 1964 durante la Sessione Plenaria della Pontificia Accademia delle Scienze.

di qui l'interesse di un esame il più possibile esatto di tale porzione iniziale del campo fluido.

L'esame anzidetto viene di solito condotto sviluppando in serie di TAYLOR le equazioni del campo fluido nelle vicinanze della estremità della prora. La legittimità di un tale sviluppo costituisce un problema tuttora aperto allo studio matematico.

Il procedimento è stato applicato dal CROCCO [1] al caso bidimensionale prendendo come incognita la funzione di corrente e da SHEN e da LIN [2] al caso assialsimmetrico, prendendo come incognite le componenti della velocità, la pressione e la densità. Nel presente lavoro è stato trattato il caso tridimensionale generale, prendendo come incognite le tre componenti della velocità e la entropia. I vantaggi di una tale scelta di incognite, già dimostrata dal FERRI [3] [4] — nel caso del cono senza simmetria assiale — dal punto di vista della precisione dei risultati, risulta confermato nel presente lavoro poichè la entropia, in ciascun termine dello sviluppo, può ottenersi per integrazione diretta e non è *simultanea* alle altre funzioni incognite.

Nei numeri 1, 2 e 3 vengono indicate le quattro equazioni differenziali che reggono il problema in coordinate polari sferiche; vengono scritte in forma adatta le condizioni generali dell'urto; vengono fornite le regole per lo sviluppo in serie delle relazioni del campo fluido fino ad un qualunque ordine. Ammessa la legittimità dello sviluppo in serie, il procedimento indicato trasforma (N. 4 del lavoro) il campo fluido in una sovrapposizione di campi di tipo « conico » indipendenti cioè dalla variabile r (distanza dall'origine) e tutti definiti nello stesso dominio. Nel N. 5 si tratta il caso particolarmente interessante del campo quasi-assial-simmetrico. Nel N. 6 si considera il problema particolare del campo assial-simmetrico, i risultati del quale differiscono da quelli trovati da SHEN e da LIN nel lavoro citato. La differenza dipende sia dalla anzidetta diversa scelta delle incognite, sia dal diverso procedimento di integrazioni.

N. I. LE EQUAZIONI DEL PROBLEMA — Si consideri un fluido non viscoso e isoenergetico. Le relazioni di definizione:

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$$

$$\frac{\gamma - 1}{R} S = \lg \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{cost.}$$

permettono di esprimere pressione p e densità ρ in termini della velocità del suono a e della entropia S. Si ha infatti:

$$(1) \qquad \begin{cases} \lg p = -\dfrac{S}{R} + \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} \lg a^2 + \text{cost}_1 \\[2ex] \lg \rho = -\dfrac{S}{R} + \dfrac{1}{\gamma - 1} \lg a^2 + \text{cost}_2 \end{cases}$$

Le costanti R e γ sono rispettivamente la costante del gas e il rapporto dei calori specifici di esso.

La equazione di BERNOUILLI, supponendo il moto stazionario, consente inoltre di legare a alla velocità q del fluido:

$$(2) \qquad a^2 = \frac{\gamma - 1}{2} (1 - q^2)$$

Nella (2) si è assunto come unitaria la velocità « limite » di efflusso nel vuoto del gas considerato; la stessa convenzione verrà mantenuta nel seguito del lavoro.

I corpi usati alle velocità supersoniche hanno di solito una prora aguzza O. Si prenda O come origine di un sistema r, η, ω di coordinate sferiche polari di riferimento.

Indicando con u, v, w le componenti della velocità nelle direzioni rispettivamente perpendicolari alle superfiici $r=\text{cost}$, $\eta=\text{cost}$, $\omega=\text{cost}$, le equazioni di EULERO, nella forma di L. CROCCO [1], forniscono, nel caso di coordinate polari sferiche:

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{a^2}{\gamma R}\, r\,\frac{\partial S}{\partial r} = w B - v C\\
&\frac{a^2}{\gamma R}\,\frac{\partial S}{\partial \eta} = u C - w A\\
&\frac{a^2}{\gamma R}\,\frac{\partial S}{\partial \omega}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\eta} = v A - u B
\end{aligned}
\right.
$$

dove le componenti $2\frac{A}{r}, 2\frac{B}{r}, 2\frac{C}{r}$ del vettore *rotazione* sono date da:

$$
(4)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&A = \left[\frac{\partial (w \operatorname{sen}\eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \omega}\right]\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\\
&B = \frac{\partial u}{\partial \omega}\,\frac{1}{\operatorname{sen}\eta} - \frac{\partial (r w)}{\partial r}\\
&C = \frac{\partial}{\partial r}(r v) - \frac{\partial u}{\partial \eta}
\end{aligned}
\right.
$$

D'altro canto la equazione di continuità

$$
\frac{\partial}{\partial r}(\rho u r^2 \operatorname{sen}\eta) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\rho v r \operatorname{sen}\eta) + \frac{\partial}{\partial \omega}(\rho w r) = 0
$$

introducendovi la (1) differenziata lungo una linea di corrente (S = costante) fornisce:

$$\left(u+\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)(a^2-v^2)+\left(u+\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial w}{\partial\omega}\right)(a^2-w^2)+v(a^2+w^2)\operatorname{ctg}\eta+ \tag{5}$$
$$+r\frac{\partial u}{\partial r}(a^2-u^2)-vw\left(A+\frac{2}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial v}{\partial\omega}\right)-uw\left(B+2r\frac{\partial w}{\partial v}\right)+uv\left(C-2r\frac{\partial v}{\partial r}\right)=0$$

Le (3) e la (5), dando ad A, B e C i valori forniti dalle (4), forniscono un sistema di quattro equazioni differenziali nelle quattro funzioni incognite *u, v, w, S*. Appunto da tale sistema di equazioni può farsi dipendere lo studio del problema considerato.

