

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

A C T A

ANNVS V
VOLUMEN V



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

—
MDCCCXXXI

INDEX

	FOL.
1. <i>Resoconto della prima Tornata privata del V anno accademico (22 marzo 1941)</i>	I-XVI
<i>Resoconto della seconda Tornata privata del V anno accademico (8 giugno 1941) (cum 3 tab.)</i>	
	XVII-XXVIII
2. G. BOAGA, <i>Sopra l'ipotesi di Bullen sulla variazione discontinua della densità nell'interno della terra e sulla conseguente variazione della gravità</i>	1-6
3. G. GALBURA, <i>Sopra una certa equazione funzionale</i>	7-14
4. F. LORETI, <i>Osservazioni di spodografia ed antracografia delle fibre muscolari striate degli insetti (Coleoptera)</i>	15-20
5. P. LOCATELLI, <i>Sullo stato di tensione elastica nei continui omogenei</i>	21-34
6. G. GIORGI, <i>Riflessioni sui fondamenti primi della teoria degli insiemi</i>	35-42
7. C. MENGARELLI, <i>La legge di estinzione delle conoscenze nel tempo (cum 5 fig.)</i>	43-52
8. T. LEVI-CIVITA, <i>Il punto materiale di meccanica relativistica</i>	53-56
9. F. SILVESTRI, <i>Notizie, specialmente corologiche e biologiche, sulle specie di Mengenilla (Insecta Strepsiptera) finora trovate in Italia (cum 4 fig.)</i>	57-66
10. A. UGGÈ, <i>Sul metodo di eliminazione nella costruzione dei numeri indici dei prezzi</i>	67-72
11. P. LOCATELLI, <i>I più generali riflessi della congruenza delle deformazioni sugli sforzi elastici</i>	73-84
12. M. BOLDRINI, <i>Sulla dispersione dei caratteri mendeliani</i>	85-102

13. G. VERGA, <i>Osservazioni sulla innervazione del sistema di connessione seno-atriale ed atrio-ventricolare del cuore dei mammiferi</i>	103-112
14. P. MARTINOTTI, <i>Di alcune recenti medie</i>	113-122
15. SCHIING-SHEN CHERN, <i>Sur les invariants de contact en geometrie projective differentielle</i>	123-142
16. M. ZEVI, <i>Sopra una proprietà di limite caratteristica delle funzioni olomorfe</i>	143-154
17. M. PICONE, <i>Osservazioni alla Nota di Maria Zevi</i>	155-158
18. G. COLONNETTI, <i>Al di là dei limiti della teoria classica dell'elasticità (cum 4 fig.)</i>	159-166
19. G. S. COEN, <i>Appunti di malacologia mediterranea sulle specie del gruppo Acanthocardium (cum 1 tab.)</i>	167-172
20. G. S. COEN, <i>Nuove varietà di Argobuccinum (cum 1 tab.)</i>	173-176

RESOCONTO
DELLA PRIMA TORNATA PRIVATA
DEL V ANNO ACCADEMICO

(Sabato 22 marzo 1941)

Presiede S. E. il Prof. FRANCESCO GIORDANI, Membro del Consiglio.

Sono presenti le LL. EE. gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, COLONNETTI, CROCCO, DAL PIAZ, DAINELLI, GIORDANI, GIORGI, GUIDI, LEPRI, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, PIERANTONI, SOMIGLIANA, SEVERI, PISTOLESI, RONDONI, SILVESTRI, TONIOLO, VALLAURI, VERCELLI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

Ordine del giorno: 1) Approvazione del Verbale della Terza Tornata Ordinaria del IV Anno Accademico. 2) Comunicazioni della Presidenza. 3) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 4) Varia.

Il Presidente GIORDANI dichiara aperta la Tornata alle 17,15.

Il Presidente GIORDANI invita il Cancelliere a dare lettura della lettera di S. E. il Rmo P. GEMELLI Presidente dell'Accademia circa la presidenza della Tornata.

Città del Vaticano, 19 Marzo 1941.

Eccellenza,

Nella pratica impossibilità di poter presiedere la prossima «Tornata privata» che si terrà sabato 22 corrente nella Sede della Accademia alla Casina di Pio IV nei Giardini Vaticani, mi permetto pregare l'Eccellenza Vostra — a norma del

4° comma dell'art. 8 degli Statuti — di volere accettare il mandato di presiedere detta Tornata.

Nella certezza del di Lei gradimento ho il piacere di confermarvi, di Vostra Eccellenza, con affettuoso collegiale ossequio

(fto.) Agostino Gemelli O. F. M.

A Sua Eccellenza

il Signor Prof. Francesco Giordani

Accademico Pontificio

NAPOLI

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GIORDANI pone ai voti l'approvazione, e, poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Il Presidente GIORDANI comunica, in forma ufficiale, che — conclusosi il quarto anno dalla fondazione dell'Accademia ed essendo pertanto scaduti dalla carica, a norma degli Statuti, sia il Presidente che i Membri del Consiglio — Sua Eminenza Reverendissima il Signor Cardinale Segretario di Stato di Sua Santità comunicava con i venerati dispacci N. 30706 e N. 32381 che il Santo Padre Si era benignato provvedere al prossimo quadriennio (1941-1944) rinnovando S. E. il Rmo P. AGOSTINO GEMELLI nella carica di Presidente e chiamando a far parte del Consiglio dell'Accademia le LL. EE. gli Accademici Pontifici UGO AMALDI, FILIPPO BOTTAZZI, FRANCESCO GIORDANI, GIUSEPPE LEPRI e l'Accademico Pontificio Soprannumerario Rev. mo P. DOM ANSELMO ALBAREDA O. S. B., con i rispettivi incarichi di: Consigliere Segretario, Consigliere Censore, Consigliere Censore, Consigliere Tesoriere, Consigliere Bibliotecario.

Di tale sovrane disposizioni era già stato avvertito il Corpo Accademico a mezzo della Comunicazione Presidenziale N. 61 in data 12 Marzo 1941.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GIORDANI comunica che, in occasione della fausta ricorrenza onomastica del Santo Padre Pio XII, l'Accademia inviò all'Augusto Pontefice

un telegramma al quale il Santo Padre si degnò rispondere a mezzo del suo Cardinale Segretario di Stato.

Il Cancelliere dà lettura dei documenti relativi.

(Telegramma)

2-6-1940

Sua Santità Pio Papa XII — Città del Vaticano — Adunati in un grande sermo ideale umilio ai piedi di Vostra Santità in questa faustissima ricorrenza onomastica i sentimenti di filiale devozione che dal cuore dei singoli Accademici Pontifici sparsi in ogni parte del mondo salgono riconoscenti in così tragica ora di lotte e divisioni verso l'Amata Persona del Padre comune nella augurale certezza che il Cuore Divino conforti le apostoliche fatiche del Suo Augusto Vicario con le gioie ineffabili di una benefica et salvatrice Pace Cristiana. — Gemelli, Presidente.

(Telegramma)

5-6-1940

Padre Gemelli Presidente Accademia Pontificia — Città del Vaticano — Santo Padre particolarmente gradisce sentimenti filiale devozione illustri Accademici Pontifici sparsi in ogni parte del mondo et auspicando sollecito ritorno sospirata pace per fecondi sviluppi opere pacifiche et nobile attività intellettuali invia particolare Benedizione Apostolica — Cardinale Maglione.

Il Presidente GIORDANI comunica, in forma ufficiale, agli Accademici l'atto di Sovrana benevolenza con il quale il Santo Padre Pio XII felicemente regnante si è compiaciuto di conferire il titolo di Eccellenza agli Accademici Pontifici.

Dispensa il Cancelliere dal leggere il Breve Apostolico di cui tutti i presenti hanno già ricevuto dalla Cancelleria una bella e decorosa copia fototipica, ed il cui testo viene riprodotto in appendice a questo fascicolo.

Del sentimento di riconoscenza verso il Sovrano Pontefice, si renderà interprete ufficiale, nella solenne Tornata Pontificia, il Presidente dell'Accademia il quale ha già espresso tali sensi con lettera privata al Santo Padre, a nome dell'Accademia tutta.

Il nuovo Consiglio dell'Accademia, riunitosi a Napoli il giorno 2 marzo 1941, genetliaco del Santo Padre ed anniversario della Sua Elezione, per la sua prima Seduta ha inviato in quell'occasione un telegramma di omaggio al Santo Padre,

al quale il Sommo Pontefice si è degnato rispondere a mezzo del suo Cardinale Segretario di Stato.

Il cancelliere dà lettura dei documenti relativi.

(Telegramma)

2-3-1941

Sua Santità Pio Papa XII — Città del Vaticano — Consiglieri Accademici Pontifici riuniti oggi prima adunanza Consiglio secondo quadriennio salutano come lieto auspicio coincidenza con duplice fausta ricorrenza anniversaria et associandosi sentimenti loro amatissimo Presidente formulano voti fervidissimi et umiliano Vostra Santità profonda filiale ubbidienza fiducia che attività scientifica internazionale Pontificia Accademia rallegri Vostro cuore paterno precludendo unione spiriti tutti et raggiungimento pace carità giustizia secondo dettami più volte espressi Santità Vostra. — Albareda, Amaldi, Bottazzi, Giordani, Lepri, Accademici consiglieri.

(Telegramma)

4-3-1941

Revo Padre Albareda Città del Vaticano — Sua Santità vivamente gradito fervido omaggio Consiglieri Accademici Pontifici Sua anniversaria ricorrenza rinnova voti alta missione diletta Accademia per auspicata unione spiriti e invocando Divini Lumi e favori invia di cuore conforto multiforme attività Apostolica Benedizione. — Cardinale Maglione.

Nella stessa occasione della sua prima Seduta il Consiglio della Accademia ha inviato a S. E. il Presidente, ancora degente nell'Istituto Ortopedico Rizzoli di Bologna, un telegramma di affettuoso augurio esprimendo i suoi rallegramenti per la conferma pontificia nella carica di Presidente.

Il Cancelliere dà lettura del documento relativo.

(Telegramma)

Eccellenza Agostino Gemelli — Presidente Pontificia Accademia Scienze — Istituto Ortopedico Rizzoli — Bologna — Nuovo Consiglio Pontificia Accademia Scienze riunitosi sua prima Seduta invia amatissimo Presidente fervidissimi voti pronta completa guarigione et mentre augurasi poterlo efficacemente coadiuvare governo Accademia per iniziato quadriennio rallegriasi per conferma alta carica Presidente quale nuovo attestato paterna benevolenza sovrano riconoscimento alle doti mente cuore. — Albareda, Amaldi, Bottazzi, Giordani, Lepri, Accademici consiglieri.

Sua Eminenza il Cardinale Segretario di Stato nel suo venerato dispaccio con il quale comunicava al Presidente la nomina del nuovo Consiglio per il quadriennio 1940-1944 esprimeva l'augusto compiacimento del Santo Padre per l'opera così saggiamente svolta negli anni trascorsi dai consiglieri uscenti del governo dell'Accademia.

Il Presidente dell'Accademia ha incaricato il Presidente della Tornata di presentare alle Loro Eccellenze ARMELLINI e BIANCHI, membri uscenti del Consiglio Accademico, i suoi più vivi ringraziamenti per il valido contributo apportato con la loro esperienza accademica e con il loro amore affettuoso verso l'Accademia al governo della stessa nei quattro anni in cui egli ha avuto la gioia di averli quali preziosi collaboratori per il migliore sviluppo dell'Accademia stessa.

A nome del nuovo Consiglio, a nome suo personale, e interpretando il pensiero dei Collegli tutti, il Presidente della Tornata si unisce ai sentimenti del Presidente, per presentare ai membri del Consiglio uscenti i più vivi ringraziamenti per l'opera da essi svolta così lodevolmente in questo primo e pertanto più difficile periodo della vita Accademica.

Il Presidente GIORDANI rinnova quindi all'Accademico GIORGI le condoglianze del Consiglio e del Corpo Accademico per il grave recente lutto che l'ha colpito con la perdita della eletta Consorte, esprimendo la partecipazione dell'Accademia al suo grande dolore.

Il Presidente GIORDANI interpretando il sentimento degli Accademici, riuniti in questa Tornata privata, voluta dal Presidente GEMELLI, nel timore che la sua forzata assenza procrastinasse di troppo — in attesa della Solenne Tornata alla quale interverrà il Santo Padre dopo la di lui guarigione — un amichevole incontro ed uno scambio di idee, propone di inviare a lui i sensi di affettuoso augurio nella certa speranza di presto riaverlo restituito alla sua attività scientifica.

Viene quindi redatto e spedito il seguente telegramma.

Sua Eccellenza Agostino Gemelli — Presidente Pontificia Accademia Scienze — Piazza S. Ambrogio 9 — Milano — Accademici Pontifici riuniti Tornata privata inviano amatissimo Presidente vivissime felicitazioni migliorato stato salute sicura certezza imminente completa guarigione rallegrandosi conferma alta carica Presidente nuovo Sovrano riconoscimento saggio governo assidue cure nostra Accademia — Giordani, Presidente Tornata.

Fu quindi anche inviato un affettuoso pensiero agli Accademici BIANCHI e BORTAZZI, lontani per motivi di salute.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico ARMELLINI presenta in omaggio una sua recente pubblicazione dal titolo: *Astronomia e Geodesia* pubblicata nella « Enciclopedia scientifica monografica italiana del XX secolo », serie I, n. 5. Milano, Bompiani.

L'Accademico Segretario AMALDI presenta a nome dell'Accademico BOLDRINI un lavoro originale del Dott. CARLO MENGARELLI, dal titolo: *Influenza del tempo nella estinzione delle conoscenze*.

L'Accademico COLONNETTI presenta un lavoro del Prof. PIERO LOCATELLI dal titolo: *Sullo stato di tensione elastica nei continui omogenei*.

In questo lavoro si stabiliscono le equazioni cui deve soddisfare un generico tensore doppio simmetrico perchè possa caratterizzare lo stato di tensione interna in un continuo elastico omogeneo, indipendentemente dalle sue costanti elastiche e dalle forze di campo e di contorno che lo sollecitano.

L'Accademico CROCCO presenta una sua Nota dal titolo: *Il ritardo d'inerzia nella manovra di richiamata dei velivoli*.

Nella manovra di richiamata dei velivoli, che si compie incrementando la portanza delle ali per mezzo dell'incremento del loro angolo di incidenza, si verifica un complesso ritardo rispetto al tempo che durerebbe la manovra se l'incremento di portanza potesse ottenersi istantaneamente. Infatti vi è anzitutto un ritardo dovuto alla gradualità del comando; poi un ritardo dovuto al graduale stabilirsi della nuova circolazione aerodinamica cui si deve l'aumento di portanza ed in fine un ritardo dovuto all'inerzia del velivolo nel passaggio al nuovo assetto di volo.

Nella Nota che si presenta viene studiato quest'ultimo ritardo prescindendo dagli altri due e partendo dalla considerazione dell'equazione dinamica che esprime l'incremento d'incidenza del velivolo provocata da un comando supposto *istanteo*. S'introduce però nella impostazione lo sfasamento d'influsso delle ali sulla

coda prendendolo proporzionale alla rapidità di variazione dell'incidenza anziché a quella della rotazione come è stato fatto in altri lavori; e neglignendo la variazione della velocità sulla traiettoria, nonché la componente baricentrica della forza sulla coda e la variazione della componente del peso rispetto alla portanza. Si ottiene allora una equazione differenziale lineare di secondo ordine che determina la variazione di assetto del velivolo e che si può denominare equazione concettuale dell'assestamento.

Questa equazione dà quindi luogo ad una equazione algebrica caratteristica costituita da un termine d'inerzia di secondo grado nonché da un termine cinetico di primo grado e da un termine statico di grado zero: risultanti dalla composizione dei termini statici e cinetici che dominano il fenomeno della richiamata.

In questa forma schematica il fenomeno in esame si presta a considerazioni assai espressive dal punto di vista della meccanica del volo.

Si trova infatti che la rapidità *evolutoria* della richiamata (cioè la velocità angolare con cui ruota la tangente alla traiettoria) e la sua rapidità rotatoria (cioè quella con cui ruota l'asse longitudinale del velivolo) si traducono, a meno di un fattore costante, in identiche espressioni lineari di second'ordine che chiameremo rispettivamente equazioni dell'evoluzione e equazioni della rotazione; le quali, dentro i limiti ristretti delle ipotesi, danno luogo ad un valor limite di rapidità evolutoria, di rapidità rotatoria e di assetto che si possono ritenere come caratteristiche concettuali della richiamata.

Se poi si considera l'angolo girato nel periodo di assestamento; e si sottrae quest'angolo da quello di cui avrebbe evoluito l'aereo se la rapidità evolutoria concettuale fosse stata ottenuta istantaneamente, si ottiene una espressione dell'angolo d'evoluzione *perduto* per inerzia; e si perviene così, dividendolo per la rapidità evolutoria limite, ad una espressione del *ritardo d'inerzia* che si vuole determinare.

Si dimostra così in definitiva che il ritardo d'inerzia è misurato dal rapporto tra il termine cinetico ed il termine statico della equazione concettuale dell'assestamento.

L'Accademico RONDONI presenta a nome dell'Accademico GEMELLI un lavoro del Prof. Dott. CARLO TRABATTONI, dal titolo: *Nuovi contributi all'elettroencefalografia*.

Il lavoro si divide in tre parti:

1) *Contributo alla tecnica oscillografica*. Considerate le caratteristiche di frequenza, forma, ampiezza, variabilità dei potenziali bioelettrici cerebrali e i diversi metodi di registrazione, l'Autore conclude con la preferenza per l'oscillografo

catodico. Descrive l'apparecchiatura del Laboratorio di Psicologia dell'Università Cattolica di Milano, riproduce i grafici ottenuti e descrive la tecnica seguita per la registrazione. Infine accenna brevemente ad un oscillografo elettromagnetico a penna scrivente, pure costruito nel laboratorio stesso, particolarmente adatto per usi clinici data la praticità e la possibilità di registrazioni in ambienti comuni; anche di esso sono riprodotti i grafici ottenuti.

II) *Interpretazione dello sfasamento fra onde derivate su punti diversi del cranio.* L'A. discute le principali teorie emesse sulla natura e localizzazione dei centri di origine delle onde alfa e valuta i dati offerti dal metodo di indagine anatomico e da quello puramente elettrico. Segue un esame dei fattori frequenza, forma ampiezza completato da uno studio sistematico sullo sfasamento delle onde provenienti da punti diversi del cranio che si dimostra con ciò un fattore elettrico di notevole importanza.

I risultati ottenuti permettono all'Autore di concludere per l'ipotesi di un centro unico del quale si cerca di interpretare la funzione e la natura.

III) *L'elettroencefalografia applicata allo studio del problema motorio della coscienza.* Trascorsa la letteratura sulla « teoria motoria della coscienza », valutati i procedimenti sperimentali di diversi autori ed i risultati ottenuti, l'Autore tiene giustificato il tentativo di derivare i potenziali bioelettrici attraverso la teca cranica, su determinati punti, durante la rappresentazione di un movimento e la reale esecuzione del medesimo. I risultati ottenuti, per quanto negativi, permettono egualmente di trarre utili considerazioni sul significato delle onde alfa, specie in relazione a processi psicofisici.

L'Accademico PIERANTONI presenta a nome dell'Accademico GHIGI una sua Nota in collaborazione con T. SIEMONI, R. FATTOVICH e M. GRANDI, dal titolo: *Genetica dell'ernia cerebrale dei polli.*

In una serie di esperimenti compiuti fra il 1907 e il 1914, l'A. ha incrociato un Gallo Padovano ad ernia cerebrale con Gallina Combattente nana per produrre una razza nana con ciuffo ben sviluppato, come nella razza padovana. La cupola cranica, determinata da fattori multipli, ebbe nella quinta generazione susseguente al primo incrocio un valore approssimativamente eguale a quello dell'antenato. Nella settima generazione l'allevamento fu isterilito per effetto della consanguineità.

Una seconda serie di esperimenti fu compiuta dal 1922 in poi, incrociando gallo Padovano erniato con galline delle razze nane Giava e Sebright; i risultati

di questi incroci furono analoghi ai precedenti, ma la cupola cranica raggiunse il suo maggiore sviluppo in periodo più breve. Tuttavia questi polli che l'A. ha denominato Bantam Ghigi non erano realmente piccoli come le galline di razza nana, ma erano intermedi per statura e peso fra la mole e il peso degli antenati puri.

In una terza serie di esperimenti, Bantam Ghigi furono reincrociati con Giava e Sebrigt nani; da questi incroci risultarono due famiglie nelle quali lo sviluppo dell'ernia cerebrale aveva raggiunto un grado assai elevato di purezza.

Su questo materiale sono stati compiuti i seguenti studi:

- 1°) studio anatomico ed embriologico del cervello erniato (Siemoni);
- 2°) studio biometrico di una popolazione con ernia di origine ibrida, allo scopo di determinare la mutabilità del cervello (Fattovich);
- 3°) studio biometrico degli effetti della selezione sulla forma del cervello nelle progenie di reincroci fra Bantam Ghigi e galletti Giava e galline Sebright (Grandi);
- 4°) femminilizzazione degli incroci originati dai suddetti Bantam Ghigi accoppiati con gallo Sebright (Ghigi);
- 5°) conclusioni di carattere generale relative al comportamento ed agli effetti della selezione ed alla interpretazione della variabilità delle specie animali.

Teoricamente si può dire che tre generazioni, cominciando da F_2 , sono necessarie per determinare in quasi tutti gli esemplari un'ernia abbastanza uniformemente sviluppata e variabile entro limiti ristretti. Una generazione di più è necessaria se gli esemplari di F_2 non sono accessibili ad una selezione ed una generazione di meno se in F_2 si trovino parecchi esemplari in possesso di parecchi fattori multipli dell'ernia cerebrale. Questa, dovuta ad una maggiore lunghezza del cervello ed alla fuoriuscita degli emisferi dalla scatola cranica, è recessiva ed i fattori multipli che la determinano cominciano a manifestarsi solo nella seconda generazione, in numero maggiore o minore. La terza generazione è più variabile e permette una facile selezione mediante la quale può essere ottenuta una quarta generazione molto omogenea in confronto colla terza. Questi risultati positivi sono in rapporto anche colla maggiore abbondanza degli esemplari riproduttori.

L'Accademico GIORGI presenta una sua Nota dal titolo: *Riflessioni sui fondamenti primi della teoria degli insiemi.*

I dubbi e i paradossi a cui ha dato origine la teoria degli insiemi dipendono in gran parte dall'uso di vocaboli mal definiti. La nozione generica di *classe* deve essere ben distinta da quelle di *insieme*. Deve essere precisato in quale significato

matematico si vuol fare uso della parola *esistere*. Mediante l'uso di postulati precisi e di definizioni opportune, si arriva a riconoscere che alcuni degli insiemi considerati da Cantor sono ben definiti, altri non lo sono; e che l'attribuzione di numeri trasfiniti a questi ultimi non è legittima.

L'Accademico GUIDI presenta in omaggio due sue pubblicazioni, di cui la prima in collaborazione con l'Accademico COLONNETTI ha per titolo: *Sono ammissibili deformazioni plastiche nelle costruzioni?*

L'Autore ne mostra l'attualità, giacchè è noto che per sfoggio di autarchia pullulano teorie e metodi di costruzione che non fanno onore alla scienza e compromettono la pubblica incolumità. In detta pubblicazione l'Autore ha creduto opportuno richiamare l'attenzione dei costruttori fin dove e come è lecito approfittare della provvidenziale plasticità dei materiali che si usano nelle costruzioni senza compromettere l'incolumità del pubblico, rallegrandosi di veder collimare con le sue idee anche quelle dell'illustre Collega.

La seconda pubblicazione ha per titolo: *L'Associazione Italiana per gli studi su materiali da costruzione (S. I. M.). Ricordi.*

Questa pubblicazione è un breve riassunto dell'Opera pubblicata per disteso nei Rendiconti delle quindici Riunioni dalla prima alla quindicesima. E poichè i lavori della S. I. M. fin dall'inizio sono stati in stretta colleganza con quanto si era fatto già e si faceva dall'omonima Associazione Internazionale, così ho premesso in questi *Ricordi* alcune brevi notizie sulla *Association International pour l'Essai des matériaux*.

Dopo le comunicazioni fatte da S. E. Guidi, il Presidente desiderava esprimere al Venerando Accademico l'augurio e le congratulazioni dei Colleghi per la sua giovanile attività scientifica e per l'insegnamento che, anche se non più dalla cattedra, egli continua ad impartire con i suoi studi. Al Presidente si univa l'Accademico COLONNETTI e tutti i presenti partecipavano al plauso tributato a S. E. GUIDI.

L'Accademico LOMBARDI presenta una sua Nota dal titolo: *La vita e l'opera di Guglielmo Marconi.*

L'opera di Guglielmo Marconi ebbe e continua ad avere nello sviluppo della civiltà moderna un'importanza così grandiosa, da giustificare l'unanime tributo di riconoscenza e di ammirazione che gli venne conferito ad ogni tappa della sua luminosa carriera. Sebbene essa sia già stata degnamente evocata in questa

sede nella smagliante commemorazione di Lui fatta dall'Accademico Vallauri alla presenza di S. S. Pio XI alla Solenne Tornata del 30 gennaio 1938, l'Autore ha ritenuto che un cenno più ampio potesse interessare gli studiosi della materia, e trovare posto fra le Memorie dell'Accademia, alla quale Egli conferì tanto lustro col prestigio del Suo nome e rese possibile mediante la Stazione Radio-Vaticano di corrispondere direttamente con le principali istituzioni scientifiche di tutto il mondo.

L'Accademico SEVERI presenta una Nota del Dott. GIORGIO GALBURA, dal titolo: *Sopra una certa equazione funzionale*.

Viene studiata in questa Nota un'equazione funzionale, che SEVERI aveva trovato in certe questioni di geometria e vengono determinate le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'equazione stessa sia integrabile (sotto ipotesi molto generali) e ne viene assegnato l'integrale.

L'Accademico SILVESTRI presenta a nome dell'Accademico PENSA un lavoro del Prof. FRANCESCO LORETI dal titolo: *Osservazioni di spodografia ed antracografia delle fibre muscolari striate degli insetti (coleoptera)*.

In questo lavoro vengono illustrati i caratteri fisici e topografici nonchè la natura chimica delle ceneri e delle sostanze carboniose che risultano reperibili negli spodogrammi e negli antracogrammi delle fibre muscolari striate degli arti (zampe ed ali) negli insetti (coleoptera).

L'Accademico TONIOLO presenta in omaggio un recente volume del Professore MARCO VISENTINI dal titolo: *Ricerche idrografiche nel Delta del Po*, corredato da una estesa bibliografia, da numerose figure e tavole e pubblicato a cura dell'Ufficio Idrografico del Po.

Del grande delta di questo nostro massimo fiume è questa la prima monografia completa, basata sui dati raccolti e sulle misure effettuate, per più anni consecutivi, dall'Ufficio di cui il VISENTINI è direttore.

Dopo alcune notizie storiche sulle vicende morfologiche, antiche e recenti, della regione deltizia padana, e l'esposizione dei più completi dati climatici, di temperatura, di vento e di precipitazioni del bacino, vengono studiate la distri-

buzione percentuale delle portate nei vari rami deltizi, fra il 1926 e il 1938, ricavandosi indicazioni sulle probabili future modificazioni e sulle leggi di variazione di deflusso, sotto l'influenza della marea, alle vari foci.

Quanto ai materiali di trasporto dei vari rami deltizi e conseguenti interimenti dell'alveo fluviale, dai dati di osservazione risulta che, a valle di Pontelagoscuro, non si hanno nell'alveo depositi alluvionali permanenti, cosicchè nei vari cicli alternati di deposito ed erosione, l'equilibrio dell'alveo del Po, nel periodo pluriennale, sembra assicurato.

Dall'analisi dei dati di osservazione si è poi constatato che l'influenza delle maree sul profilo liquido del fiume può risentirsi a 90 km. dal mare solo in caso di massima magra del fiume, che altrimenti essa si arresta appena a 60 km., ciò che influenza anche il fenomeno della mescolanza dell'acqua fluviale con quella marina e conseguente precipitazione fisico-chimica delle minute particelle argillose in sospensione nelle acque del Po.

Infine studiati, sulla base di antichi rilievi e di altri recentemente compiuti, i movimenti di avanzamento e retrocessione delle spiagge padane, dopo il 1800, si è determinato il volume delle spiagge che è interessato in queste funzioni e determinata la *linea neutra* di equilibrio delle spiagge stesse nei vari periodi storici e nei vari stati del mare e del fiume, giungendo alla conclusione che il fattore fluviale è quello che ha la massima preponderanza sulla formazione e sulle variazioni del delta Padano.

L'Accademico VERCELLI presenta in omaggio una sua pubblicazione dal titolo: *Guida per l'analisi della periodicità nei diagrammi oscillanti*.

L'Accademico ALBAREDA presenta in omaggio una pubblicazione di P. TANNERY dal titolo: *Quadrivium de Georges Pachymère*, edita recentemente dalla Biblioteca Apostolica Vaticana.

L'Accademico GATTERER presenta in omaggio due sue recenti pubblicazioni.

Nachdem in einer früheren Sitzung die ersten zwei Hefte der *Ricerche Spettroscopiche* des Astrophysikalischen Laboratoriums der Vatikanischen Sternwarte der hohen Akademie vorgelegt wurden, möchte ich heute das eben erschienene 3. Heft überreichen. Die Arbeit von P. Junkes und mir trägt den Titel: *Über einige Erfahrungen an Prismenspektrographen hoher Dispersion*. Auf Grund der guten und schlechten Erfahrungen, die wir beim Arbeiten mit solchen Apparaten

gemacht haben, werden darin Anweisungen und Richtlinien gegeben, wie solche Instrumente gebaut und gehandhabt werden müssen, um das Maximum an Auflösung und Leistung aus ihnen herauszuholen. Zahlreiche Originalphotographien veranschaulichen die Darstellung im Text.

Im Laufe der letzten Jahre wurde im Laboratorium und der Werstätte der Sternwarte ein *Projektionskomparator für Spektrochemische Analyse* entwickelt, dessen ausführliche Beschreibung in den 'Spectrochimica Acta' (Verlag J. Springer, Berlin) erschienen ist. Ich möchte einen Sonderdruck dieser Arbeit der hohen Akademie vorlegen, da das Instrument nach unserer Erfahrung eine ausserordentliche Erleichterung in der Durchführung komplizierter Analysen gewährt. Es ist damit ohne weiteres möglich, zwei Spektren, die auf zwei verschiedenen Platten aufgenommen wurden, so genau optisch untereinander anzuordnen, dass die Gebiete gleicher Wellenlänge ebenso exakt übereinander zu stehen kommen, wie mit der Analysenblende von Hartmann. Von Bedeutung ist, dass man die etwa zwanzigfach vergrösserten Spektren nicht bloss visuell betrachten, sondern auch photographisch festhalten kann. Auch zum exakten Messen der Wellenlängen ist das Instrument eingerichtet.

Si passa quindi al quarto punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GIORDANI comunica che nella ultima riunione del Consiglio è stato stabilito di iniziare una nuova serie di pubblicazioni Accademiche in formato più grande, e precisamente in quarto, onde possano trovarvi posto quei lavori che per ragioni tecniche o di prestigio, non si prestano ad essere stampati negli «Acta» o nelle «Commentationes».

Il Consiglio ha stabilito che il formato di queste pubblicazioni debba essere quello indicato, per quanto riguarda la carta, pur permettendo, se del caso, giustezze differenti.

Inizierà la serie di queste pubblicazioni il lavoro dell'Accademico GHERZI sulla meteorologia in Cina, i discorsi del Santo Padre Pio XI tenuti all'Accademia e l'indice analitico delle pubblicazioni della soppressa Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei.

Il Cancelliere dà poi notizia degli altri lavori originali presentati da Accademici prima dell'attuale Tornata:

E. GHERZI, *La météorologie de la Chine*, Ultima parte.

V. ZANON, *Diatomee dell'Africa occidentale francese*.

G. BOAGA, *Sopra l'ipotesi di Bullen sulla variazione discontinua della densità nell'interno della terra e sulla conseguente variazione della gravità.*

A. CANZANELLI, *La fauna dei funghi freschi (II. Contributo: La Ditterofauna fungicola).*

La seduta viene tolta alle ore 18,30.

APPENDICE

PIVS PP. XII

AD PERPETVAM REI MEMORIAM

Ad Apostolicae Sedis decus augendum severiorumque disciplinarum scientiam honorandam, **Motu proprio** die dato vicesima octava mensis Octobris anno MCMXXXVI recol. mem. Decessor Noster Pius PP. XI “**Pontificiam Academiam Scientiarum**” in Civitate Nostra Vaticana constituit, atque etiam opportuna, quibus Coetus ipse regeretur, Statuta eidem tribuit. Nos autem, gravissimum sane munus considerantes perspiciuis illis viris demandatum, qui ex omni loco et natione in praeclarum Coetum ipsum adlecti sunt, ut peculiari luculentoque Nostrae benevolentiae testimonio Pontificios de numero Academicos prosequamur, atque ita conspicua quoque eorum merita in optima scientiarum studia diligenda ac fovenda potioribus usque honoris significationibus publice honestentur, iisdem ex nunc titulum “**Excellentiae**” benigne concedimus, ita ut omnes et singuli de numero tantum Academiae Socii, non autem supranumerarii vel honorarii, tam in Actis ejusdem Academiae quam in communi humanae societatis ratione eodem “**Excellentiae**” titulo decorari debeant. Sed, ad debitum etiam in omnibus ordinem recte servandum, statuimus quoque ut ob hujusmodi honoris titulum Academicis Pontificiis, quibus confertur, nullum “**praecedentiae**” quam vocant, jus tum in Hierarchia ecclesiastica tum in Aula Summi Pontificis sive ecclesiastica sive laicali competere possit; utque Academici, qui forte alicujus Ordinis vel Congregationis religiosae sint sodales, in sui ipsorum Instituti religiosi finibus memorato honoris titulo uti, frui illumve ab aliis exigere nequeant. Haec volumus, mandamus, decernentes praesentes Litteras resque omnes in eis expressas semper ac perpetuo validas et efficaces existere et fore; suosque plenarios atque integros effectus sortiri debere, et ab omnibus ad quos spectat et spectabit inviolabiliter observari, dictisque Academicis Pontificiis in omnibus plenissime suffragari; sicque rite judicandum esse ac definiendum; irritumque ex nunc et inane fieri si quidquam secus super his a quovis, auctoritate qualibet, scienter sive ignoranter contigerit attentari. Contrariis non obstantibus quibuslibet. Datum Romae, apud Sanctum Petrum, sub anulo Piscatoris, die XXV mensis Novembris, anno MCMXXX, Pontificatus Nostri secundo.

(sub anulo Piscatoris)

ALOYS. CARD. MAGLIONE

a secretis Status

PIVS PP. XII

Ad perpetuam rei memoriam

Ad Apostolicam Sedem decus augendum sacrissimamque disciplinam scientiam honorandam, & Notis peremptorie die dato
vicesima octava mensis Octobris anno MCMLVII recel. mem. Leonor. Vester, Pius P.P. XI Pontificatus & Secundi-
mitam Scientiarum in Circulo Avestrae Italicae constituit, atque itane opportuna, quibus Caelus ipse regeretur. Ita
tuta eidem tribuit. Vos autem gravissimum sane minus considerantes perspicuis illis viris demandatum, qui ex omni
loco et natione in preclarum Certum ipsam adlecti sunt, ut peculiari laudantique Avestrae benevolentiae testimonio, ben-
eficis de numero Academicos prosequamur, atque ita conspicui quoque veram merito in optima scientiarum studia diligen-
tia ac speranda poteribus usque honoris significationibus publicis honestentur, insidem ex nunc titulum "Excellentiissimi" hono-
ris concedimus, ita ut cuius et singuli de numero tantum Academiae, loci, non autem supernumerarii vel honorarii tan-
in, sed, quidem, Academicos quam in communi humanae societatis ratione eodem "Excellentiissimi" titulo decorari debe-
ant, sed, ad debitum etiam in omnibus ordinem recte servandum, statuimus quoque, ut ob huiusmodi honoris titularii
Academici Pontificis, quibus confectur, nullum "precedentium", quam vrent, jus tum in Hierarchia ecclesiastica tum in
Tota Humani Pontificis sive ecclesiastica sive laicali competere possit, atque Academicos, qui forte alienius Ordinis vel Con-
gregacionis reliquorum sunt sedules, in sui ipsorum, Instituti religiosi finibus memorato honoris titulo uti frui illamve ab
aliis capere nequeant. Haec volumus, mandamus, decernentes praesentes Litteras rasque omnes in eis expressas sem-
per ac perpetuo validas et efficaces existere et fore, saepeque plenarias atque integras effectus sortiri debere, et ab omnibus ad
quos spectat et spectabit inviolabiliter observare, dictisque Academicis Pontificis in omnibus plenissime suffragari, si que-
rito, iudicandum esse ac definiendum: irritumque ex nunc et inane fieri si quidquam secus super his a quavis, auctorita-
te qualibet, secus sive ignominiter ceptigerit attentari, Contrarias non obstantibus quibuscumque. Datum Romae, apud San-
ctum Petrum, sub anno, Piscatoris, die XXV mensis, Novembris, anno MCMLXX, Pontificatus & Avestri XI secundo.