N. 2. LE CONDIZIONI AI LIMITI. — Le condizioni ai limiti sul corpo corrispondono all'annullarsi della componente normale della velocità. Supponendo che il corpo abbia una equazione del tipo $\eta = F(r,\omega)$, la condizione suddetta porge:

$$v=u\frac{\partial F}{\partial r}r+w\frac{\partial F}{\partial\omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta} \tag{6}$$

Si riferisca la superficie dell'urto a tre assi ortogonali quali si vogliono, per esempio alle tre direzioni r, η, ω locali. La normale n all'urto abbia coseni direttori α_r, α_η, α_ω, e formi lo angolo φ con la direzione locale della velocità *prima* dell'urto. Le condizioni fisiche attraverso l'urto conducono allora alle seguenti relazioni

$$
(7)\quad \begin{cases}
u = u^* - \beta q^*(\cos\varphi)\,\alpha_r \\
v = v^* - \beta q^*(\cos\varphi)\,\alpha_\eta \\
w = w^* - \beta q^*(\cos\varphi)\,\alpha_\omega \\
\dfrac{\gamma - 1}{R}(S - S^*) = \gamma \lg (1 - \beta) + \lg \dfrac{2 + (\gamma - 1)\beta}{2 - (\gamma + 1)\beta} \\
\qquad\qquad \beta = \dfrac{2}{\gamma + 1}\left[1 - \dfrac{1}{(M^*)^2 \cos^2\varphi}\right]
\end{cases}
$$

Nelle (7) l'asterisco contrassegna le quantità prima dell'urto, mentre le quantità dopo l'urto, che appartengono al campo fluido che si studia, non hanno, ovviamente, contrassegni speciali. Le prime tre equazioni delle (7) esprimono il fatto che il vettore velocità dopo l'urto è eguale al vettore velocità prima dell'urto sommato al vettore $-\beta\, q^*$ $(\cos\varphi)$ diretto secondo n. La quantità β denota appunto la diminuzione percentuale attraverso l'urto della componente normale $q^* \cos\varphi$ della velocità.

Supponendo, in particolare, che la superficie dell'urto abbia una equazione del tipo $\eta = f(r, \omega)$ e che la velocità prima dell'urto abbia la direzione dell'asse polare ($u^* = q^* \cos\eta$, $v^* = -q^* \operatorname{sen}\eta$, $w^* = 0$) le equazioni (7) divengono rispettivamente:

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{u}{q^*} = \cos\eta - r\,\frac{\partial f}{\partial r}\,\mathrm{K} \\
&\frac{v}{q^*} = -\operatorname{sen}\eta + \mathrm{K} \\
&\frac{w}{q^*} = -\frac{\mathrm{I}}{\operatorname{sen}\eta}\,\frac{\partial f}{\partial \omega}\,\mathrm{K} \\
&\frac{\gamma-\mathrm{I}}{\mathrm{R}}(\mathrm{S}-\mathrm{S}^*) = \gamma \lg\left\{\frac{2}{\gamma+\mathrm{I}}\left(\frac{\mathrm{I}}{(\mathrm{M}^*)^2\cos^2\varphi} + \frac{\gamma-\mathrm{I}}{2}\right)\right\} + \lg\left\{\frac{2\gamma}{\gamma+\mathrm{I}}\left[(\mathrm{M}^*)^2\cos^2\varphi - \frac{\gamma-\mathrm{I}}{2\gamma}\right]\right\} \\
&\cos^2\varphi = \frac{\left(\operatorname{sen}\eta + r\,\dfrac{\partial f}{\partial r}\cos\eta\right)^2}{\mathrm{I} + \left(r\,\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{\mathrm{I}}{\operatorname{sen}^2\eta}\left(\dfrac{\partial f}{\partial \omega}\right)^2} \\
&\qquad\qquad\qquad \mathrm{K} = \frac{(\cos^2\varphi) - \dfrac{\mathrm{I}}{(\mathrm{M}^*)^2}}{\operatorname{sen}\eta + r\,\dfrac{\partial f}{\partial r}\cos\eta}\,\frac{2}{\gamma+\mathrm{I}}
\end{aligned}
\right.
$$

N. 3. Riduzione del problema a campi di tipo « conico ». — Nelle equazioni (3) (4) (5) e nelle condizioni ai limiti (6) (8), ciascuna derivata rispetto ad r risulta moltiplicata per r. Supponendo che le derivate anzidette si mantengano limitate per r tendente allo zero, la forma limite delle (3) (4) (5) (6) (8), per r evanescente, non contiene derivate rispetto ad r e coincide con le equazioni del campo « conico » attorno al cono tangente nella origine al corpo considerato. Chiamando per semplicità « forma limite di ordine *zero* delle equazioni del moto » quella dianzi descritta, si potrà concludere che, con le limitazioni indicate, i valori u_0 (η, ω), v_0 (η, ω), w_0 (η, ω), S_0 (η, ω) assunti rispettivamente da u, v, w, S nella zona di campo fluido prossima alla origine, possono ottenersi integrando, rispetto η e ω, le equazioni (3) (4) (5) (6) (8) nella forma limite di ordine zero, e ciò indipendentemente da quanto accade nel resto del campo fluido.

Il ragionamento precedente può estendersi con facilità.

Si supponga di derivare rispetto a r, termine a termine, le relazioni (3) (4) (5) (6) (8) ottenendo delle nuove relazioni che si indicheranno rispettivamente con (3') (4') (5') (6') (8'). Naturalmente nel derivare le (6) e (8) bisognerà tenere conto che esse sono valide rispettivamente lungo il corpo $\eta = F\ (r, \omega)$ e lungo la superficie d'urto $\eta = f\ (r, \omega)$; derivare rispetto ad r le (6) e le (8) significa dunque applicare ad esse, rispettivamente, il fattore differenziale $\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial F}{\partial r}$ ovvero $\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial r}$.

Ciò posto si osservi che nelle (3') (4') (5') (6') (8') ciascuna derivata seconda rispetto ad r risulta moltiplicata per r. Supponendo che le menzionate derivate seconde si mantengano limitate per r tendente allo zero, la forma limite delle (3') (4') (5') (6') (8') per r evanescente — che si potrà chiamare forma limite di ordine *uno* delle equazioni del moto — non conterrà alcuna derivata seconda rispetto ad r, e cioè conterrà come sole funzioni incognite $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial S}{\partial r}$ Di conseguenza si può concludere che i valori u_1 (η, ω), v_1 (η, ω), w_1 (η, ω), S_1 (η, ω) assunti rispettivamente dalle funzioni incognite $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial S}{\partial r}$ nella zona di campo fluido prossima alla origine $(r \to 0)$ possono ottenersi integrando, rispetto a η e ω, la forma limite di ordine uno delle equazioni del moto, e ciò *indipendentemente* da quanto accade nel resto del campo fluido.