Boys. Carl. Magdon
a secret. Stary

RESOCONTO
DELLA SECONDA TORNATA PRIVATA
DEL V ANNO ACCADEMICO

(Domenica 8 giugno 1941)

Presiede S. E. il Rev.^{mo} P. AGOSTINO GEMELLI, O. F. M.

Sono presenti le LL. EE. gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, BOLDRINI, COLONNETTI, CROCCO, DAL PIAZ, DAINELLI, GHIGI, GIORGI, GOLA, LEPRI, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, PIERANTONI, PANETTI, PENSA, PISTOLESI, RONDONI, SILVESTRI, SOMIGLIANA, TONIOLO, VERCELLI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, MERCATI, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

Ordine del giorno: 1) Approvazione del Verbale della Prima Tornata Privata del V Anno Accademico. 2) Comunicazioni della Presidenza. 3) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 4) Varia.

Non appena gli Accademici hanno preso posto ai loro seggi ed il Presidente si è assiso al banco presidenziale per dare inizio alla Tornata, l'Accademico Segretario AMALDI levatosi in piedi, rivolto al Presidente, prende la parola, quale interprete dei Collegli tutti, per esprimere al Presidente la gioia di rivederlo riprendere l'attività che aveva dovuto dolorosamente interrompere. Se anche il suo fisico, prosegue l'Accademico AMALDI, porta ancora qualche segno delle sofferenze patite, lo spirito è quanto mai pronto, agile e vivace. Il Presidente ci è ancora più caro, dice, per la serenità veramente francescana con cui ha saputo sopportare le pene della malattia, con cui ha saputo dominare la fralezza della

carne con la virtù dello spirito. Gli Accademici si permettono offrire al loro Presidente un modesto ma simbolico dono, che vuol essere la prova e la dimostrazione del loro affetto e che essi pregano di accettare con gli stessi sentimenti con cui è offerto. E al P. GEMELLI in così dire l'Accademico AMALDI presenta un campanello di bronzo, opera pregevole dell'incisore pontificio Aurelio Mistruzzi.

Dopo le parole dell'Accademico AMALDI, ascoltate in piedi da tutti i presenti e accolte da vivi applausi e consensi, e dopo la presentazione del dono, il Presidente GEMELLI, profondamente commosso, esprime a tutti i Colleghi la sua gratitudine per la bontà dimostratagli in questi ultimi mesi e che culmina nelle parole con cui l'Accademico Segretario ha voluto accompagnare l'offerta del dono, veramente simbolico, e che egli accetta di gran cuore come cosa particolarmente grata perchè suona le ore degli incontri affettuosi e collegiali che uniscono gli Accademici Pontifici nelle loro tornate. Il Presidente desidera assicurare tutti i presenti del suo vivo interessamento per la vita dell'Accademia, mai venuto meno nel periodo della malattia, durante la quale ha voluto più volte presso di sé il Cancelliere per essere informato dell'attività Accademica, e termina formulando per tutti i Colleghi e per quanto essi hanno di più caro i suoi auguri migliori.

Il dono offerto al Presidente consiste in un campanello presidenziale in cui l'arte di Aurelio Mistruzzi, ancora una volta, in pochissimi giorni, ha saputo superare la prova con felice ispirazione ed espressione geniale.

L'ornamentazione si caratterizza dell'olivo e dell'alloro siccome simboli del pacifico e fecondo sviluppo delle scienze. Il motto *Pax et bonum*, il cordone francescano che corre intorno ai rigli della iserizione dedicatoria, chiusa dal caduceo, siglano per così dire il Presidente dell'Accademia, figlio di San Francesco e cultore delle scienze mediche.

Finalmente fra raggi e fiamme, nella luce, cioè, e nel fuoco altore delle scienze, il triregno sulle chiavi incrociate e le lettere iniziali del grande Istituto, contrasseguano la *Pontificia Academia Scientiarum*.

Alla dedica: - DEO · OPTIMO · MAXIMO · ACADEMICI · PONTIFICI · OB · RESTITVTAM · AVGVSTINO GEMELLI · O. F. M. · PRÆSIDI · AMATISSIMO · SANITATEM · GRATES · PERSOLVVT - VIII · IVN · MCMXLI - si aggiungono due di quelle glosse di cui l'arte del rinascimento ha tanti esempi in simili lavori. Sul battaglio, in lettere a rilievo si legge: PETRVS · CANCELLARIVS · CONSONAT, accennando al Cancelliere dell'Accademia Pietro Salviucci, mentre sul bordo interno l'artefice ha scritto il suo augurio: QVI · LIBENTER · ME · FECIT · AURELIVS · LIBENTIVS · OMINATVR.



La Tornata è aperta alle 9,45.

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione, e, poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Il Presidente GEMELLI desidera ricordare con affetto i Colleghi assenti per motivi di salute, ed in modo particolare l'Accademico SEVERI che in un incidente nella sua villa di Staggiano aveva riportato la frattura della spalla sinistra per cui avrà bisogno di almeno due mesi di riposo.

Il Presidente è certo di interpretare il pensiero di tutti i presenti proponendo di inviargli un telegramma di augurio.

Uno stesso pensiero affettuoso invia ai Colleghi BOTTAZZI, BIANCHI, GUIDI e VALLAURI, assenti per ragioni di salute, e all'Accademico NOYONS, pur esso malato.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI comunica che il giorno 2 giugno u. s., festa di S. Eugenio I Papa, l'Accademia ha umiliato all'Augusto Pontefice in occasione della fausta ricorrenza onomastica un telegramma di augurio al quale il Santo Padre si è degnato rispondere a mezzo del Suo Cardinale Segretario di Stato.

Il Cancelliere dà lettura dei documenti relativi.

(Telegramma)

1 giugno 1941

Sua Santità Pio Papa XII — Città del Vaticano — Accademici Pontifici nella attesa di essere ricevuti da Vostra Santità et porgere filiale omaggio gratitudine per sollecitudine paterna per loro Accademia umiliano mio mezzo devotissimi auguri fausta ricorrenza onomastica elevando preghiere per sante intenzioni Vostra Santità. — Agostino Gemelli, Presidente.

(Telegramma)

3 giugno 1941

Sua Eccellenza P. Agostino Gemelli, Presidente Pontificia Accademia delle Scienze — Città del Vaticano — Augusto Pontefice vivamente grato preghiere elevate Sue intenzioni et accetti auguri di cuore benedice Eccellenza Vostra Accademici Pontifici — Cardinale Maglione.

Il Presidente GEMELLI desidera rinnovare ai Consiglieri uscenti ARMBELLINI e BIANCHI i ringraziamenti dell'Accademia per l'attività da essi prestata nei quattro anni in cui hanno fatto parte del Consiglio accademico, e presentare congratulazioni ed auguri agli Accademici chiamati a sostituirli, AMALDI e GIORDANI.

Il Presidente GEMELLI comunica ai Colleghi presenti che è stata premura dell'Accademia chiedere notizie degli Accademici non Italiani residenti in territori di Paesi attualmente belligeranti. In modo particolare sono state richieste notizie di quegli Accademici che si trovano in territori occupati. Quasi tutti hanno, con più o meno ritardo, inviato loro notizie assicurando della loro buona salute. Purtroppo mancano del tutto notizie dell'Accademico GODLEWSKI.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico ARMBELLINI presenta una sua Nota dal titolo: *Nota preliminare sulle ipotesi cosmogoniche.*

Questa nota preliminare contiene un riassunto sintetico di tutti i risultati trovati dall'Autore sopra la cosmogonia dei pianeti e dei sistemi stellari e nebulari, cui la dimostrazione analitica verrà data in una memoria definitiva, di cui la Nota presente può considerarsi come una introduzione.

L'Accademico BOLDRINI presenta una sua Nota dal titolo: *Sulla dispersione dei caratteri mendeliani.*

La proporzione dei caratteri opposti nei discendenti dei monoibridi, oscilla assai meno di quanto dovrebbe avvenire per puro effetto del caso.

Ciò dimostra che le probabilità dell'evento variano in modo da compensarsi, probabilmente a causa di involontari errori sistematici, dovuti al preconconcetto teorico degli sperimentatori.

L'Accademico BOLDRINI presenta quindi una Nota del Dott. PIETRO MARTINOTTI dal titolo: *Di alcune recenti medie.*

L'Autore espone in questo lavoro criticamente e sviluppa i nuovi concetti di media che negli ultimi anni sono stati proposti da lui e da vari statistici.

L'Accademico BOLDRINI presenta inoltre una Nota del Prof. ALBINO UGGÈ dal titolo: *Sul metodo di eliminazione nella costruzione dei numeri indici dei prezzi.*

Nella presente Nota l'Autore dimostra che le tre condizioni cui debbono soddisfare gli indici statistici rispondenti al criterio di eliminazione si riducono ad una sola.

L'Accademico COLONNETTI presenta una sua Nota dal titolo: *Pressoflessione in regime elasto-plastico.*

L'Autore indica alcune costruzioni grafiche con le quali si giunge alla soluzione del problema generale dell'equilibrio elasto-plastico nel caso di resistenza di sollecitazioni a pressione e flessione.

L'Accademico COLONNETTI presenta quindi una altra sua Nota dal titolo: *Al di là dei limiti della teoria classica dell'elasticità.*

Saggio sulla classificazione e sul possibile inquadramento delle diverse teorie delle deformazioni plastiche, e sui loro limiti di applicabilità allo studio dei fenomeni che si verificano nei materiali da costruzione allorché i limiti di elasticità vengono per qualsiasi ragione oltrepassati.

L'Accademico COLONNETTI presenta inoltre una Nota del Prof. PIETRO LOCATELLI dal titolo: *I più generali riflessi della congruenza delle deformazioni sugli sforzi elastici.*

Si esprimono le condizioni cui deve soddisfare un tensore doppio simmetrico perchè possa caratterizzare lo stato di tensione di un continuo elastico, qualunque siano le forze di campo e di contorno e le caratteristiche elastiche del continuo stesso.

L'Accademico DAL PIAZ presenta una sua Nota dal titolo: *L'età del Montello.*

In seguito agli studi del TARAMELLI, dello STELLA e del BRUCKNER si era fino ad ora ritenuto che il Montello appartenesse ad un'antica alluvione del Piave compresa fra il Pliocene superiore e il Quaternario inferiore.

Gli studi condotti dall'Autore su basi paleontologiche e stratigrafiche conducono a concludere invece che la massa conglomeratica del Montello è alquanto più antica. Essa va ascritta al Miocene superiore e precisamente al periodo Pontico.

L'Accademico GEMELLI presenta una sua Nota fatta in collaborazione con il Prof. GINO SACERDOTE dal titolo: *Un metodo per l'analisi statistica dell'intensità sonora del linguaggio.*

Gli Autori iniziano con questa memoria una nuova serie di indagini nel campo della analisi elettroacustica del linguaggio nel quale nei passati anni hanno già apportato notevoli contributi. Essi hanno ideato un metodo per analizzare automaticamente le variazioni dell'intensità sonora della voce. Poichè le variazioni dell'intensità hanno valore di esprimere e significare stati d'animo e sono caratteristiche in modo particolare di alcuni linguaggi, il nuovo metodo permette di determinare l'influenza degli studi psichici sul linguaggio e di mostrare le caratteristiche semantiche di alcune lingue.

L'Accademico GEMELLI fa inoltre una Comunicazione sull'ulteriore sviluppo delle ricerche del Prof. CARLO TRABATTONI, suo Assistente, *Nuovi contributi all'elettroencefalografia* ed in modo speciale afferma che esse non hanno alcun significato di correlativo fisico di fatti psichici. Mostra ai presenti le tavole che accompagneranno le pubblicazioni, in corso di stampa.



L'Accademico GHIGI fa una Comunicazione suppletiva alla sua Nota dal titolo: *Genetica dell'ernia cerebrale dei polli*.

Nella precedente tornata l'Accademico PIERANTONI ha presentato a nome dell'Accademico GHIGI una sua memoria in collaborazione con altri Autori, dal titolo: *Genetica dell'ernia cerebrale dei polli*.

L'Autore desidera dire per qual motivo egli abbia creduto opportuno di esporre i risultati di queste ricerche all'Accademia che ha sede in Vaticano.

La struttura morfologica del Gallo Padovano ricorre in un motivo frequente negli affreschi delle Logge di Raffaello. Nel Museo Vaticano l'Autore scoperse alcuni anni or sono che due statuette di polli dei primi due secoli dell'era nostra riproducono un gallo ed una gallina con ciuffo e perciò ad ernia cerebrale. Questa è adunque una mutazione che conta circa due mila anni di vita.

Ai risultati esposti nella precedente tornata, l'Autore ne aggiunge alcuni altri che riguardano innanzi tutto la determinazione di penne ad aspetto femminile nei galli di origine incrociata con Bantam Sebright cosicchè egli ha potuto conseguire una nuova razza di polli con ciuffo, nella quale il gallo presenta sul capo, sul collo e sul groppone penne tondeggianti come quelle della gallina e non lanceolate come quelle normali dei galli.

Inoltre le produzioni del tegumento, come la cresta e le penne del ciuffo, non sono in stretta correlazione colla forma del cervello e colla cupola cranica. Ernìa abbondante può essere congiunta a cresta straordinariamente sviluppata e a penne del ciuffo molto brevi.

L'Autore illustra i suoi risultati con fotografie e radiografie.

L'Accademico GIORGI presenta una Nota del Prof. LETTERIO TOSCANO, dal titolo: *Trasformata di Laplace di prodotti di funzioni di Bessel e polinomi di Laguerre. Relazione integrale su funzioni ipergeometriche più generali della F_A di Lauricella*.

La ricerca di relazioni integrali sulle funzioni di BESSEL, sui polinomi di LAGUERRE e di HERMITE, e più in generale sulle funzioni ipergeometriche è stata oggetto di studi da parte di numerosi autori, e la letteratura matematica è abbastanza ricca di risultati.

Mancava tuttavia un lavoro d'insieme che collegasse tali risultati, dandone allo stesso tempo una visione unitaria derivandoli da risultati più generali.

L'Autore stabilisce appunto alcune relazioni integrali sulle suddette funzioni e polinomi, introducendo poi una funzione ipergeometrica più generale della F_A di LAURICELLA e per questa nuova funzione dà una relazione integrale da cui si possono derivare tutte le precedenti.

L'Accademico LEVI-CIVITA presenta una Nota dal titolo: *Il punto materiale nella Relatività generale.*

Si rileva come la originaria concezione di punto materiale dovuta a NEWTON risulta applicabile anche alla Relatività generale.

Le leggi classiche che implicavano in qualche modo azioni a distanza nello spazio e nel tempo rimangono senza inconvenienti sostituite o, per così dire, anatomizzate da equazioni a derivate parziali tra cui oggi figurano essenzialmente le equazioni gravitazionali di EINSTEIN.

Una fondamentale applicazione di questo criterio al problema relativistico degli n corpi è sviluppata dal prof. LAMPARIELLO in una sua Nota.

L'Accademico LEVI-CIVITA presenta quindi una Nota del prof. GIOVANNI LAMPARIELLO, dal titolo: *Il problema degli n corpi in Relatività generale.*

L'Autore, considerando (come avviene certo nel sistema solare) moti lenti rispetto alla velocità della luce, imposta il problema del moto di un insieme di corpi celesti in Relatività generale che già è stato oggetto di ricerche di DROSTE, DE SITTER, LEVI-CIVITA, EDDINGTON, ecc.

Il criterio originale a cui si ispira questa Nota è di usufruire anche nella meccanica relativistica della nozione di punto materiale quale NEWTON l'aveva introdotta nei suoi immortali *Philosophiae naturalis principia mathematica.*

Seguendo quest'idea, che trova esauriente giustificazione in un opportuno passaggio al limite operato sul tensore energetico nella forma canonica di EINSTEIN, si evitano i complessi sviluppi richiesti dell'analisi del continuo.

L'Accademico PANETTI presenta una sua Nota dal titolo: *Leggi del moto vario dell'aeroplano in assetto simmetrico rispetto al piano verticale.*

Premessa la trattazione del moto vario con incidenza costante e trazione esattamente compensatrice della resistenza aerodinamica, si discutono le possibilità delle corrispondenti manovre, sia nei riguardi dello elevatore, sia in quelli del gruppo moto-propulsore.

Si esamina in seguito l'effetto di altre manovre, o la loro influenza sui caratteri della traiettoria, con speciale riguardo al fattore di carico.

L'Accademico PENSA presenta una Nota del Dott. GIULIO CESARE PERRI, dal titolo: *L'ossificazione eteropica del rene.*

L'Autore ha ripetuto in conigli le esperienze che, com'è noto, conducono all'organizzazione nel rene di osso. Ha approfondito però, con l'indagine istologica e microchimica, i vari fatti che si succedono in conseguenza della legatura del peduncolo vascolare fino alla formazione di osso e di midollo osseo con tutte le caratteristiche di questo e di quel tessuto. Ha constatato, in un primo tempo, fenomeni esclusivamente regressivi (degenerazione e necrosi); inoltre calcificazione limitata alla sostanza corticale, in un secondo tempo una ripresa della circolazione che si fa specialmente accentuata ed a carattere capillare nella zona midollare, dove in seguito comparirà l'osso. Ha constatato poi, che soltanto nella zona midollare subentrano fatti attivi di proliferazione a carico delle poche cellule epiteliali rimaste nei tuboli retti dopo un primitivo sfaldamento. Questa proliferazione culmina, nei tuboli retti, con la formazione di un rivestimento epiteliale pluristratificato che conduce in alcuni punti anche alla obliterazione del lume. Particolarmente notevole è il fatto che questo epitelio rigenerato non ha più i caratteri del rivestimento normale dei tuboli; ma quello delle grandi vie urinarie (bacinetto, uretere, vescica).

Orbene l'Autore si sofferma a considerare il fatto che l'osso ed il midollo eterotopico neformato compaiono appunto nella sostanza midollare, lontano dalla zona calcificata, in immediato rapporto con l'epitelio dei tuboli retti che ha assunto i caratteri specificati, e con quello del bacinetto. Mette in rapporto tale fatto con quello già noto della formazione di osso che si ottiene sperimentalmente anche con trapianti di mucosa vescicale.

Sulla base di questi dati l'Autore discute le varie opinioni espresse sulla genesi di queste ossificazioni eteropiche ed espone le proprie deduzioni personali.

L'Accademico PENSA presenta ancora una Nota del Dott. GIUSEPPE VERGA, dal titolo: *Innervazione del sistema di connessione seno-atriale ed atrio-ventricolare del cuore dei mammiferi.*

L'Autore ha esteso a tutto il sistema ed a vari mammiferi le ricerche che furono già oggetto di una Nota precedentemente presentata all'Accademia in collaborazione col PALUMBI e che riguardava il solo nodo seno atriale della talpa. Ha potuto dimostrare che non soltanto nel nodo seno-atriale, ma anche in quello atrioventricolare (del TAWARA) e nel fascio di HIS vi è una ricca, fittissima e finissima distribuzione di fibre nervose e che il piano fondamentale di tale inner-

vazione è uniforme, esteso e costante in tutto il sistema e per tutti gli animali studiati. Vi partecipano rami del *n. vago* e del simpatico. I plessi perivasali, vasomotori, sono secondo il VERGA di natura ortosimpatica. Il tessuto muscolare specifico del sistema sarebbe invece sotto la dipendenza del parasimpatico. Fibre pregangliari del *n. vago* infatti terminano con tipiche sinapsi prevalentemente neuro-somatiche nei gangli simpatici che sono connessi al sistema cardiovettore. Dalle cellule di questi gangli hanno origine le fibre postgangliari motrici che si distribuiscono con fini reti espansionali mettendosi in rapporto con gli elementi muscolari,

D'altra parte altre fibre del vago, a funzione recettrice si distribuiscono largamente in tutto il sistema espandendosi in estesi intrecci e grovigli anch'essi in stretto rapporto con la muscolatura specifica. Ma oltre a ciò, in alcuni animali ed in alcuni settori, sono stati messi in evidenza dal VERGA ben individuati corpuscoli terminali di vario carattere, alcuni dei quali capsulati e riferibili, per l'aspetto, ai corpuscoli di senso a gomito oppure a quelli del MEISSNER. In tutto il sistema cardiovettore quindi vi sono morfologicamente dimostrati gli elementi per l'effettuarsi di riflessi che devono avere importanza specifica nella funzione del sistema stesso.

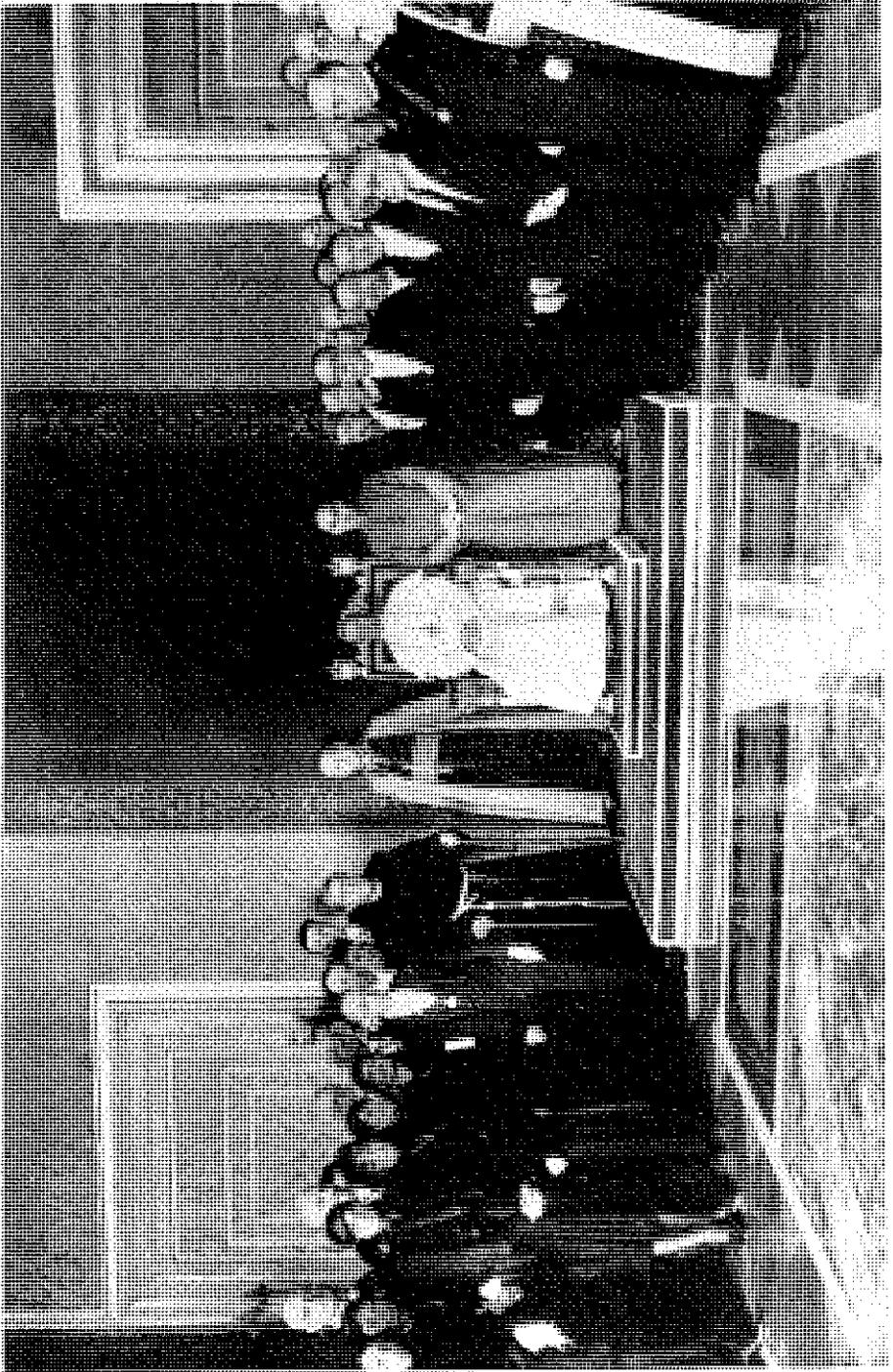
L'Accademico PISTOLESI presenta una sua Nota dal titolo: *L'interferenza di una galleria aerodinamica a contorno misto* (Nota II).

Si riprende lo studio dell'interferenza di una galleria aerodinamica a contorno circolare misto (parte rigido, parte libero) trattando il caso in cui l'ala sperimentata ha un'apertura non piccolissima di fronte al diametro della galleria, nel quale caso il sistema vorticoso libero dell'ala non può più essere approssimato con una doppietta.

Si studia perciò il caso di una coppia di vortici, risolvendolo mediante sviluppi in serie di polinomi di Lagrange; e si studia pure con metodo analogo, il caso di singolarità di ordine superiore alla doppietta, desumendone la risoluzione del problema proposto per una distribuzione qualunque della portanza sull'apertura dell'ala.

L'Accademico SILVESTRI presenta una sua Nota dal titolo: *Notizie, specialmente corologiche, sulle specie di Mengenilla (Insecta Strepsiptera) finora trovate in Italia.*

Fino al 1933 nessuna specie di *Mengelinillidae* era stata ricordata per l'Italia. In tale anno l'A. citò per primo l'esistenza dell'*Eoxenos Laboulbenei Peyerimhoff* per una località italiana (Pisciotta, Prov. Salerno) e nello stesso anno de-



scrisse una nuova specie di *Mengenilla* (*M. quaesita* Silv.). Da quell'anno egli continuò le ricerche di tali interessanti insetti e nel marzo 1940 descrisse brevemente una nuova specie (*M. spinulosa*) trovata in Sicilia e dette un cenno biologico e descrittivo di altre 4 specie nuove trovate pure in Italia.

Altre ricerche condotte durante il 1940 e nel 1941 fino ad oggi non hanno procacciato scoperta di nuove specie, ma hanno fatto allargare la conoscenza della distribuzione di quelle già ricordate e che saranno, in un lavoro in corso, estesamente descritte ed illustrate.

La presente Nota dà frattanto una chiave analitica per distinguere i pupari delle 6 specie allo stadio di pupa, che è più facile a trovarsi, ed aggiunge notizie sulla distribuzione geografica e sull'ospite, in cui vivono fino alla terza età tali insetti.

L'Accademico MERCATI presenta una sua Nota dal titolo: *Briciole della corrispondenza di Antonio Vallisnieri seniore*.

L'Autore ha rinvenuto alcune lettere di Antonio Vallisnieri seniore ed altre dirette a lui, le quali tutte si trovavano casualmente incluse entro un volume dell'edizione delle opere del Vallisnieri stesso che fu curata dal figliolo, volume che doveva evidentemente appartenere a persona di famiglia.

La pubblicazione di queste lettere, con annotazioni e commenti, sarà di certa utilità alla conoscenza di un lungo periodo di quel tempo poichè il carteggio che tratta di cose famigliari e di questioni di studio si estende per quasi cinquanta anni.

La seduta viene tolta alle ore 10,30.

Subito dopo la Tornata il Presidente GEMELLI si recava al Palazzo Apostolico Vaticano per essere ricevuto in Udienza privata dal Santo Padre PIO XII, il quale ammetteva poi alla Sua Augusta presenza, nella Sala del Tronetto, gli Accademici Pontifici che avevano partecipato alla Tornata.

« Sua Santità si è benignato di intrattenersi amabilmente con tutti e singoli gli Accademici, che Gli venivano presentati dall'Ecc.mo Presidente: il sovrano interessamento, fatto di profonda e chiara competenza per ogni problema,

che Egli ha dimostrato verso gli studi, le ricerche e le affermazioni di ciascuno nel campo scientifico, ha vivamente commosso la distinta adunanza.

Si sono così succeduti i più avvincenti colloqui su argomenti di psicologia, fisica, matematica, biologia, aeronautica, geologia, sismologia, chimica, elettrotecnica, geografia, astronomia, nei quali gli insigni scienziati, felici dell'amabile bontà con cui il Supremo Pastore li interrogava nel perfetto Suo aggiornamento dei progressi attuali, davano a Lui ragguagli e notizie sulla loro più recente attività, decoro e vanto della Pontificia Accademia, e pratica dimostrazione del concorso mirabile che le alte discipline da essi coltivate offrono per il naturale e logico ossequio della ragione umana alle sublimi elevazioni della Fede.

Il Santo Padre formulava per gli Accademici i Suoi migliori voti, estendendoli alle attività e alle famiglie di ciascuno. Infine, dopo aver ammesso al bacio della mano il Cancelliere dell'Accademia, e le signore di alcuni accademici, si degnava impartire a tutti la Benedizione Apostolica, e infine rinnovava all'Ecc.mo Presidente, dandogli il paterno amplesso, le Sue particolari felicitazioni per la riacquistata salute e i Suoi fervidi auguri per un prossimo completo ristabilimento, per il più grande profitto della diletta Accademia, e di tutte le altre opere alle quali l'illustre Religioso dedica le sue sollecitudini » (1).

(1) Da « L'Osservatore Romano », anno 81, n. 134.

SOPRA L'IPOTESI DI BULLEN
SULLA VARIAZIONE DISCONTINUA DELLA DENSITÀ
NELL'INTERNO DELLA TERRA
E SULLA CONSEGUENTE VARIAZIONE
DELLA GRAVITÀ (*)

GIOVANNI BOAGA

SUMMARIVM. — Doctor BULLEN, terrae motuum effectus cum perpendisset, animadvertit terrarum orbem quattuor habere interruptionis superficies, quod ad interioris concretionis variationem. A., his studiis, a BULLEN peractis, breviter expositis, quattuor analyticas functiones, a seipso determinatas — iuxta elementa a BULLEN inventa — refert, quibus interiores concretiones significari valeant; haec autem sua studia applicans, de gravitatis variatione intra terrarum orbem agit. Praeterea adnotat quam differant concretiones et gravitates interiores, si ex hypothesis continua de concretionis variatione ad non-continuum quis gradiatur; quod maximi est momenti ad geo-physica problemata quae huiusmodi hypothesis innituntur.

In una Nota del BULLEN pubblicata nel 1939⁽¹⁾ sono riportati i valori della densità interna terrestre a varie profondità da lui calcolate prendendo a base dei compiuti i dati ricavati da numerosi sismogrammi relativi a terremoti recenti. Egli viene così a stabilire che nell'interno della terra devono esistere quattro superficie di discontinuità rispettivamente alle profondità di 14, 42, 481, 2920 km., le quali

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini il 15 gennaio 1941.

(¹) Cf. *Transaction of the R. Soc. of New Zealand*, Vol. 67, 1937.

con la superficie esterna del pianeta scompongono la terra in quattro corone sferiche ed un nucleo centrale. La seconda discontinuità sarebbe quella di MOHORovičić che la pose a 60 km., mentre il GUTENBERG a Sud della California la assegna a 39 km., valore questo ottenuto anche dal CALOI per la regione del Cansiglio. L'ultima invece sarebbe quella di WIECHERT che la pose a 2500 km. di profondità. Secondo i dati del BULLEN, a partire dalla superficie terrestre verso l'interno, la prima corona sferica sarebbe costituita con densità uniforme $\rho_1 = 2,64$; nella seconda e terza corona sferica le densità ρ_2 e ρ_3 sono sempre crescenti e variano linearmente; nella quarta corona e nel nucleo centrale le densità ρ_4 e ρ_5 sono ancora sempre crescenti e variano secondo leggi paraboliche.

In base ai risultati ottenuti dal BULLEN abbiamo stabilito le seguenti funzioni per le variazioni della densità nelle varie corone sferiche e nel nucleo:

$$\begin{aligned}\rho_2 &= 48,189(1 - 0,9433 \cdot a) \\ \rho_3 &= 8,639(1 - 0,6187 \cdot a) \\ \rho_4 &= 6,254(1 - 0,0198 \cdot a - 0,3552 \cdot a^2) \\ \rho_5 &= 12,206(1 - 0,0075 \cdot a - 0,6909 \cdot a^2)\end{aligned}$$

con a distanza computata dal centro, ritenuto il raggio della terra unitario.

Tali funzioni riproducono con esattezza i valori assegnati da BULLEN alle varie profondità per le corone sferiche, mentre differiscono per qualche centesimo nel nucleo centrale. Nelle varie superficie di discontinuità le densità passano: da 2,64 a 2,80; da 3,00 a 3,32; da 3,69 a 4,23; da 5,56 a 9,69. Tali salti sono sempre crescenti e l'ultimo equivale a ben quattro volte la somma dei precedenti.

Come è facile provare con le funzioni su riportate si trova per lo schiacciamento terrestre il valore hayfordiano, mentre per la densità media si ha un valore inferiore di quattro centesimi al valore generalmente adottato. Per il rapporto C: (C-A) con C ed A momenti principali di inerzia polare ed equatoriale, si trova invece il noto valore 305,6.

La gravità $g(a)$ alla distanza a dal centro, trascurando come è lecito l'effetto della forza centrifuga e dello schiacciamento, è definita dalla

$$g(a) = \frac{4\pi\varepsilon}{a^2} \int_0^a \rho(a) a^2 \cdot da$$

con ε costante dell'attrazione. Introducendo in questa successivamente le ρ dianzi richiamate si possono calcolare i valori che la gravità assume a diverse profondità. Effettuando le sostituzioni ed eseguendo i calcoli si trova che la gravità superficiale acquista il valore di 983 *gal*, indi nelle immediate vicinanze della superficie terrestre e nelle prime tre corone sferiche anmenta continuamente fino a raggiungere un valore massimo di 997 *gal* alla profondità di 481 km., cioè alla profondità di separazione fra la terza e la quarta zona sferica; nella quarta corona la gravità diminuisce fino a raggiungere un minimo di 981 *gal*, inferiore di 2 *gal* a quello superficiale alla distanza di 1500 km., poscia aumenta fino a raggiungere un secondo massimo di 1048 *gal* nella superficie di separazione tra la quarta corona ed il nucleo centrale, cioè alla profondità di 2920 km.; nel nucleo centrale la gravità diminuisce sempre e nelle vicinanze del nucleo linearmente, fino a ridursi di valore nullo al centro.

Gli stessi risultati si ottengono con la seguente formula da noi ricavata da quella differenziale data da OLCKZAK e BANFIELD:

$$\rho = e^{\frac{\pi\varepsilon\Delta}{4} \frac{R^3}{a-\beta^2}}$$

con:

- e base dei logaritmi neperiani,
- ε costante di attrazione
- Δ densità media terrestre
- R raggio della terra
- α e β velocità delle onde sismiche P ed S.
- r distanza dal centro.

In una Nota inserita negli « Atti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere » (1939) abbiamo esposto il metodo di calcolo seguito per la determinazione delle costanti che figurano nella

$$\rho = 11,63 (1 - 1,280 \cdot a^2 + 0,746 \cdot a^4 - 0,225 a^6)$$

atta a rappresentare con variazione continua la densità nell'interno della terra in modo da soddisfare ai dati dell'ellissoide di HAYFORD ed ai valori geofisici $(C-A)/C = 1/305,6$ e $\Delta = 5,52$.

Con questa ipotesi scende, con facili calcoli, la seguente funzione per la gravità interna alla distanza a dal centro:

$$g(a) = 0,9329 (0,333 \cdot a - 0,256 \cdot a^3 + 0,109 \cdot a^5 - 0,028 \cdot a^7) \cdot 10^{-5}$$

Nella Tabella numerica che segue abbiamo riportato i risultati dei calcoli eseguiti con queste formule e con quelle da noi ricavate con i dati del BULLEN per le densità e per le gravità a varie profondità:

a	Profondità km.	DENSITÀ			GRAVITÀ		
		ip. cont.	ip. disc.	diff.	ip. cont. gal	ip. disc. gal	diff. gal
1,0	0	2,67	2,64	+ 0,03	982	993	— 1
0,9	637	3,83	4,34	— 0,51	1020	995	+ 25
0,8	1254	4,97	4,37	— 0,24	1084	984	+ 100
0,7	1911	6,13	5,08	+ 1,05	1001	983	+ 18
0,6	2548	7,39	5,38	+ 1,91	997	1006	— 9
0,5	3185	8,42	10,15	— 1,73	856	984	— 128
0,4	3823	9,46	10,90	— 1,44	733	821	— 88
0,3	4460	10,36	11,48	— 1,12	579	636	— 57
0,2	5097	11,06	11,89	— 0,83	401	435	— 34
0,1	5734	11,48	12,13	— 0,65	206	223	— 17
0,0	6371	11,63	12,21	— 0,58	0	0	0

Dalle differenze riportate nelle colonne quinta ed ottava si vede che pur soddisfacendo le due ipotesi sulla variazione della densità, quella sulla variazione continua e quella sulla variazione discontinua, ai dati geodetici e geofisici oggi accettati, sensibili sono le differenze che si riscontrano fra le densità e fra le gravità interne, specialmente per queste ultime alle profondità di 1200 e 3200 km. Questo fatto mette indubbiamente in evidenza che bisogna essere molto cauti nel scegliere l'ipotesi continua o quella discontinua sulla variazione della densità interna, in tutti quei problemi a base matematica in cui si voglia studiare il comportamento di fenomeni nell'interno della terra e all'esterno, quando questi siano influenzati da fattori interni dipendenti dalla densità o dalla gravità. Si vede pertanto l'opportunità di ripigliare con l'ipotesi discontinua specialmente i classici problemi sulle maree terrestri trattati da vari Autori con ipotesi continue sulla variazione della densità terrestre.

SOPRA UNA CERTA EQUAZIONE FUNZIONALE (*)

GIORGIO GALBURA

SUMMARIVM. — Quamdā aequationem functionalem, quam SEVERI in quibusdam geometricis quaestionibus invenerat, Auctor perscrutatur, definiens quid requiratur quidque sufficiat ut huius aequationis integrale (quod ipse determinat), positis generalioribus hypothesibus, constituatur.

F. SEVERI, nel 1902, ha considerato incidentalmente ⁽¹⁾ l'equazione funzionale

$$[1] \quad \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = f(x, y)$$

ove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, mentre $f(x, y)$ è una funzione nota. Egli ha determinato l'espressione della soluzione $\varphi(x)$ per valori interi di x , posto che essa esiste.

Noi riprendiamo qui ⁽²⁾ lo studio della [1], determinando tra l'altro la condizione necessaria e sufficiente perchè la [1] abbia una soluzione dotata di derivate dei primi due ordini e trovando, sotto questa ipotesi, la forma generale della soluzione.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio F. Severi il 22 marzo 1941.

(1) F. SEVERI, *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*. Mem. della R. Accademia di Torino, 1902. In questa Memoria si trova considerata l'equazione stessa per funzioni di un numero qualunque di variabili.

(2) La ricerca mi è stata suggerita dall'Ecc. SEVERI, in relazione ad argomento trattato dal Prof. FABIO CONFORTO nel corso sulle « Funzioni abeliane e matrici di Riemann » da questi tenuto presso il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica.

1. - Si osservi anzitutto, che se $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ sono soluzioni, rispettivamente, delle equazioni

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = f_1(x, y)$$

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = f_2(x, y)$$

la combinazione lineare $A\varphi_1(x) + B\varphi_2(x)$, con coefficienti costanti A e B , è soluzione dell'equazione

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = Af_1(x, y) + Bf_2(x, y)$$

In particolare, la differenza tra due soluzioni della [1] è soluzione dell'equazione di CAUCHY:

$$[2] \quad \varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = 0$$

In altre parole: Considerato un campo funzionale C , il quale contenga sempre la somma di due sue qualunque funzioni, *la soluzione generale, entro C , della [1] si ottiene aggiungendo ad una soluzione particolare di essa, appartenente a C , la soluzione generale della [2] in C .*

2. - Notiamo ora che, se la [1] ha soluzione, la $f(x, y)$ deve necessariamente soddisfare alle condizioni seguenti:

1) $f(x, y)$ è simmetrica rispetto alla retta $x=y$, perchè tale è il primo membro della [1];

2) $f(x, y)$ assume un valore costante $a = -\varphi(0)$ sugli assi coordinati, perchè, se nella [1] si pone $x=0$, si ha $f(0, y) = -\varphi(0) = a$; e, se in essa si pone $y=0$, si ha analogamente $f(x, 0) = a$.

Inoltre, se la [1] ammette una soluzione $\varphi(x)$ dotata delle derivate dei primi due ordini, la $f(x, y)$ dovrà possedere le derivate par-

ziali dei primi due ordini; di più le sue derivate parziali seconde miste dovranno essere uguali, e si avrà:

$$[3] \quad \varphi'(x+y) - \varphi'(y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$[4] \quad \varphi''(x+y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}; \text{ cioè:}$$

3) la derivata seconda mista della $f(x,y)$ è funzione della sola somma $x+y$

$$[5] \quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \psi(x+y)$$

ove la $\psi(z)$ è una funzione integrabile.

Dico che le 1), 2) e 3) sono condizioni non solo necessarie, ma anche sufficienti, affinché la [1] ammetta una soluzione derivabile sino al secondo ordine.

Infatti, data $\psi(z)$ integrabile, la sola funzione che soddisfaccia alle condizioni 1), 2), 3), è la seguente:

$$[6] \quad f(x,y) = \int_0^x du \int_0^y \psi(u+v) dv + a$$

Dire che la $f(x,y)$, soddisfa alle 1), 2), 3), equivale pertanto a dire che essa ha la forma [6].

Allora la funzione

$$[7] \quad \varphi(x) = \int_0^x dt \int_0^t \psi(u) du - a ,$$

che ci dà una soluzione particolare dell'equazione ottenuta dalla [3] ponendovi al posto di $f(x,y)$ la [6] e facendovi poi $y=0$, soddisfa alla [1], ove $f(x,y)$ sia data dalla [6].

Infatti si ha

$$\begin{aligned} & \int_0^{x+y} dt \int_0^t \psi(u) du - \int_0^x dt \int_0^t \psi(u) du - \int_0^y dt \int_0^t \psi(u) du - a + 2a = \\ & = \int_y^{x+y} dt \int_0^t \psi(u) du - \int_0^x dt \int_0^t \psi(u) du + a = \int_0^x \left[\int_0^{t+y} \psi(u) du - \int_0^t \psi(u) du \right] dt + \\ & \quad + a = \int_0^x dt \int_t^{t+y} \psi(u) du + a = \int_0^x dt \int_0^y \psi(u+t) du + a = f(x, y) \end{aligned}$$

Si giunge pertanto al seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè la [1] abbia una soluzione derivabile sino al secondo ordine, è che $f(x, y)$ sia della forma [6] con $\psi(z)$ funzione arbitraria, purchè integrabile. La soluzione generale della [1] (in campo funzionale che contenga tutte le funzioni dotate delle derivate dei primi due ordini, e, assieme a due sue funzioni qualunque, anche la loro somma) è data allora dalla funzione

$$[8] \quad \varphi(x) = \bar{\varphi}(x) + \int_0^x dt \int_0^t \psi(u) du - a$$

ove $\bar{\varphi}(x)$ indica la soluzione generale della [2] (nel campo \mathbb{C}).

Il risultato si può anche enunciare così:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la [1] abbia una soluzione derivabile sino al secondo ordine, è che la $f(x, y)$ sia simmetrica rispetto alla retta $x=y$, costante sugli assi coordinati, e che la derivata seconda mista di $f(x, y)$ sia funzione solo di $x+y$.

3. - Ora dimostriamo come la soluzione della [1], data, per valori interi di x , da SEVERI⁽¹⁾, quando la $f(x, y)$ abbia la forma [6] si riduce alla [8].

(¹) Op. cit. nota 1.

L'espressione indicata da SEVERI è la seguente:

$$[9] \quad \varphi(x) = \varphi(1)x + \sum_1^{x-1} f(1, x-1) .$$

Se al posto di $f(1, x-i)$ s'introduce la sua espressione data dalla [6] e si usufruisce dell'identità

$$\int_0^x du \int_0^y \psi(u+v) dv = \int_0^{x+y} dt \int_0^t \psi(u) du - \int_0^x dt \int_0^t \psi(u) du - \int_0^y dt \int_0^t \psi(u) du$$

si trova

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(1)x + \sum_1^{x-1} \left\{ \int_0^{x+1-i} dt \int_0^t \psi(u) du - \int_0^{x-i} dt \int_0^t \psi(u) du - \int_0^1 dt \int_0^t \psi(u) du + a \right\} = \\ &= \varphi(1)x + \int_0^x dt \int_0^t \psi(u) du - \int_0^1 dt \int_0^t \psi(u) du - (x-1) \int_0^1 dt \int_0^t \psi(u) du + (x-1)a = \\ &= \int_0^x dt \int_0^t \psi(u) du - a + \left[\varphi(1) - \int_0^1 dt \int_0^t \psi(u) du - a \right] x \end{aligned}$$

ossia, ponendo

$$\varphi(1) - \int_0^1 dt \int_0^t \psi(u) du - a = k$$

$$[10] \quad \varphi(x) = kx + \int_0^x dt \int_0^t \psi(u) du - a$$

espressione che rientra nella [8], e in particolare coincide con la [8] stessa, se il campo C sopra considerato è quello delle funzioni continue. Si noti inoltre che, come era prevedibile a priori, *per valori*

interi di x , la [10] coincide con la [8] qualunque sia il campo C considerato. Infatti, qualunque soluzione, anche discontinua, $\bar{\varphi}(x)$ della [2], coincide, per valori interi di x con la funzione $x\bar{\varphi}$ [1].

4. - Se nella [1] facciamo $x=y$ essa diviene

$$[11] \quad \varphi(2x) - 2\varphi(x) = f(x, x)$$

e ogni soluzione della [2] è anche soluzione della [11].

Inoltre, se si pone $x=2^z$, $\varphi(2^z) = \Phi(z)$, $f(2^z, 2^z) = F(z)$, la [11] diviene

$$[12] \quad \Phi(z+1) - 2\Phi(z) = F(z) .$$

Quest'equazione è ben nota, ed è stata risolta tra gli altri, sotto l'ipotesi che $F(z)$ sia una funzione meromorfa, da HURWITZ (¹).

Una volta che si conosca la soluzione generale della [12], si ha subito la soluzione generale della [11]. Non è detto però che essa sia soluzione della [1]; ma è certo che la soluzione generale della [1] è un caso particolare di essa (²).

Questa è pertanto un'altra via per la quale si può giungere alla soluzione generale della [1].

5. - Che (se si toglie la condizione che la $\varphi(x)$ debba avere derivate sino al 2° ordine) la [1] possa avere soluzione anche per funzioni $f(x, y)$ di forma più generale di quella data dalla [6], è evidente: se infatti si dà ad arbitrio una φ discontinua, e mediante essa si definisce $f(x, y)$, questa risulterà (almeno in generale) discontinua e non potrà avere la forma [6].

(¹) HURWITZ, *Sur l'intégrale d'une fonction entiere*, « Acta Mathematica », 20.

(²) Questa osservazione mi è stata indicata dal Prof. G. RICCI.

È però interessante vedere come, se ci si limita a considerare le funzioni $f(x, y)$ *simmetriche rispetto all'origine*, si possa determinare la condizione necessaria e sufficiente perchè la [1] abbia soluzione, e la espressione effettiva di una soluzione particolare, *in termini finiti*, senza fare alcuna ipotesi restrittiva per la soluzione.

Notiamo anzitutto che *qualunque sia la f* , se la [1] ha soluzione, si ha, se $f(0, 0) = a$, $\varphi(0) = -a$; e quindi, ponendo nella [1] $x + y = 0$,

$$\varphi(x) + \varphi(-x) = -f(x, -x) + a ;$$

e similmente:

$$\begin{aligned} \varphi(y) + \varphi(-y) &= -f(y, -y) + a , \\ \varphi(x+y) + \varphi(-x-y) &= -f(x+y, -x-y) + a . \end{aligned}$$

Sottraendo da quest'ultima le due equazioni precedenti, e tenendo conto della [1], si ha

$$[13] \quad f(x, y) + f(-x, -y) = f(x, -x) + f(y, -y) - f(x+y, -x-y) - a .$$

Questa è la *condizione necessaria* perchè la [1] abbia soluzione.

Se però supponiamo che la $f(x, y)$ *sia simmetrica rispetto all'origine*; che si abbia, cioè,

$$[14] \quad f(x, y) = f(-x, -y) ,$$

la [14] è anche *condizione sufficiente* per l'esistenza di una soluzione.

Infatti, in tal caso la [13] diviene

$$2f(x, y) = f(x, -x) + f(y, -y) - f(x+y, -x-y) - a .$$

Allora la funzione

$$[15] \quad \varphi(x) = -\frac{1}{2} f(x, -x) + \frac{1}{2} a$$

soddisfa alla [1]. In vero si ha, tenendo conto della [15]:

$$\varphi(x+y) - \varphi(x) - \varphi(y) = -\frac{1}{2} \left[f(x+y, -x-y) - f(x, -x) - f(y, -y) + a \right] = f(x, y).$$

Pertanto, se la $f(x, y)$ si definisce ad arbitrio sulla bisettrice $x+y=0$ per $x > 0, y > 0$ e uguale ad a nell'origine, e si definisce inoltre in base alla [14] nell'altro tratto di bisettrice, e in base alla [15] nel resto del piano, si ottiene un'equazione [1] che ammette soluzioni, una delle quali è data dalla [15].

OSSERVAZIONI
DI SPODOGRAFIA ED ANTRACOGRAFIA
DELLE FIBRE MUSCOLARI STRIATE DEGLI INSETTI
(COLEOPTERA)

FRANCESCO LORETI

SUMMARIVM. — Auctor physicas ac topographicas describit notas, necnon chemicam naturam, cinerum et carbonariarum materiarum, quae coleoptera in striatarum fibrarum, quae in crurum et alarum musculis exstant, spodogrammatibus et anthracogrammatibus ostendunt.

Al fine di completare i reperti da me precedentemente ottenuti nei riguardi della fine struttura della fibra muscolare striata degli arti (zampe ed ali) degli insetti (Coleoptera); ho ritenuto opportuno effettuare su questo tessuto dettagliate indagini spodografiche ed antracografiche. Mi sono fondamentalmente attenuto ai procedimenti tecnici stabiliti dal POLICARD e dallo SCHULTZ-BRAUNS, allestendo spodogrammi ed antracogrammi di fibre muscolari sia in precedenza sottoposte a fissazione e quindi incluse in paraffina, sia incenerite « a fresco » dopo semplice essiccazione del preparato ottenuto per dissociazione⁽¹⁾.

Poichè i fissativi possono modificare chimicamente il contenuto cellulare, il che ha grande influenza tanto sui caratteri fisici quanto sulla natura chimica delle ceneri che sono reperibili nello spodogramma; ritengo che le immagini spodografiche offerte dalle fibre muscolari

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Antonio Pensa il 22 marzo 1941.

(1) Furono oggetto di studio le fibre muscolari delle zampe e delle ali delle seguenti specie fra i coleotteri: *Hydrous piceus*, Linn; *Dytiscus marginalis*, Linn; *Galeruca tanacetii*, Linn; *Staphylinus (Ocypus) olens*, Mull.; *Lucanus cervus*, Linn.

striate non sottoposte all'azione di alcun reattivo, rappresentino la più fedele espressione non solo del quantitativo in ceneri che propriamente viene manifestato dalla fibra, ma soprattutto nei riguardi della loro distribuzione e localizzazione topografica.

Il reperto fondamentale che risultò dalle mie preparazioni è stato quello di un cospicuo accumulo di ceneri in coincidenza della banda Q dell'inocomma, sia nelle fibre muscolari striate delle zampe, sia nei sarcostili delle fibre delle ali. I tratti parazetali, costituiti, nelle fibre muscolari degli insetti, dalla seriazione delle strie E, N, J, danno uno scarso residuo di ceneri, volatilizzabili anche a temperature relativamente basse (massima temperatura: 400° C.).

Nelle fibre incenerite « a fresco » risulta chiaramente evidente una seriazione di zone riccamente provviste di ceneri, alternate a zone che ne sono prive, o solo scarsamente dotate.

Nelle prime zone, le quali, come ho detto, coincidono con la banda Q, le ceneri hanno un tipico aspetto cretaceo, granulare, dove i singoli granuli presentano volume diverso. Le ceneri hanno colorazione variabile, a seconda delle specie, dal bianco al grigio; quelle lasciate dai sarcostili manifestano una sfumatura rosso-bruna, talora ben evidente, che è da ritenersi espressione della presenza di composti di ferro (ossido ferrico).

La distribuzione delle ceneri della banda Q varia sensibilmente nelle varie condizioni funzionali della fibra. Nelle fibre incenerite nelle fasi di riposo o di modica estensione, i granuli voluminosi risultano per lo più orientati parallelamente all'asse longitudinale della fibra, così da assumere un aspetto « a palizzata », analogo alla struttura omonima reperibile talora nella banda Q, nelle comuni preparazioni per colorazione.

Ritengo perciò molto verosimile che i voluminosi granuli di cenere siano da attribuire a residui minerali lasciati dal colloide costitutivo delle miofibrille (miocolloide). I fini granuli che vi sono interposti e che risultano uniformemente disseminati nella banda Q, sono da riferire al componente sarcoplasmatico. Questa interpretazione è suffragata dal reperto che nei fasci sarcostilici dei muscoli delle ali, il sarcoplasma, lascia, nello spodogramma, un abbondante residuo minerale coi caratteri sopra detti.

Nella fibra muscolare striata incenerita nella fase di contrazione, lo strato di ceneri dato dalla banda Q è meno alto che nelle condizioni precedenti. Inoltre i granuli di cenere risultano fra loro fortemente stipati.

È degno di rilievo il fatto che nelle varie condizioni funzionali in cui si trova la fibra, il quantitativo di ceneri reperibile nelle aree che, nell'inocomma, topograficamente coincidono col telofragma e col tratto parazetale, è sempre scarso o nullo. Tale reperto dimostra come non avvenga, nei diversi momenti funzionali della fibra muscolare striata, spostamento o diffusione di sostanze minerali lungo le diverse bande dell'inocomma, in base almeno a quanto dimostra l'indagine spodografica.

Nelle fibre incenerite in condizioni di cospicua estensione, quale si può ottenere stirando la fibra allo stato vitale col micromanipolatore e sottoponendola quindi ad incenerimento, si nota costantemente la comparsa di una sottile zona priva, o povera in residui minerali, situata nel mezzo della banda Q. Topograficamente coincide colla stria Qh, la quale, come ho potuto controllare anche studiando coi metodi comuni le modificazioni strutturali ed ottiche cui soggiace la fibra muscolare striata degli insetti sottoposta ad iperestensione, insorge quasi costantemente nella banda Q, nelle suestipate condizioni sperimentali.

Risulta dunque che nella stria Qh i residui minerali sono scarsi nel confronto di quelli reperibili in Q_1 e Q_2 .

Non mi risultano sicuramente dimostrabili residui minerali da ascrivere al telofragma od ai granuli J del tratto parazetale.

Ceneri termoresistenti danno il sarcolemma, i filamenti chitinosi che fanno parte della struttura dei tendini, ed i tenidi delle grosse trachee. È verosimile che nella costituzione chimica di queste ceneri abbia parte, come dimostra anche la loro acidoresistenza, il silicio.

I sarcosomociti interposti ai fasci sarcostilici dei muscoli delle ali lasciano un abbondante residuo di ceneri. I granuli Q, intersarcostilici, manifestano pure residui minerali.

I nuclei del sarcoplasma danno ceneri abbondanti e termoresistenti anche a temperature elevate.

La suddescritta distribuzione topografica delle ceneri dell'inocomma delle fibre muscolari striate dei muscoli delle zampe e delle ali degli insetti, la quale ho desunto da spodogrammi allestiti da fibre incene-

rite dopo esclusiva essiccazione della preparazione non sottoposta a fissazione; risulta meno netta, o del tutto irreperibile, se l'incenerimento viene effettuato su fibre, delle stesse specie, sottoposte a fissazione, inclusione in paraffina e sezione microtomica. In queste condizioni, nelle singole bande dell'inocomma, è dato talora notare o una irregolare e disordinata distribuzione dei residui minerali, od una loro uniforme disseminazione.

Propendo a ritenere che l'atteggiamento granulare dato dalle ceneri della sostanza contrattile, sia conseguente alla retrazione granulare cui essa soggiace per effetto delle crescenti temperature all'atto dell'incenerimento stesso.

Gli antracogrammi dimostrano nella banda Q abbondanti materiali carboniosi; questi sono in esigua quantità nel tratto parazetale. Non mi venne dato poter dimostrare nelle mie preparazioni sostanze carboniose propriamente riferibili al telofragma ed ai granuli J.

A me dunque risulta che la banda Q dell'inocomma, dà, nella fase di carbonizzazione, notevoli quantità di sostanze carboniose, come, analogamente, offre il più cospicuo accumulo di ceneri nella fase di incenerimento.

Sostanze di difficile incenerimento risultano nella compagine dei granuli Q intersarcostilici (sarcosomi); nonchè nelle entità granulari (Fettzellengranula, di THULIN) che fanno parte della struttura dei sarcosomociti interposti ai fasci sarcostilici dei muscoli delle ali. Tali sostanze sono da ritenersi componenti lipidici, che, accanto a glucidi e protidi, entrano nella costituzione chimica di detti granuli.

Mediante procedimento chimico è possibile identificare nelle ceneri date dalla banda Q il Calcio, il Magnesio, il Fosforo. La localizzazione topografica del Calcio risulta dimostrata con sufficiente esattezza applicando allo spodogramma il metodo tintoriale proposto da GRANDIS e da MAININI, nonchè effettuando, su spodogrammi rivestiti con celloidina, secondo la tecnica proposta dall'OKKEL, le reazioni dell'acido solforico e dell'ossalato di ammonio, rispettivamente portanti alla formazione, in presenza di Calcio, dei caratteristici cristalli di solfato e di ossalato di Calcio. Il Sodio ed il Potassio, allo stato di solfati, si possono dimostrare soprattutto nel tratto parazetale, esponendo le preparazioni, prima dell'incenerimento, all'azione dei vapori di anidride solforosa, secondo la tecnica proposta da POLICARD e da PILLET. Il Ferro risulta

indirettamente identificabile solo in base alla colorazione rosso-bruna che presentano i residui minerali; il Silicio in base all'acidoresistenza delle ceneri. Residui minerali acidoresistenti si dimostrano nelle ceneri del sarcolemma, dei tenidi e dei tendini.

Le ceneri della sostanza contrattile sono invece solubili negli acidi forti.

L'identificazione nella banda Q del Calcio e del Magnesio, metalli alcalino terrosi bivalenti, è di notevole interesse, in quanto le ricerche di micromanipolazione dimostrano che in detta banda la viscosità della sostanza contrattile è più elevata che non in corrispondenza del tratto parazetale. Orbene, è noto come il Calcio ed il Magnesio abbiano appunto la facoltà di aumentare la viscosità del protoplasma, nonchè la sua coesione. Al contrario nel tratto parazetale, il cui colloide costitutivo è meno viscoso di quello della banda Q, risultano prevalere i sali di Sodio e di Potassio.

SULLO STATO DI TENSIONE ELASTICA NEI CONTINUI OMOGENEI (*)

PIERO LOCATELLI

SUMMARY. — Aequationes statuuntur quibus genericus duplex symmetri-
tensor congruere debet, ut aequalis elastici corporis, elasticis constantibus viribus-
que ipsum urgentibus opportune abrogatis, internam tensionem exprimere valeat.

È ben noto che la deformazione infinitesima di un continuo tri-
dimensionale è caratterizzata, in un assegnato riferimento, da sei fun-
zioni dei punti dello spazio nel quale il continuo stesso è definito, e
che, se si vuole mantenuta l'integrità di questo, tali funzioni non sono
completamente arbitrarie, ma obbligate a rispettare le condizioni di con-
gruenza, o di ST. VENANT, espresse, con l'uso di simboli abituali, dalle:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial x^2} &= 2 \frac{\partial^2 \xi_{xy}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial \xi_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} \right) \\ [*] \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial y^2} &= 2 \frac{\partial^2 \xi_{yz}}{\partial y \partial z} & \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial z^2} &= 2 \frac{\partial^2 \xi_{zx}}{\partial z \partial x} & \frac{\partial \xi_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Sono queste sei equazioni algebricamente indipendenti, ma diffe-
renzialmente non tali. Che ciò sia ci è intanto assicurato dal fatto
che esse dicono semplicemente che la deformazione è figlia di uno
spostamento continuo, e del resto arbitrario, e che essa deve pertanto

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti, il 22 marzo
1941.

conservare la triplice arbitrarietà di questo. Ma ciò può anche essere visto in modo formale con tutta facilità se si fa ricorso all'algoritmo tensoriale, come a quello che, riunendo le componenti di deformazioni ξ_{ik} in un tensore, il tensore di deformazione, fa di esse un unico ente geometrico atto a ben sposare l'unicità del fatto fisico, riuscendo così particolarmente comodo e suggestivo.

Le [*] infatti assumono l'aspetto⁽¹⁾:

$$[*] \quad \epsilon^{irh} \epsilon^{ksj} \xi_{ik|rs} = 0 \quad (i, k, r, s, h, j = 1, 2, 3)$$

avendo con ϵ^{irh} indicato il tensore di RICCI, tensore triplo se lo spazio è tridimensionale⁽²⁾.

Basta allora osservare che i primi membri delle [*] derivati rispetto alla variabile spaziale x_i e saturati col tensore fondamentale a_{hi} si annullano dando luogo a tre identità, talchè le [*] stesse si riducono a tre sole relazioni effettivamente indipendenti.

(1) Conformemente all'uso indico con indici in alto le componenti contravarianti di un tensore e con indici in basso le covarianti; una lineetta fra gli indici sostituisce il segno di derivazione (derivazione ordinaria, in coordinate cartesiane; derivazione tensoriale, in coordinate generali); sono soppressi i simboli di sommatoria quando stanno a rappresentare una semplice saturazione rispetto agli indici spaziali; ad esempio la prima delle [*] abbrevia la seguente:

$$\sum_1^3 \xi_{ikrs} \epsilon^{irh} \epsilon^{ksj} \xi_{ik|rs} = 0$$

(2) Nello spazio di metrica

$$ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

il tensore a_{ik} è il tensore fondamentale (se lo spazio è euclideo e le coordinate sono cartesiane, $a_{ik} = 1$ se $i=k$, $a_{ik} = 0$ se $i \neq k$). Esso è costante nel senso che la sua derivata tensoriale è nulla, ed è elemento essenziale nel prodotto scalare fra due vettori $u \times v = a_{ik} u^i v^k$.

Il tensore di RICCI è un tensore nplò (doppio nello spazio a 2 dimensioni, triplo in quello a 3) ed è così definito: $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = 0$ se almeno 2 indici sono uguali; $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \pm \sqrt{|a_{ik}|}$ se gli indici sono tutti distinti, valendo il segno + o il segno - secondo la classe della permutazione $i_1 \dots i_n$ rispetto alla fondamentale $1 \dots n$. (se lo spazio è euclideo e le coordinate sono cartesiane, le componenti non nulle del tensore di RICCI sono $\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \pm \sqrt{|a_{ik}|} = \pm 1$). Nello spazio tridimensionale il tensore di RICCI è elemento essenziale nel prodotto vettoriale. Precisamente, se $w = u \wedge v$, si ha $w_k = \epsilon_{hik} u^i v^h$.

A tali condizioni, differenziali del secondo ordine, deve dunque soddisfare un tensore doppio simmetrico perchè possa essere considerato come tensore di deformazione di un qualsivoglia continuo.

Sorge allora spontanea la domanda se le sei funzioni che caratterizzano lo stato di tensione in un punto di un continuo siano, alla loro volta, obbligate da qualche vincolo ed, in caso affermativo, quale sia la natura di esso.

Il rispondere a tale domanda, se può avere qualche valore da un punto di vista puramente speculativo, ne ha anche da un punto di vista applicativo quando si tengano presenti alcune considerazioni.

Una prima si riallaccia ai tentativi di soluzione di nuovi problemi elastici: in essi uno dei modi di procedere può essere quello di « dare », aiutati dall'intuizione, lo stato di tensione e risalire da questo agli sforzi al contorno, alla deformazione ed allo spostamento; sarà allora necessario fin dall'inizio, ad evitare inutili fatiche, accertare che lo stato di tensione così « dato » cominci a rispettare, se ve ne sono, i vincoli cui sopra s'è fatto cenno.

Una seconda riguarda invece i tentativi, numerosi nel passato e neppure oggi forse del tutto abbandonati, di costruire dei modelli elastici di fenomeni fisici: un primo criterio per accertare la possibilità di buon esito sarà il constatare se quegli enti che dovranno essere rappresentati da sforzi interni rispondano, anche qui, agli eventuali inderogabili vincoli che li dominino.

Premesso allora che, caratterizzando lo stato di tensione con un tensore doppio simmetrico, abbiamo già soddisfatto le condizioni che nascono dall'imporre l'equilibrio alla rotazione di ogni singolo elemento del continuo quando l'equilibrio alla traslazione sia assicurato da opportune forze di massa, delle quali supponiamo di disporre a nostro piacimento, la domanda cui s'è accennato si formula così: possono sei funzioni qualunque dei punti dello spazio essere assunte come stato di tensione (come componenti del tensore simmetrico degli sforzi interni) di un opportuno corpo dotato di opportune forze di massa e di contorno ed, eventualmente, di opportuni vincoli? O invece, pure disponendo di tutte queste forze e delle caratteristiche del continuo, ciò non è sempre possibile? Ed in questo caso a quali relazioni devono ubbidire quelle sei funzioni?

Sono ovvie le modifiche alle domande così formulate quando, invece che ad un continuo tridimensionale, ci si riferisca a continui bidimensionali o più che tridimensionali. Pur limitandosi a corpi a due e a tre dimensioni, come a quelli che consentono pratiche e reali applicazioni, anche tecniche, il problema posto e la sua soluzione, per essere come si vedrà essenzialmente legati al tensore di Ricci, cambiano sostanzialmente nei due casi, rientrando fra quelli strettamente connessi alle dimensioni dello spazio.

Una seconda differenziazione scaturisce poi dal porre al continuo l'obbligo di essere isotropo ed omogeneo, o solo isotropo, o solo omogeneo, o qualunque.

È oggetto di questa Nota lo studio e la soluzione del problema sopra esposto per continui bidimensionali e tridimensionali omogenei; sarà oggetto di una seconda Nota il caso di continui, sempre bi e tridimensionali non omogenei.

1. - Nell'insieme delle equazioni fondamentali della statica dei sistemi elastici tridimensionali si distinguono tre diversi gruppi di equazioni. Il primo gruppo [1] afferma l'equilibrio d'ogni singolo elemento di volume sotto l'azione delle forze che gli sono applicate: comprende tre equazioni che nascono dall'imporre l'equilibrio alla traslazione e dicono che la divergenza del tensore degli sforzi interni eguaglia le forze di volume; e tre equazioni che nascono dall'imporre l'equilibrio alla rotazione e dicono che il tensore degli sforzi è simmetrico talchè esso ha solo sei componenti distinte.

Il secondo gruppo di equazioni [2] stabilisce il legame fra gli sforzi e le deformazioni: esso è di origine strettamente sperimentale: vi compaiono nel caso più generale ventuno coefficienti che caratterizzano il comportamento elastico del corpo soggetto agli sforzi; trattasi di sei equazioni nei predetti coefficienti, nelle sei distinte componenti del tensore degli sforzi e nelle sei componenti della deformazione. Usando il linguaggio tensoriale, potremo dire che il secondo gruppo di equazioni stabilisce una semplice proporzionalità, attraverso al tensore quadruplo elastico proprio del continuo in oggetto, fra il tensore degli sforzi interni e il tensore di deformazione.

Il terzo gruppo [3] nasce dall'imporre che il continuo a deformazione avvenuta abbia conservata la sua continuità, non siano, cioè, avvenute lacerazioni e strappi. Consta delle « condizioni di congruenza o di ST. VENANT » che già sono state ricordate: sono sei equazioni alle derivate seconde fra le componenti di deformazione e già s'è rilevato come esse debbano essere considerate come tre sole relazioni essenzialmente indipendenti.

Si constata subito che il problema dell'equilibrio elastico è dall'insieme delle sue equazioni fondamentali completamente impostato: si hanno infatti quindici incognite (le nove componenti del tensore degli sforzi e le sei del tensore di deformazione) in quindici equazioni (le sei del 1° gruppo, le sei del 2°, le tre del 3°).

Appare pertanto manifesto, ed è ben noto, il ruolo essenziale che compete alle condizioni di congruenza nel definire lo stato di tensione: vale però la pena di porre in luce quali siano i più generali riflessi che su questo esse esercitano: più generali nel senso che essi siano indipendenti e dalle costanti elastiche del corpo e dalle forze di campo e di contorno che lo sollecitano e dagli eventuali vincoli che lo trattengono. Ed in ciò sarà esauriente risposta alle domande poste.

Ci basterà trasformare le condizioni di congruenza in equazioni fra gli sforzi, servendoci del legame fra questi e le deformazioni. Tre, le equazioni omogenee indipendenti sostanzialmente da cui partiamo; tre, le equazioni omogenee indipendenti cui così arriviamo: compaiono in esse le sei componenti distinte del tensore degli sforzi e le ventuno del tensore elastico.

Introduciamo ora la restrizione che ci siamo posta di considerare continui omogenei: le ventuno componenti del tensore elastico diventano ventuno costanti che, per essere le equazioni omogenee si riducono a venti sole essenziali per noi.

Risolviamo allora una delle nostre equazioni, o, meglio opportune equazioni dedotte da queste, successivamente rispetto alle nostre costanti: avremo venti equazioni il cui primo membro sarà costituito da una delle costanti, mentre il secondo conterrà le derivate del tensore degli sforzi e le altre diciannove costanti. Deriviamo queste venti equazioni rispetto alle coordinate spaziali otterremo venti equazioni indipendenti che permetteranno di esprimere le costanti in fun-

zione delle derivate del tensore degli sforzi. Portati questi valori delle costanti nelle nostre tre equazioni, le trasformeremo in tre altre nelle sole derivate del tensore degli sforzi e saranno queste le relazioni cercate.

Il problema così impostato e risolto per un corpo omogeneo non isotropo non cambia natura se questo è invece isotropo: il procedimento però si snellisce perchè i ventuno coefficienti si riducono a due e questi, per la ricordata omogeneità delle equazioni che li contengono, al loro rapporto ossia ad una sola costante essenziale. Il procedimento, pur non perdendo di generalità rispetto a quello per il corpo non isotropo, si presta ad essere esposto per esteso sviluppando i calcoli e le trasformazioni che sono stati esposti a parole.

2. - L'equilibrio elastico indefinito di un continuo tridimensionale è retto dalle:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad & p_{ik}{}^{ik} = F_i & p_{ik} &= p_{ki} \\
 [2] \quad & \xi_{ik} = C_{ikrs} p^{rs} & & (i, k, r, s, h, j = 1, 2, 3) \\
 [3] \quad & \varepsilon^{irh} \varepsilon^{hsj} \xi_{ik|rs} = 0
 \end{aligned}$$

nelle quali p_{ik} è il tensore degli sforzi interni, ξ_{ik} quello di deformazione, C_{ikrs} il tensore elastico, ε^{irh} il tensore di RICCI, che nello spazio tridimensionale è triplo.

Se il corpo è isotropo, il tensore elastico ha due sole componenti distinte e le [2] diventano:

$$\xi_{ik} = A p a_{ik} + B p_{ik}$$

nelle quali A e B sono due costanti, a_{ik} è il tensore fondamentale e

$$p = p_{ik} a^{ik}$$

è l'invariante lineare degli sforzi.

Le [3] in virtù delle [2] diventano :

$$\varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} \{ A a_{ik} p_{|rs} + B p_{ik|rs} \} = 0$$

e ponendo $\frac{B}{A} = \nu$, si ha :

$$[4] \quad \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} \{ a_{ik} p_{|rs} + \nu p_{ik|rs} \} = 0$$

Ricordando ora che :

$$[5] \quad \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} a_{ik} = a^{rs} a^{hj} - a^{rj} a^{hs}$$

la [4] diviene :

$$(a^{rs} a^{hj} - a^{rj} a^{hs}) p_{|rs} + \nu \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} p_{ik|rs} = 0$$

ossia :

$$[4'] \quad \Delta_2 p a^{hj} - p^{|hj} + \nu \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} p_{ik|rs} = 0.$$

Dalla [4'], benchè inessenziale allo scopo che perseguiamo, scendono con tutta facilità le equazioni di BELTRAMI. Come è noto queste si riferiscono al caso che le forze di volume siano nulle; si ha allora :

$$[1'] \quad p_{ik}{}^{|k} = 0 \quad p_{ik} = p_{ki}.$$

Ricordando che :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} &= \begin{vmatrix} a^{ih} & a^{is} & a^{ij} \\ a^{rh} & a^{rs} & a^{rj} \\ a^{hk} & a^{hs} & a^{hj} \end{vmatrix} = \\ &= a^{ih} (a^{rs} a^{hj} - a^{rj} a^{hs}) - a^{is} (a^{rh} a^{hj} - a^{rj} a^{hk}) + a^{ij} (a^{rh} a^{hs} - a^{hk} a^{rs}) \end{aligned}$$

la [4'] diviene:

$$\Delta_2 p a^{hj} - p^{hj} + \\ + \nu \{ p_{|rs} (a^{rs} a^{hj} - a^{rj} a^{hs}) - p^s_{k|rs} (a^{rk} a^{hj} - a^{rj} a^{hk}) + p^j_{k|rs} (a^{rk} a^{hs} - a^{hk} a^{rs}) \} = 0$$

ossia:

$$\Delta_2 p a^{hj} - p^{hj} + \nu \{ \Delta_2 p a^{hj} - p^{hj} - p^{sr}_{|rs} a^{hj} + p^{sh}_{|rs} a^{rj} + p^{sr}_{|rs} a^{hs} - p^{sh}_{|rs} a^{rs} \} = 0$$

od anche, tenuto conto delle [1'] e di quelle che si ottengono da queste per derivazione:

$$[4''] \quad (1 + \nu) (\Delta_2 p a^{hj} - p^{hj}) - \nu \Delta_2 p^{hj} = 0$$

dalla quale in particolare moltiplicando per a_{hj} e saturando scende:

$$\Delta_2 p = 0$$

ed allora la [4'''] si semplifica nella:

$$[4'''] \quad p^{hj} + \frac{\nu}{1 + \nu} \Delta_2 p^{hj} = 0 .$$

Le [4'''] sono le note equazioni di BELTRAMI⁽¹⁾ alle quali l'algoritmo tensoriale permette di giungere, come s'è visto, con facilità conferendo loro veste particolarmente semplice.