In generale, supponendo che le derivate di u, v, w, S rispetto ad r, per r evanescente, siano limitate fino all'ordine n, si potranno derivare 1, 2, ... n volte rispetto ad r le equazioni del moto (3) (4) (5) ed applicare 1, 2, ... n volte il fattore differenziale $\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial F}{\partial r}$ alla (6) e il fattore $\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial r}$ alle (8).

Facendo tendere r a zero, si ottengono in corrispondenza le forme limite di ordine 1, 2, ... n delle equazioni del moto.

La forma limite di ordine s contiene come sole funzioni incognite

$$\frac{\partial^s u}{\partial r^s}, \quad \frac{\partial^s v}{\partial r^s}, \quad \frac{\partial^s w}{\partial r^s}, \quad \frac{\partial^s S}{\partial r^s}$$

Cosicchè le integrazioni successive della forma limite di ordine zero, uno, ... n delle equazioni del moto permettono di ottenere successivamente le espressioni per r tendente a zero di u, v, w, S; $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial S}{\partial r}; \ldots \frac{\partial^n u}{\partial r^n}, \frac{\partial^n v}{\partial r^n} \frac{\partial^n w}{\partial r^n} \frac{\partial^n S}{\partial r^n}$.

Naturalmente, con le limitazioni indicate, la conoscenza di u, v, w, S, e delle successive n derivate rispetto ad r nella origine permette di costruire il campo fluido, con un certo grado di approssimazione, in una zona finita a partire dall'origine.

Col procedimento indicato lo studio del campo a tre dimensioni si riduce all'esame di campi fluidi di tipo conico e cioè ciascuno indipendentemente da r. Anzi, come è facile verificare, se il campo conico di ordine zero non è lineare, i campi corrispondenti alle forme limite di ordine uno, due, ecc. sono tutti lineari. Si osservi inoltre che il dominio $(\eta\ \omega)$ al quale i campi ora detti si riferiscono è uguale per tutti. Esso è definito da $0<\omega<2\pi$; $\eta_b(\omega)<\eta(\omega)<\eta_s(\omega)$ essendo $\eta=\eta_b$ e $\eta=\eta_s$ rispettivamente le equazioni del cono tangente nella origine del corpo e del cono tangente nella origine alla superficie d'urto.

A titolo di esempio il procedimento viene applicato per determinare le relazioni che definiscono il campo conico di ordine zero e il campo conico di ordine uno.

N. 4. CAMPO CONICO DI ORDINE ZERO E CAMPO CONICO DI ORDINE UNO. — Come detto al numero precedente, le equazioni del campo conico di ordine zero si ottengono dalle equazioni generali (3) (4) (5) (6) (8) facendovi tendere r a zero. Si ottiene così:

$$(3_0)\qquad \begin{cases} w_0 B_0 - v_0 C_0 = 0 \\ \dfrac{a_0^2}{R\gamma}\dfrac{\partial S_0}{\partial \eta} = u_0 C_0 - w_0 A_0 \\ \dfrac{a_0^2}{\gamma R}\dfrac{\partial S_0}{\partial \omega}\dfrac{1}{\operatorname{sen}\eta} = v_0 A_0 - u_0 B_0 \end{cases}$$

$$(5_0)\qquad \begin{aligned} &\left(u_0+\frac{\partial v_0}{\partial \eta}\right)(a_0^2-v_0^2)+\left(u_0+\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial w_0}{\partial \omega}\right)(a_0^2-w_0^2)+v_0(a_0^2+w_0^2)\operatorname{cotg}\eta- \\ &\qquad -(v_0 w_0)\left(A_0+\frac{2}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial v_0}{\partial \omega}\right)=0 \end{aligned}$$

$$(6_0)\qquad \left.\begin{array}{l} \text{per } \eta=\eta_b: \\ v_0=\dfrac{w_0\,\dot\eta_b}{\operatorname{sen}\eta_b} \end{array}\right\}\qquad \left(\dot\eta_b=\frac{d\eta_b}{d\omega}\right)$$

per $\eta = \eta_s$:

$$
(8_0)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{u_0}{q^*} = \cos \eta_s \\
&\frac{v_0}{q^*} = (\operatorname{sen} \eta_s)\left\{-1 + \frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{1}{1+\left(\dfrac{\dot\eta_s}{\operatorname{sen} \eta_s}\right)^2} - \frac{1}{M^2_* \operatorname{sen}^2 \eta_s}\right)\right\} \\
&\frac{w_0}{q^*} = -\frac{2\dot\eta_s}{\gamma+1}\left\{\frac{1}{1+\left(\dfrac{\dot\eta_s}{\operatorname{sen} \eta_s}\right)^2} - \frac{1}{M_*^2 \operatorname{sen}^2 \eta_s}\right\} \\
&\frac{\gamma-1}{R}(S-S^*) = \log\left\{\frac{2\gamma M_*^2}{\gamma+1}\,\frac{\operatorname{sen}^2 \eta_s}{1+\left(\dfrac{\dot\eta_s}{\operatorname{sen} \eta_s}\right)^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right\} + \\
&\qquad + \gamma \log\left\{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1}\,\frac{1+\left(\dfrac{\dot\eta_s}{\operatorname{sen} \eta_s}\right)^2}{M_*^2 \operatorname{sen}^2 \eta_s}\right\} \; ; \quad \left(\dot\eta_s = \frac{d\eta_s}{d\omega}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

in cui:

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&a_0^2 = \frac{\gamma-1}{2}\left(1 - u_0^2 - v_0^2 - w_0^2\right) \\
&A_0 = \frac{1}{\operatorname{sen} \eta}\left(w_0 \cos \eta + \operatorname{sen} \eta \frac{\partial w_0}{\partial \eta} - \frac{\partial v_0}{\partial \omega}\right) \\
&B_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \omega}\,\frac{1}{\operatorname{sen} \eta} - w_0 \\
&C_0 = v_0 - \frac{\partial u_0}{\partial \eta}
\end{aligned}
\right.
$$

inoltre q^* ed S^* indicano la velocità ed entropia della corrente prima dell'urto.

Le equazioni (3) (5) (6) (8) colle notazioni (9) costituiscono un sistema differenziale non lineare nelle quattro funzioni incognite

$$u_0(\eta, \omega), \; v_0(\eta, \omega), \; w_0(\eta, \omega) \; S_0(\eta, \omega)$$

Si tratta del problema del campo fluido intorno al cono di equazione $\eta_b = \eta_b(\omega)$, investito dalla corrente fluida di velocità q^*.

Le equazioni del campo conico di ordine uno, sempre secondo le indicazioni del numero precedente, si ottengono derivando le (3) (4) (5) (6) rispetto ad r, e ponendovi $r=0$; e applicando l'operatore $\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial r}\right)$ alle condizioni ai limiti relative all'urto, e l'operatore $\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial F}{\partial r}\right)$ alle condizioni ai limiti relative al corpo, e ponendo $r=0$ nelle condizioni ai limiti così trasformate.

Si ottengono allora le equazioni del campo conico di ordine uno nella forma:

$$(3')\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\gamma-1}{2\gamma R}(1-u_o-v_o^2-w_o^2)S_1+\left(3v_o-\frac{\partial u_o}{\partial\eta}\right)v_1+\left(3w_o-\frac{\partial u_o}{\partial\omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\right)+\\
&-v_o\frac{\partial u_1}{\partial\eta}-\frac{w_o}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial u_1}{\partial\omega}=0\\
&\frac{\gamma-1}{2\gamma R}\left\{1-u_o^2-v_o^2-w_o^2\right\}\frac{\partial S_1}{\partial\eta}+\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma R}u_o\frac{\partial S_o}{\partial\eta}-v_o+\frac{\partial u_o}{\partial\eta}\right)u_1+\\
&+\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma R}v_o\frac{\partial S_o}{\partial\eta}-2u_o\right)v_1+\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma R}w_o\frac{\partial S_o}{\partial\eta}+\frac{\partial w_o}{\partial\eta}+2w_o\operatorname{cotg}\eta-\frac{\partial v_o}{\partial\omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\right)w_1+\\
&\qquad+u_o\frac{\partial u_1}{\partial\eta}-\frac{w_o}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial v_1}{\partial\omega}+w_o\frac{\partial w_1}{\partial\eta}=0\\
&\frac{\gamma-1}{2\gamma R}\left\{1-u_o^2-v_o^2-w_o^2\right\}\frac{\partial S_1}{\partial\omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}+\\
&+u_1\frac{\gamma-1}{\gamma R}+u_1\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma R}\frac{\partial S_o}{\partial\omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}-w_o\operatorname{cotg}\eta-\frac{\partial w_o}{\partial\eta}+\frac{\partial v_o}{\partial\omega}\right)+\\
&\qquad+v_1\left(-\frac{\gamma-1}{\gamma R}w_o\frac{\partial S_o}{\partial\omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}-v_o\operatorname{cotg}\eta-2u_o\right)+\\
&+\frac{\partial u_1}{\partial\omega}\frac{u_o}{\operatorname{sen}\eta}+\frac{v_o}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial v_1}{\partial\omega}-v_o\frac{\partial w_1}{\partial\eta}=0
\end{aligned}\right.$$

$$(5')\quad u_1\left[3\frac{\gamma-1}{2}-\frac{7\gamma-5}{2}u_o^2-\frac{3\gamma-1}{2}v_o^2-\frac{3\gamma-1}{2}w_o^2-(\gamma-1)u_o\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}(v_o\operatorname{sen}\eta)+\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial w_o}{\partial\omega}\right\}\right]+$$

$$+v_1\left[\left(\frac{\gamma+1}{2}-\frac{\gamma-1}{2}u_o^2+\frac{\gamma-1}{2}w_o^2-3\frac{\gamma-1}{2}v_o^2\right)\operatorname{cotg}\eta-(2\gamma-1)u_ov_o-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}(u_o^2+v_o^2+w_o^2)-v_o\left(\gamma\frac{\partial v_o}{\partial\eta}+(\gamma-1)\frac{\partial w_o}{\partial\omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\right)-\frac{w_o}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial v_o}{\partial\omega}\right]+$$

$$+w_1\left[-(2\gamma-1)u_ow_o-(\gamma+1)v_ow_o\operatorname{cotg}\eta-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\omega}(u_o^2+v_o^2+w_o^2)\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}-\right.$$

$$\left.-v_o(\gamma-1)\left(\frac{\partial v_o}{\partial\eta}+\gamma\frac{\partial w_o}{\partial\omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\right)-v_o\frac{\partial w_o}{\partial\eta}\right]-$$

$$-\frac{\partial u_1}{\partial \omega}\frac{v_0 w_0}{\operatorname{sen}\eta}-u_0 v_0\frac{\partial u_1}{\partial \eta}+(a_0^2-v_0^2)\frac{\partial v_1}{\partial \eta}-\frac{v_0 w_0}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial v_1}{\partial \omega}-$$

$$-v_0 w_0\frac{\partial w_1}{\partial \eta}+\frac{a_0^2-w_0^2}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial w_1}{\partial \omega}=0$$

per $\eta=\eta_s$

$$\frac{u_1+\eta_{s1}\dfrac{\partial u_0}{\partial \eta}}{q^*}=-(\eta_{s1}\operatorname{sen}\eta_s)\left\{1+\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{1}{1+\left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}\right)^2}-\frac{1}{(M^*)^2\operatorname{sen}^2\eta_s}\right)\right\}$$

$$\frac{v_1+\eta_{s1}\dfrac{\partial v_0}{\partial \eta}}{q^*}=\eta_{s1}(\rho_0-\cos\eta_s)\,\dot{\eta}_{s1}\,\sigma_0$$

$$\frac{w_1+\eta_{s1}\dfrac{\partial w_0}{\partial \eta}}{q^*}=\eta_{s1}\left[\frac{-\rho_0\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}+\frac{2\dot{\eta}_s\cos\eta_s}{(\gamma+1)\operatorname{sen}\eta_s}\left\{\frac{1}{1+\left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}\right)^2}-\frac{1}{(M^*)^2\operatorname{sen}\eta_s}\right]\right\}+$$

$$+\dot{\eta}_{s1}\left[\frac{\sigma_0\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}-\frac{2}{\gamma+1}\left\{\frac{1}{1+\left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}\right)^2}-\frac{1}{(M^*)^2\operatorname{sen}^2\eta_s}\right\}\right]$$