(1) BELTRAMI E., *Op. Mat.*, Milano, 1920, tom. IV, pag. 511. — Sulla sufficienza delle equazioni di Beltrami confronta: ALMANSI E., « Rend. Lincei », 1907, vol. XVI, pag. 23. — Cfr. anche FINZI B., « Rend. R. Ist. Lombardo », 1934, vol. LXVII, pag. 261.

Chiudendo la digressione fatta per giungere alle [4'''], riprendiamo la [4']. Ricordando la [5], la [4'], moltiplicando per a_{hj} e saturando diviene:

$$2 \Delta_2 p + \nu (a^{ik} a^{rs} - a^{is} a^{rk}) p_{ik|rs} = 0$$

ossia

$$2 \Delta_2 p + \nu (\Delta_2 p - p_{ik|^{ik}}) = 0$$

dalla quale:

$$\nu = \frac{-2 \Delta_2 p}{\Delta_2 p - p_{ik|^{ik}}}$$

oppure:

$$[6] \quad \frac{2}{\nu} + 1 = \frac{p_{ik|^{ik}}}{\Delta_2 p}.$$

La [4'], quando in essa si ponga per ν il valore dato dalla [6] dà:

$$[7] \quad (p_{ik|^{ik}} - \Delta_2 p) (\Delta_2 p a^{hj} - p^{hj}) + 2 \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} \Delta_2 p p_{ik|rs} = 0.$$

Le [7] sono due sole equazioni differenzialmente indipendenti: esse infatti sono figlie delle tre [4'] fra le quali è stata fatta la eliminazione della ν (1).

Ricordando ora che, per essere il continuo omogeneo, ν è costante, dalla [6] si ha:

$$\left(\frac{p_{ik|^{ik}}}{\Delta_2 p} \right)_{|t} = 0 \quad (t = 1, 2, 3)$$

(1) Formalmente del resto moltiplicando le [7] per a_{hj} e saturando si ottiene una identità scalare: perciò le [7] che erano tre sole indipendenti si riducono a due solamente.

dalla quale:

$$[8] \quad p_{ik}|^i{}_t \Delta_2 p - p_{ik}|^i{}_k \Delta_2 p|_t = 0$$

Queste non sono che una unica equazione differenzialmente indipendente: invero esse affermano semplicemente che è nullo il gradiente dello scalare: $\Gamma = \frac{p_{ik}|^i{}_k}{\Delta_2 p}$ (1).

Concludendo le due equazioni [7] e la [8] sono tre equazioni differenzialmente indipendenti cui deve soddisfare un tensore simmetrico p_{ik} perchè possa essere assunto come tensore degli sforzi interni in un continuo isotropo omogeneo tridimensionale.

Vale la pena di osservare che le equazioni ottenute non sono lineari: due (le [7]) sono di secondo ordine; la terza (la [8]) è del terzo ordine (2).

3. - In modo del tutto analogo può essere trattato il caso in cui il continuo sia bidimensionale (membrana). Limitandoci alle superfici sviluppabili (curvatura nulla), l'equilibrio elastostatico indefinito è retto dalle:

$$[9] \quad p_{ik}|^k = F_i \quad p_{ik} = p_{ki}$$

$$[10] \quad \xi_{ik} = C_{ikrs} p^{rs} \quad (i, k, r, s = 1, 2)$$

$$[11] \quad \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \xi_{ik|rs} = 0$$

analoghe alle corrispondenti del caso tridimensionale, con la sostanziale differenza però che il tensore di RICCI, ε^{ir} , trattandosi di uno spazio bidimensionale, vi è doppio e non triplo e tale differenza impronterà non solo il formale sviluppo dei calcoli, ma anche i risultati finali.

(1) Formalmente del resto dalle tre equazioni $\Gamma|_t = 0$ scendono le identità $\varepsilon^{ih} \Gamma_{|ih} \equiv 0$ queste alla loro volta si riducono a due perchè da esse si trae la identità scalare: $\varepsilon^{ih} \Gamma_{|ih} \equiv 0$.

(2) Nello sviluppo del calcolo per il caso non isotropo s'è operato, come è facile rilevare, una inessenziale, ma spontanea, variante al calcolo indicato per il caso non isotropo.

Ancor qui, senza pregiudizio della generalità, l'esposizione dei calcoli materiali viene esposta per il caso isotropo. Le [10] allora si trasformano nelle:

$$[10] \quad \xi_{ik} = A p a_{ik} + B p_{ik}$$

e la [11], fatto: $\nu = \frac{B}{A}$, diviene:

$$[11'] \quad \epsilon^{ir} \epsilon^{ks} (p_{|rs} a_{ik} + \nu p_{ik|rs}) = 0.$$

Ricordando ora che

$$\epsilon^{ir} \epsilon^{ks} = \begin{vmatrix} a^{ik} & a^{is} \\ a^{rk} & a^{rs} \end{vmatrix} = a^{ik} a^{rs} - a^{rk} a^{is}$$

Si ha:

$$(a^{ik} a^{rs} - a^{is} a^{rk}) (p_{|rs} a_{ik} + \nu p_{ik|rs}) = 0$$

dalla quale:

$$[12] \quad \Delta_2 p + \nu (\Delta_2 p - p_{ik|}{}^{ik}) = 0$$

Sebbene inessenziale al nostro scopo, osserviamo che dalla [12] se le forze di campo sono nulle, scende immediatamente la ben nota:

$$\Delta_2 p = 0$$

Si ha infatti:

$$p_{ik|}{}^k = F_i = 0 \quad p_{ik|}{}^{ik} = 0$$

e quindi la [12] diviene:

$$(1 + \nu) \Delta_2 p = 0 \quad \Delta_2 p = 0.$$

Riprendendo la [12] si ha:

$$v = \frac{-\Delta_2 p}{\Delta_2 p - p_{ik}{}^{ik}}$$

e, per essere v costante:

$$[13] \quad p_{ik}{}^{ik} \Delta_2 p - p_{ik}{}^{ik} \Delta_2 p|_i = 0.$$

La [13] è una sola equazione indipendente: afferma infatti che è nullo il gradiente dello scalare $\Gamma = \frac{p_{ik}{}^{ik}}{\Delta_2 p}$.

Concludendo la [13] rappresenta la condizione cui deve rispondere un tensore doppio simmetrico nello spazio bidimensionale perchè possa essere assunto come tensore degli sforzi interni di una membrana sviluppabile: trattasi di una equazione di terzo ordine non lineare.

Ad una equazione di terzo ordine, come è facile controllare, si arriva pure se in luogo di una membrana sviluppabile si considera una membrana a curvatura costante (superficie applicabile ad una sfera o ad una pseudosfera). Basterà sostituire alla [11] la: (1)

$$\varepsilon^{ik} \varepsilon^{rs} \zeta_{ik|rs} + k \theta = 0$$

essendo k la curvatura gaussiana e θ la dilatazione di campo: $\theta = \zeta^i_i$.

Se invece la membrana è applicabile a una superficie di rotazione la [11] deve essere sostituita da una più complessa relazione in cui compaiono le ζ_{ik} con le loro derivate fino alle terze (1) e pertanto la relazione corrispondente alla [13] diverrà del quarto ordine.

Se infine la membrana ha una metrica generica caratterizzata da un assegnato:

$$ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k$$

(1) FINZI B., *Sopra il tensore di deformazione di un velo*, « Rend. R. Ist. Lombardo », vol. LXIII, fasc. XI-XV.

la [11] viene sostituita da una relazione in cui compaiono la ξ_{ik} e le loro derivate fino alle quarte⁽¹⁾. Si giungerà quindi in tal caso ad una relazione di quinto ordine.

Vuol essere considerato il fatto che, sia per i corpi tridimensionali che per le membrane, non s'è introdotta alcuna restrizione circa le forze in campo: lo si è fatto di proposito perchè, se nella statica tali forze hanno in generale poca importanza e, al solito, si riducono a quelle dovute alla gravitazione, non altrettanto può dirsi quando dall'equilibrio statico si sconfinava in quello dinamico; le relazioni sopra trovate conservano il loro valore anche in presenza di quelle particolari forze di campo che sono le « forze d'inerzia », cioè le condizioni trovate perchè un tensore doppio simmetrico possa essere interpretato come tensore di sforzi in un continuo sono le stesse (le tre [7] e [8] per il caso tridimensionale, la [13] o le sue simili per le membrane) sia nel caso statico che nel caso dinamico.

(¹) B. FINZI, loc. cit.

RIFLESSIONI SUI FONDAMENTI PRIMI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI(*)

GIOVANNI GIORGI

Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Dubia et paradoxa quaedam, in theoria complexuum (germanica lingua *Mengen*) orta sunt ex deficiente verborum proprietate. Generalis « classis » notio a « complexus » notione discernere opus est, et determinare quam acceptione verbum « existere » adhibeatur. Qui strictis postulatis et definitionibus usus erit, perspiciet quosdam a CANTOR descripto complexus satis idonee definitos esse; alios minime quibus in praesenti scientiae statu, transfinitos numeros tribui licitum non fore.

Alcune delle questioni che tuttora si dibattono, e sembrano dover restare insolute nella dottrina degli insiemi, dipendono forse da disaccordo o da imprecisione nella terminologia.

Desidero fissare alcuni punti fondamentali che, anche se in parte non nuovi, sembrano bene spesso venire trascurati.

È stato già detto di dover distinguere *categoria* da *insieme*; intendendo la prima denominazione in senso lato, e la seconda nel senso specifico che corrisponde alla parola *Menge* di G. CANTOR. Per maggiore aderenza al linguaggio comune, e per evitare interferenze con quello dei filosofi, suggerisco di usare nel primo significato la parola *classe*. Quando consultai su questa proposta quel grande maestro che fu GIUSEPPE PEANO, egli mi avvertì che nel suo *Formulario Matematico* la parola « classe » era usata sempre nel significato ristretto di « insieme »; ma siccome in quel libro, categorie di carattere più generale non erano menzionate, questa asserzione ristretta non faceva ostacolo ad adoperare quel vocabolo in significato più largo.

(*) Nota presentata nella Tornata del 22 marzo 1941.

Dirò dunque *classe* nel significato in cui alcuni logici matematici hanno adoperato la parola « categoria »; cioè per indicare una totalità di elementi, la quale sia definita qualitativamente, senza necessità che sia precisata anche quantitativamente.

Chiamerò *insieme* una classe che sia definita anche quantitativamente, cioè sia caratterizzata in modo dato da non potere ad essa aggiungere o togliere elementi senza alterarne la definizione.

Per esempio: la totalità di tutte le coppie è una classe, in quanto esiste un criterio per distinguere se un certo insieme è o non è una coppia; ma non è un insieme, perchè quando uno crede di aver concepito la classe di tutte le coppie, può aggiungere sempre altre coppie, pensando per esempio alla nozione della classe stessa, o al simbolo che la denota, ripetuti due volte. Per contro la classe dei numeri interi forma un insieme. ⁽¹⁾

Eventualmente si potrà anche dire di un insieme *incompletamente definito* quando per alcuni enti ben precisati, resta incerto se si riguardano o no inclusi nell'insieme; ciò avviene per esempio allorchè si menzionano i punti di un segmento senza dire se gli estremi sono o no inclusi; e insieme *ben definito* nel caso contrario.

Generalmente, quando dirò di insieme, intenderò un insieme ben definito.

Solamente gli insiemi posseggono una « potenza » o « numero cardinale » nel senso di CANTOR. La classe dei numeri trasfiniti cardinali e quella dei numeri trasfiniti ordinali non sono insiemi; CANTOR le denota come *inkonsistente Vielheiten*; il ricordarsi di questo dirime un noto paradosso. Riguardo poi al trasfinito ordinale Ω e al preteso trasfinito cardinale che dovrebbe seguire immediatamente ad aleph-zero, ricordiamo la loro origine: CANTOR ha rivolto l'attenzione sulla classe dei numeri ordinali appartenenti agli insiemi numerabili; ed ha ammesso che la classe medesima, abbia un numero cardinale, e che presa nel suo ordine naturale abbia anche un numero ordinale; e con questo

⁽¹⁾ G. CANTOR nella sua lettera a DEDEKIND del 28 luglio 1899, mette in rilievo la differenza fra le due nozioni fondamentali, pur senza dare sufficienti parole esplicative; e usa la parola *Vielheit* quasi nello stesso significato in cui noi diciamo *classe*, e la dicitura *konsistente Vielheit* ovvero *Menge*, nel significato di *insieme*.

ha pensato di definire i due enti. Manca però la prova che quella classe abbia i caratteri di un insieme; quindi entrambi i detti trasfiniti si devono riguardare tuttora come non legittimamente definiti. Se noi teniamo per ferme queste conclusioni, evitiamo da una parte di costruire speculazioni sul vuoto, dall'altra di gettare il discredito sull'intera teoria dei trasfiniti.

Un altro vocabolo che ricorre nelle discussioni sugli insiemi e sugli enti matematici fondamentali è il verbo « esistere »; e anche quello, strettamente collegato, di « essere possibile ». Come è che matematici rigoristi usano parole come queste senza essere d'accordo sul loro significato?

Per esempio, si discute se è *possibile* in un insieme infinito di insiemi dati, effettuare infinite scelte, prendendo da ciascuno dei singoli insiemi un elemento; in altre parole se *esiste* un insieme composto di un elemento per sorta preso come sopra. La risposta potrebbe essere duplice, cioè incominciare con un « distinguo ». Allorchè mi si domanda se la nozione di un insieme composto di un elemento per sorta di tutti gli insiemi dati, implica o no contraddizione, potrò rispondere che questa contraddizione non vi è. Se invece mi si chiede se è costruttivamente possibile indicare una regola per effettuare queste scelte, cioè per stabilire una corrispondenza biunivoca fra ogni singolo insieme e un suo elemento privilegiato, risponderò che in singoli casi ciò è possibile, nella generalità dei casi non lo è. Quindi, secondo essi casi, e secondo l'uso che si vuole fare dell'insieme costruito con infinite scelte, sarà legittimo l'introdurlo in una dimostrazione, oppure no. E a questo proposito, vorrei far riflettere che non solo per le infinite scelte fatte su insiemi infiniti si presenta la difficoltà, ma anche per una singola scelta in un insieme finito può riuscire impossibile indicare un criterio costruttivo. Chi può distinguere con una definizione l'una dall'altra, le due radici dell'unità immaginaria? Chi può definire il verso destro o il verso sinistro delle eliche in un spazio nel quale le nostre mani, o qualche altro criterio materiale di confronto, non si possano trasportare?

Sono venuto a parlare di quello che si chiama « postulato di ZERMELO ». E di postulati sugli insiemi bisogna pur dire; perchè i chiarimenti che ho creduto di dare sul significato della parola « insieme »

non sono definizioni; e questa nozione di insieme può essere solamente caratterizzata, come avviene per tante altre, dai postulati a cui soddisfa. A questo scopo sono state proposte varie serie di proposizioni; ma sembra che le idee a questo proposito non siano ben definite; forse è per questo che spesso i trattati sulla teoria degli insieme tacciono del tutto su questi postulati; ed è lacuna da deplorare.

Il sistema dei postulati più conosciuto è quello che dette ZERMELO. I primi tre di essi, e così pure una parte del quinto, e il settimo, non sollevano discussioni, e sono chiari, pur di ammettere conosciute certe parole che ivi si usano. La rimanente parte può sollevare discussione. Ecco in ordine, i postulati, nella forma originale:

1°) *Due insieme che hanno gli stessi elementi sono identici.*

2°) *Vi è un insieme che non contiene nessun elemento: esso è l'insieme nullo. Se esiste un oggetto a , esiste un insieme $\{a\}$ di cui questo oggetto è l'unico elemento. Se esiste un oggetto a e un oggetto b , esiste un insieme $\{a, b\}$ di cui questi oggetti sono gli unici elementi.*

3°) *L'insieme di tutti gli elementi di un insieme M che soddisfano a una data condizione forma un sottoinsieme di M .*

NB. — In luogo di quest'ultimo postulato si potrebbe più restrittivamente affermare che l'« intersezione » di due insiemi, cioè la classe degli elementi comuni ad entrambi, è un insieme. E non so se sia il caso di aggiungere come postulato a parte che la « somma » di due insiemi è un insieme, e che il « prodotto » di due insiemi è un insieme. Questi due enunciati sono bensì inclusi nel postulato 3° che viene più oltre, e il cui enunciato è più lato e meno elementare.

Proseguendo con l'enumerazione:

4°) *Ad ogni insieme T corrisponde un altro insieme UT formato da tutti i sottoinsiemi di T .*

Questo postulato è ovvio fra gli insiemi finiti, e forse anche per tutti quelli numerabili; ma si può tenerlo fermo in generale senza discutere la questione delle infinite scelte?

5°) *Sia un insieme T , i cui elementi sono essi stessi altri insiemi Z : esiste un insieme ST i cui elementi sono gli elementi degli insiemi Z .*

6°) *Se si ha un insieme T di cui gli elementi sono essi stessi altri insiemi Z, si può scegliere in ciascuno di questi insiemi elementari Z un elemento per ciascuno, e l'insieme degli elementi così scelti forma un sottoinsieme di T.*

È questo l'enunciato a cui volgarmente si dà il nome di *postulato di ZERMELO*. Sembra che la maggioranza dei matematici lo accetti senza discussione finchè il numero degli insiemi subordinati Z sia finito; ma obbietti contro l'asserzione sulla possibilità delle infinite scelte. Ho accennato poco fa, e per incidente, la mia opinione in proposito. Tutto dipende dal significato attribuito alla dicitura « si può ». A seconda di questo significato il postulato potrebbe divenire accettabile anche per le infinite scelte, o sarebbe da rigettare anche per un numero di scelte finito.

7°) *Esiste almeno un insieme infinito.*

Credo che sarebbe necessario aggiungere, per edificare certe parti della teoria degli insiemi, un ottavo postulato, per asserire che la *Belegung* (*caricamento* o *applicazione*) di un insieme A sopra un insieme B genera un insieme; cioè, la totalità delle leggi di corrispondenza univoca (non biunivoca) in virtù della quale a ogni elemento di B corrisponde un elemento di A forma un insieme. Si può non ammettere questo postulato, o ammetterlo limitatamente, o illimitatamente. Nei primi due casi, occorre sostituirlo con altri postulati speciali nei singoli casi. Ecco un esempio cospicuo. Mediante l'applicazione di un sistema finito di cifre (per es. le dieci cifre della nostra numerazione) sopra l'insieme numerabile dei posti decimali che seguono per es. uno zero e una virgola, si genera l'insieme dei numeri reali compresi tra zero ed uno, e di conseguenza tutto l'insieme dei numeri reali. Se non è stato enunciato che con un'applicazione di questa sorta si genera un insieme ben definito, occorre postulare l'esistenza dell'insieme dei numeri reali come postulato a sé; perchè non è vero che col metodo genetico, partendo soltanto dai postulati che definiscono i numeri naturali, si generi il campo reale.

Gli antizermeliani rigorosi, che negano in ogni caso la possibilità delle infinite scelte, devono affermare l'esistenza del campo reale con un postulato speciale chiaramente espresso. Altrimenti, applicando sem-

plicemente il metodo delle partizioni di DEDEKIND, o altro equivalente, nelle forme note, si genera bensì qualunque numero reale che soddisfi a determinate condizioni già enunciate, ma non si genera l'intero insieme dei numeri reali.

LA LEGGE DI ESTINZIONE DELLE CONOSCENZE NEL TEMPO (*)

(Con cinque figure)

CARLO MENGARELLI

SUMMARIVM. — Auctor perpendit quomodo cognitiones, dilabente tempore, extinguantur. Cuius rei index quadantenus invenitur in minus crebro, ex decursu temporis, aliquo libro a scriptoribus allegato; in quonam id conveniat, in quonam differat a lege de memoriae extinctione ob temporis decursum, Auctor exponit, et a distributione alicuius causae quae a multiplicibus habitatibus pendeat.

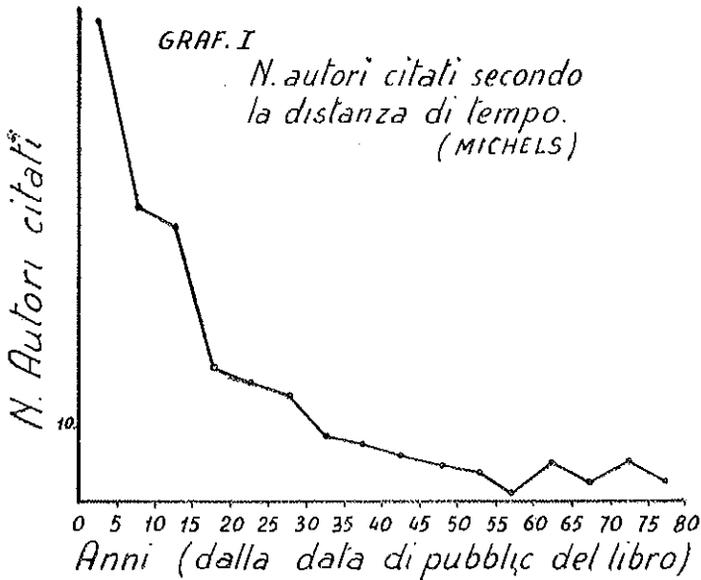
Può interessare sia psicologi che psicometrici conoscere secondo quale legge si modificano nel tempo le conoscenze culturali in una persona. Intendiamo dire che, scelto un indice numerico della ampiezza, o campo, di conoscenze culturali in genere o in una determinata letteratura scientifica di una persona in un dato momento, c'è da attendersi che tale indice non rimanga fisso nel tempo, ma che decresca grado a grado che si risale nel tempo. Un indice empirico del campo di conoscenze in una particolare specializzazione scientifica — adottiamo questo termine in analogia al termine campo di attenzione usato in psicologia — può essere offerto, sotto le limitazioni di cui verremo a dire, dal numero di citazioni in una opera scientifica.

Riportiamo, per semplificare, le seriazioni ottenute dallo spoglio di due opere (R. MICHELS, *Nuovi studi sulla classe politica*, Milano,

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Marcello Boldrini nella Tornata del 22 marzo 1941.

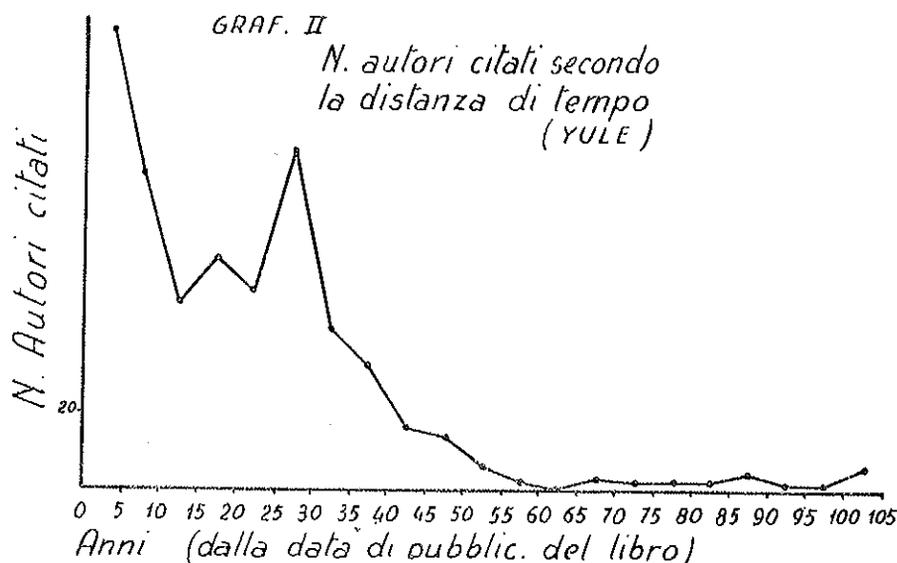
Autori citati	ANNI (DALLA DATA DI PUBBLICAZIONE DEL LIBRO)																			Totale		
	0-5	-10	-15	-20	-25	-30	-35	-40	-45	-50	-55	-60	-65	-70	-75	-80	-85	-90	-95		-100	-105
I	64	39	37	18	16	24	9	8	6	5	4	1	5	3	5	3	—	—	—	—	—	237
II	131	84	49	61	52	19	42	33	16	14	6	2	—	3	2	2	2	3	2	2	6	582

Albrighi e Segati, 1930; G. U. YULE, *An introduction to the theory of Statistics*, London, Griffins, 1932, 7^a ediz.). Le pubblicazioni sono classificate secondo la distanza in anni fra la loro data di edizione e quella del libro, in cui figurano citate. Il grafico della prima seriazione mostra



un andamento iperbolico per il periodo di 50 anni (dalla data di pubblicazione del libro). Il secondo grafico pur avendo un andamento generale simile al precedente è irregolare nella prima parte. Ma la cosa si spiega facilmente, perchè essendo l'opera dello YULE nella redazione del 1932 il risultato di un radicale rimaneggiamento della prima edizione del 1908, il massimo secondario della spezzata cade

negli anni che precedettero immediatamente la prima edizione. La seriazione è, in sostanza, la somma di due seriazioni parziali, di cui l'una si inizia al 1932, l'altra al 1908. Il secondo grafico meglio del

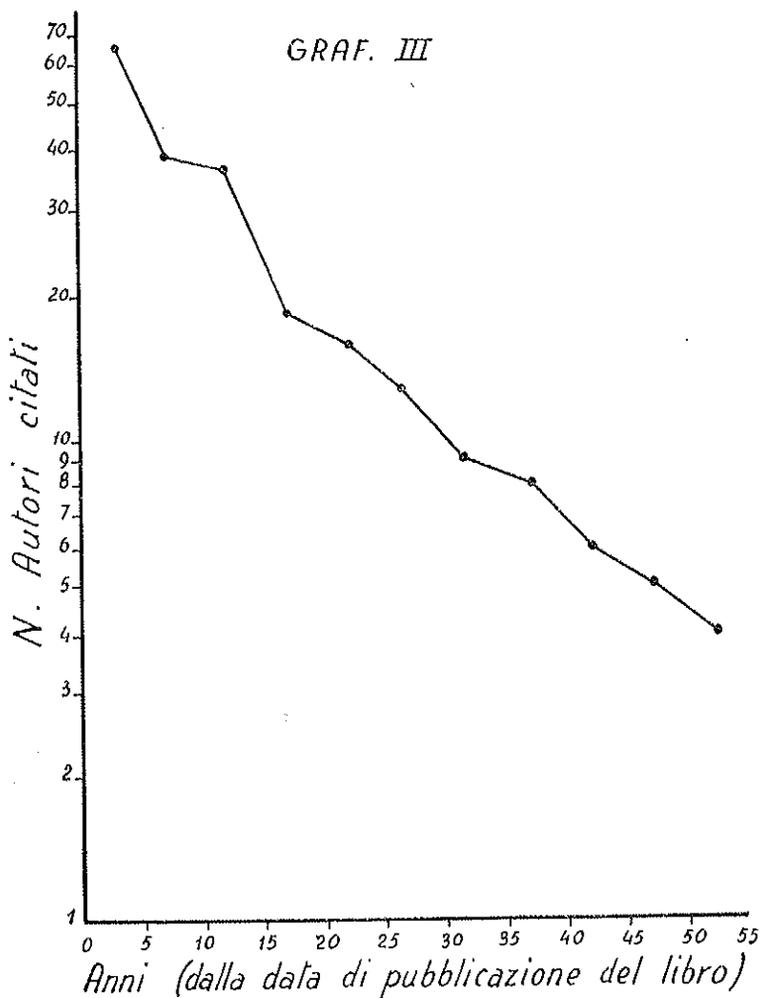


primo mette in luce come il comportamento della seriazione nel periodo più lontano - oltre all'incirca 50 anni dalla data di pubblicazione nei nostri esempi - si diversifica, essendo pressochè costante rispetto all'asse delle ascisse, da quello del periodo antecedente.

Il peculiare comportamento all'estremo delle due curve deve essere ascritto all'intervento di particolari cause. Si tenga presente che, mano a mano che un concetto o un procedimento diviene, col passare del tempo, comune patrimonio di una disciplina scientifica, cade la esigenza di dover ricorrere alla citazione della fonte bibliografica, in cui fu per la prima volta esposto. Influisce a sua volta anche il particolare tipo di cultura; vi sono infatti intelligenze curiose inclini a ricercare fra vecchie memorie e pubblicazioni i fondamenti storici di ogni attuale conoscenza scientifica, altre invece interessate solo allo studio del problema specifico.

La effettiva divergenza nel comportamento fra i due periodi di tempo viene ancora esaltata se si rappresentano i dati su scala semi-

logaritmica, riportando i logaritmi delle frequenze su l'asse delle ordinate. Il grafico terzo, in cui è riportata solo la prima serie, si limita



al periodo più vicino alla data di pubblicazione dell'opera; non sono segnati i logaritmi delle successive frequenze; essi hanno però un andamento irregolare che non denota alcuna chiara tendenza alla diminuzione.

Degno di rilievo il chiaro andamento lineare della prima parte della seriazione, rappresentata su scala semilogaritmica. Il che dimostra

che essa segue la legge esponenziale $y = ae^{-bt}$. Crediamo che al diverso andamento nei due periodi debba farsi risalire il motivo, per il quale la seriazione non soddisfa ad alcuna delle condizioni, necessarie perchè risulti adattabile ad una delle curve del sistema di PEARSON.

Perchè si possa però, dal comportamento esponenziale del numero di citazioni bibliografiche in funzione del tempo, passare a concludere che questa è la legge seguita dal campo di conoscenze, bisogna supporre che costante sia rimasta nel tempo, per estensione, la produzione scientifica, oggetto di tali conoscenze. I rapporti di derivazione sarebbero fra loro nella stessa relazione di disequaglianza in cui si trovano i rapporti di composizione; cioè rimarrebbe immutata nel tempo la curva su di essi costruita.

Nel tentare una spiegazione delle nostre distribuzioni si potrà essere condotti dapprima ad assimilarle a curve dell'oblio. Si riterrà che la legge con cui diminuisce il campo delle conoscenze vada attribuita all'estinguersi, al crescer del tempo, della capacità di ritenere la materia appresa. Chiariamo brevemente questo punto, rifacendoci alle conoscenze della psicologia. L'EBBINGHAUS, che per primo studiò le leggi della memoria, si servì di un metodo ingegnoso per fissare una legge empirica delle variazioni nel tempo della facoltà di ritenere. Un soggetto apprendeva una serie di alcune decine di cifre leggendola e ripetendola un certo numero di volte. Trascorso un certo tempo dal momento in cui la serie era stata appresa, il soggetto non era più in grado di ripeterla. La serie veniva appresa di nuovo, ma il numero di letture necessario per il riapprendimento era minore di quello delle letture necessarie per l'apprendimento. EBBINGHAUS chiamò questa differenza economia di riacquisto e studiò in che modo essa diminuisce al crescere della distanza di tempo fra apprendimento e riapprendimento. È chiaro che quanto maggiore è il tempo che intercorre fra la prova di apprendimento e quella di riapprendimento, tanto maggiore è il numero di letture necessarie per riapprendere, anche se esso non raggiungerà mai il numero che fu necessario per apprendere la serie. La economia di riacquisto si estingue nel tempo, obbedendo a questa funzione empirica (EBBINGHAUS) $y = a(\log t)^{-b}$. Altri psicologi più di recente hanno ritrovato altre funzioni interpolatrici come $Y = \frac{a(\log t)^{-b}}{ct}$; $y = at^{-b}$. Il campo delle conoscenze varia dunque nel

tempo secondo una legge empirica diversa da quella seguita dalla capacità di ritenere.

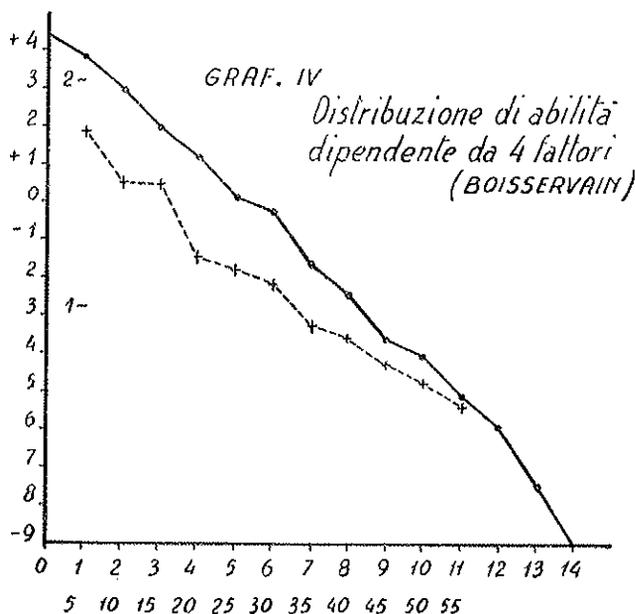
Ma più ancora, vi è una molteplicità di fattori che opera sulla formazione del campo delle conoscenze e sul suo ridursi nel tempo, dei quali uno è l'oblio. L'apporto del fattore memoria è effettivamente alquanto minore di quanto a prima vista possa supporre; basti pensare al procedimento comunemente seguito dagli autori nel citare le opere, che è quello di compilare schedine al momento della lettura.

A proposito di fattori multipli, cade opportuno riferirsi ad un recente studio di BOISSEVAIN su la distribuzione di abilità dipendenti da fattori multipli. La distribuzione fu ricavata in questo modo. Sia data una prima abilità, che segue la legge binomiale, assumendo i valori $0, 1 \dots n$. Il numero di soggetti che posseggono la abilità nella misura r_1 , sarà ${}^nC_{r_1}$; analogamente quelli che posseggono una seconda abilità nella misura r_2 sia ${}^nC_{r_2}$. Il numero di soggetti che posseggono la prima abilità nella misura r_1 , e la seconda nella misura r_2 sarà $\frac{{}^nC_{r_1} \cdot {}^nC_{r_2}}{2^n}$. La misura (o classifica) della abilità composta varierà

da 0 ad n^2 . Se la dividiamo in n classi $0, 1 \dots n-1$, otterremo il numero di soggetti che posseggono ad esempio la classifica o sommando il numero di soggetti per i quali il prodotto $r_1 \times r_2$ varia da 0 ad n , quello con classifica della abilità composta 1 sommando il numero di coloro per i quali il prodotto $r_1 \times r_2$ è compreso fra n e $2n$ e così di seguito. Per $n=15$ e 4 fattori il BOISSEVAIN ha ottenuto la distribuzione di frequenze che riportiamo. Rappresentata su scala

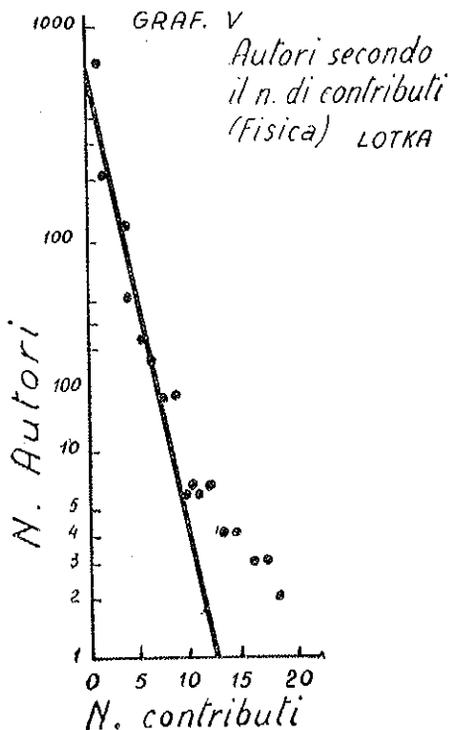
Classifiche	Frequenze
0	25154,8971
1	6587,7740
2	913,2319
3	93,4260
4	16,9316
5	1,5262
6	,1880
7	,0208
8	,0039
9	,0005
10	,0001
11	,00009
12	,000013
13	,0000003
14	,00000001

semilogaritmica (logaritmo delle frequenze sull'asse delle ordinate), ha un andamento lineare (graf. IV). Dunque la distribuzione di abilità dipendenti da più fattori segue la funzione $y = ae^{-bt}$, come la distribuzione del campo delle conoscenze nel tempo. Un'altra notevole applicazione della legge esponenziale, che presumibilmente rientra nello



schema delle abilità multiple, è stata ottenuta dal LOTKA. Classificando il numero di autori che hanno contribuito all'indice « Auerbach's Geschichtstafeln der Physik » fino al 1900 secondo il numero di lavori, si ottiene una distribuzione, che su scala semilogaritmica ha comportamento lineare (graf. V). Le irregolarità estreme si possono forse spiegare col fatto che allorquando molte ricerche figurano sotto un solo nome, esse sono in realtà il risultato della collaborazione di più studiosi.

Concluderemo ora che il campo delle conoscenze è assimilabile ad una abilità complessa dipendente da fattori multipli? Quali potrebbero essere anzitutto questi fattori multipli? Il grado di formazione scientifica di uno studioso, il desiderio di apparire aggiornato e l'effe-



tivo grado di aggiornamento nella conoscenza della produzione scientifica, l'interesse ad inquadrare la propria ricerca nelle più recenti correnti di studio, la attitudine al lavoro di ricerca bibliografica, ed altri.