(8')

$$\frac{\gamma-1}{R}\left\{S_1+\dot{\eta}_{s1}\frac{\partial S_0}{\partial \eta}\right\}=\eta_{s1}\left[\frac{4\cos\eta_s}{(\gamma+1)(M^*)^2\operatorname{sen}^5\eta_s}(3\dot{\eta}_s^2+2\operatorname{sen}^2\eta_s)\times\right.$$

$$\left.\times\left\{\frac{\gamma(M^*)^2}{\dfrac{2\gamma}{\gamma+1}-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\dfrac{1}{(M^*)^2}\dfrac{1+\left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}\right)^2}{\operatorname{sen}^2\eta_s}}\frac{\operatorname{sen}^2\eta_s}{1+\left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}\right)^3}-\frac{1}{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}+\dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{1+\left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}\right)^2}{(M^*)^2\operatorname{sen}^2\eta_s}}\right\}\right]+$$

$$+\dot{\eta}_{s1}\left[-\frac{4\dot{\eta}_s}{(\gamma+1)M^{*2}\operatorname{sen}^4\eta_s}\left\{\frac{\gamma M^{*2}\operatorname{sen}^2\eta_s}{\dfrac{2\gamma}{\gamma+1}-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\dfrac{1}{M^2_*}\dfrac{1+\left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}\right)^2}{\operatorname{sen}^2\eta_s}}\times\frac{1}{1+\left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}\right)^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}+\dfrac{2}{\gamma+1}\dfrac{1+\left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen}\eta_s}\right)^2}{M^{*2}\operatorname{sen}^2\eta_s}}\right\}\right]$$

$$(6') \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{per} \quad \eta = \eta_b \qquad \left(\dot{\eta}_b = \dfrac{d\eta_b}{dw}\right) \\ v_1 + \eta_b \dfrac{\partial v_0}{\partial \eta} = u_0 \eta_{bb_1} + \dfrac{1}{\operatorname{sen} \eta_i} (w_1 \eta_b + b_1 w_0 \dot{\eta}_b \operatorname{cotg} \eta_b \end{array} \right.$$

essendo

$$\rho_0 = \frac{\dfrac{4 \cos \eta_b}{\gamma + 1}\left(1 - \dfrac{1}{M^{*2} \operatorname{sen}^2 \eta_b}\right)}{1 + \left(\dfrac{\dot{\eta}_b}{\operatorname{sen} \eta_s}\right)^2} + \frac{8 \cos \eta_s}{(\gamma + 1) M^{*2} \operatorname{sen}^2 \eta_s} +$$

$$+ \frac{4}{\gamma + 1} \frac{\tilde{\eta}_s^2 \cos \eta_i}{\operatorname{sen} \eta_s} \left\{ \frac{1}{\left[\left(1 + \dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen} \eta_s}\right)^2\right]^2} - \frac{1}{M^{*2} \operatorname{sen}^2 \eta_s \left(1 + \dfrac{\dot{\eta}_s^2}{\operatorname{sen} \eta_s}\right)} \right\}$$

$$\sigma_0 = \left[\frac{4 \dot{\eta}_s}{(\gamma + 1) M^{*2} \operatorname{sen}^3 \eta_s} + \frac{4 \dot{\eta}_s}{(\gamma + 1) \operatorname{sen} \eta_s} \left(\frac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen} \eta_s}\right)^2\right]^2} - \frac{\dfrac{1}{M^{*2} \operatorname{sen}^3 \eta_s}}{1 + \left(\dfrac{\dot{\eta}_s}{\operatorname{sen} \eta_s}\right)^2} \right) \right]$$

in cui coi simboli $u_1\ (\eta, \omega)$, $v_1\ (\eta, \omega)$, $w_1\ (\eta, \omega)$ $S_1\ (\eta, \omega)$ si sono indicate le derivate $\dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial v}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial S}{\partial r}$ calcolate per per $r = 0$) e coi *simboli* η_{b1} ed η_{s1} si sono indicate le derivate (calcolate per $r = 0$) $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial r}$ delle espressioni rispettivamente delle superfici d'urto e del corpo.

Le (3') (5') (6') (8'), come già anticipato al n. 3, contengono linearmente le funzioni incognite (1) e una circostanza analoga, come sarebbe facile provare, si verifica per tutti i campi conici di ordine superiore al primo.

(1) Ovviamente, i coefficienti delle incognite contengono le quantità u_o, v_o, w_o, S_o e loro derivate, che però si intendono già calcolate tramite la integrazione del campo conico di ordine zero.

Si rileva perciò, come anticipato al n. 3, che il metodo in parola trasforma il campo fluido supersonico dietro un'onda d'urto attaccata, nello studio di un campo conico (d'ordine zero) non lineare, e di campi conici (di ordine maggiore di zero), tutti lineari.

N. 5. IL CAMPO QUASI ASSIAL-SIMMETRICO. — Le equazioni del moto assial-simmetrico si ottengono facilmente dalla forma generale (3) (4) (5) (6) (8) ponendovi $w=0$, e annullando tutte le derivate rispetto ω.

Particolarmente interessante, dal punto di vista applicativo, si presenta il caso in cui il moto avvenga in maniera « poco diversa » (espressione che verrà meglio precisata nel seguito) da quello assial-simmetrico. A questo caso è dedicato il presente paragrafo.

Per tale applicazione, si suppone che w e le derivate rispetto ad ω siano piccole del 1° ordine, in modo che i loro quadrati siano trascurabili.

Conviene, nello studio del campo quasi assial-simmetrico, trasformare opportunamente le equazioni del moto. A tale scopo:

a) si ricavi il termine vC dalla (3) e lo si sostituisca nella (5);

b) si moltiplichi la prima delle (3) per u e la seconda delle (3) per v e si sommino le equazioni così ottenute;

c) si lascino inalterate la 1ª e la 3ª delle (3).

Tenendo conto della supposta piccolezza della w e delle derivate rispetto ω, si ottengono le equazioni del moto quasi assial-metrico:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\left(u+\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)(a^2-v^2)+a^2(u+v\operatorname{cotg}\eta)+\frac{a^2}{\operatorname{sen}\eta}\frac{\partial w}{\partial \omega}+\\ &+r\left[\frac{\partial u}{\partial r}(a^2-u^2)-\frac{a^2 u}{\gamma R}\frac{\partial S}{\partial r}-2uv\frac{\partial v}{\partial r}\right]=0 \end{aligned}$$

$$(11) \qquad ur\frac{\partial S}{\partial r} + v\frac{\partial S}{\partial \eta} = 0$$

$$(12) \qquad v\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - v\right) = r\left(v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{a^2}{\gamma R}\frac{\partial S}{\partial r}\right)$$

$$(13) \qquad \begin{aligned} \frac{a^2}{\gamma R}\frac{\partial S}{\partial \omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta} &= v\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\operatorname{cotg}\eta - \frac{\partial v}{\partial \omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}\right) + \\ &- u\left(\frac{\partial u}{\partial \omega}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta} - w - r\frac{\partial w}{\partial r}\right). \end{aligned}$$

con le condizioni ai limiti

sul corpo:

$$(14) \qquad v = ur\frac{\partial F}{\partial r}$$

sull'urto:

$$(15) \qquad \begin{aligned} \frac{u}{q^*} &= \cos\eta - rk\frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{v}{q^*} &= -\operatorname{sen}\eta + k \end{aligned}$$

$$\frac{w}{q^*} = -\frac{1}{\operatorname{sen}\eta}k\frac{\partial f}{\partial \omega} \quad ; \quad \frac{\gamma - 1}{R}(S - S^*) = \gamma \lg(1-\beta) + \lg\frac{2 + (\gamma-1)\beta}{2 - (\gamma+1)\beta}$$

con

$$k = \frac{2}{\gamma + 1}\frac{\cos^2\varphi - \left(\frac{1}{M^*}\right)^2}{\operatorname{sen}\eta + r\frac{\partial f}{\partial r}\cos\eta}$$

e

$$\cos^2 \varphi = \frac{\left(\operatorname{sen} \eta + r \dfrac{\partial f}{\partial r} \cos \eta\right)^2}{1 + r^2 \left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)^2}$$

Per risolvere il problema in parola si ponga:

$$(16) \qquad \begin{aligned} u(r, \eta, \omega) &= u'(r, \eta) + \bar{u}(r, \eta, \omega) \\ v(r, \eta, \omega) &= v'(r, \eta) + \bar{v}(r, \eta, \omega) \\ w(r, \eta, \omega) &= \bar{w}(r, \eta, \omega) \\ S(r, \eta, \omega) &= S'(r, \eta) + \bar{S}(r, \eta, \omega) \\ f(r, \eta, \omega) &= f'(r, \eta) + \bar{f}(r, \eta, \omega) \\ \bar{F}(r, \eta, \omega) &= F'(r, \eta) + \bar{F}(r, \eta, \omega) \end{aligned}$$

ossia si indichino con l'apice le quantità relative al caso assial-simmetrico, e con la lineetta le « correzioni » rispetto a tale caso, che si suppongono piccole del primo ordine.

Introducendo allora le (16) nelle (10) (11) (12) (13) (14) e identificando i termini di ordine zero (cioè quelli che contengono solo le quantità con apice) e quelli di ordine uno (cioè quelli che contengono le quantità con la lineetta) si ottengono i seguenti due sistemi differenziali.

1) *Caso assial-simmetrico*

$$(10') \qquad \begin{aligned} &\left(u' + \frac{\partial v'}{\partial \eta}\right)(a'^2 - v'^2) + a'^2 (u' + v' \operatorname{cotg} \eta) + r \left[(a'^2 - u'^2) \frac{\partial u'}{\partial r} + \right. \\ &\left. - \frac{a'^2}{\gamma R} \frac{\partial S'}{\partial r} u' - 2 u' v' \frac{\partial v'}{\partial r}\right] = 0 \end{aligned}$$

$$(11') \qquad r u' \frac{\partial S'}{\partial r} + v' \frac{\partial S'}{\partial \eta} = 0$$

$$(12') \qquad v'\left(\frac{\partial u'}{\partial \eta} - v'\right) = r\left(v' \frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{a'^2}{\gamma R} \frac{\partial S'}{\partial r}\right)$$

2) *Correzione*

$$(\overline{10}) \qquad \begin{aligned} &\bar{u}\left[2a'^2 - v'^2 - (\gamma-1)\, u'\left(2u' + \frac{\partial v'}{\partial \eta} + v' \operatorname{cotg} \eta - \frac{r u'}{\gamma R} \frac{\partial S'}{\partial r} + r \frac{\partial u'}{\partial r}\right) + \frac{a'^2 r}{\gamma R} \frac{\partial S'}{\partial r} + \right. \\ &\left. - r \frac{\partial}{\partial r}(u'^2 + v'^2)\right] + \bar{v}\left[-(\gamma-1)\, v'\left(2u' + \frac{\partial v'}{\partial \eta} + v' \operatorname{cotg} \eta - \frac{u' r}{\gamma R} \frac{\partial S'}{\partial r} + r \frac{\partial u}{\partial r}\right)\right. \\ &\left. - 2v'\left(u' + \frac{\partial v'}{\partial \eta}\right) - 2u' \frac{\partial v'}{\partial r}\right] + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} r (a'^2 - u'^2) - 2u' v' r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \\ &+ (a'^2 - v'^2) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} + \frac{a'^2}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \omega} - \frac{a'^2 u'}{\gamma R} \frac{\partial \bar{S}}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

$$(\overline{11}) \qquad r u' \frac{\partial \bar{S}}{\partial r} + \bar{v} \frac{\partial S'}{\partial \eta} + r \bar{u} \frac{\partial S'}{\partial r} + v' \frac{\partial \bar{S}}{\partial \eta} = 0$$

$$(\overline{12}) \qquad \begin{aligned} &\bar{u}\left[\frac{\gamma-1}{\gamma R} r u' \frac{\partial S}{\partial r}\right] + \bar{v}\left[\frac{\partial u'}{\partial \eta} - 2v' - r \frac{\partial v'}{\partial \eta} + \frac{\gamma-1}{\gamma R} v' \frac{\partial S}{\partial r} r\right] + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} - \\ &- r v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{r a'^2}{\gamma R} \frac{\partial \bar{S}}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

$$(\overline{13}) \qquad \begin{aligned} &\bar{w}(v' \operatorname{cotg} \eta + u') - \frac{u'}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \omega} - \frac{v'}{\operatorname{sen} \eta} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \omega} + v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} + r u' \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \\ &- \frac{a'^2}{\gamma R} \frac{\partial \bar{S}}{\partial \omega} \frac{1}{\operatorname{sen} \eta} = 0 \end{aligned}$$

con le condizioni ai limiti.