Ma per ottenere una abilità, che segua la legge polinomiale in relazione al tempo, come esige la nostra seriazione, bisogna supporre che ciascuno dei fattori componenti segua la legge binomiale in funzione stavolta non della classifica della abilità ma del tempo. Questo è in linea teorica concepibile per alcuni fattori, ma non per tutti. Mentre l'assimilazione della distribuzione degli autori secondo il numero di contributi (Lotka) alla curva della abilità da fattori multipli è immediata, quella della diminuzione nel tempo del campo delle conoscenze sebbene suggestiva richiede un ulteriore approfondimento. Raccogliendo infine le osservazioni qui fatte, diremo che la distribu-

zione delle citazioni bibliografiche nel tempo può solo sotto certe limitazioni essere assunta come indice di quella del campo della memoria nel tempo; la legge esponenziale osservata nelle nostre distribuzioni non può essere semplicemente attribuita all'azione della memoria o al tipo di cultura, ma al complesso agire di diversi fattori, dei quali solo alcuni seguono la legge binomiale.

BIBLIOGRAFIA

- BOISSEVAIN C. H., *Distribution of abilities depending upon two or more independent factors*, in « Metron », vol. XIII, 1939, n. 4.
- DUMAS G., *Nouveau Traité de Psychologie*, Paris, Alcan, 1934, vol. IV, pp. 102-111.
- LOTKA A. J., *The frequency Distribution of Scientific Productivity*. Jl. of Washington Acad. of Science, 1926.

IL PUNTO MATERIALE IN MECCANICA RELATIVISTICA (*)

TULLIO LEVI-CIVITA

Accademico Pontificio

SUMMARY. — Injuxta communem cogitandi rationem, principium reactionis necessario supponendum esse videtur, si quis servare velit notionem puncti materialis, prout habetur in classica mechanica; cum autem in theoria relativitatis illud principium non admittatur, etiam punctum materiale abstrahi posse non videtur.

Attamen, ut demonstrabit prof. G. LAMPARIELLO quodam studio de n corporibus in generali relativitate (inter Commentationes huius Pontificiae Academiae mox edendo), potest eadem puncti notio servari.

La nozione di punto materiale si fa intervenire nell'ordinaria meccanica fin dai fondamenti, immaginando un effettivo corpo di dimensioni *infinitesime*, talchè sia lecito assimilare la posizione di uno qualunque dei suoi punti a quella di un ben determinato suo punto geometrico (ad esempio, il centro per una sfera, il punto d'incontro delle mediane o delle altezze per un triangolo, ecc.) e associando a questo punto un numero positivo che ne misuri la massa.

È a questo caso limite che si riferisce, in ultima analisi, NEWTON nei suoi *Principia*, assumendo, accanto ai concetti primitivi di spazio, tempo e materia, secondo la tradizione degli antichi, la nozione di forza come vettore applicato e postulando sia le famose leggi del moto, prima e seconda, sia la terza, cioè il principio di reazione.

Codesta astrazione newtoniana del punto materiale, sostanzialmente adottata da tutti i successori di NEWTON, fu posta metodologicamente in rilievo dal POISSON nel suo famoso trattato di meccanica, di poco posteriore alla celebre *Mécanique analytique* di LAGRANGE. Essa potrebbe chiamarsi granulare, non nel senso che la materia debba considerarsi come un aggregato di particelle aventi un volume assegnato o non

(*) Nota presentata nella Tornata dell'8 giugno 1941.

superiore ad una misura prefissata, ma nel senso potenziale immaginato da NEWTON, cioè suscettibile di essere pensata minuta quanto occorre, perchè nei casi singoli le dimensioni riescano trascurabili.

Invece di questa astrazione è invalsa, grazie ai criteri che dominano il Calcolo integrale, la identificazione di un punto materiale di massa infinitesima ad un elemento di materia.

L'attribuzione ad un punto materiale di un'estensione infinitesima è allora implicita nell'immagine matematica, senza richiedere la specifica astrazione newtoniana cui sopra abbiamo alluso. Si può domandarsi perchè questo criterio non sia stato adattato, almeno finora, alla meccanica relativistica.

Si è temuto di non poter introdurre il punto materiale sull'esempio classico, poichè manca fra i postulati della Relatività il principio di reazione o qualche cosa che possa sostituirlo.

È vero che con l'introduzione dei tensori, funzioni del posto in un campo continuo, si può talvolta passare dal globale al locale e alle azioni a distanza (nello spazio o nel tempo) sostituire azioni di contatto, ma si poteva pensare inconciliabile la nozione di punto materiale con l'esigenza di un mezzo continuo, supporto essenziale della meccanica relativistica.

La difficoltà può essere superata tornando da un lato all'originaria astrazione di NEWTON e sfruttando d'altro canto, ciò che è ammesso anche in Relatività, il principio di sostanzialità⁽¹⁾ della materia che permette, attraverso le equazioni gravitazionali di EINSTEIN, di seguirne il moto elemento per elemento.

Questa impostazione generale può essere in particolare adattata ad un sistema costituito da un numero finito di punti materiali, come mostrerà in modo preciso il prof. LAMPARIELLO nella Memoria⁽²⁾: *Il problema degli n corpi in Relatività generale*; si è allora condotti, facendosi in primo luogo guidare dal classico modello newtoniano, ad un sistema di equazioni differenziali *ordinarie* la cui approssimazione, pur avendo riguardo alla relatività, supera quella newtoniana.

(1) Questo principio non è ammesso nella moderna fisica atomica che ha dovuto tener conto di fenomeni di indeterminazione.

(2) Tale Memoria sarà pubblicata nelle « Commentationes », vol. V, di questa stessa Accademia Pontificia delle Scienze..

NOTIZIE, SPECIALMENTE COROLOGICHE
E BIOLOGICHE, SULLE SPECIE DI *MENGENILLA*
(INSECTA STREPSIPTERA)
FINORA TROVATE IN ITALIA (*)

(Con quattro figure)

FILIPPO SILVESTRI

Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Auctor analyticam indicat rationem qua puparios ad species *Mengenillae* in Italia repertas pertinentes facile nosci possint, eae species ubinam locorum inveniantur exhibet, et *Mengenillae quaesitae* biologicum cursum breviter exponit.

Fino al 1933 nessuna specie di *Mengenillidae* era stata ricordata per l'Italia. In tale anno io citai per primo l'esistenza dell'*Exenos Laboulbenei* Peyerimhoff per una località italiana (Pisciotta, Prov. Salerno) e nello stesso anno descrissi una nuova specie di *Mengenilla* (*M. quaesita* Silv.) (1). Da quell'anno continuai le ricerche di tali interessanti insetti e nel marzo 1940 descrissi brevemente una nuova specie (*M. spinulosa*), trovata in Sicilia e detti un cenno biologico e descrittivo di altre 4 specie nuove trovate pure in Italia (2).

Altre ricerche condotte durante il 1940 e nel 1941 fino ad oggi non hanno procacciato scoperta di nuove specie, ma hanno fatto allargare la conoscenza della distribuzione di quelle già ricordate e che saranno in un lavoro in corso estesamente descritte ed illustrate, ma

(*) Nota presentata nella Tornata dell'8 giugno 1941.

(1) SILVESTRI F., *Descrizione della femmina e del maschio di una nuova specie di Mengenilla Hofeneder (Strepsiptera)*. Boll. Labor. Zool. Gener. Agr. Portici, XXVIII, 1933, pag. 1-10 (illustrate).

(2) SILVESTRI F., *Descrizione preliminare di una specie nuova di Mengenilla (M. spinulosa, Insecta Strepsiptera) della Sicilia e notizie sul suo ciclo e sul particolare modo di fecondazione*. Rend. Acc. Ital., serie VII, I, 1940, pag. 614-618.

frattanto credo opportuno di dare una chiave analitica per distinguere i pupari delle 6 specie, essendo tale stadio il più facile a trovarsi, e di aggiungere notizie sulla distribuzione geografica e sull'ospite, in cui vivono fino alla 3^a età tali insetti.

1. Tergitorum a meso-vel a metathorace margo lateralis papilla vel papillis robustis spiniformibus vel aciculiformibus armatus.
 3. Tergitorum margo lateralis papilla spiniformi antica armatus et papillis 2-3 minimis submedianis auctus *M. nigritula*.
 4. Tergitorum margo lateralis papillis duobus robustis spiniformibus auctus *M. spinulosa*.
 5. Tergitorum margo lateralis papillis 6-8 aciculiformibus instructus.
 6. Tergitorum tuberculorum series postica tuberculis 4-6 a stigmatum libella externe continuans; color testaceo-ferrugineus vel testaceus *M. quaesita*.
 7. Tergitorum tuberculorum series postica ad stigmatum lineam externe pertinens; color plerumque nigrescens partibus marginalibus testaceo-badiis *M. subnigrescens*.
2. Tergitorum omnium margo lateralis papillis robustis longiusculis destitutus.
 8. Tergitorum margo lateralis nudus vel tantum granulo nonnullo minimo auctus; dorsi superficies granulis minimis, tantum amplitudine magna distinctis, inter stigmata praesertim instructa *M. laevigata*.
 9. Tergitorum margo lateralis granulo nonnullo minimo praesertim submediano auctus, dorsi superficies tuberculis perparvis inter stigmatum lineas plus minusve distincte transverse 3-seriatis instructa *M. parvula*.

DISTRIBUZIONE GEOGRAFICA

Mengenilla quaesita Silv. Questa specie prima descritta per la Prov. di Salerno (Pisciotta) è stata poi raccolta in Prov. di Cosenza (Castrovillari), in quella di Reggio Calabria (Palmi) e in Sardegna (presso Bosa, Sassari, presso Dorgali, Nuoro). Ha per ospite nelle prime 3 età la *Ctenolepisma ciliata* Duf.

Mengenilla spinulosa Silv. È nota finora solo della Sicilia, dove è stata raccolta nelle provincie di Siracusa (Carlentini, Lentini), di Ragusa (Ispica), di Catania (Randazzo), di Palermo (Castelbuono e Petralia Soprana e Petralia Sottana).

Ha per ospite la *Ctenolepisma ciliata* Duf.

Mengenilla nigrifula Silv. Specie nota finora per la regione orientale d'Italia dalla Prov. di Taranto (Crispino) a quella di Foggia (Apricena, Poggio Reale, S. Nicandro) e per quella occidentale in Prov. di Littoria (Terracina).

Vive nelle prime 3 età nella *Ctenolepisma ciliata* Duf.

Mengenilla subnigrescens Silv. Questa specie è finora nota soltanto della Sicilia, dove è largamente distribuita: Castelbuono, Petralia Soprana e Petralia Sottana (Prov. di Palermo), S. Piero Patti (Prov. di Messina), Randazzo (Prov. di Catania), Valsavoia, Lentini, Carlentini (Prov. di Siracusa).

Ha per ospite la *Ctenolepisma ciliata*.

Mengenilla laevigata Silv. È stata raccolta in Prov. di Cosenza (Casano Jonio, Spezzano), in Prov. di Taranto (Crispino), di Foggia (Apricena) e in Sardegna (per quanto rara, presso Bosa, Prov. di Sassari e presso Dorgali, Prov. di Nuoro).

Anche di questa specie è ospite la *Ctenolepisma ciliata* Duf.

Mengenilla parvula Silv. Questa specie finora è nota soltanto per la Sicilia: Carlentini, Lentini (prov. di Siracusa). Non conosco l'ospite, che forse è una specie di *Lepisma*.

È da notare che 3 delle 6 specie di *Mengenilla* (*M. spinulosa*, *M. subnigrescens*, *M. parvula*) sono finora note soltanto per la Sicilia; ma sarà importante verificare con altre intense ricerche se realmente nessuna di esse arriva al continente e alla parte meridionale della Sardegna e fuori del territorio d'Italia, particolarmente in Spagna e nel Nord Africa. Di questa regione conosciamo sommariamente i maschi di qualche specie di *Mengenilla* e di un genere (*Mengellinopsis* Hofender), che a me non sembra distinto da *Mengenilla*, che potrebbe essere anche identica a qualcuna di quelle da me descritte per la Sicilia, ma fino a che non si avranno pupari o femmine per un accurato confronto, nulla si può precisare.

La *Mengenilla nigrifula* ha una distribuzione molto particolare, perchè sembra che manchi nell'Italia meridionale occidentale, almeno

da Reggio Calabria a Napoli dove sono state fatte estese ricerche, e poi ricompare a Terracina (Prov. di Littoria).

La *Mengenilla laevigata* esiste dalla regione ionica nelle vicinanze di Sibari fino alla Prov. di Foggia, ma non è stata trovata ancora nell'Italia occidentale e compare in Sardegna.

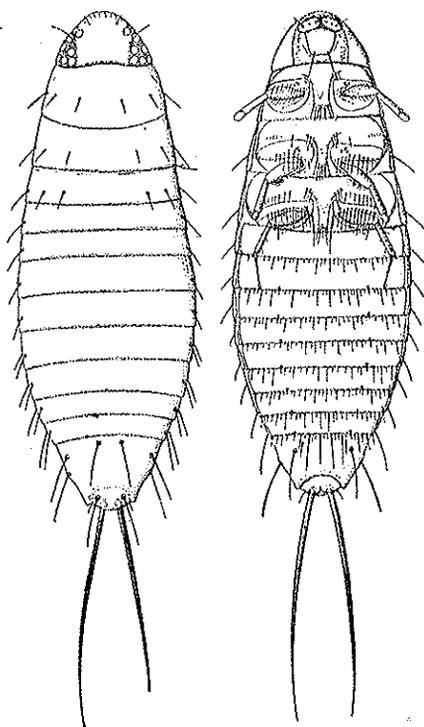


FIG. I.

Mengenilla quaesita: larva neonata prona e supina (molto ingrandita).

La *Mengenilla quaesita* è comune nell'Italia meridionale da Castrovillari (prov. di Cosenza) alla prov. di Salerno, non è stata ancora raccolta a nord di Salerno, nè da Apricena a Taranto lungo la costa orientale dove sono state fatte ricerche abbastanza estese, ed è comune almeno nella metà settentrionale della Sardegna.

Io continuerò le ricerche per accertare bene la distribuzione delle specie del genere *Mengenilla* e dell'ospite (*Ctenolepisma ciliata*), perchè trattandosi di un piccolo gruppo di specie, anche non difficili a trovarsi quando se ne è conosciuto l'ambiente prediletto, sarà possibile avere reperti interessanti per poter discutere i rapporti faunistici tra le varie regioni del continente italiano e delle isole, nonchè, quando ne avremo i dati, delle altre regioni del Mediterraneo.

Quanto alla specie di Tisanuro, di cui 5 delle 6 specie ricordate sono parassite durante le prime 3 età, merita di essere particolarmente segnalato il fatto che si tratta, per quanto finora io ho osservato, sempre della *Ctenolepisma ciliata* Duf., specie di larga distribuzione geografica circummediterranea.

BIOLOGIA. — Descrissi già nella nota del marzo 1940 il ciclo della *M. spinulosa*, aggiungo ora notizie biologiche sulla *M. quaesita* e noto che le altre specie (eccettuata la *M. parvula*, di cui ancora non conosco le forme parassite) si comportano in modo simile.

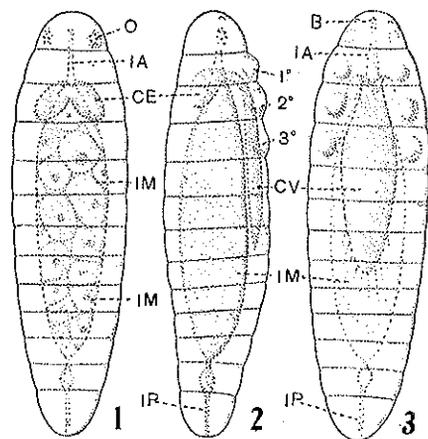


FIG. II.

Mengenilla quaesita: Larva del primo periodo della 2ª età vista dal dorso, di fianco e dal ventre (ingrandita): B apertura boccale, CE ganglio sopraesofageo, CV catena ganglionare ventrale, IA intestino anteriore, IM intestino medio, IP intestino posteriore, O macchia oculare; 1°, 2°, 3°, accenni del 1°, al 3° paio di zampe.

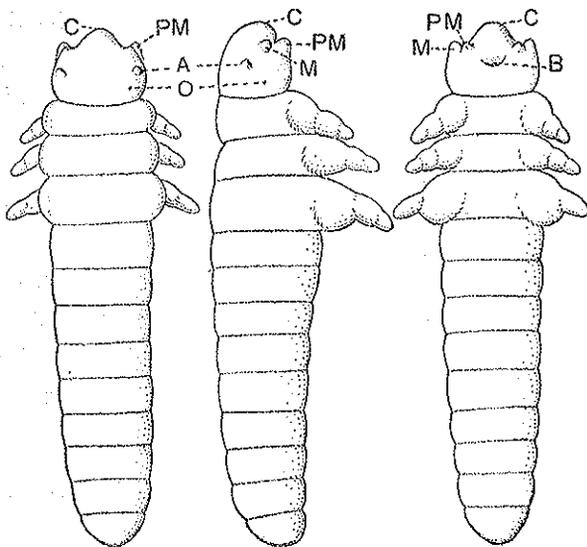


FIG. III.

Mengenilla quaesita: larva del 2° periodo della 2ª età, vista dal dorso di fianco e dal ventre: A antenne, B apertura boccale, C clipeo, M mandibole, PM palpo mascellare (ingrandita)

La *Mengenilla quaesita* è parassita, da larva della 1ª età a quella della 3ª, della *Ctenolepisma ciliata* Duf. Le larve neonate (Fig. I) fuoriescono dalla femmina in estate dalla 2ª decade di agosto (osservate il 12) alla 3ª di settembre (osservate fino al 29) e trovato l'ospite indicato si aggrappano ad esso e penetrano nel suo corpo attraverso membrane intersegmentali o interarticolari e dopo una diecina di giorni (per es. 20-29 settembre; 29 settembre-8 ottobre con temperatura nel laboratorio 23-24°) compiono una muta e si trasformano in larve della 2ª età (Fig. II).

Lo sviluppo della larva della 2ª età dalla fine dell'estate o dall'autunno è molto lento, infatti in *Ctenolepisma* raccolte il 20 giugno presso Rodio (Salerno) si trovavano larve lunghe mm. 1,10-1,70 (Fig. III) e in 2 larve di *Ctenol.*, lunghe mm. 7,2 larve di *Mengenilla* per ciascuna lunghe da mm. 0,40-0,80.

In una larva della 2ª età di *Ctenolepisma*, infestata con larve neonate il 16 agosto 1940, si trovarono il 20 settembre 3 larve di *Meng.* lunghe mm. 0,76.

Questi dati dimostrano il rapporto fra accrescimento e temperatura e anche quello tra accrescimento e nutrizione; in esemplari di *Ctenolepisma* piccole l'accrescimento è stato più lento che nei grandi; dal giugno l'accrescimento va rapidamente aumentando. Il 6 luglio in *Ctenol.* di Bosa si trovavano larve dell'ultima forma della 2ª età lunghe mm. 4-5, e larve della 3ª età lunghe fino a m. 5 $\frac{1}{2}$.

La fuoriuscita delle larve della 3ª età dall'ospite ha luogo nell'Italia meridionale (Pisciotta, Salerno) dalla metà di luglio, mentre in Sardegna (Bosa, almeno nel 1940) dalla fine di giugno, e continua fino in agosto (a Bosa si osservarono fino al 4, a Pisciotta fino al 7).

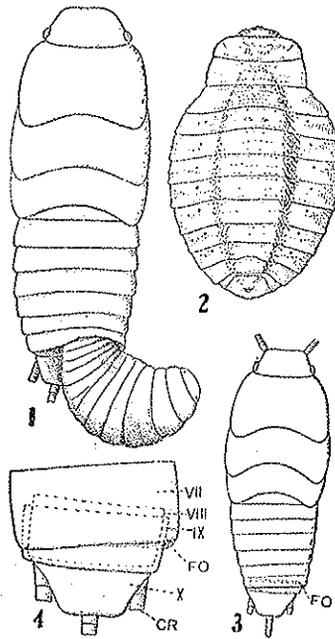


Fig. IV.

1 Contorno del corpo di *Ctenolepisma ciliata*, da cui sta fuoriuscendo la larva della 3ª età di *Mengenilla quaesita*; 2 la stessa larva della 3ª età di *Mengenilla quaesita* poche ore dopo l'uscita dal corpo della *Ctenolepisma* (ingrandimento uguale a quello della figura 1); 3 Contorno del corpo della *Ctenolepisma ciliata* dopo l'uscita della larva di *Mengenilla*: FO foro intersegmentale d'uscita della larva; 4 parte posteriore della stessa *Ctenolepisma* più ingrandita: VII-X segmenti addominali 7° a 10°, CR parte basale dei cerci.

In un esemplare di *Ctenolepisma* raccolto in libertà si trovano di regola da 1 a 2 larve di Mengenilla e poco frequentemente un numero maggiore e una o ambedue possono arrivare a sviluppo normale.

Le larve della 3^a età, quando si avvicina l'epoca della fuoriuscita dall'ospite, si capovolgono: presso Bosa il 23 giugno 1940 circa $\frac{2}{3}$ di dette larve erano già rivolte col capo alla parte posteriore dell'addome. La larva della Mengenilla fuoriesce di regola attraverso la membrana tra l'urotergite 7° ed 8°, tra il 6° ed il 7° e meno frequentemente tra 2 urotergiti anteriori al 7°.

Il 18 luglio 1940 alle ore 10 $\frac{1}{2}$ vidi una larva femminile di questa Mengenilla che stava fuoriuscendo dal corpo di *Ctenolepisma ciliata* (raccolta presso Bosa il 10 luglio) tra l'urotergite 6° e 7°. Al momento in cui la osservai era venuta fuori colla parte anteriore del corpo per la lunghezza di circa 1 millimetro e copriva quasi tutta la parte posteriore dell'addome della *Ctenolepisma*. Essa faceva sforzi di contrazione volgendosi col capo ora in un lato ora nell'altro e così avanzava leggermente, ma poi si volse con maggiore forza verso sinistra ripiegandosi quasi ad arco e fuoriuscì del tutto dall'addome. Venuta fuori distese subito i lati del corpo e con forti movimenti di contrazione e di distendimento continuò a muoversi fino alle 11,45 quando nascostasi sotto una foglia vi rimase distesa in posizione normale. All'uscita della Cten. era di colore paglierino, alle ore 13,30 aveva acquistato un colore isabellino scuro.

Dopo la fuoriuscita della larva di Meng. la *Ctenolepisma*, nei casi da me osservati, conserva una mobilità quasi completa potendo muoversi agilmente e una vitalità più o meno ridotta: ho visto una Cten. mantenersi in vita per 24 ore, quella, da cui fuoriuscì la larva di Men. alle 10 $\frac{1}{2}$ del 18 luglio, stimolata ancora fino alle ore 18 camminava svelta per un paio di centimetri e poi si fermava, la mattina del 19 alle ore 6 se toccata appena muoveva le zampe. Appena fuoriuscita la Mengenilla, l'addome della Ctenol. è già contratto di circa $\frac{1}{3}$, poi va ancora contraendosi fino a metà circa del normale.

Il numero dei maschi rispetto a quello delle femmine in questa specie è (per raccolte almeno fatte nel 1940) superiore a quello delle femmine; presso Bosa si raccolsero 231 pupari di ♂♂, 101 di ♀♀, presso Pisciotta 47 di ♂♂ e 28 di ♀♀.

Da pupari maschili formati in luglio possono venire fuori gli adulti in circa 14 a 18 giorni (per es. da pupari formatisi nella notte dal 9 al 10 luglio si ebbero 2 adulti la mattina del 24 luglio; da pupari del 17 luglio adulti il 4 agosto, di altri dal 19 luglio e adulti il 7 agosto); i primi maschi nel 1940 li ebbi il 20 luglio.

I maschi fuoriescono la mattina fino al pomeriggio (quelli del 24 luglio di Bosa comparvero tra le ore 8 e 8 $\frac{1}{2}$, quelli di Castrovillari del 4 agosto tra le 14 e le 15) e sono per almeno un'ora molto attivi, poi cominciano a muoversi poco e dopo 4-5 ore sono morti o quasi (1 esemplare dei compararsi alle ore 8 riuscì ancora ad accoppiarsi alle 9 $\frac{1}{4}$ con una femmina).

Dai pupari femminili fuoriescono le femmine adulte in circa 14 giorni (da pupari di Bosa formati nella notte dal 9-10 luglio fuoriuscirono 3 femmine adulte il 23 e 1 il 24).

La fecondazione è extravulvare come ho descritto per la *M. spinulosa*.

Non tutte le femmine adulte fuoriescono dal pupario ma un certo numero (un po' meno della metà secondo osservazioni finora fatte in laboratorio) restano nel pupario, ma danno le larve ugualmente in estate. Finora io non ho mai trovato un pupario contenente una femmina adulta sana nei mesi invernali e in quelli primaverili a differenza di quanto è regola per la *Mengenilla subnigrescens*, *M. parvula*, *M. nigritula*.

SUL METODO DI ELIMINAZIONE
NELLA COSTRUZIONE DEI NUMERI INDICI
DEI PREZZI^(*)

ALBINO UGGÈ

SUMMARIVM. — Triplex condicio cui satisfacere debent numeri indices, qui cum eliminationis ratione congruant, nonnisi una esse demonstratur.

È stato dimostrato che le consuete formule basate sul principio della *popolazione tipo*, usate, fra l'altro, nella costruzione degli indici del costo della vita a consumi immutati, non rispondono alle condizioni cui dovrebbero soddisfare indici in rigoroso accordo con le esigenze logiche del *metodo di eliminazione*.

Il prof. GINI nel suo ampio e penetrante saggio sui numeri indici dei prezzi, che rappresenta un fondamentale contributo, non ancora superato, allo studio del complesso argomento, ha messo in evidenza tre condizioni richieste dalla logica del metodo di eliminazione⁽¹⁾.

I. Dovrebbe sussistere equivalenza fra l'indice che esprime l'influenza delle variazioni del fattore p (prezzi) sulle variazioni globali della somma $|PQ|$, passando dalla situazione O alla situazione x , elimi-

^(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Marcello Boldrini, nella Tornata dell'8 giugno 1941.

⁽¹⁾ C. GINI, *Quelques considerations au sujet de la construction des nombres indices des prix et des questions analogues. Contribution a l'étude des methodes d'élimination*. «Metron», vol. IV, n. 1, in particolare pag. 95 e seg. Cfr. pure C. GINI, *Methods of eliminating the influence of several groups of factors*, «Econometrica», vol. 5, n. 1, pag. 56.

nati gli effetti delle variazioni dell'altro fattore q (quantità), supposto inalterato nella situazione iniziale, e l'indice che misura l'influenza delle stesse variazioni di p , qualora si supponga, invece il fattore q conservi i valori assunti sulla configurazione finale. In altre parole, dovrebbe sussistere equivalenza fra l'indice così detto di LASPEYRE,

$${}_0P_x = \frac{\sum_{k=1}^n p_{\alpha k} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}}$$

e l'indice, così detto, di PAASCHE,

$${}_0P'_x = \frac{\sum_{k=1}^n p_{\alpha k} q_{\alpha k}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{\alpha k}}$$

ottenuti, il primo con ponderazione formata dai valori di q nella situazione O , il secondo con pesi costituiti dai valori di q nella situazione x .

L'eguaglianza fra i due indici è subordinata al verificarsi di certe condizioni. Occorre che sia nulla la correlazione fra la serie dei valori $\frac{p_{\alpha k}}{p_{0k}}$ e quella corrispondente dei valori $\frac{q_{\alpha k}}{q_{0k}}$.

Nel campo degli indici dei prezzi ciò significa che la variazione relativa delle quantità consumate (o vendute o prodotte) deve essere indifferente alla variazione relativa dei prezzi. In altre parole, le merci i cui prezzi hanno variato, in via relativa, di più non debbono sistematicamente presentare le più sensibili variazioni relative delle rispettive quantità consumate e le merci che hanno subita variazione meno marcata nei prezzi non debbono di regola coincidere con quelle caratterizzate da minore variazione relativa delle quantità o viceversa⁽¹⁾.

II. L'indice che misura l'influenza delle variazioni del fattore p dalla situazione O alla situazione x dovrebbe risultare il reciproco del-

(¹) Non basta, per escludere che, in pratica, nel caso concreto, la correlazione fra i valori $\frac{p_{\alpha k}}{p_{0k}}$ ed i corrispondenti valori $\frac{q_{\alpha k}}{q_{0k}}$ possa riuscire nulla e per legittimare la presunzione che essa debba esser negativa, invocare la nota re-

l'indice che serve a segnare le variazioni della situazione x alla situazione O : cioè ${}_0P_x = 1: {}_xP_0$ (condizioni di reversibilità).

III. Applicando alla somma dei valori nella situazione O , cioè a $|P_0 Q_0|$, i coefficienti ${}_0P_x$ e ${}_0Q_x$, relativi, il primo alla variazione considerata come effetto del movimento del fattore p , il secondo, alla variazione determinata dal movimento del fattore q , si dovrebbe ottenere il valore della somma totale nella situazione x . Vale a dire: $|P_0 Q_0| \cdot {}_0P_x \cdot {}_0Q_x = |P_x Q_x|$ (condizione di decomposizione delle cause).

Ora, è facile mostrare che, se si verifica la condizione I (equivalenza fra i risultati ottenuti con la formula di LASPEYRE e quelli forniti dalla formula di PAASCHE) si verificano anche le altre due condizioni: di reversibilità e di decomposizione delle cause.

Con la formula di LASPEYRE, gli indici che misurano la variazione da O a x e la variazione da x a O sono rispettivamente:

$${}_0P_x = \frac{\sum_{k=1}^n p_{xk} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}} \quad \text{e} \quad {}_xP_0 = \frac{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{xk}}{\sum_{k=1}^n p_{xk} q_{xk}}$$

lazione inversa - pur ammesso che essa valga anche per variazioni legate al tempo - fra variazioni dei prezzi e variazioni della domanda dei beni. Infatti: il segno della correlazione dipende dalla concordanza o discordanza di segno dei componenti le coppie di scarti della sommatoria

$$\sum_{k=1}^n \left[\frac{p_{xk}}{p_{0k}} - M \left(\frac{p_{xk}}{p_{0k}} \right) \right] \left[\frac{q_{xk}}{q_{0k}} - M \left(\frac{q_{xk}}{q_{0k}} \right) \right] - \text{in cui } M \left(\frac{p_{xk}}{p_{0k}} \right) \text{ e } M \left(\frac{q_{xk}}{q_{0k}} \right)$$

rappresentano le medie aritmetiche delle due serie di rapporti - che compare al numeratore della formula del coefficiente di correlazione.

Si faccia, per esempio, l'ipotesi che tutti i rapporti $\frac{p_{xk}}{p_{0k}}$ siano > 1 e tutti i corrispondenti rapporti $\frac{q_{xk}}{q_{0k}}$ siano < 1 o viceversa, ipotesi che rispetta la condizione della relazione inversa fra movimento dei prezzi e movimento delle domande.

La sommatoria non riuscirà, per questo, necessariamente negativa, ma, come è evidente, potrà risultare anche positiva o nulla, a seconda del comportamento degli scarti associati. Così se ai più piccoli valori dei rapporti inferiori all'unità - che misurano, quindi, le variazioni, nel senso della diminuzione, relativamente più cospicue - si accompagnano i più piccoli valori dei corrispondenti rapporti superiori all'unità - che, invece, indicano le variazioni meno sensibili, nel senso dell'aumento - ed ai più elevati valori della prima successione - variazioni più modeste - sono accoppiati i più elevati valori della seconda - variazioni più elevate -, la correlazione riuscirà positiva, poichè gli scarti associati riceveranno lo stesso segno ed i prodotti risulteranno positivi.

Con la formula di PAAASCHE la misura delle variazioni da x a 0 è data da

$${}_x P'_0 = \frac{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{xk} q_{0k}}$$

Se fosse vera la eguaglianza

$${}_x P_0 = {}_x P'_0, \text{ cioè } \frac{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{xk}}{\sum_{k=1}^n p_{xk} q_{xk}} = \frac{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{xk} q_{0k}},$$

evidentemente sarebbe anche

$${}_0 P_x = \frac{1}{{}_x P_0}, \text{ poichè } \frac{\sum_{k=1}^n p_{xk} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}} = 1 : \frac{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{xk} q_{0k}},$$

cioè resterebbe soddisfatta la condizione di reversibilità.

In modo analogo, sostituendo a:

$${}_0 P_h = \frac{\sum_{k=1}^n p_{xk} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}}$$

il suo presunto equivalente:

$${}_0 P'_x = \frac{\sum_{k=1}^n p_{xk} q_{xk}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{xk}}$$

si otterrebbe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}} &= \\ &= \sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}} \cdot \frac{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}}{\sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k}} = \sum_{k=1}^n p_{0k} q_{0k} \end{aligned}$$

e si dimostrerebbe soddisfatta anche la terza condizione, di decomposizione delle cause.

Il ragionamento fatto in termini degli indici P (misure delle variazioni imputabili ai prezzi, eliminata l'influenza delle variazioni nelle quantità) si può ripetere in termini degli indici Q (misura delle variazioni dipendenti dalle quantità, eliminati gli effetti delle variazioni dei prezzi) giungendo a conclusioni analoghe.

I PIÙ GENERALI RIFLESSI
DELLA CONGRUENZA DELLE DEFORMAZIONI
SUGLI SFORZI ELASTICI^(*)

PIERO LOCATELLI

SUMMARIVM. — Exponitur quid requiratur ut duplex symmeter tensor possit aequalis elastici corporis tensionem exprimere, quaecumque sint eius corporis vires et proprietates elasticae, licet haec quoque e situ pendeant.

In uno studio comparso in questi « Acta »⁽¹⁾ ho posto in rilievo l'esistenza di particolari legami cui devono soddisfare le componenti di un generico tensore doppio simmetrico perchè questo possa essere assunto come tensore degli sforzi interni di un continuo omogeneo (bidimensionale o tridimensionale), indipendentemente dalle costanti elastiche di questo e dalle forze di campo e di contorno.

La ricerca di analoghi legami per il caso di continui *non omogenei* costituisce l'argomento di questa Nota. Oltre agli scopi indicati nello studio citato, essa ne ha uno particolare che scaturisce dal considerare che lo stato di tensione, sotto determinate forze, di un continuo nel quale il legame sforzi-deformazioni⁽²⁾ non sia lineare, purchè regolare, può essere assimilato allo stato di tensione, sotto quelle stesse forze, dello stesso continuo costituito di materiale a caratteristica lineare, ma *opportuna*mente non omogeneo e non isotropo.

Le relazioni cui si perverrà saranno pertanto valevoli anche nel caso di continui a caratteristica sforzi deformazioni non lineare.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti nella Tornata dell'8 giugno 1941.

(1) P. LOCATELLI, *Sullo stato di tensione elastica nei continui omogenei*. Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. V, n. 5, 1941.

(2) Intendo sempre di riferirmi a deformazioni infinitesime.

Mi limiterò ai casi aventi più immediata possibilità di pratiche applicazioni nel campo della elastostatica, ossia ai casi bidimensionali e tridimensionali euclidei.

1°. — Consideriamo un continuo euclideo isotropo tridimensionale non omogeneo: il suo equilibrio elastostatico è retto dall'insieme di tre gruppi di equazioni: le sei [1] che scendono dall'equilibrio dell'elemento di volume, le sei [2] che stabiliscono il legame, vario da punto a punto, fra sforzi e deformazioni, le tre indipendenti [3] che nascono dalla congruenza della deformazione. Nessuna differenza formale distingue queste equazioni da quelle scritte per un continuo tridimensionale omogeneo: solo i due coefficienti che caratterizzano la natura elastica del continuo (tensore elastico) non sono due costanti, ma due funzioni del posto.

Ciò non introduce difficoltà concettuali, talchè la via per risolvere il problema proposto non muta, nelle sue linee fondamentali, rispetto a quella seguita nel caso di continui omogenei, ma presenta difficoltà di calcolo che m'è riuscito di superare estendendo un procedimento di cui si è valso FINZI in un suo recente lavoro⁽¹⁾. Si esprimeranno ancor qui le condizioni di congruenza in funzione degli sforzi e delle caratteristiche elastiche del continuo e si elimineranno queste ultime nelle relazioni così ottenute sfruttando ulteriori relazioni, alla loro volta ottenute dalle precedenti per successive derivazioni.

Le equazioni dell'equilibrio elasto-statico hanno, per il caso in cui ci siamo messi ed in veste tensoriale l'aspetto⁽²⁾:

$$\begin{aligned}
 [1] \quad & p_{ik}|^k = F_i \quad p_{ik} = p_{ki} \\
 [2] \quad & \zeta_{ik} = A p a_{ik} + B p_{ik} \quad (i, k, r, s, h, j = 1, 2, 3) \\
 [3] \quad & \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} \zeta_{ik|rs} = 0
 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ B. FINZI, *Il problema ristretto tridimensionale nella teoria della plasticità*. «Atti R. Acc. Scienze», vol. 76. Torino, 1941.

⁽²⁾ Conformemente all'uso indico con indici in alto le componenti controvarianti di un tensore e con indici in basso le covarianti; una lineetta fra gli indici sostituisce l'ordinario segno di derivazione (derivazione ordinaria, in coordinate cartesiane; derivazione tensoriale, in coordinate generali); sono soppressi i sim-

nelle quali: a_{ik} è il tensore fondamentale, ε^{ijk} il tensore di RICCI, p_{ik} il tensore degli sforzi interni, ξ_{ik} il tensore di deformazione, p l'inva-

boli di sommatoria quando stanno a rappresentare una semplice saturazione rispetto agli indici spaziali.

Nello spazio di metrica:

$$ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1 \dots n)$$

il tensore a_{ik} è il tensore fondamentale (se lo spazio è euclideo e le coordinate sono cartesiane $a_{ik} = 1$ se $i = k$; $a_{ik} = 0$ se $i \neq k$). Esso è costante nel senso che la sua derivata tensoriale è nulla; è elemento essenziale nel prodotto scalare di due vettori: $u \times v = a_{ik} u^i v^k$.

Il tensore di RICCI è un tensore n plio (doppio se lo spazio ha due dimensioni, triplo se lo spazio ha tre dimensioni) ed è così definito: $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = 0$ se almeno due indici sono eguali ($i_1, i_2 \dots i_n = 1, 2, \dots, n$); $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \pm \sqrt{|a_{ik}|}$ se gli indici sono tutti distinti, valendo il segno +, o il segno -, secondo la classe della permutazione $i_1 \dots i_n$ rispetto alla fondamentale $1 \dots n$. Anche il tensore di RICCI è costante nel senso che la sua derivata tensoriale è nulla (se lo spazio è euclideo e le coordinate sono cartesiane, le componenti non nulle hanno il valore $\pm \sqrt{|a_{ik}|} = \pm 1$). Nello spazio tridimensionale esso è elemento essenziale nel prodotto vettoriale: precisamente se $w = u \wedge v$, si ha: $w_h = \varepsilon_{hik} u^i v^k$.

Le [1], [2], [3] trascritte in forma cartesiana diventano le ben note:

$$[1] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} = F_x \qquad p_{xy} = p_{yx} \\ \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z} = F_y \qquad p_{yz} = p_{zy} \\ \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = F_z \qquad p_{zx} = p_{xz} \end{array} \right.$$

$$[2] \left\{ \begin{array}{ll} \xi_{xx} = A p + B p_{xx} & \xi_{xy} = B p_{xy} \\ \xi_{yy} = A p + B p_{yy} & \xi_{yz} = B p_{yz} \\ \xi_{zz} = A p + B p_{zz} & \xi_{zx} = B p_{zx} \end{array} \right.$$

$$[3] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \xi_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial y^2} = 2 \frac{\partial^2 \xi_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial^2 \xi_{zx}}{\partial z \partial x} \qquad \frac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} \right) \end{array} \right.$$

riante lineare degli sforzi: $p = p_i^i$, A e B due funzioni caratteristiche del continuo:

$$A = \chi(x_1, x_2, x_3) \qquad B = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

ed infine F_i le forze di campo.

Le [3] come è noto costituiscono un sistema di sei equazioni algebricamente indipendenti, ma non tali differenzialmente: sussistono infatti le tre identità che esprimono l'annullarsi della divergenza del primo membro delle stesse [3] (1); in virtù delle [2], le [3] assumono l'aspetto:

$$[3'] \quad \Phi^{hj} \equiv \varepsilon^{irh} \varepsilon^{hsj} \{ (A p) |_{rs} a_{ik} + (B p_{ik}) |_{rs} \} = 0 \quad (i, k, r, s, h, j = 1, 2, 3)$$

Se per comodo di scrittura poniamo:

$$A p = \chi p = \psi(x_1, x_2, x_3) \\ \varepsilon^{irh} \varepsilon^{hsj} a_{ik} = c^{hirs}$$

otteniamo:

$$[3''] \quad \Phi^{hj} \equiv c^{hirs} \psi |_{rs} + \varepsilon^{irh} \varepsilon^{hsj} (\varphi p_{ik}) |_{rs} = 0$$

2°. - Se chiamiamo C_{mnhj} gli elementi reciproci di c_{hirs} , ossia poniamo:

$$C_{mnhj} c^{hirs} = \alpha^r_m \alpha^s_n$$

moltiplicando le [3''] per C_{mnhj} e saturando avremo:

$$[3'''] \quad \psi |_{mn} + D_{mn}^{ikrs} (\varphi p_{ik}) |_{rs} = 0$$

avendo posto:

$$D_{mn}^{ikrs} = C_{mnhj} \varepsilon^{irh} \varepsilon^{hsj}$$

(1) P. LOCATELLI, loc. cit.

con che, ricordando la genesi di C_{mhj} si ha: $D_{mn}^{ikrs} = D_{mn}^{ikrs}$.

Poniamo ora per semplicità di scrittura e per ricordarne la natura tensoriale:

$$\beta_{mn} = D_{mn}^{ikrs} (\varphi p_{ik})_{,r}$$

la [3'''] diviene:

$$[3^{IV}] \quad \Lambda_{mn} = \psi_{|mn} + \beta_{mn} = 0$$

Le [3^{IV}] non sono dunque, a meno di coefficienti, che le [3] espresse nelle derivate seconde degli sforzi interni e delle caratteristiche del continuo A e B. Si avrà pertanto:

$$\Phi^{hj} = \epsilon^{hirs} \Lambda_{,rs} = \Lambda a^{hj} - \Lambda^{hj} = 0 \quad (\Lambda = \Lambda_i^i)$$

e quindi prendendo la divergenza d'ambo i membri:

$$[*] \quad \Lambda|_j = \Lambda^i_{,j}$$

Dalle [3^{IV}] è facile eliminare la ψ ; basta infatti derivare le [3'''] rispetto alle variabili spaziali, moltiplicare per il tensore di Ricci e saturare; ricordando allora l'emisimmetria di ϵ^{pmt} e la simmetria delle derivate $\psi_{|mnt}$ la [3^{IV}] diviene successivamente:

$$[3^V] \quad \psi_{|mnt} + \beta_{mn|t} = 0$$

$$\epsilon^{pmt} \psi_{|mnt} + \epsilon^{pmt} \beta_{mn|t} = 0$$

$$[4] \quad \Theta^p_{,m} = \epsilon^{pmt} \beta_{mn|t} = 0$$

La [4] è una relazione tensoriale, che non contiene la ψ , nella quale compaiono il tensore degli sforzi interni p_{ik} e la caratteristica del continuo B = $\varphi(x^i)$ con le loro derivate fino a quelle di ordine terzo. Scriviamo la [4] ponendo in evidenza la φ e le sue derivate: essa avrà la veste:

$$[4'] \quad \Theta_{,pm} = E_{3,pm}^{abc} \varphi|_{abc} + E_{2,pm}^{ab} \varphi|_{ab} + E_{1,pm}^a \varphi|_a + E_{0,pm} \varphi = 0$$

dove i tensori E_{\dots}^{\dots} sono i coefficienti che saturano le derivate di ordine h della funzione φ ; essi sono funzioni solamente delle derivate di p_{ik} fino al terzo ordine.

La [4'] è un sistema di 9 equazioni: non tutte però sono algebricamente indipendenti perchè grazie a [4] si ha l'identità:

$$a^{pm} \Theta_{pm} \equiv 0$$

Le otto [4'] non ci permettono dunque di ricavare algebricamente le dieci distinte $\varphi|_{abc}$. Facciamo allora ricorso ad un metodo di eliminazione ispirato al citato lavoro di FINZI.

Deriviamo le [4']; abbiamo:

$$[5] \quad \Theta_{pm|r} \equiv F_{4\ pmr}^{abcd} \varphi|_{abcd} + F_{3\ pmr}^{abc} \varphi|_{abc} + F_{2\ pmr}^{ab} \varphi|_{ab} + F_{1\ pmr}^a \varphi|_a + F_{0\ pmr} \varphi \equiv 0$$

nella quale i tensori F_{\dots}^{\dots} (funzioni delle derivate di p_{ik} fino al quarto ordine) sono i coefficienti che saturano le derivate di ordine h della funzione φ .

La [5] ottenuta derivando le otto [4'] è un sistema di ventiquattro equazioni contenenti le quindici derivate quarte $\varphi|_{abcd}$. Si osservi però che sussistono fra esse le nove identità sotto indicate:

$$\Theta_{pm|r} a^{mr} \equiv \varepsilon_p^{ut} \Lambda_{mn}|_t \equiv 0$$

$$\Theta_{pm|r} a^{pr} \equiv \varepsilon^{rst} \Lambda_{ma}|_t \equiv 0$$

$$\begin{aligned} \Theta_{pm|r} \varepsilon_Q^{r\lambda} \varepsilon_Q^{pm} &\equiv \varepsilon_Q^{r\lambda} \varepsilon_Q^{pm} \varepsilon_p^{ut} \Lambda_{mn}|_t \equiv \varepsilon_Q^{r\lambda} (a^{qt} a^{mn} - a^{qn} a^{mt}) \Lambda_{mn}|_t \equiv \\ &\equiv \varepsilon_Q^{r\lambda} (\Lambda|_t^{[q} - \Lambda_m|_t^{m]}) \equiv 0 \quad (\Lambda = \Lambda^i) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi nella [5] un sistema di quindici equazioni algebricamente indipendenti nelle quindici $\varphi|_{abcd}$.

Torna a questo punto opportuno introdurre un artificio di calcolo che, assolutamente inessenziale, riesce particolarmente comodo in quanto permette la completa applicazione di operazioni tensoriali, e fecondo

in quanto suggerisce e rende spontanee trasformazioni che diversamente richiederebbero particolare virtuosismo.

Introduciamo un tensore $G_{4\ p m r s}^{abcd}$ il quale goda di tutte le simmetrie rispetto agli indici $\begin{smallmatrix} abc d \\ m n r s \end{smallmatrix}$. Se si tiene presente che gli indici possono solamente assumere i valori 1, 2, 3, le sole componenti distinte del tensore così introdotto saranno del tipo: $G_{4\ p m r s}^{abcd}$ e pertanto si potrà porre in un riferimento prefissato, ma del resto qualsivoglia:

$$F_{4\ p m r}^{abcd} \equiv G_{4\ p m r s}^{abcd}$$

Introducendo con analogo criterio i tensori:

$$G_{3\ p m r s}^{abc} \equiv F_{3\ p m r}^{abc}; \quad G_{2\ p m r s}^{ab} \equiv F_{2\ p m r}^{ab}; \quad G_{1\ p m r s}^a \equiv F_{1\ p m r}^a; \quad G_{0\ p m r s} \equiv F_{0\ p m r}$$

la [5] si scrive:

$$[5'] \quad G_{4\ p m r s}^{abcd} \varphi|_{abcd} + G_{3\ p m r s}^{abc} \varphi|_{abc} + G_{2\ p m r s}^{ab} \varphi|_{ab} + G_{1\ p m r s}^a \varphi|_a + G_{0\ p m r s} \varphi = 0$$

La [5'] ha carattere tensoriale, restando essa invariata rispetto a un generico cambio di riferimento: risolta rispetto a $\varphi|_{abcd}$ ⁽¹⁾ fornisce:

$$[5''] \quad \varphi|_{ijk} + H_{3\ ij k}^{abc} \varphi|_{abc} + H_{2\ ij k}^{ab} \varphi|_{ab} + H_{1\ ij k}^a \varphi|_a + H_{0\ ij k} \varphi = 0$$

Deriviamo la relazione tensoriale [5'']; abbiamo:

$$[5'''] \quad \varphi|_{ijkl} + K_{4\ ij k l}^{abcd} \varphi|_{abcd} + K_{3\ ij k l}^{abc} \varphi|_{abc} + K_{2\ ij k l}^{ab} \varphi|_{ab} + K_{1\ ij k l}^a \varphi|_a + K_{0\ ij k l} \varphi = 0$$

(1) Basta a tal fine moltiplicare ambo i membri della [5'] per il tensore $g_{ijk}^{p m r s}$ reciproco di $G_{4\ p m r s}^{abcd}$ tale cioè che:

$$G_{4\ p m r s}^{abcd} g_{ijk}^{p m r s} = a_i^a a_k^b a_j^c a_l^d$$

e saturare.

nella quale i coefficienti K contengono le derivate di p_{ik} fino al quinto ordine. Saturando le $[5''']$ col tensore ε si ottiene:

$$[5^{IV}] \quad \Gamma_4^{abcd} \varphi|_{abcd} + \Gamma_3^{abc} \varphi|_{abc} + \Gamma_2^{ab} \varphi|_{ab} + \Gamma_1^a \varphi|_a + \Gamma_0 \varphi = 0$$

e questa ricordando la $[5'']$ diviene:

$$[6] \quad M_3^{abc} \varphi|_{abc} + M_2^{ab} \varphi|_{ab} + M_1^a \varphi|_a + M_0 \varphi = 0$$

Convieni ora esprimere i coefficienti della $[6]$ mediante tensori aventi tre indici scoperti oltre quelli saturati: basta a tal fine compiere una sostituzione inversa a quella eseguita nel passaggio dalla $[5]$ alla $[5']$; avremo così:

$$[6'] \quad N_3^{abc} \varphi|_{abc} + N_2^{ab} \varphi|_{ab} + N_1^a \varphi|_a + N_0 \varphi = 0$$

Ripetiamo la successione di trasformazioni che ci ha portato dalla $[5']$ alla $[6']$, ossia risolviamo la $[6']$ rispetto a $\varphi|_{abc}$, $[6'']$, deriviamo la $[6'']$, saturiamo col tensore ε , ricordiamo $[6''']$; avremo successivamente

$$[6''] \quad \varphi|_{mnp} + O_2^{ab} \varphi|_{ab} + O_1^a \varphi|_a + O_0 \varphi = 0$$

$$[6'''] \quad \varphi|_{mnp} + P_3^{abc} \varphi|_{abc} + P_2^{ab} \varphi|_{ab} + P_1^a \varphi|_a + P_0 \varphi = 0$$

$$[6^{IV}] \quad Q_3^{abc} \varphi|_{abc} + Q_2^{ab} \varphi|_{ab} + Q_1^a \varphi|_a + Q_0 \varphi = 0$$

$$[7] \quad R_2^{ab} \varphi|_{ab} + R_1^a \varphi|_a + R_0 \varphi = 0$$

in quest'ultima i coefficienti R contengono le derivate di p_{ik} fino al sesto ordine.

Le [7] non sono tutte algebricamente indipendenti; per separarne quelle indipendenti basta saturarle col tensore ϵ ottenendo:

$$[7'] \quad S_{mn}^{ab} \varphi|_{ab} + S_{1mn}^a \varphi|_a + S_{0mn} \varphi = 0$$

Ripetiamo ancora una volta la successione di trasformazioni già illustrata; abbiamo successivamente:

$$[7''] \quad \varphi|_{pq} + T_{1pq}^a \varphi|_a + T_{0pq} \varphi = 0$$

$$[7'''] \quad \varphi|_{pqt} + U_{2pqt}^{ab} \varphi|_{ab} + U_{1pqt}^a \varphi|_a + U_{0pqt} \varphi = 0$$

$$[7^{IV}] \quad V_{2pq}^{ab} \varphi|_{ab} + V_{1pq}^a \varphi|_a + V_{0pq} \varphi = 0$$

$$[8] \quad W_{1pq}^a \varphi|_a + W_{0pq} \varphi = 0$$

in quest'ultima i coefficienti W contengono derivate delle p_{ik} fino al settimo ordine.

Le [8] non sono tutte algebricamente indipendenti; per separarne le indipendenti basta saturarle col tensore ϵ ottenendo:

$$[8'] \quad X_p^a \varphi|_a + X_p \varphi = 0$$

Dividendo per φ (che di sua natura è diverso da zero), la [8] diviene:

$$[8''] \quad X_p^a (\log \varphi)|_a + X_p = 0$$

da questa risolvendo rispetto a $(\log \varphi)|_a$, cioè al solito moltiplicando per x_q^p reciproco di X_p^a (tale cioè che $X_p^a x_q^p = \alpha_q^a$) e saturando, si ha:

$$[8'''] \quad (\log \varphi)|_q + Y_q = 0$$

e questa, infine, derivata e saturata con tensore ε ci dà:

$$[9] \quad \varepsilon^{iq} Y_{ql} = 0$$

La [9] è equivalente ad una sola equazione indipendente, ed è una equazione differenziale in p_{ik} di ottavo ordine, lineare nelle derivate di ordine massimo. Essa è la condizione cercata.

A tale condizione deve dunque soddisfare un generico tensore doppio simmetrico perchè possa essere assunto come tensore di sforzi interni in un continuo tridimensionale isotropo euclideo, anche se si dispone a piacimento di opportune forze di campo e di una opportuna variabilità da punto a punto dei parametri elastici del continuo stesso.

3°. - Veniamo ora ai continui bidimensionali non omogenei ma isotropi; l'equilibrio indefinito è retto ancora dalle [1] e [2], con l'avvertenza che gli indici sono suscettibili solo dei valori 1 e 2. Quanto alla [3] se il continuo bidimensionale è euclideo (curvatura gaussiana nulla: piano e sviluppabili) essa va sostituita dall'unica equazione scalare seguente:

$$[10] \quad \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \zeta_{ik|rs} = 0 \quad (i, k, r, s = 1, 2)$$

Questa espressa negli sforzi mediante la [2] diviene:

$$[10'] \quad \varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \{ (Ap)_{|rs} a_{ik} + (Bp_{ik})_{|rs} \} = 0$$

È questa un'unica equazione nelle due funzioni: $Ap = \psi(x_1, x_2)$ e $B = \varphi(x_1, x_2)$; essa pertanto, quando si disponga di tali funzioni a piacere, non impone nessuna restrizione al tensore p_{ik} .

Se il continuo non è euclideo, la [10] è sostituita da una più complessa equazione⁽¹⁾, ma si tratta sempre di una unica equazione scalare.

(1) B. FINZI, *Sopra il tensore di deformazione di un velo*. R. Ist. Lomb., vol. LXII, fasc. XI-XV, 1930.

Si può pertanto concludere in generale che nel caso isotropo bidimensionale (a differenza di quanto avviene nel caso tridimensionale) qualunque tensore doppio simmetrico può a priori essere assunto come tensore di sforzi interni di un continuo dotato di opportune forze di campo e di parametri elastici opportunamente variabili da punto a punto.

4°. - Abbandoniamo ora la restrizione posta che il continuo sia isotropo.

Nulla da aggiungere per il caso bidimensionale nel quale già nel caso isotropo nessuna condizione vien posta al tensore degli sforzi interni.

Per i continui tridimensionali euclidei osserviamo allora che il legame sforzi deformazioni sarà caratterizzato non più da due soli parametri (le funzioni A e B) ma da almeno tre. Questo terzo parametro (ed i successivi, se i parametri sono più di tre) comparirà nella [9] o basterà in generale la sua presenza, data la sua arbitrarietà, a togliere alla [9] stessa ogni carattere di vincolo al tensore p_{ik} .

Si può quindi concludere in generale che nel caso bidimensionale ed in quello tridimensionale euclideo, qualunque tensore doppio simmetrico può essere assunto a caratterizzare lo stato di tensione elastica di un continuo non omogeneo non isotropo quando si disponga di opportune forze di campo e di parametri elastici opportunamente variabili da punto a punto.

SULLA DISPERSIONE DEI CARATTERI MENDELIANI (*)

MARCELLO BOLDRINI

Accademico Pontificio

SUMMARY. — Monohybridorum descendentes stabiliorem habent qualitatum proportionem, quam ex fortuito casu fieri debet. Ex quo patet probabilitatem eventus ita mutare solere ut plerumque inter se compensentur; quod accidere videtur propter repetitos ex inadvertentia errores, quibus praëiudicatae investigantium opiniones dant causam.

1. — La ricomparsa delle opposte modalità dei caratteri parentali, nella seconda generazione di un incrocio monoibrido, nelle proporzioni di $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$, è uno di quei fenomeni entrati nella conoscenza comune, che nessuno più oserebbe mettere in dubbio. Questo fatto, e gli altri con esso collegati, che stanno a base delle tre famose leggi di MENDEL — la legge della frequenza, quella della indipendenza dei caratteri e, infine, la legge della dissociazione dei fattori — hanno costituito il punto di partenza della Genetica, vale a dire del più moderno e promettente ramo della Biologia; e la massa delle conoscenze, rigidamente controllate e interpretate, è diventata così vasta; l'intrico delle relazioni così tecnico e difficile; i fatti nuovi rilevati giorno per giorno così luminosi e assorbenti, da non lasciar tempo al genetista moderno di riprendere in esame il più antico e saldo blocco patrimoniale della propria disciplina.

Eppure non mancano motivi per farlo, i quali derivano anzitutto dal dubbio che possa essere solo apparente, tanto essa è rara, la straordinaria semplicità dei reperti mendeliani, e poi anche da alcune con-

(*) Nota presentata nella Tornata dell'8 giugno 1941.

tradizioni, emerse nel corso degli anni, di cui la più recente, scoperta dal WINGE e non ancora risolta, riguarda il numero dei gruppi genetici dei caratteri del pisello, il quale supera il numero dei suoi cromosomi in assetto aploide.

Mi è parso utile riprendere in esame le frequenze statistiche, con cui si manifestano i due allelomorfi nella discendenza di un monoibrido, per controllare se e fino a qual punto la stabilità dei risultati corrisponde alla presunzione teorica della dipendenza da un complesso causale costante, quale è appunto ammesso dalla terza legge di MENDEL, che dice: « Gli ibridi dei piselli formano cellule uova e cellule polline le quali, in rapporto alla loro costituzione, rappresentano in egual numero tutte le forme costanti che derivano dalla combinazione dei caratteri riuniti con la fecondazione ». In termini moderni, la produzione dell'uno o dell'altro allelomorfo nella discendenza di un monoibrido è dovuta al casuale combinarsi di gameti portatori rispettivamente del gene D e del gene R, nei quattro assortimenti possibili ben noti, DD, DR, RD, RR. Il fenomeno avverrebbe, dunque, nelle più semplici condizioni un gioco di sorte, eseguito con probabilità costante in tutti i casi, realizzando, così, in pieno, le ipotesi probabilistiche bernoulliane. Per conseguenza, data una serie di masse parziali di osservazioni, le frequenze relative dell'uno o dell'altro dei due alleli in F_2 dovrebbero presentare una dispersione perfettamente normale.

Ma anche il reperto della dispersione supernormale non si può oggi più escludere a priori, tenendo conto dei fenomeni della *letalità* e della *penetranza*, che erano ignoti ma non meno reali ai tempi di MENDEL e nei primi anni del novecento.

Supponiamo una serie formata dalla frequenza relativa della modalità dominante in alcune masse parziali di osservazioni, sia eseguite da autori diversi, sulla medesima coppia allelomorfa, sia dallo stesso autore, su caratteri diversi. Quest'ultimo è il caso di MENDEL, che sperimentò successivamente sulla forma dei semi, il colore dei cotiledoni, la forma del baccello, ecc., in *Pisum*. Se i vari autori ottennero una diversa incidenza della letalità, oppure se la letalità è ineguale per i caratteri sperimentati, alle varie masse d'osservazioni corrispondano probabilità empiriche ineguali, e la dispersione della serie risulterà di tipo lexiano.

Altrettanto è da dire nei riguardi della penetranza, cioè della idoneità di certi caratteri ereditari ad estrinsecarsi, la quale, come è ben noto, varia sotto l'influenza di circostanze molteplici, non esclusi taluni fattori esterni, mutevoli perciò da luogo a luogo e da tempo a tempo.

È difficile invece prevedere a priori che si possa presentare il reperto della dispersione subnormale, perchè bisognerebbe immaginare che, in seno a ciascuna delle masse di osservazioni date, la probabilità di comparsa degli opposti attribuiti parentali variasse secondo regole uniformi, capaci di esercitare un'azione stabilizzatrice.

2. - Vediamo come si possa misurare la dispersione delle serie formate dalle frequenze relative con cui si manifesta l'uno o l'altro degli opposti alleli, in numerosi gruppi di discendenti di un monoibrido (¹).

Il caso più generale si verifica quando siano note m masse parziali di n_j elementi ciascuna ($j=1, 2, \dots, m$) di cui f_j posseggono il carattere dominante ed $n_j - f_j$ quello recessivo.

Per il calcolo e il confronto delle dispersioni effettiva e teorica è necessario che le masse siano ugualmente numerose. Però, dato il caso generale testè previsto, che le masse effettivamente osservate abbiano una consistenza numerica diseguale, esse verranno preventivamente uniformate, adottando un unico termine di riferimento N , ponendo cioè $N = n_j$ e calcolando proporzionalmente le corrispondenti frequenze relative di f_j . Il valore di N può essere, volendo, scelto a caso, adottando, per esempio, una potenza di 10, ma più opportunamente si farà coincidere con la media armonica degli n_j .

Quando, però, come nel caso che a noi interessa, le varie masse parziali n_j sono notevolmente diverse l'una dall'altra, è opportuno sostituire alla *serie ridotta semplice*, quella che CHARLIER chiama la *serie*

(¹) La teoria è senz'altro applicabile anche per misurare la dispersione delle frequenze relative delle combinazioni di caratteri nella discendenza dei poliibridi. Anche a questi, del resto, disponendo del materiale statistico necessario, si possono applicare il piano di ricerca e le considerazioni svolte nella presente Nota.

ridotta ponderata. Ponendo, per semplicità, $N=1000$, si sostituiranno ai dati delle serie effettive quelli risultanti dalla seguente successione:

$$[1] \quad n_1 \text{ volte } f_1' = \frac{1}{n_1} f_1 N; \quad n_2 \text{ volte } f_2' = \frac{1}{n_2} f_2 N; \quad \dots$$

La media delle frequenze ridotte risulta allora:

$$[2] \quad M = \frac{\frac{f_1 N n_1}{n_1} + \frac{f_2 N n_2}{n_2} + \dots}{n_1 + n_2 \dots} = \frac{N \sum_{j=1}^m f_j}{\sum_{j=1}^m n_j},$$

e la probabilità empirica di un successo è la seguente:

$$[3] \quad \circ p = \frac{\sum_{j=1}^m f_j}{\sum_{j=1}^m n_j} = M : N.$$

Per ottenere lo scarto quadratico medio empirico σ occorre, anzitutto, trovare i singoli scostamenti:

$$(N f_j : n_j - M) = \left(N f_j : n_j - N \sum_{j=1}^m f_j : \sum_{j=1}^m n_j \right)$$

e i loro quadrati:

$$\frac{N^2}{n_j^2} \left(f_j - n_j \sum_{j=1}^m f_j : \sum_{j=1}^m n_j \right)^2.$$

Ricordando la [3], si può scrivere più semplicemente:

$$\frac{N^2}{n_j^2} (f_j - n_j \circ p)^2.$$

La media di tali quadrati è la varianza della serie ponderata:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^m n_j} \sum_{j=1}^m n_j \frac{N^2}{n_j^2} (f_j - {}_0p)^2 ,$$

$$[4] \quad \sigma^2 = \frac{N^2}{\sum_{j=1}^m n_j} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} (f_j - n_j {}_0p)^2 .$$

Scrivendo:

$$[5] \quad \sigma^2 = \frac{N m}{\sum_{j=1}^m n_j} \cdot \frac{N}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} (f_j - n_j {}_0p)^2 ,$$

e chiamando F^2 il primo fattore del secondo membro, si ottiene la seguente espressione dello scarto quadratico medio empirico:

$$[6] \quad \sigma = F \sqrt{\frac{N}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j} (f_j - n_j {}_0p)^2} .$$

Basta ripetere i semplici calcoli necessari, per constatare che il fattore F entra anche nel calcolo dello scarto quadratico medio teorico (basato sulle probabilità empiriche ${}_0p$ e ${}_0q$) il quale, pertanto, assume la forma:

$$[7] \quad {}_0\mu = F \sqrt{N {}_0p {}_0q} .$$

Il calcolo di σ con la formula [5] è esatto, ma molto laborioso. Perciò, lo CHARLIER suggerisce di determinarlo in modo approssimativo

dallo scarto semplice medio S , ricordando la ben nota relazione teorica $\sigma : S = 1,2533$, che, però, vale solo per le distribuzioni normali:

$$S = \frac{1}{\sum_{j=1}^m n_j} \sum_{j=1}^m n_j \frac{N}{n_j} \left| f_j - n_j \cdot p \right| ,$$

$$S = \frac{N m}{\sum_{j=1}^m n_j} \cdot \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| f_j - n_j \cdot p \right| ,$$

e quindi:

$$[8] \quad S = F^2 \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \left| f_j - n_j \cdot p \right| .$$

Ottenuto S , si ricava subito il cercato valore approssimato di σ :

$$[9] \quad \sigma = 1,2533 S ,$$

che si confronterà con ${}_0\mu$ dato dalla formula [7].

La dispersione sarà giudicata normale quando sarà approssimativamente $\sigma = {}_0\mu$, e rispettivamente ipo- oppure ipernormale quando risulteranno significative le disequaglianze $\sigma \leqslant {}_0\mu$.

Il giudizio di significatività del quoziente di divergenza:

$$[10] \quad Q = \sigma : {}_0\mu ,$$

è sempre una questione arbitraria, e ci si può basare, sia sulla tavola delle probabilità di χ^2 , ricordando la relazione messa in luce da R. A. FISHER:

$$[11] \quad Q n = \chi^2 ,$$

sia sull'errore della quantità $(Q^2 - 1)$, cioè:

$$[12] \quad {}_0\mu = \sqrt{2 : m} .$$

Senonchè, non bisogna dimenticare, a questo riguardo, le minute e precise riserve formulate dal LEXIS, circa l'interpretazione da dare ai valori numerici del quoziente di divergenza, nè trascurare la critica rivolta in linea generale dal GINI alla teoria degli errori delle costanti statistiche.

3. -- Cominceremo il nostro studio dalla serie della tabella I, contenente i dati statistici ottenuti dallo stesso MENDEL, sperimentando

TABELLA I. — *Ripartizione delle modalità dominante (D) e recessiva (R) in F₂ dei monoibridi di pisello (dati di Mendel).*

Caratteri allelomorfi parentali 1	Frequenze nei discendenti delle modalità		Frequenze teoriche della modalità dominante	Scarti assoluti fra le col. 2 e 4
	D f_j 2	D + R n_j 3	${}_0p n_j$ 4	$ f_j - {}_0p n_j $ 5
Colore dei cotiledoni	6.022	8.023	6.009,11	18,89
Forma dei semi	5.474	7.324	5.485,57	11,57
Colore del rivestimento dei semi .	705	929	695,81	9,19
Forma del baccello maturo	882	1.181	884,55	2,55
Colore del baccello acerbo	428	580	434,41	6,41
Posizione dei fiori	651	858	642,62	8,38
Lunghezza dello stelo	787	1.064	796,93	9,93
<i>Totali</i>	14.949	19.959	14.949	66,92

$$m = 7 \quad N = 1000$$

$${}_0p = 14.949 : 19.959 = 0,749, \quad {}_0q = 1 - {}_0p = 0,251$$

$$F^2 = (100 \times 7) : 19.959 = 0,3507, \quad F = 0,5922$$

$$S = 0,3507 (66,92 : 7) = 3,3527$$

$$\sigma = 3,3527 \times 1,2588 = 4,2019$$

$${}_0\mu = 0,5922 \sqrt{1000 \times 0,749 \times 0,251} = 8,1191.$$

$$Q = 4,2019 : 8,1191 = 0,518.$$

su 7 caratteri con modalità opposte del pisello, e conteggiando le frequenze delle modalità dominante e recessiva nella seconda generazione ibrida.

Si ha $m=7$, $N=1000$. Il calcolo delle varie costanti di dispersione non presenta alcuna difficoltà, purchè si ricordino le cose dette nel precedente paragrafo e si seguano con cura le indicazioni scritte sotto la tabella. Si è trovato $\sigma=4,20$, ${}_0\mu=8,12$ e perciò $Q=0,52$. Contrariamente ad ogni attesa (*retro*, § 1) la dispersione non risulta nè normale nè supernormale, ma decisamente subnormale, rivelando così, senza possibilità di equivoco, l'azione di circostanze analoghe a quelle previste nello schema probabilistico di Poisson⁽¹⁾.

La serie della tabella II, riportata in tutti i trattati di Genetica, comprende la massa dei controlli eseguiti sulla legge della dominanza dal 1900 in poi, cioè dopo la riscoperta delle leggi mendeliane, sul carattere « colore dei cotiledoni » del pisello, unitamente ai risultati conseguiti dal MENDEL stesso, che figuravano già al primo posto nella serie della tabella I. La successione statistica della tabella II è, dunque, perfettamente omogenea rispetto al carattere considerato, ma i dati provengono da autori svariati e riguardano coltivazioni eseguite in paesi, in tempi e probabilmente anche con sementi di razze diverse.

Si ha questa volta $N=1000$, $m=15$. La dispersione risulta di nuovo fortemente iponormale. Abbiamo, infatti, $\sigma=1,2892$, ${}_0\mu=3,7114$ $Q=0,35$.

Appena si passa dal campo botanico a quello zoologico, i dati diventano molto meno ricchi ed omogenei. Per riunire serie abbastanza lunghe e basate su un materiale abbondante, mi sono limitato a tener conto delle esperienze che - iniziate dal nostro collega Accademico prof. CUÉNOT - furono proseguite per vari anni, da numerosi autori, sull'incrocio di varie specie di topolini. La tabella III raccoglie le frequenze delle modalità dominante e recessiva, nella discendenza degli incroci, secondo il colore della pelliccia. Si ha $N=1000$, $m=22$, ed ancora una volta lo scarto quadratico medio empirico $\sigma=27,24$ risulta inferiore a quello teorico ${}_0\mu=38,56$, onde il quoziente di divergenza rimane inferiore all'unità $Q=0,74$.

(¹) Cfr. M. BOLDRINI, *Sull'impiego investigativo dello schema probabilistico di Poisson*, in « Giornale degli Economisti », 1939.

TABELLA II. — Ripartizione dei piselli secondo il colore dei cotiledoni dominate giallo (D) e recessivo verde (R) in F_2 degli incroci $D \times R$.

Autori delle ricerche 1	Frequenze dei colori dei cotiledoni nei discendenti degli ibridi		Frequenze teoriche dei semi gialli $oP n_j$ 4	Scarti assoluti fra le col. 2 e 4 $ f_j - oP n_j $ 5
	giallo D f_j 2	giallo + verde D + R n_j 3		
MENDEL	6.022	8.023	6.025,09	3,09
CORRENS	1.394	1.847	1.387,06	6,94
TSCHERMAK	3.580	4.770	3.582,17	2,17
HURST	1.310	1.755	1.317,97	7,97
BATBSON	11.908	15.806	11.869,95	38,05
LOCK	1.438	1.952	1.465,91	27,91
DARBISHIRE	109.060	145.246	109.076,53	16,53
DARBISHIRE	1.089	1.443	1.083,66	5,34
WHITE	1.647	2.190	1.644,64	2,36
CORRENS	1.012	1.356	1.018,33	6,33
TSCHERMAK	3.000	3.959	2.973,12	26,88
LOCK	3.082	4.090	3.071,50	10,50
DARBISHIRE	5.662	7.518	5.645,85	16,15
CORRENS	225	295	221,54	3,46
LOCK	2.400	3.250	2.440,68	40,68
<i>Totali</i>	152.824	203.500	152.824,—	209,36
$m = 15, \quad N = 1000$ $oP = 152.824 : 203.500 = 0,751, \quad oQ = 1 - oP = 0,249$ $F^2 = (1000 \times 15) : 203.500 = 0,0737, \quad F = 0,2715$ $S = 0,0737 (209,36 : 15) = 1,02865$ $\sigma = 1,02865 \times 1,2533 = 1,2892$ $oP^2 = 0,2715 \sqrt{1000 \times 0,751 \times 0,249} = 3,7114$ $Q = 1,2892 : 3,7114 = 0,347$				

TABELLA III. — Ripartizione delle modalità dominante (D) e recessiva (R) in F_2 degli incroci di topolini, secondo il colore della pelliccia.

Autori delle ricerche	Frequenze dei colori della pelliccia nei discendenti degli ibridi		Frequenze teoriche della modalità dominante	Scarti assoluti fra lo col. 2 e 4
	D f_j 2	D + R n_j 3	${}_0p n_j$ 4	$ f_j - {}_0p n_j $ 5
1				
CUÉNOT	198	270	201,23	3,23
»	162	219	163,22	1,22
»	72	93	69,31	2,69
»	71	92	68,57	2,43
MISS DURHAM	54	65	48,44	5,56
»	42	59	43,97	1,97
»	90	117	87,20	2,80
»	50	63	46,95	3,05
»	25	31	23,10	1,90
»	46	63	46,95	0,95
»	81	117	87,20	6,20
»	99	126	93,91	5,09
»	23	29	21,61	1,39
»	30	38	28,32	1,68
»	45	61	45,46	0,46
»	25	35	26,08	1,08
»	330	454	336,36	8,36
»	349	474	353,27	4,27
»	216	285	212,41	3,59
»	38	54	40,25	2,25
»	19	21	18,63	0,37
PLATE	30	41	30,56	0,56
<i>Totali</i>	2.095	2.811	2.095,—	61,10

$$m = 22 \quad N = 1000$$

$${}_0p = 2095 : 2811 = 0,745, \quad {}_0q = 1 - {}_0p = 0,255$$

$$F^2 = (1000 \times 22) : 2811 = 7,8264, \quad E = 2,798$$

$$S = 7,8264 (61,10 : 22) = 21,7355$$

$$\sigma = 21,7355 \times 1,2533 = 27,24$$

$${}_0\mu = 2,798 \sqrt{1000 \times 0,745 \times 0,255} = 38,56$$

$$Q = 27,24 : 38,56 = 0,71$$

Infine, nella tabella IV sono state raccolte due serie, riguardanti entrambe il reincrocio di topolini eterozigoti con recessivi, sempre rispetto al colore della pelliccia. A differenza degli esempi precedenti,

TABELLA IV. — Ripartizione delle modalità dominante (D) e recessiva (R) nei discendenti di incroci fra topolini eterozigoti (DR) e recessivi (RR) secondo il colore della pelliccia (dati di Hagedoorn).