1) Caso assial-simmetrico

(14) $a)$ sul corpo $v' = u' \, r \, \dfrac{\partial F'}{\partial r}$

$b)$ sull'urto $\dfrac{u'}{q^*} = \cos \eta' - k' r \dfrac{\partial f'}{\partial r}$

$$\frac{v'}{q^*} = -\operatorname{sen} \eta' + k'$$

(15′)
$$\frac{\gamma - 1}{\gamma R}(S' - S^*) = \gamma \lg (1 - \beta') + \lg \frac{2 + (\gamma - 1)\beta'}{2 - (\gamma + 1)\beta}$$

$$\frac{\gamma + 1}{2} \beta' = 1 - \frac{1}{M^{*2}} \frac{1 + r^2 \left(\dfrac{\partial f'}{\partial r}\right)^2}{\left[\dfrac{\partial}{\partial r}(r \operatorname{sen} \eta')\right]^2}$$

essendo

$$\cos^2 \varphi' = \frac{\left(\operatorname{sen} \eta' + r \dfrac{\partial f'}{\partial r} \cos \eta'\right)^2}{1 + r^2 \left(\dfrac{\partial f'}{\partial r}\right)^2}$$

$$k' = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\cos^2 \varphi' - \dfrac{1}{M^{*2}}}{\operatorname{sen} \eta' + r \dfrac{\partial f}{\partial r} \cos \eta'}$$

2) Correzione

$a)$ sul corpo $\bar{v} + \bar{F} \dfrac{\partial v'}{\partial \eta} = r \left\{ u' \dfrac{\partial \bar{F}}{\partial r} + \left(\bar{u} + \dfrac{\partial u'}{\partial \eta} \bar{F}\right) + \dfrac{\partial F'}{\partial r} \right\}$ $(\overline{14})$

b) sull'urto
$$\frac{\bar{u}}{q^*} = -\bar{\eta}\,\mathrm{sen}\,\eta - r\left(\bar{k}\frac{\partial f'}{\partial r} + k'\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\right)$$

$$\frac{\bar{v}}{q^*} = -\bar{\eta}\cos\eta' + \bar{k}$$

$$\frac{\omega}{q^*} = -\frac{k'}{\mathrm{sen}\,\eta'}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \omega}$$

$$(\overline{15})\qquad \frac{\gamma-1}{\gamma R}\bar{S} = \frac{\gamma\bar{\beta}}{1-\beta'} + \frac{(\gamma-1)\beta}{2+(\gamma-1)\beta'} - \frac{2(\gamma+1)\beta}{2-(\gamma+1)\beta}$$

$$-2\bar{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi'\cos\varphi' = -2r^2\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\left(\mathrm{sen}\,\eta'+r\dfrac{\partial f'}{\partial r}\cos\eta'\right)^2}{\left[1+\gamma^2\left(\dfrac{\partial f'}{\partial r}\right)^2\right]}\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}$$

$$+2\frac{\mathrm{sen}\,\eta'+r\cos\eta'\dfrac{\partial f}{\partial r}}{1+r^2\left(\dfrac{\partial f'}{\partial r}\right)^2}\left(\bar{\eta}\cos\eta'+r\left\{\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\cos\eta'-\bar{\eta}\,\mathrm{sen}\,\eta'\frac{\partial f'}{\partial r}\right\}\right)$$

$$\bar{k} = -\left\{\left(\cos\varphi'-\frac{1}{M^{*2}}\right)\frac{\bar{\eta}\cos\eta'+r\left(\cos\eta'\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial r}-\bar{\eta}\,\mathrm{sen}\,\eta'\dfrac{\partial f'}{\partial r}\right)}{\left(\mathrm{sen}\,\eta'+r\dfrac{\partial f}{\partial r}\cos\eta'\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\bar{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\varphi'\cos\varphi'}{\mathrm{sen}\,\eta'+r\dfrac{\partial f}{\partial r}\cos\eta'}\right\}$$

$$\frac{\gamma+1}{2}\bar{\beta} = -\frac{1}{M^{*2}\left(\operatorname{sen}\eta' + \frac{\partial f'}{\partial r}\cos\eta'\right)^2}\left[2r^2\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial \bar{f}}{\partial r} - 2\left[1 + r^2\left(\frac{\partial f'}{\partial r}\right)^2\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\bar{\eta}\cos\eta' + r\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial r}\cos\eta' - \bar{\eta} - \frac{\partial f'}{\partial r}\operatorname{sen}\eta'\right)}{\operatorname{sen}\eta' + \frac{\partial f}{\partial r}\cos\eta'}\right]$$

Si ottengono cioè le equazioni (non lineari) del campo assialsimmetrico [1] (10') (11') (12') (13') (15') e quelle (lineari nelle $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{S}$) della correzione $(\overline{10})$ $(\overline{11})$ $(\overline{12})$ $(\overline{13})$ $(\overline{14})$ $(\overline{15})$.

Per queste ultime è immediata la riduzione alle due sole variabili r ed η.

Si osserva infatti che le $(\overline{10})$ $(\overline{11})$ $(\overline{12})$ $(\overline{13})$ contengono delle derivate rispetto ω, solo $\frac{\partial \bar{u}}{\partial \omega}$, $\frac{\partial v}{\partial \omega}$; per cui, se si pone:

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= u^*_n(r, \eta)\operatorname{sen} n\omega \\
\bar{v} &= v_n^*(r, \eta)\operatorname{sen} n\omega \\
\bar{w} &= w_n^*(r, \eta)\operatorname{sen} n\omega \\
\bar{S} &= S_n^*(r, \eta)\operatorname{sen} n\omega \\
\bar{f} &= f_n^*(r, \eta)\operatorname{sen} n\omega
\end{aligned}$$

le $(\overline{10})$ $(\overline{11})$ $(\overline{12})$ $(\overline{13})$ si riducono a contenere solo funzioni di r e η. Nelle (15), poi, solo la equazione $\frac{\bar{w}}{q^*} = -\frac{k'}{\operatorname{sen}\eta'}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \omega}$ contiene derivate rispetto a ω, ma anch'essa si riduce subito a contenere solo funzioni di r ed η.

---

[1] Ovviamente le equazioni indefinite si riducono a tre perchè manca la incognita w. Una analoga riduzione si ha nelle condizioni ai limiti.

Cose del tutto analoghe si verificano se nella (17) si cambiano tra loro le funzioni sen $n\,\omega$ e cos $n\,\omega$ [1].

Si ha quindi che la soluzione può mettersi nella forma:

$$\bar{u} = \sum_{1}^{\infty} u_n^*(r, \eta) \operatorname{sen} n\,\omega + \sum_{0}^{\infty} u_n^*(r, \eta) \cos n\,\omega$$

con forme analoghe per $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{S}$. Ciascuna delle funzioni u, v etc., risulta dalla integrazione di un campo lineare di tipo assial-simmetrico.