SERIE A				SERIE B			
Frequenze dei colori della pelliccia nei discendenti		Frequenze teoriche della modalità dominante	Scarti assoluti fra le colonne 1 e 3	Frequenze dei colori della pelliccia nei discendenti		Frequenze teoriche della modalità dominante	Scarti assoluti fra le colonne 5 e 7
D	D + R	$op n_j$	$ f_j - op n_j $	D	D + R	$op n_j$	$ f_j - op n_j $
f_j	n_j			f_j	n_j		
1	2	3	4	5	6	7	8
56	119	55,70	0,30	340	704	346,22	6,22
34	73	36,28	2,28	116	247	121,46	5,46
73	149	74,06	1,06	298	579	284,75	13,25
33	61	30,32	2,68	172	366	180,00	3,00
26	54	26,84	0,84	133	287	141,15	8,15
29	57	28,33	0,67	212	409	201,15	10,85
113	227	112,82	0,18	51	109	53,60	2,60
18	40	19,88	1,88	116	223	109,67	6,33
40	76	37,77	2,23	—	—	—	—
422	849	422	12,12	1438	2924	1438, —	60,86
$m = 9 \quad N = 1000$ $op = 422 : 849 = 0,497, \quad oq = 0,503$ $F^2 = (1000 \times 9) : 849 = 10,6007$ $F = 3,256$ $S = 10,6007 (12,12 : 9) = 14,2760$ $\sigma = 14,2760 \times 1,2533 = 17,89$ $\sigma^2 = 3,256 \sqrt{1000 \times 0,497 \times 0,503} = 51,48$ $Q = 17,89 : 51,48 = 0,35$				$m = 8 \quad N = 1000$ $op = 1438 : 2924 = 0,492, \quad oq = 0,508$ $F^2 = (1000 \times 8) : 2924 = 2,7360$ $F = 1,654$ $S = 2,7360 (60,86 : 8) = 20,8141$ $\sigma = 20,8141 \times 1,2533 = 26,09$ $\sigma^2 = 1,654 \sqrt{1000 \times 0,492 \times 0,508} = 26,12$ $Q = 26,09 : 26,12 = 1,00$			

in cui teoricamente i due allelomorfi avrebbero dovuto comparire rispettivamente in $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{4}$ dei casi, trattandosi ora di reincroci, le modalit  dominante e recessiva sono attese entrambe in parti uguali.

La serie A   formata da $m=9$ elementi. Ponendo ancora $N=1000$, risulta $\sigma=17,89$ e ${}_0\mu=51,48$, per modo che il quoziente di divergenza diventa $Q=0,85$.

Diverso comportamento si nota per la serie B, formata da $m=8$ termini. Adottando $N=1000$, abbiamo ottenuto $\sigma=26,09$ e ${}_0\mu=26,12$, e perci  $Q=1$.   questo, dunque, l'unico caso in cui, pur rimanendo lo scarto quadratico medio empirico inferiore a quello teorico, praticamente si pu  dire che il quoziente di divergenza conferma al cento per cento l'attesa teorica di dispersione normale⁽¹⁾.

4. - I risultati precedenti erano assolutamente inattesi, perch , delle tre possibili forme di dispersione, l'unica che non si prestasse ad una interpretazione preventiva era proprio quella iponormale, che appunto si   verificata. Siccome, perch , nella Scienza solo i fatti hanno ragione, noi non possiamo far altro che prendere nota dei risultati precedenti, ed aggiungerli all'elenco delle difficolt  che, come si   accennato nel § 1, non mancano nemmeno nei fenomeni pi  semplici della Genetica.

Se poi vogliamo avventurarci - come pare opportuno - in tentativi di spiegazione, possiamo farlo liberamente, tenendo perch  presente che, anche se potessero meritare critiche e suscitare dubbi, essi non infirmerebbero per questo i fatti riscontrati.

Si noti, intanto, che il reperto della dispersione iponormale si spiega solo pensando a probabilit  che rimangono uniformi dall'una all'altra massa d'osservazioni, ma variano in seno a ciascuna massa, per l'azione di forze compensatrici e regolatrici.   noto, ad esempio, che il fenomeno della mascolinit  delle nascite, osservato entro limiti

⁽¹⁾ Parmi utile segnalare a coloro che volessero continuare ed estendere anche ad altre specie e ad altri paradigmi ereditari i calcoli contenuti in questa Nota, l'opera di A. LANG, *Experimentelle Vererbungslehre in der Zoologie, seit 1900*, Jena, 1914, una specie di repertorio contenente molti dati. Di essa - ma non di essa soltanto - mi sono largamente servito. Non credo esista gi  pronta una raccolta analoga per la Botanica.

di tempo non troppo estesi, dà luogo a dispersione normale. Se però si elaborano in modo conveniente le nascite mensili della Sicilia, per una serie di anni, i rapporti di mascolinità presentano dispersione subnormale, a causa del regolare abusivo differimento al mese di gennaio della denuncia di molte nascite maschili, avvenute, in realtà, in dicembre e anche in novembre, ciò che produce alterazioni e compensi nelle probabilità empiriche, ripetentisi di anno in anno.

Nel caso della segregazione dei caratteri mendeliani, non si riesce a intuire nessun evento analogo nel meccanismo spontaneo del fenomeno, e perciò è il caso di chiedersi se esso non sia provocato da quella che possiamo chiamare in lato senso l'equazione personale dell'osservatore.

Cominciamo dal considerare le esperienze a cui si riferisce la tabella II. Si fece un gran discutere, nel primo novecento, dopo la riscoperta delle leggi di MENDEL, circa l'esistenza, o meno, nei discendenti degli ibridi, di una continuità di passaggi fra le modalità opposte dei vari caratteri. Tale intermediarietà era sostenuta dalla scuola biometrica, in particolare da PEARSON e da WELDON, i quali accettavano la teoria darwiniana dell'evoluzione, e ritenevano, quindi, che le varietà derivassero dalla trasformazione di masse di individui, per mezzo dell'accumulo di piccole differenze, soggette all'azione della cernita naturale. Per essi, dunque, l'esistenza, nei discendenti degli ibridi, di portatori di variazioni intermedie fra le modalità opposte ancestrali costituiva un anello importante nel loro sistema deduttivo, mentre sembrava contraddittorio il manifestarsi discontinuo degli attributi mendeliani.

Si poneva sul terreno genetico, opposto a quello dei biometristi, il BATESON, il quale, con esperimenti numerosi e variati, riuscì, insieme a Miss SAUNDERS, a provare che la così detta intermediarietà aveva origini e significati diversi, e, a suo giudizio, non costituiva nessuna contraddizione ai fatti e alle ipotesi di MENDEL.

Nella disputa, che si protrasse vivacissima per alcuni anni, uno degli argomenti sollevati dal WELDON, a favore della tesi dell'intermediarietà, era appunto basato sul colore dei cotiledoni del pisello. Il dotto naturalista e statistico, fra l'altro, acquistò sul mercato due partite di semi delle varietà *Telephone* e *Stratagem* (è noto che MENDEL non dava importanza alle razze madri su cui sperimentava) e fece ve-

dere che, già all'origine, si poteva riscontrare, nell'una e nell'altra, tutta una gamma di tinte dei cotiledoni, dal verde, al giallo, all'arancione. Con questo e con molti altri argomenti, egli ritenne di aver sollevato un dubbio grave contro la legge della segregazione⁽¹⁾.

Il BATESON rimase dapprima scosso dalle obiezioni del WELDON, ma, dopo ripetute esperienze, si convinse che la mistura e la gradazione dei colori era un fatto puramente fenotipico, dovuto alla esposizione del baccello alla luce e al sole. I semi verdi, infatti, a suo giudizio, scolorivano solo nella parte rivolta superiormente, ma la loro natura conservavasi eminentemente recessiva⁽²⁾.

Queste discussioni hanno perduto oggi completamente la loro attualità: la Genetica ha vinto le sue prove e, se anche è vero che talune interpretazioni date ai fatti ereditari dal BATESON sono state dovute abbandonare, nessuno oserebbe sostenere che, intorno al punto specifico della segregazione dei caratteri mendeliani, avesse un po' di ragione il suo avversario. Tuttavia, il contrasto di idee ora ricordato non ha soltanto un valore accademico, perchè esso dimostra che allora, come necessariamente anche oggi, non era affatto un'impresa facile e certa classificare i piselli discendenti dagli ibridi, secondo le due opposte categorie genotipiche di colore dei cotiledoni, giallo e verde.

5. - Torniamo, ora, alle costanti di dispersione delle serie statistiche esaminate nel §3, cominciando dalla tabella II, e domandiamoci come si possa spiegare il basso quoziente di divergenza trovato. È lecito presumere che, se la classificazione dei cotiledoni del pisello fosse stata affidata a persone del tutto inesperte, sulla scelta dei casi dubbi avrebbe largamente influito il caso. La variabilità della serie sarebbe risultata piuttosto forte, ma - supponendo che i criteri di scelta fossero rimasti immutati dall'uno all'altro gruppo d'osservazioni e ammettendo

(1) W. F. R. WELDON, *Mendel's Laws of Alternative Inheritance in Peas*, in « *Biometrika* », I, 1902, pag. 228-254. — ID., *On the Ambiguity of Mendel's Categories*, ibidem, II, 1902, pag. 44-55. — ID., *Mr. Bateson's Revisions of Mendel's Theory of Heredity*, ibidem, II, 1903, pag. 286-298.

(2) Vedi riassunti questi argomenti nell'opera: W. BATESON, *Mendel's Principles of Heredity*, Cambridge, 1913, pag. 235-244.

come vera la spiegazione di MENDEL -- la dispersione sarebbe apparsa normale. Viceversa, dato che le ricerche sono state condotte in luoghi, in tempi, da persone, con razze di semi spesso diversi, è più logico ammettere che gli individui inesperti incaricati della selezione avrebbero adottato criteri leggermente ineguali l'uno dall'altro. In tale ipotesi, con tutta probabilità la dispersione della serie sarebbe risultata ipernormale.

Ma la verità è diversa; la selezione dei colori venne eseguita da scienziati illustri, perfettamente consapevoli delle leggi di MENDEL. Perciò, sorge spontaneo il dubbio che, nel separare i cotiledoni gialli dai verdi (due colori già di per sé facili da confondere, data la tonalità con cui si presentano nel pisello) essi si siano lasciati alquanto influenzare dal preconcetto teorico. Convinti, come dovevano essere, della giustezza delle scoperte mendeliane, che assegnavano nella discendenza monoibrida degli eterozigoti $\frac{3}{4}$ alla modalità dominante (giallo) e $\frac{1}{4}$ a quella recessiva (verde), più o meno inconsciamente i vari sperimentatori regolarono forse la separazione dei colori, nei casi dubbi, in modo da conservare a ciascuno la proporzione prevista teoricamente. Di qui, la forte azione compensatrice, che il quoziente di divergenza $Q=0,35$ mette in piena luce.

Lo stesso ragionamento, con le variazioni del caso, si può ripetere relativamente alle ricerche intorno alla ereditarietà del colore della pelliccia nei topolini. Anche le tabelle III e IV rivelano una dispersione subnormale; ma i quozienti di divergenza sono compresi fra 0,35 e 1, rimanendo, quindi, generalmente superiori a quello calcolato nella tabella II. Si può dire, per questo, che la causa stabilizzatrice abbia agito meno fortemente sulle serie zoologiche che non sui risultati botanici della tabella II? Vi sono ragioni per rispondere col sì, mentre altre suggeriscono il no. Si noti che, il più delle volte, negli incroci veniva usato, come modalità recessiva, il colore albino, che è facile da identificare. Altre volte, però, trattavasi di incroci fra soggetti unicolori (D) e soggetti macchiati (R), o fra animali con pelliccia grigia (D) ed argentea (R), ecc., relativamente ai quali sono sempre possibili incertezze di classificazione. Vi è anche da temere che, nel caso del topo, a talune varietà recessive, si accompagni una certa letalità. Come si diceva nel § 1, ciò potrebbe creare una tendenza alla dispersione supernormale, che, anche quando sia piccola, facilmente

maschera e soverchia ogni contraria causa stabilizzatrice⁽¹⁾. Tutto considerato, è difficile giudicare se le esperienze zoologiche, i cui risultati si leggono nelle tabelle III e IV, furono meno influenzati dai preconcetti teorici, capaci di attenuare la dispersione, oppure se tale tendenza appare meno intensa perchè, insieme ad essa, agirono forze opposte, come ad esempio la letalità, che tendono invece ad esaltarla⁽²⁾.

6. - Tutto quanto precede è certamente sostenibile, fino a che si tratta delle ricerche eseguite nei primi anni del novecento, nell'ardore della riscoperta delle leggi dell'ereditarietà biologica, mentre aiuta assai meno per comprendere la dispersione subnormale della serie della tabella I, basata sulle esperienze dello stesso MENDEL, che non doveva avere al riguardo alcun preconcetto teorico.

Tuttavia, rileggendo la celebre memoria di lui, l'attenzione si concentra sul fatto che le esperienze sull'ibridismo dei piselli durarono otto anni, onde i primi reperti poterono con agio essere moltiplicati e controllati in varie generazioni successive. Si apprende inoltre che i caratteri forma del seme (liscia e rugosa) e colore dei cotiledoni (giallo e verde) « si sviluppano immediatamente dopo la fecondazione artificiale, per esclusiva influenza del polline estraneo. Perciò, essi possono essere osservati perfino nel primo anno di esperimento, mentre, come è naturale, tutti gli altri caratteri compariscono solo nell'anno seguente, nelle piante nate dal seme incrociato ». Più sotto, MENDEL,

(1) Vedine le ragioni teoriche nella mia memoria: *Sull'impiego investigativo dello schema ecc.*, cit.

(2) Il sospetto che un'influenza stabilizzatrice delle serie qui studiate possa derivare involontariamente dal preconcetto teorico degli sperimentatori trova appoggio nel fatto seguente. Il LANG (op. cit., pag. 511) dopo avere esposto a lungo le ricerche di miss DURHAM sull'ereditarietà del colore della pelliccia nei topi, così comincia un nuovo paragrafo: « Concludendo, miss DURHAM comunica anche un risultato dell'incrocio di topi grigi selvatici, eterozigoti rispetto al fattore della zonatura, e attendeva di riscontrare un rapporto mendeliano di 3:1 di animali grigi e neri. Essa, invece, ottenne 76 animali grigi contro 37 neri, ciò che non va d'accordo col rapporto 3:1 ». Dunque, almeno il LANG trovava ragionevole tener da parte questo risultato eccezionale, che avrebbe fatto salire la dispersione della serie formata dai soli risultati conformi.

descrivendo uno a uno i suoi risultati statistici, spiega ulteriormente: « I^a esperienza, forma del seme. Da 253 ibridi, si ottennero 7324 semi, nel secondo anno delle ricerche ». Si deve concludere da tutto ciò che forse molto presto, cioè fin dal primo o, al più tardi, dal secondo anno di lavoro, MENDEL poté stabilire le proporzioni in cui appaiono i due allelomorfi, nella generazione degli ibridi. Non vi è, dunque, nessuna impossibilità che questa conoscenza, raggiunta assai per tempo, abbia, in qualche modo, influenzato il suo giudizio per le classificazioni successive. Del resto, anche MENDEL incontrò e dovette superare le difficoltà classificatorie messe in luce 40 anni dopo dal WELDON. Quantunque egli avesse curato di scegliere, nelle sue esperienze di incrocio, caratteri con modalità ben differenziate, non sfuggì alla sua grande perspicacia il fatto che, in certe circostanze, i semi verdi tendono a sbiancarsi (il fenomeno disputato in seguito fra WELDON e BATESON); che, per quanto riguarda l'altezza, le piante eterozigote lussureggiano, raggiungendo quindi dimensioni superiori a quelle delle piante madri; che nelle colture, le piante nane soffrono dalla vicinanza delle giganti, e perciò occorre trapiantarle, allevandole a parte, ecc. Vi sono, dunque, da un lato l'influenza psicologica dei primi risultati, sul giudizio relativo ai successivi, dall'altro le inevitabili incertezze di classificazione, che possono spiegare, anche nel caso della serie di MENDEL, la dispersione subnormale della frequenza relativa delle modalità dominanti. Il quoziente di divergenza della serie della tabella I, alquanto superiore a quello calcolato sui dati della tabella II, supponendo esatta la spiegazione data, sembra dimostrare - come è logico - che MENDEL inconsciamente adattò i risultati sperimentali alle esigenze della teoria in misura minore di quanto non facessero quaranta anni dopo i suoi continuatori.

OSSERVAZIONI SULLA INNERVAZIONE
DEL SISTEMA DI CONNESSIONE SENO-ATRIALE
ED ATRIO-VENTRICOLARE
DEL CUORE DEI MAMMIFERI (*)

GIUSEPPE VERGA

SUMMARIVM. — Subtiliores partes innervationis motoriae ac sensitivae totius systematis connexionis cordis mammiferorum Auctor describit, ostendens tales adesse anatomicas notas, quibus reflexae reactionis evenire possint.

Riferendomi ad una mia precedente pubblicazione in collaborazione col PALUMBI sulla innervazione del nodo seno-atriale della talpa; ripeto qui soltanto riassuntivamente i dati bibliografici che avevamo esposti in quella pubblicazione e che riguardavano tutto il sistema di connessione cardiovettore in generale.

Risulta dalla bibliografia che: secondo alcuni l'innervazione del tessuto nodale non avrebbe nessun carattere distintivo rispetto a quella del comune miocardio: a tale conclusione pervengono infatti DE GAETANI 1911, MORISON 1912, HOLMES 1921, ecc.

Altri autori usando una tecnica più fine hanno constatato che il tessuto specifico è più riccamente dotato di strutture nervose che non il circostante miocardio (DE WITT 1909, ENGEL 1910, OPPENHEIMER 1912, LAWRENTJEW 1930, SCAGLIA 1927, PACE 1931, 1932, 1934, ARPINO 1932, 1934, CHIODI 1932 e 1936, VITALI 1937, e da ultimo ABRAHAM 1940).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Antonio Pensa nella Tornata dell'8 Giugno 1941.

Lavoro eseguito presso l'Istituto Anatomico della R. Università di Pavia.

Vi sono poi autori per i quali il tessuto specifico è non solo più ricco di strutture nervose che il circostante miocardio, ma è dotato di suoi particolari apparati nervosi (MEJKLEJOHN 1913, VITALI 1937, ecc.).

Infine altri autori, per la complessità d'innervazione del sistema specifico e per alcune sue caratteristiche morfologiche, sono giunti a paragonare l'apparato specifico ai fusi neuro-muscolari dei muscoli somatici (RETZER 1908, KEITH e MACKENZIE 1910, KENT 1914, VITALI 1937).

Altri invece negano decisamente questa interpretazione: principalmente vi si oppone il WILSON (1909) seguito da altri, pur annettendo al sistema il significato generale di organo neuro-muscolare.

Particolare rilievo meritano le notizie forniteci da alcuni dei ricercatori più recenti e che avendo ottenuti i reperti più fini hanno approfondito il problema dei rapporti fra fibre nervose e fibre muscolari specifiche del sistema di connessione.

SETO (1936) asserisce che nell'uomo tutte le fibre muscolari cardiache, tanto le comuni che le specifiche, vengono esclusivamente innervate per mezzo di reti terminali nervose, che nel cuore «non sembrano estese così fittamente come in altri tessuti... ma vi formano cordoni più o meno stretti» i quali, anastomizzandosi fra loro più volte, darebbero origine ad un plesso nervoso a maglie grossolane. Concorrerebbero alla formazione di questo reticolo terminale fibre simpatiche e vagali ed i prolungamenti di cellule nervose intramurali.

Nel fascio atrioventricolare si troverebbero molto più abbondanti che altrove fibre mieliniche molto grosse, di natura afferente o sensitiva. Inoltre le fibre muscolari specifiche «in modo spiccato e forse più riccamente che quelle comuni» sarebbero provviste di terminazioni sensitive. Riproduce a fig. 20, una di queste terminazioni che egli ascrive al secondo, fra i due tipi da lui riscontrati nel cuore; essa sarebbe rappresentata da numerose ramificazioni le quali, nella zona recettoria, terminerebbero liberamente.

VITALI (1936) ha riscontrato che ciascuna fibra del Purkinje, in *Ovis Aries*, sarebbe rivestita da una rete nervosa da cui partirebbero ramificazioni penetranti, non solo fra le cellule di cui la fibra risulta composta, ma anche nel citoplasma di tali cellule. Pertanto egli è propenso a ritenere che «l'apparato nervoso sopra descritto (nel quale le fibre del Purkinje esplicano una funzione analoga a quelle delle fibre muscolari del fascetto di WEISSMANN dei fusi neuro muscolari dei

muscoli volontari) sia un apparato neuro-muscolare di natura afferente».

Interessante da parte del ABRAHAM è la critica al « terminal - reticulum «di Seto» i cui disegni - egli dice - sono molto belli tecnicamente ma probabilmente rappresentano fatti completati con un po' di fantasia».

Infatti allo stesso ABRAHAM molte formazioni che ad un primo esame erano sembrate reticoli terminali, ad un più scrupoloso esame con ingrandimenti fino a 2400 diametri si manifestarono formate non da fibre anastomizzate, ma da fibre decorrenti su piani differenti l'una sopra dell'altra: risultandone plessi straordinariamente fini di tenni fibrille.

Riguardo al problema ancora aperto del modo di terminare delle fibre intracardiache, ABRAHAM reputa che vi debbano essere terminazioni, come del resto è stato dimostrato dalla fisiologia e dalla farmacologia.

Nell'epicardio e nell'endocardio della zona del seno ha visto anche espansioni sensitive.

Pur senza essere in grado di prendere una posizione riguardo alla natura della funzione del tessuto nodale ritiene che la ricchezza di nervi della regione stessa non depona certo in favore della teoria miogena della conduzione dello stimolo.

La questione tanto dibattuta trovavasi a questo punto quando io e PALUMBI, in collaborazione, riprendemmo a studiare con fini metodi tecnici l'innervazione del nodo seno atriale della talpa la cui particolare ricchezza aveva già colpito l'attenzione di altri ricercatori. Le nostre ricerche portarono ai seguenti risultati:

1°) che al nodo del seno della talpa è annesso un ganglio e che questo ganglio è di natura simpatica;

2°) che al complesso rappresentato dal ganglio e dal nodo del seno giunge un ramo nervoso del plesso cardiaco costituito da fibre presumibilmente del nervo vago ed altre ortosimpatiche;

3°) che le fibre ortosimpatiche formano prevalentemente i plessi perivasali;

4°) che le fibre del vago in parte sono fibre pregangliari che si mettono in rapporto per mezzo di sinapsi neurosomatiche con le cellule del ganglio; in parte si distribuiscono largamente e direttamente nella compagine del nodo;

5°) che queste ultime fibre molto numerose e variamente disposte formano nel nodo un fittissimo plesso compenetrante il tessuto musco-

lare specifico di esso e che si risolvono negli interstizii fra le fibre muscolari del nodo ed anche intorno a queste in grovigli terminali assai intricati e bizzarri. Non esitammo a ritenere che questi grovigli costituiscono nel loro insieme un sistema espansionale periferico sensitivo che in qualche dettaglio ricorda il comportamento delle fibre nervose di alcuni corpuscoli terminali di senso (di quelli di WAGNER-MEISSNER, di quelli di KRAUSE-DOGIEL, dei corpuscoli dei RUFFINI, dei fusi neuro-muscolari) non però mai, come in questi, individuati in formazioni separate e distinte e tanto meno incapsulati;

6°) io ed il PALUMBI abbiamo anche chiaramente dimostrato che le fibre post-gangliari, che corrispondono ai neuriti delle cellule del ganglio annesso al nodo, si distribuiscono finemente anch'esse nel nodo e si mettono in stretto rapporto con le fibre muscolari. Le abbiamo interpretate come fibre eccitomotrici;

7°) altre fibre fini che si riducono a cilindrassi nudi formano plessi perivasali e furono da noi interpretate come fibre vasomotrici di natura ortosimpatica.

Prendendo come punto di partenza i risultati già da me ottenuti in collaborazione col PALUMBI riguardo alla innervazione del nodo senoatriale della talpa, ho riconfermato col corredo di nuove preparazioni i risultati ottenuti ed ho potuto mettere in evidenza nuove particolarità di dettaglio. Ma soprattutto ho esteso le ricerche a tutto il sistema cardiovettore della stessa talpa ed inoltre a tutto il sistema cardiovettore di altri mammiferi (bue, vitello, cane, riccio, ratto), prendendo in esame quindi anche il nodo di Tawara ed il fascio di His.

Oltre ai metodi comuni per l'allestimento di preparati di orientamento (ematossilina-eosina, MALLORY) ho usato altre tecniche particolarmente adatte per la differenziazione del sistema nervoso, quali il metodo della reazione nera di GOLGI, il metodo fotografico di CAJAL e quello al cloruro d'oro di RUFFINI. Ma a tali metodi, per la loro incostanza e spesso per la loro incompletezza, ho quasi sempre preferito il metodo di BIELSCHOWSKI nella modificazione PALUMBI, che mi ha permesso di ottenere risultati soddisfacenti nei vari animali.

Come materiale di ricerca mi sono servito di cuori di animali di grossa mole (vitello, bue, cane) e di animali più piccoli (ratto, talpa, riccio).

Nei primi ho proceduto all'isolamento, con la dissezione macroscopica, di lunghi tratti di apparato specifico (branche del fascio di His, nodi di Keith e Flack, di Tawara) che poi ho sottoposto ad una pronta fissazione dividendoli in numerosi frammenti di minori dimensioni.

Pur non avendo trascurato questo materiale ho preferito quello fornito da animali di piccola mole. Innanzi tutto per la facilità di poter disporre di un numero notevole di cuori e di poter così ottenere preparati migliori, secondo sezioni orientate nei diversi piani. Riesce così più facile controllare ripetutamente alcuni reperti e sorprenderne altri che, per meno favorevole orientamento dei piani di sezione, avrebbero potuto sfuggire all'osservazione (ad esempio le connessioni nervose tra gangli e nodi, alcune espansioni che solo in certe sezioni appaiono complete).

Inoltre negli animali di piccole dimensioni, come già ha osservato il CHIODI, il tessuto specifico rappresenta un settore del miocardio proporzionalmente più sviluppato che non negli animali di maggior mole.

Riguardo alla innervazione del nodo seno atriale della talpa ho ottenuto nuovi particolari strutturali anche più fini e completi di quelli già descritti nella nota precedente; ma nel complesso non posso che confermare quanto è stato da me affermato in collaborazione del PALUMBI e cioè che:

« I fatti che abbiamo messo in evidenza ci forniscono una documentazione morfologica abbastanza esauriente per confermare ed appoggiare il concetto che il nodo seno atriale sia un organo neuro-muscolare sensitivo motore, e che dal punto di vista funzionale ed anche per qualche somiglianza morfologica delle espansioni periferiche recettrici, l'analogia con l'apparato sensitivo motore della muscolatura somatica consistente nei così detti fusi neuro-muscolari non può non deve essere esclusa.

» Nell'uno e nell'altro caso abbiamo, in seno ad un organo muscolare (muscolo somatico in un caso, miocardio nell'altro), distinti settori di tessuto muscolare, che hanno caratteri particolari e che, oltre ad una innervazione motrice, sono provveduti anche di una cospicua innervazione sensitiva specificamente differenziata.

» Anche se le differenze fra apparecchio neuro-muscolare nodale ed apparecchio neuro-muscolare dei fusi sono abbastanza salienti

» non sono però sostanziali e del resto trovano, in parte almeno, spiegazione in quanto sono riferibili alla diversità morfologica e funzionale della muscolatura innervata e dalla diversa natura (nevrassiale e simpatica) della loro innervazione motrice.

» Infatti, se consideriamo il substrato muscolare, è evidente la più netta e demarcata individualità che hanno i fusi disseminati nei muscoli somatici in confronto al tessuto muscolare del nodo che si continua con il resto del sistema cardiovettoe e col comune tessuto miocardico. In rapporto a ciò anche le espansioni sensitive periferiche del nodo sono estese e diffuse a tutto l'organo invece di avere quel tipico, circoscritto carattere di individualità terminale che hanno le fibre sensitive dei fusi.

» Riguardo poi alla innervazione motrice, intercorre fra fusi e nodo la stessa differenza che intercorre fra tessuto muscolare striato somatico e tessuto miocardico; le fibre muscolari dei fusi sono innervate da fibre motrici di origine nevrassiale che terminano con le tipiche placchette terminali; invece al nodo, come al resto del miocardio, si distribuiscono a rete fini fibre simpatiche che traggono la loro origine dalle cellule di gangli simpatici, uno dei quali, nel caso speciale del nodo del seno della talpa, è intimamente connesso col nodo stesso tanto da risultarne un complesso caratteristico nodogangliare. La via motrice destinata ai fusi della muscolatura somatica proviene direttamente dal nevrasse; quella destinata al nodo è invece interrotta lungo il suo decorso dalla presenza di un ganglio simpatico. È appunto nel ganglio annesso al nodo che abbiamo messo in evidenza quelle caratteristiche sinapsi fra fibre pregangliari del vago e cellule nervose che abbiamo descritte ».

Ora con le mie nuove osservazioni sono giunto ad analoghe conclusioni anche, per quanto si riferisce all'innervazione del nodo atrio-ventricolare di « Talpa europea ». Infatti anche nel nodo atrio-ventricolare ho potuto distinguere:

a) una parte effettrice costituita da fibre vagali pregangliari che contraggono sinapsi con le cellule nervose dei gangli simpatici che al nodo sono addossati; e da fibre post-gangliari che si distribuiscono variamente alle fibre muscolari specifiche del nodo. All'innervazione del nodo atrio-ventricolare appartengono anche fibre or-

tosimpatiche, vasomotrici, provenienti probabilmente dai gangli della catena;

b) una parte afferente recettrice costituita da fibre vagali che nel nodo danno luogo ad espansioni terminali che non sono individualizzate in formazioni separate, ma compenetrano diffusamente ed estesamente la trama muscolare nodale.

Nel fascio di His della talpa ho potuto osservare fibre probabilmente simpatiche formanti un plesso a larghe maglie a ridosso della muscolatura specifica; e fibre cerebro spinali che terminano con particolari espansioni terminali caratteristiche, sulla superficie di tali fibre muscolari.

Anche nel nodo di Tawara di ratto ho potuto distinguere fibre grosse mieliniche molto verosimilmente appartenenti al vago che costituiscono con le loro più fini espansioni un apparato sensitivo diffuso in tutto l'ambito nodale; e fibre nervose post-gangliari provenienti dai gangli annessi al nodo a funzione eccitomotrice.

Nel ratto, a differenza della talpa, anzichè un grosso ammasso gangliare simpatico addossato alla superficie del nodo, si hanno molti piccoli ganglietti e talora anche singole cellule nervose simpatiche sparse nell'interno del nodo.

Inoltre nel connettivo che sta immediatamente vicino al nodo ho potuto dimostrare speciali espansioni a gomitolato, tipo MEISSNER, di notevoli dimensioni.

Nel riccio il tessuto nodale (nodo di Tawara) è fornito di un ricco contingente nervoso che però non raggiunge l'enorme ricchezza di fibre nervose che si riscontra nei nodi della talpa.

Anche qui si hanno:

a) fibre simpatiche post-gangliari provenienti da gangli più o meno vicini al nodo stesso. Tali fibre costituiscono l'innervazione motrice del tessuto nodale;

b) fibre grosse probabilmente vagali che con il loro comportamento danno luogo ad un intreccio che ricorda, a parte differenze non sostanziali, quello espansionale descritto nei nodi della talpa.

Tali fibre poi in alcuni punti del tessuto nodale, danno luogo ad evidenti espansioni lamellari appiattite del tutto caratteristiche.

Nel loro complesso tutte le fibre di questa seconda categoria (b), costituiscono l'innervazione sensitiva del tessuto nodale.

Nel cane, nell'immediata vicinanza e talvolta anche nel mezzo del tessuto specifico (nodo di Tawara e fascio di His) ho osservato numerosi gangli nettamente simpatici ed evidenti plessi perivasali. Nel tessuto specifico del cane è poi visibile un fitto intreccio di fibre simpatiche e di fibre cerebro-spinali: queste ultime con il loro comportamento sembrano costituire un apparato nervoso, paragonabile a quello descritto per la talpa e perciò secondo me da ritenere quale apparato sensitivo diffuso nella trama nodale. Particolarmente ricca di fibre nervose appare nel cane la cosiddetta regione del seno (Sinus-gegend).

Infine nel fascio di His di vitello e di bue ho potuto dimostrare un enorme quantità di fibre nervose che raccolte in grossi fasci decorrono parallelamente ai cordoni degli elementi del Purkinje. Alcune fibre le più fini ed apparentemente amieliniche, sono di natura probabilmente simpatica e formano a ridosso delle fibre muscolari un intreccio a larghe maglie; altre più grosse con grosso manicotto mielinico sono di carattere cerebro-spinale ed appartengono con tutta probabilità al vago. Esse, dopo un decorso più o meno flessuoso e tortuoso, danno luogo nel connettivo intermuscolare del fascio a particolari groviglietti che hanno l'aspetto di terminazioni sensitive; talvolta poi danno luogo a vere espansioni capsulate e formanti quindi ben circoscritti ed individualizzati corpuscoli terminali alcuni dei quali non dissimili da quelli veduti dallo SCAGLIA.

Curioso e di significato non chiaro mi è risultato il fatto che né le fibre dell'una né quelle dell'altra categoria hanno il carattere di quelle espansioni che il VITALI ha descritto come nervose nel fascio di His del montone. Ad ogni modo, a differenza del VITALI, non ho mai potuto constatare la penetrazione di fibre nervose nell'interno delle cellule del Purkinje.

Pertanto, dalle mie attuali ricerche compiute ad integrazione di quanto avevo già notato in collaborazione col PALUMBI nel nodo seno-atriale della talpa; credo che si possa affermare che in tutto il sistema di connessione del miocardio, almeno dei mammiferi da me studiati (talpa, riccio, ratto, cane, bue, vitello) vi è un piano fondamentale di innervazione uniforme e costante costituito:

1°) da una parte effettrice di natura para-simpatica rappresentata da fibre pregangliari del vago; da gangli simpatici, in stretto rapporto col tessuto cardio vettore, che possono essere variamente disposti,

ma che sono costanti; da fibre post-gangliari che hanno ampia distribuzione e intime connessioni con gli elementi muscolari specifici del sistema;

2°) da un contingente di fibre vasomotrici con tutta probabilità ortosimpatiche;

3°) da una cospicua innervazione recettrice formata da fibre sensitive del vago.

Ho potuto poi dimostrare che, oltre alle espansioni sensitive diffuse nel complesso muscolare del sistema cardiovettore, si possono incontrare in alcuni settori del sistema stesso e in alcuni mammiferi (riccio, ratto, bue) anche espansioni terminali più differenziate ed individualizzate, alcune delle quali anche capsulate in modo da costituire veri corpuscoli di senso di vario tipo. Anche questi nuovi dati dimostrano chiaramente che in tutto il sistema vi sono morfologicamente tutti gli elementi per consentire l'istituirsi di riflessi; e non è da escludersi che i vari tipi di espansioni terminali sensitive siano l'espressione morfologica di riflessi di varia natura.

DI ALCUNE RECENTI MEDIE (*)

PIETRO MARTINOTTI

SUMMARIVM. — Opportune descriptis variis rationibus quibus medius numerus supputari solet, auctor novarum mediarum trigonometricarum duo affert exempla, demonstrans quam commoda sit methodus relationis ad functionem, qua methodo illae mediae computatae sunt.

DUE PROBLEMI DELLE MEDIE SOGGETTIVE

1) I molteplici punti di vista dai quali la Statistica teorica esamina genericamente le medie soggettive di un gruppo di dati, si possono ridurre a due soli, quando questo esame viene limitato, come ora si intende di fare, alla sola parte matematica; ad essi corrispondono i seguenti problemi fondamentali:

la determinazione di medie, quali espressioni matematiche di operazioni da eseguire sui dati;

la scelta del tipo più opportuno di media per ogni singolo caso pratico.

Di questi il secondo entra necessariamente nel campo concreto, e può trascinarvi una parte più o meno grande del primo, a seconda del maggiore o minor legame fra essi esistente.

Col proposito di fornire nuovi elementi di valutazione dei pregi e difetti dei diversi modi di concepire una media, tenendo conto di alcuni suoi tipi, recentemente aggiuntisi a quelli che hanno già for-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Marcello Boldrini nella Tornata dell'8 giugno 1941.

mato oggetto di analoghe considerazioni ⁽¹⁾, e coordinando questi con i nuovi, si ritiene opportuno stabilire una classificazione dell'insieme delle più note espressioni matematiche di medie.

Sul comportamento di queste rispetto ai predetti problemi fonderà la classificazione stessa, e da questa, inoltre, si potranno indurre alcuni ulteriori sviluppi dell'importante e vasto campo di ricerche.

Il primo problema

2) È noto che le classiche medie

aritmetica
 quadratica
 geometrica
 armonica

sia semplici che ponderate, di n dati a_1, a_2, \dots, a_n , sono comprese come casi particolari nell'unico tipo di media m_k d'ordine k :

$$m_k = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i^k}{\sum_{i=1}^n p_i}}$$

corrispondentemente ai casi di $k = 1, 2, 0, \dots, -1$.