Risulta perciò che il campo assial-simmetrico può studiarsi come somma di un campo assial-simmetrico (di ordine zero) non lineare, e di campi lineari assial-simmetrici (di ordine maggiore di zero).

N. 6. CAMPO ASSIAL-SIMMETRICO. — Il problema è detto dalle equazioni (10') (11') (12') con le condizioni ai limiti (14') (15').

Si applichi il metodo di separazione in campi di tipo conico visto al N. 3. I valori $u_0(\eta)$, $v_0(\eta)$, $S_0(\eta)$ di u, v, S per r tendente a zero sono forniti dalla integrazione del ben noto campo conico assial-simmetrico:

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} & S_0 = \text{vost.} \\ & \frac{du}{d\eta} - v_0 = 0 \\ & \left(u_0 + \frac{dv_0}{d\eta}\right)(a_0^2 - v_0^2) + a_0^2\,(u_0 + v_0 \operatorname{cotg} \eta) = 0 \end{aligned}\right.$$

con le condizioni ai limiti

[2] Per brevità si rinuncia a scrivere le equazioni così ottenute.

per

$$\eta = \eta_b \qquad v_o = 0 \tag{19}$$

per $\eta = \eta_s$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{u_o}{q^*} = \cos\eta_s \\
&\frac{v}{q^*} = -\operatorname{sen}\eta_s + \frac{2}{\gamma+1}\left(\operatorname{sen}\eta_s - \frac{1}{(M^*)^2}\frac{1}{\operatorname{sen}\eta_s}\right) \\
&\frac{\gamma-1}{R}(S'_o - S^*) = \gamma \lg\left(\frac{2}{\gamma+1}\frac{1}{M^{*2}}\frac{1}{\operatorname{sen}'\eta_s}\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \\
&\qquad + \lg\left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} M^{*2}\operatorname{sen}^2\eta_s - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Per calcolare i valori $u\ (\eta)$, $v\ (\eta)$, $S\ (\eta)$ della funzione $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial v}{\partial r}, \frac{\partial s}{\partial r}$ per r tendente a zero, si ponga $u_, = \alpha\ (\eta)\ c_s$, $v_1 = \beta_1\ (\eta)$ e $S_s = \sigma_1\ (\eta)\ c_s$, essendo $c_s = -\eta$, il valore della curvatura dell'onda d'urto per r tendente a zero.

Si ha allora

$$\left\{\begin{aligned}
&u_o\,\sigma_1\,v_o\frac{d\sigma_1}{d\eta} = 0 \\
&2\beta_1 - \frac{d\alpha_1}{d\eta} + \frac{a_o^2}{\gamma R}\sigma_1 = 0 \\
&\left(\alpha_1 + \alpha\frac{d\beta_1}{d\eta}\right) a_o^2 - v_o^2) - \alpha_1 F_o\,\eta + \beta_1 G_o(\eta) - \frac{u_o\,a_o^2}{\gamma R}\,\sigma_o = 0
\end{aligned}\right. \tag{21}$$

$$F_o(\eta) - 5a_o^2 - 2u_o^2 - v_o^2 - 2(\gamma - 1)\ u_o\left(2u_o + v_o\cot\eta\ \frac{dv_o}{dn}\right)$$

$$G_o(\eta) = 2a_o^2\cot\eta - 4u_o\,v_o - 2v_o\left[(\gamma-1)\left(u_o + \frac{dv_o}{d\eta}\right) + (\gamma - 1)\ (u_o + v_o\cot\eta)\right]$$

con le condizioni

per $\eta = \eta_s$

$$\frac{c_s}{c_b} = -\frac{3}{2}\frac{u_0}{\beta_1} \tag{22}$$

essendo $c_b = -2\eta$ la curvatura del corpo per $r \rightarrow 0$
per $\eta = \eta_s$

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha_1 = q^* \operatorname{sen} \eta_s + \frac{1}{2}\left(v_0 + \frac{1}{1}\frac{u_0}{\eta}\right) \\ &-\beta_1 = \frac{2}{\gamma+1}\left[\frac{1}{M^{*2}}\frac{\cos\eta}{\operatorname{sen}^2\eta} - \frac{\gamma-1}{2}\cos\eta\right] + \frac{1}{2}\left(u_0 - \frac{dv_0}{d\eta}\right) \\ &\frac{\sigma_1}{R} = -\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{(M_*^2\operatorname{sen}^2\eta - \beta)^2\operatorname{cotg}\eta}{\left(M^{*2}\operatorname{sen}^2\eta - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^{*2}\operatorname{sen}^2\eta\right)} \end{aligned}\right. \tag{23}$$

La integrazione delle (21) con le condizioni (22) e (23) non presenta difficoltà di rilievo. Infatti la prima delle (21) con la ultima delle (23) forniscono

$$\sigma_1(u) = \sigma_{1\eta_s}\, e^{\int_\eta^{\eta_s} \frac{u_0}{v_0} d\eta}$$

dopodichè la seconda e terza delle (21) possono integrarsi al passo a partire dall'urto. Arrivati a $\eta = \eta_b$ la (22) fornisce il valore incognito della curvatura c_s dell'urto in funzione della curvatura c_b nota del corpo.

Si può osservare che tutta la integrazione dipende dal valore delle due funzioni $u_0\ (\eta)$, $v_0\ (\eta)$ del campo conico assialsimmetrico, che, alla lor volta, dipendono soltanto dall'angolo η_b e da M*. Si conclude che è possibile tabellare, in funzione di η_0 e M*, la quantità $-\frac{3}{2}\frac{u_0}{\beta_1}$ che fornisce senz'altro il rapporto iniziale delle curvature dell'urto o del corpo per qualunque ogiva. Si ritiene che una tale tabellazione sarebbe assai utile dal punto di vista della applicazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Crocco, *Singolarità della corrente gassosa iperacustica nell'interno di una prora a diedro*. Atti del I Congresso della Unione Matematica Italiana, 1937.

[2] S. F. Shen and C. C. Lin, *On the attached Curved Shock in Front of a Sharp-nosed Axially Symmetrical Body placed in a uniform Stream*. T.N. 2505, ottobre 1951.

[3] A. Ferri, *Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack*. T.N. 2236, novembre 1950.

[4] Ferri, Ness, Kaplita, *Supersonic Flow over Conical Bodies without Axial Symmetry*. « Journal of Aeronautical Sciences », agosto 1953.

INDICE