Medie ponderate aritmetiche, geometriche ed armoniche, i cui pesi p siano particolarmente espressi da:

$$p_i = \binom{n-i+h-1}{h-1} \quad \text{oppure} \quad \binom{i+h-1}{h-1}$$

⁽¹⁾ La presente nota è un complemento di *Estensioni nel concetto di media*. « Giornale degli Economisti » e « Annali di Economia », Cedam, Padova, 1939-xvii, ove è contenuta la breve bibliografia dell'argomento. Pubblicazioni successive a questa, e che hanno dato motivo alla presente, sono:

E. PIZZARRI, *Medie ascendenti e medie discendenti*, Supplemento statistico, Ferrara, 1939-xvii. « Metron », Vol. XIV. Roma, A. Pratelli 1940-xviii. — G. ZAPPA, *Osservazioni sulle medie combinatorie*, idem; *Sulle medie trigonometriche*, idem.

ove h può essere un intero qualunque, hanno formato oggetto di particolare studio, sotto la denominazione di « ascendenti o discendenti d'ordine h » perchè ottenibili anche con particolari operazioni procedenti in ordine inverso sui dati.

Un gruppo di medie più complesse delle m_k , e che le comprende in particolare, è quello delle così dette medie « combinatorie ». La loro formula è deducibile da quella delle m_k , sostituendo ai semplici termini $p_i a_i^k, p_i$ delle somme ivi contenute, i prodotti di un numero c di analoghi fattori

$$p_i a_i^k p_j a_j^k \dots p_s a_s^k, \quad p_i p_j \dots p_s$$

le successioni di tali fattori essendo formate da tutte le combinazioni, sia semplici che con ripetizione, c a c degli n dati: all'indice di radice k va conseguentemente sostituito ck .

Più generalmente si sono costruite medie combinatorie con la radice $(ck - dh)^{esima}$ del quoziente di una frazione identica a quella risultante dalle predette sostituzioni, per un'altra simile, formata con le combinazioni d a d delle potenze h^e dei dati moltiplicati per i rispettivi pesi.

Si hanno inoltre le « medie trigonometriche » comprendenti la « media-seno » e la « media-coseno », che sono valori aventi per seno e per coseno rispettivamente le semplici medie aritmetiche dei seni e dei coseni dei dati.

Se dal complesso di queste varie espressioni si volesse indurre una più generale e comprensiva definizione, osservando che in esse sono sostanzialmente contenute varie operazioni algebriche applicate a funzioni - potenziali e logaritmiche - dei dati, si perverrebbe all'arida conclusione simbolicamente rappresentata da

$$m = F [f(a_1), f(a_2) \dots f(a_n)]$$

e che precederebbe di poco l'affermare che quale media si possa assumere una funzione dei dati, con l'unica condizione che non evada l'intervallo di questi.

Una classe ben distinta dalle precedenti è quella delle medie « riferite ad una prefissata funzione dei dati ». Nella loro definizione è contenuta la condizione essenziale che questa funzione $\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)$ deve rimanere invariata quando i dati vengono sostituiti dalla loro media, di guisa che questa condizione si traduce nell'equazione

$$\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n) = \varphi(m, m, \dots, m)$$

risolventesi nella media m .

È già stato dimostrato come a questa forma siano adattabili tutte quante le medie passate prima in rassegna.

Dal punto di vista puramente matematico questa definizione va sostanzialmente distinta dalle precedenti, perchè sostituisce alla presentazione diretta di un determinato tipo di media, la sua indiretta deduzione da una conveniente equazione. È questo è lo stesso procedimento che, alla fin fine, si segue nel dimostrare alcune proprietà - generalmente quelle di render massime o minime particolari grandezze - attribuibili alle più note medie; si traducono, infatti, dette proprietà in equazioni che in queste medie si risolvono.

Sinchè nella equazione indicata viene lasciata indeterminata la funzione φ , e se anche si pensa di sottoporre i dati e la loro media a condizioni differenti da quella particolare proprietà invariante della φ , si dovrebbe ammettere che contro la lamentata indeterminazione delle definizioni dirette non si sia recato il minimo contributo.

Il secondo problema

3) Ma un giudizio ben diverso viene imposto dal necessario coordinamento dei due premessi problemi, il primo dei quali, soltanto, è stato preso sinora in considerazione.

È noto infatti che, mentre il riferimento ad una funzione è stato suggerito, sin dalla sua origine, dall'intendimento principale di inserire nel concetto di media un legame con le varie circostanze concrete che su la grandezza, cui i dati si riferiscono, possono influire, nulla di simile e nessun proposito analogamente concepito, sia pure in diverso senso, accompagna le dirette ricerche di medie.

Può bastare questa constatazione ad elevare notevolmente il livello della prima definizione sulle seconde; nè si vede come, data la conseguente inferiorità di queste, possano meritare interesse le laboriose ricerche di proprietà matematiche, alle quali esse sono state sottoposte.

Tale constatazione è venuta rafforzandosi per altre considerazioni, illustrate con una certa profusione di esempi, in seguito ai quali si è stati anche indotti ad ampliare il primitivo riferimento a funzioni.

Essenzialmente va rilevato l'ufficio di queste funzioni di rappresentare quantità dalle quali i dati dipendono, e la conseguente opportunità di attribuire ad un unico gruppo di dati, medie distinte per la loro specifica relatività.

Da questi rilievi si è ora tratti ad ammettere che, a maggior ragione, una distinzione fra medie di un medesimo gruppo di dati possa provenire da un semplice cambiamento nell'ordine di questi.

Che ciò si verifichi in un numero di casi maggiori di quello che potrebbe a tutta prima sembrare, è constatabile sotto entrambi i nostri punti di vista.

Matematicamente la dipendenza, o meno, della media dall'ordine dei dati si traduce nella condizione che le funzioni F e φ abbiano forma asimmetrica, o simmetrica, rispetto alle loro variabili, vale a dire ai dati. Ora è evidente che, se questi sono considerati separatamente dai rispettivi pesi, ogni espressione di medie ponderate è asimmetrica. La simmetria viene bensì acquistata, generalmente, dai prodotti dei dati per i relativi pesi. Di modo che non è necessario salire alle più moderne forme di medie, per incontrare casi nei quali queste possono mutare se i dati vengono variamente ordinati.

Si comprende che sinchè i pesi esprimono i numeri di dati fra loro uguali, la loro separazione da questi non è concepibile, ma sono pur frequenti i casi concreti nei quali la ponderazione è suggerita da altri criteri. È bene spesso il valore di ogni singolo peso è determinato appunto dal posto che occupa il dato corrispondente nel gruppo - naturalmente o convenzionalmente ordinato - cui appartiene.

Una stima del risultato finale di una classe di 30 alunni della nuova scuola media dipende necessariamente dalla graduale loro ripartizione nelle 5 categorie secondo le quali essi vengono a fine d'anno classificati, chè troppo prevedibile ed insignificante sarebbe la considerazione della media di 6 alunni per categoria.

Analogamente un'azienda avente gli operai suddivisi in più categorie diversamente retribuite, ha ragioni economiche e tecniche di tener conto, nel formare le medie annuali delle presenze per categorie, della graduatoria di queste.

Una banca che deve effettuare contemporaneamente diversi pagamenti, è ammissibile che ne calcoli un valor medio unico, comunque vengano ordinati; ma se essi devono avere scadenze differenti, non si può fare a meno del computo degli interessi; quel valor medio converrà riferirlo, ad esempio, al montante dei pagamenti tutti, e se vi sarà libertà di scelta, sarà preferibile quell'ordine di scadenze che darà un montante, e quindi un valor medio, minimo.

Da ciò emerge come la relatività della media all'ordine dei dati in taluni casi si renda necessaria, in altri solo opportuna, e superflua in altri; emerge pure come la stessa relatività acquisti maggior significato e mezzo di calcolo se accoppiata a quella che assume una funzione come elemento di riferimento.

Due esempi

4) Si ritiene ora opportuno svolgere in pieno due casi nei quali le medie trigonometriche, rimaste sinora prive di esemplificazioni, vengono dedotte da riferimenti a funzioni.

Sia un sistema piano di n forze f_i applicate ad un punto materiale, e formanti con una direzione fissa gli angoli α_i .

Lungo questa direzione siano s_i gli spazi percorsi da quel punto nei tempi t_i , sotto la sola azione di ogni singola forza.

Delle diverse direzioni di queste, può essere riguardata come media rispetto alla risultante delle forze stesse, quella che, se fosse comune a queste, darebbe una componente, nella direzione del moto, uguale alla somma delle componenti delle forze date.

Tale direzione media dovrà formare con quella del movimento un angolo α tale che sia:

$$\sum_{i=1}^n f_i \cos. \alpha_i = \cos. \alpha \sum_{i=1}^n f_i$$

ed è:

$$\alpha = \text{arc. cos.} \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cos. \alpha_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Si noti che quest'angolo va distinto da quello che determina la direzione della risultante, e che è dato da

$$\text{arc. cos.} \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cos. \alpha_i}{F}$$

se con F si intende l'intensità di detta risultante, la quale è notoriamente diversa da $\sum_{i=1}^n f_i$.

Si può considerare, invece, la direzione media rispetto al lavoro complessivamente compiuto dal sistema di forze, la quale media, essendo riferita alla funzione degli angoli α_i :

$$\sum_{i=1}^n f_i s_i \cos. \alpha_i$$

risulta determinata dall'

$$\text{arc. cos.} \frac{\sum_{i=1}^n f_i s_i \cos. \alpha_i}{\sum_{i=1}^n f_i s_i}$$

Ed analogamente, rispetto alla potenza del sistema, espressa dalla funzione

$$\sum_{i=1}^n \frac{f_i s_i \cos. \alpha_i}{t_i}$$

si ha la media:

$$\text{arc. COS.} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{f_i s_i \text{COS. } \alpha_i}{t_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i s_i}{t_i}}$$

Sono quattro casi di media-coseno ponderata di un medesimo gruppo di dati, dai quali sono da attendere valori numerici diversi, perchè affetti da pesi differenti.

Quest'altro esempio riguarda il caso di una media-seno di una distribuzione continua di dati.

Una sorgente luminosa situata ad una altezza h in un locale, illumina una striscia di larghezza l , disposta sul pavimento nella direzione dei raggi, di lunghezza ed a distanza della sorgente, tali che i raggi incidenti agli estremi della striscia siano inclinati degli angoli α , β sul pavimento.

Se I è l'intensità della sorgente, l'illuminazione della striscia in un punto nel quale i raggi presentano l'inclinazione α , e per un tratto dx , è:

$$\frac{lI \text{sen. } \alpha}{\left(\frac{h}{\text{sen. } \alpha}\right)^2} dx = \frac{lI \text{sen.}^3 \alpha}{h^2} dx$$

Quindi l'illuminazione dell'intera striscia sarà:

$$\frac{lI}{h^2} \int_a^\beta \text{sen.}^3 \alpha dx = \frac{lI}{h^2} \left\{ \cos. \alpha - \cos. \beta - \frac{1}{3} (\cos.^3 \alpha - \cos.^3 \beta) \right\}$$

L'inclinazione media γ , alla quale la stessa striscia, disposta di traverso, verrà in ugual misura ed uniformemente illuminata, sarà tale da uguagliare la precedente illuminazione alla

$$\frac{lI \text{sen.}^3 \gamma}{h^2}$$

e quindi:

$$\gamma = \text{arc. sen.} \sqrt[3]{\cos. \alpha - \cos. \beta - \frac{1}{3} (\cos.^3 \alpha - \cos.^3 \beta)}$$

risultando ad una distanza dal piede della sorgente uguale a

$$h \frac{\sqrt{1 - \left\{ \cos. \alpha - \cos. \beta - \frac{1}{3} (\cos.^3 \alpha - \cos.^3 \beta) \right\}^2}}{\sqrt[3]{\cos. \alpha - \cos. \beta - \frac{1}{3} (\cos.^3 \alpha - \cos.^3 \beta)}}$$

Meno facilmente si possono trovare esempi di questo genere tra i fenomeni sociali, per la strana penuria d'impiego delle funzioni trigonometriche, che finora vi si incontra.

Riguardo ai precedenti esempi, come per altri simili appartenenti alla Fisica, si può obbiettare che vi prevale la risoluzione di un problema di equivalenza negli effetti prodotti da un valore unico che si vuol sostituire ai dati, sicchè l'attribuzione a questo valore del titolo di media diviene più convenzionale che essenziale. Ma ciò induce solo a riconoscere l'esistenza di una certa gerarchia nel diritto a quel titolo, senza intaccare la validità del metodo per i gradi più elevati, i quali costituiscono una notevole maggioranza delle medie relative, come appare ugualmente affermabile per queste, nel vasto campo delle medie soggettive.

SUR LES INVARIANTS DE CONTACT EN GEOMETRIE PROJECTIVE DIFFERENTIELLE (*)

SHIING-SHEN CHERN

SUMMARIVM. — Auctor demonstrat quomodo Cartanica methodus, quae vocatur « du repère mobile », quaestionibus invariantia contactus varietatum tangentium respicientibus applicari possit.

INTRODUCTION

On connaît la fécondité de la méthode du repère mobile⁽¹⁾ de M. E. CARTAN pour étudier les questions diverses dans la géométrie projective différentielle. L'étude faite par M. CARTAN lui-même de la déformation projective des surfaces⁽²⁾ fournit un exemple célèbre. Le but de cette Note est de montrer comment cette méthode s'applique à des questions concernant les invariants de contact des variétés tangentes.

§ 1. LES INVARIANTS DE CONTACT DES COURBES PLANES. — Commençons par considérer le cas le plus simple, c'est la géométrie différentielle projective des courbes planes⁽³⁾. Le repère projectif dans le

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 27 giugno 1941.

(1) On trouve les généralités de cette méthode et quelques-unes de ses applications dans le livre: E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repère mobile*. Paris, 1937.

(2) Voir CARTAN, *Sur la déformation projective des surfaces*, « Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, série 3, t. 37 (1920), pp. 259-356.

(3) Voir CARTAN, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*. Paris, 1936, spécialement pag. 91-111. Ce livre sera cité dans le suivant comme: CARTAN, *Connexion projective*.

plan se compose de trois points *analytiques* linéairement indépendants A, A_1, A_2 , définis à un facteur commun près. Une famille de repères étant donnée, elle satisfait aux *équations du déplacement infinitesimal* de la forme

$$\begin{aligned}
 [1] \quad dA &= \omega_0^0 A + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2, \\
 dA_1 &= \omega_1^0 A + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2, \\
 dA_2 &= \omega_2^0 A + \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2,
 \end{aligned}$$

où les formes de PFAFF ω_α^β ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) s'appellent les *composantes relatives*. Soit C une courbe décrite par le point *géométrique* A . On attache à chaque point A de C un repère AA_1A_2 tel que AA_1 soit la tangente de C au point A . La famille de repères AA_1A_2 ainsi obtenus est dite du premier ordre et est caractérisée analytiquement par la condition

$$[2] \quad \omega_0^2 = 0.$$

Le repère du premier ordre le plus général $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$ relatif au point A est alors donné par les équations

$$\begin{aligned}
 [3] \quad \bar{A} &= A, \\
 \bar{A}_1 &= \rho(A_1 + \lambda A), \\
 \bar{A}_2 &= \sigma(A_2 + \mu A_1 + \nu A),
 \end{aligned}$$

où les quantités $\rho, \sigma, \lambda, \mu, \nu$, qu'on appelle les paramètres secondaires, sont arbitraires. En désignant par $\bar{\omega}_\alpha^\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) les composantes relatives de la famille de repères $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$, on trouve

$$\bar{\omega}_0^1 = \frac{\omega_0^1}{\rho}, \quad \bar{\omega}_1^2 = \frac{\rho \omega_1^2}{\sigma},$$

d'où

$$[4] \quad \frac{\bar{\omega}_1^2}{\bar{\omega}_0^1} = \frac{\rho^2}{\sigma} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_0^1}.$$

Cela étant, on dit que deux courbes C et C^* ayant le point commun A sont tangentes au point A , si elles ont un repère du premier ordre commun en A . Alors les deux familles de repères du premier ordre de C et C^* relatifs au point A se confondent. Considérons deux familles de repères du premier ordre, attachés aux différents points de C^* , telles que l'une contienne le repère AA_1A_2 , et l'autre $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$.

Soient θ_α^β et $\bar{\theta}_\alpha^\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) les composantes relatives de chacune de ces deux familles. Au point A considéré, on a, correspondant à la formule [4],

$$\frac{\bar{\theta}_1^2}{\bar{\theta}_0^4} = \frac{\rho^2}{\sigma} \cdot \frac{\theta_1^2}{\theta_0^4}.$$

Il en résulte que

$$\frac{\bar{\theta}_1^2}{\bar{\theta}_0^4} \Big/ \frac{\bar{\omega}_1^2}{\bar{\omega}_0^4} = \frac{\theta_1^2}{\theta_0^4} \Big/ \frac{\omega_1^2}{\omega_0^4},$$

de sorte que la valeur de

$$[5] \quad I = \frac{\theta_1^2}{\theta_0^4} \Big/ \frac{\omega_1^2}{\omega_0^4}$$

au point A soit indépendante du choix du repère du premier ordre attaché à A . Il en suit que I est un invariant projectif des deux courbes C et C^* .

Montrons que l'invariant I ainsi défini se confond avec l'invariant de contact bien connu de SMITH-MEHMKE⁽¹⁾. A cet effet définissons les coordonnées non homogènes x, y d'un point M relatives au repère AA_1A_2 par l'équation

$$[6] \quad M = A + xA_1 + yA_2.$$

(1) FUBINI-ÖRCH, *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*. Paris, 1931, pag. 17-20.

La droite AA_1 étant la tangente en A , l'équation de la courbe C au voisinage de A s'écrit

$$[7] \quad y = \frac{1}{2} mx^2 + \dots,$$

où les termes non écrits sont au moins du troisième ordre par rapport à x . De même, l'équation de C^* par rapport AA_1A_2 est de la forme

$$[8] \quad y = \frac{1}{2} m^* x^2 + \dots$$

En utilisant les conditions suivantes pour la fixité du point M ⁽¹⁾:

$$[9] \quad \begin{aligned} dx + \omega_0^4 + x(\omega_1^4 - \omega_0^0) + y\omega_2^4 - x^2\omega_1^0 - xy\omega_2^0 &= 0, \\ dy + \omega_0^2 + x\omega_1^2 + y(\omega_2^2 - \omega_0^0) - xy\omega_1^0 - y^2\omega_2^0 &= 0, \end{aligned}$$

on trouve immédiatement que

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_0^4} = m,$$

et, de la même manière, que

$$\frac{\theta_1^2}{\theta_0^4} = m^*.$$

Il en résulte que

$$[10] \quad I = \frac{m^*}{m},$$

qui démontre notre énoncé.

⁽¹⁾ CARTAN, *Connexion projective*, pag. 88.

Avec la définition précédente de l'invariant I on peut démontrer très simplement les théorèmes de C. SEGRE et de B. SEGRE. Prenons sur la tangente commune AA_1 un point $P = A + \varepsilon A_1$ infiniment voisin à A. Un point sur la droite PA_2 étant de la forme $P + \tau A_2$, les points M et N où PA_2 rencontre les courbes C et C^* sont donnés par les valeurs suivantes de τ :

$$\tau = \frac{1}{2} m \varepsilon^2 + \dots,$$

$$\tau^* = \frac{1}{2} m^* \varepsilon^2 + \dots.$$

Il en suit que le rapport anharmonique $(MN, A_2 P)$ tend vers I lorsque ε tend vers zéro. En remarquant de [3] que le point A_2 est arbitraire, on obtient le théorème de C. SEGRE: *Prenons un point arbitraire A_2 dans le plan. Soient P, M, N les points d'intersection d'une droite passant par A_2 avec la tangente commune AA_1 et les deux courbes. La limite du rapport anharmonique $(MN, A_2 P)$ lorsque la droite tend vers $A_2 A$ est indépendante du choix de A_2 et est égale à I.*

On démontre le théorème de B. SEGRE d'une manière analogue. L'équation de la conique tangente aux droites AA_1 , $A_1 A_2$ respectivement aux points A et A_2 est de la forme

$$y = lx^2,$$

où l est un paramètre. Il en suit que parmi ces coniques celle qui a un contact du second ordre avec C en A a l'équation

$$y = \frac{1}{2} m x^2,$$

et celle qui a avec C^* un contact du second ordre en A a l'équation

$$y = \frac{1}{2} m^* x^2.$$

Ces deux coniques ont un contact double, leur invariant étant manifestement égal à I. En remarquant que le point A_2 et la droite $A_2 A_1$ passant par A_2 son arbitraires, on a le théorème de B. SEGRE: *L'invariant des deux coniques qui passent par le point A_2 et y ont une droite tangente $A_2 A_1$ et qui sont osculatrices en A aux courbes C et C^* ne dépend ni du point A_2 , ni de la droite $A_2 A_1$ et il est égal à I.*

Des considérations analogues conduisent à un invariant de contact nouveau. Supposons que le point commun A ne soit pas un point d'inflexion des deux courbes C et C^* et que ces courbes aient un contact du quatrième ordre en A. Cela signifie que les familles de repères du quatrième ordre de C et C^* au point A se confondent. Pour les composantes relatives d'une famille de repères du quatrième ordre on a les relations

$$[11] \quad \omega_0^2 = 0, \quad \omega_1^2 - \omega_0^4 = 0, \quad \omega_2^2 - 2\omega_1^4 + \omega_0^6 = 0, \quad \omega_2^4 - \omega_1^6 = 0.$$

Si AA_1A_2 est un repère du quatrième ordre attaché au point A, le repère le plus général $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$ du quatrième ordre en A est donné par les équations

$$[12] \quad \begin{aligned} \bar{A} &= A, \\ \bar{A}_1 &= \rho(A_1 + \lambda A), \\ \bar{A}_2 &= \rho^2 \left(A_2 + \lambda A_1 + \frac{1}{2} \lambda^2 A \right). \end{aligned}$$

En désignant par $\bar{\omega}_\alpha^\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) les composantes relatives de la famille $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$, on trouve

$$\bar{\omega}_0^4 = \frac{\omega_0^4}{\rho}, \quad \bar{\omega}_2^0 = \rho^2 \omega_2^0,$$

de sorte que

$$[13] \quad \frac{\bar{\omega}_2^0}{\bar{\omega}_0^4} = \rho^3 \frac{\omega_2^0}{\omega_0^4}.$$

Soient θ_{α}^{β} ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) les composantes relatives d'une famille de repères du quatrième ordre de C^* , qui contient le repère AA_1A_2 . L'équation [13] et l'équation analogue pour l'effet sur θ_2^0/θ_0^1 d'un changement de repère [12] montrent que la valeur de

$$[14] \quad J = \frac{\theta_2^0}{\theta_0^1} / \frac{\omega_2^0}{\omega_0^1}$$

au point A est un invariant projectif. Il est un invariant de contact pour deux courbes ayant un contact du quatrième ordre.

On peut donner une interprétation géométrique à l'invariant J. Soit AA_1A_2 un repère commun du quatrième ordre de C et C^* en A. Relative au repère AA_1A_2 l'équation de C s'écrit

$$[15] \quad y = \frac{1}{2} x^2 + p x^5 + \dots,$$

et celle de C^* s'écrit

$$[16] \quad y = \frac{1}{2} x^2 + p^* x^5 + \dots$$

En utilisant les conditions de fixité du point [9], on trouve

$$\frac{\omega_2^0}{\omega_0^1} = 2_0 p, \quad \frac{\theta_2^0}{\theta_0^1} = 2_0 p^*,$$

de sorte que

$$[17] \quad J = \frac{p^*}{p}.$$

Les deux courbes C et C^* ont en A la même conique osculatrice, qui a l'équation

$$[18] \quad y = \frac{1}{2} x^2.$$

Cela étant, on constate facilement la signification suivante pour J : Prenons sur la conique osculatrice commune [18] un point quelconque Q et joignons-le à un point P de [18] infiniment voisin de A . La droite QP rencontre C et C^* aux points M, N , dont le rapport anharmonique avec Q, P tend vers J lorsque la droite QP tend vers QA . La démonstration de ce théorème est immédiate, si l'on identifie Q avec le point A_2 du repère.

§ 2. L'EXTENSION À L'ESPACE PROJECTIF À n DIMENSION. — Nous allons étendre les considérations précédentes aux courbes tangentes dans l'espace projectif à n dimensions.

Un repère projectif dans l'espace à n dimensions se compose de $n+1$ points analytiques linéairement indépendants A, A_1, \dots, A_n , définis à un facteur commun près. Les équations du déplacement infinitésimal d'une famille de repères $AA_1 \dots A_n$ sont de la forme

$$[19] \quad dA_\alpha = \sum_{\beta=0}^n \omega_\beta^\alpha A_\beta \quad (\alpha = 0, 1, \dots, n)$$

où ω_α^β sont les composantes relatives et où l'on écrit A_0 pour A . Les conditions pour la fixité du point

$$[20] \quad M = A + x^1 A_1 + \dots + x^n A_n$$

dans l'espace s'écrivent alors

$$[21] \quad dx^i + \omega_0^i + \sum_{k=1}^n x^k \omega_k^i = x^i \left(\omega_0^0 + \sum_{k=1}^n x^k \omega_k^0 \right) \quad i = 1, \dots, n.$$

Cela étant, considérons dans l'espace une courbe C décrite par le point A . Soit k un entier $\leq n-1$. Attachons à chaque point A de C un repère $AA_1 \dots A_n$ tel que AA_1 soit la tangente de C en A , $AA_1 A_2$ la variété plane osculatrice à deux dimensions, et, plus généralement, $AA_1 \dots A_k$ la variété plane osculatrice à k dimensions, ($1 = 1, 2, \dots, k$).

On appelle un tel repère un *repère d'ordre k* au point A. Pour une famille de repères d'ordre k de la courbe C on a

$$[22] \quad \omega_i^m = 0 \quad (l=0, 1, \dots, k-1; m=l+2, l+2, \dots, n).$$

Si $AA_1 \dots A_n$ est un repère d'ordre k au point A, le repère le plus général $\bar{A}\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$ d'ordre k en A est donné par les équations

$$\begin{aligned}
 \bar{A} &= A_1, \\
 \bar{A}_1 &= a_1^0 A + a_1^1 A_1, \\
 &\dots \dots \dots \\
 [23] \quad \bar{A}_k &= a_k^0 A + a_k^1 A_1 + \dots + a_k^k A_k, \\
 \bar{A}_{k+1} &= a_{k+1}^0 A + a_{k+1}^1 A_1 + \dots + a_{k+1}^n A_n, \\
 &\dots \dots \dots \\
 \bar{A}_n &= a_n^0 A + a_n^1 A_1 + \dots + a_n^n A_n,
 \end{aligned}$$

où les coefficients a sont arbitraires. En effectuant le changement du repère [23], on trouve, $\bar{\omega}_\alpha^\beta (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n)$ étant les composantes relatives de la famille de repères $\bar{A}\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$,

$$\bar{\omega}_0 = \frac{1}{a_1^1} \omega_0^1, \quad \bar{\omega}_{k-1}^k = \frac{a_{k-1}^{k-1}}{a_k^k} \omega_{k-1}^k,$$

de sorte que

$$[24] \quad \frac{\bar{\omega}_{k-1}^k}{\bar{\omega}_0^1} = \frac{a_1^1 a_{k-1}^{k-1}}{a_k^k} \frac{\omega_{k-1}^k}{\omega_0^1}$$

Soient C et C* deux courbes qui ont en A un contact d'ordre k ($1 \leq k \leq n-1$) et dont les variétés planes osculatrices à l dimensions ($l=1, 2, \dots, k$) en A sont bien déterminées. Par définition, cela signifie que les familles de repères d'ordre k de C et C* en A se

Ces deux coniques ont un contact double, leur invariant étant manifestement égal à I. En remarquant que le point A_2 et la droite $A_2 A_1$ passant par A_2 son arbitraires, on a le théorème de B. SEGRE: *L'invariant des deux coniques qui passent par le point A_2 et y ont une droite tangente $A_2 A_1$ et qui sont osculatrices en A aux courbes C et C^* ne dépend ni du point A_2 , ni de la droite $A_2 A_1$ et il est égal à I.*

Des considérations analogues conduisent à un invariant de contact nouveau. Supposons que le point commun A ne soit pas un point d'inflexion des deux courbes C et C^* et que ces courbes aient un contact du quatrième ordre en A. Cela signifie que les familles de repères du quatrième ordre de C et C^* au point A se confondent. Pour les composantes relatives d'une famille de repères du quatrième ordre on a les relations

$$[11] \quad \omega_0^2 = 0, \quad \omega_1^2 - \omega_0^4 = 0, \quad \omega_2^2 - 2\omega_1^4 + \omega_0^6 = 0, \quad \omega_2^4 - \omega_1^6 = 0.$$

Si AA_1A_2 est un repère du quatrième ordre attaché au point A, le repère le plus général $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$ du quatrième ordre en A est donné par les équations

$$[12] \quad \begin{aligned} \bar{A} &= A, \\ \bar{A}_1 &= \rho(A_1 + \lambda A), \\ \bar{A}_2 &= \rho^2 \left(A_2 + \lambda A_1 + \frac{1}{2} \lambda^2 A \right). \end{aligned}$$

En désignant par $\bar{\omega}_\alpha^\beta$ ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) les composantes relatives de la famille $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$, on trouve

$$\bar{\omega}_0^4 = \frac{\omega_0^4}{\rho}, \quad \bar{\omega}_2^0 = \rho^2 \omega_2^0,$$

de sorte que

$$[13] \quad \frac{\bar{\omega}_2^0}{\bar{\omega}_0^4} = \rho^3 \frac{\omega_2^0}{\omega_0^4}.$$

Soient θ_{α}^{β} ($\alpha, \beta = 0, 1, 2$) les composantes relatives d'une famille de repères du quatrième ordre de C^* , qui contient le repère AA_1A_2 . L'équation [13] et l'équation analogue pour l'effet sur θ_2^0/θ_0^1 d'un changement de repère [12] montrent que la valeur de

$$[14] \quad J = \frac{\theta_2^0}{\theta_0^1} / \frac{\omega_2^0}{\omega_0^1}$$

au point A est un invariant projectif. Il est un invariant de contact pour deux courbes ayant un contact du quatrième ordre.

On peut donner une interprétation géométrique à l'invariant J. Soit AA_1A_2 un repère commun du quatrième ordre de C et C^* en A. Relative au repère AA_1A_2 l'équation de C s'écrit

$$[15] \quad y = \frac{1}{2} x^2 + p x^5 + \dots,$$

et celle de C^* s'écrit

$$[16] \quad y = \frac{1}{2} x^2 + p^* x^5 + \dots$$

En utilisant les conditions de fixité du point [9], on trouve

$$\frac{\omega_2^0}{\omega_0^1} = 2_0 p, \quad \frac{\theta_2^0}{\theta_0^1} = 2_0 p^*,$$

de sorte que

$$[17] \quad J = \frac{p^*}{p}.$$

Les deux courbes C et C^* ont en A la même conique osculatrice, qui a l'équation

$$[18] \quad y = \frac{1}{2} x^2.$$

confondent. En désignant par θ_α^β ($\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n$) les composantes relatives d'une famille de repères d'ordre k de C^* , qui contient $AA_1 \dots A_n$, et par $\bar{\theta}_\alpha^\beta$ celles d'une famille contenant $\bar{A}\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$, on a, au point A considéré

$$\frac{\bar{\theta}_{k-1}^k}{\bar{\theta}_0^1} = \frac{a_1^1 a_{k-1}^{k-1}}{a_k^k} \frac{\theta_{k-1}^k}{\theta_0^1}.$$

Il en résulte que la valeur de

$$[25] \quad I_k = \frac{\theta_{k-1}^k}{\theta_0^1} / \frac{\omega_{k-1}^k}{\omega_0^1}$$

est indépendante du choix du repère $AA_1 \dots A_n$ et qu'elle est un invariant projectif des courbes C et C^* ayant un contact d'ordre k en A . Nous l'appellerons *l'invariant de contact d'ordre k* de C et C^* . On voit donc que deux courbes ayant en A un contact d'ordre k ont $k-1$ invariants de contact, à savoir I_2, I_3, \dots, I_k .

Dans le cas particulier où $k=n-1$, on peut donner un invariant de plus. Dans ce cas, en effet, la transformation [23] transforme la composante relative ω_{n-1}^n d'après la formule

$$\bar{\omega}_{n-1}^n = \frac{a_{n-1}^{n-1}}{a_n^n} \omega_{n-1}^n.$$

La transformation sur θ_{n-1}^n étant la même, on en déduit que

$$[26] \quad I_n = \frac{\theta_{n-1}^n}{\theta_0^1} / \frac{\omega_{n-1}^n}{\omega_0^1}$$

est un invariant de contact, que nous appellerons *l'invariant généralisé de SMITH-MEHMKE*. Pour $n=2$, cet invariant I_n est précisément l'invariant de SMITH-MEHMKE.

Nous allons donner une interprétation géométrique de l'invariant I_n , qui est analogue au théorème de C. SEGRE. Le repère $AA_1 \dots A_n$ étant

choisi comme indiqué plus haut, les équations de C au voisinage de A peuvent être écrites dans la forme

$$\begin{aligned}
 x^1 &= t, \\
 x^2 &= b_2^2(t)^2 + b_3^2(t)^3 + \dots, \\
 &\dots\dots \\
 x^{k-1} &= b_{k-1}^{k-1}(t)^{k-1} + \dots, \\
 [27] \quad x^k &= b_k^k(t)^k + \dots, \\
 x^{k+1} &= b_{k+1}^{k+1}(t)^{k+1} + \dots, \\
 &\dots\dots \\
 x^n &= b_{k+1}^n(t)^{k+1} + \dots,
 \end{aligned}$$

où t est le paramètre sur C . Si l'on différencie l'équation pour x^k et on égale les coefficients de $(t)^{k-1}$ dans les deux membres, on obtient, en tenant compte des conditions de fixité du point [21],

$$[28] \quad \frac{\omega_{k-1}^k}{\omega_0^k} = k \frac{b_k^k}{b_{k-1}^{k-1}}$$

Ecrivons ensuite les équations de C^* par rapport au repère $AA_1 \dots A_n$ dans la forme

$$\begin{aligned}
 x^1 &= \tau, \\
 x^2 &= c_2^2(\tau)^2 + (c_3^2(\tau))^3 + \dots, \\
 &\dots\dots \\
 x^{k-1} &= c_{k-1}^{k-1}(\tau)^{k-1} + \dots, \\
 [29] \quad x^k &= c_k^k(\tau)^k + \dots, \\
 x^{k+1} &= c_{k+1}^{k+1}(\tau)^{k+1} + \dots, \\
 &\dots\dots \\
 x^n &= c_{k+1}^n(\tau)^{k+1} + \dots,
 \end{aligned}$$

τ étant le paramètre. On trouve, analoguement à [28],

$$[30] \quad \frac{\theta_{k-1}^k}{\theta_0^k} = k \frac{c_k^k}{c_{k-1}^{k-1}}.$$

Il en résulte que

$$[31] \quad I_k = \frac{c_k^k}{c_{k-1}^{k-1}} / \frac{b_k^k}{c_{k-1}^{k-1}} = \frac{c_k^k}{b_k^k} / \frac{c_{k-1}^{k-1}}{b_{k-1}^{k-1}}.$$

Dans le cas $k = n - 1$, on trouve, dans la même manière, l'expression suivante pour l'invariant I_n :

$$[32] \quad I_n = \frac{c_n^n}{c_{n-1}^{n-1}} / \frac{b_n^n}{b_{n-1}^{n-1}} = \frac{c_n^n}{c_n^n} / \frac{c_{n-1}^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1}}.$$

Des expression [31] et [32] pour I_k, I_n il est facile d'eux donner une interprétation géométrique simple. En effet, les points M de C et les points N de C^* peuvent être mis en correspondance biunivoque per la condition que la droite MN joignant les points correspondants rencontre la variété plane $A_2 \dots A_n$. Cette correspondance est définie par l'équation $\tau = t$. Désignons par P_l le point où MN recontre la variété plane $AA_1 \dots A_{l-1} A_{l+1} \dots A_n$, ($l = 0, 1, \dots, n$). Il est facile de vérifier que l'invariant I_k est égal à la limite du rapport anharmonique $(MN, P_{k-1} P_k)$ lorsque M, N tendent vers A. Dans le cas $k = n - 1$, l'invariant I_n est égal à la limite de $(MN, P_{n-1} P_n)$. D'une manière précise, on a le théorème:

Soient C et C^ deux courbes qui ont en A un contact d'ordre k ($1 \leq k \leq 1$) et soit $AA_1 \dots A_n$ un repère d'ordre k commun. Mettons les points M de C et les points N de C^* en correspondance par la condition que la droite MN rencontre la variété plane $A_2 \dots A_n$. Si P_l est le point où MN recontre la variété plane $AA_1 \dots A_{l-1} A_{l+1} \dots A_n$, ($l = 0, 1 \dots n$), la limite du rapport anharmonique $(MN, P_{k-1} P_k)$ lorsque M tend vers A est indépendante du choix du repère $AA_1 \dots A_n$ et est égale à I_k . Dans le cas $k = n - 1$, la limite de $(MN, P_{n+1} P_n)$ est égale à I_n pour tout choix de $AA_1 \dots A_n$.*

Des invariants I_k et I_n on déduit que les quantités

$$[33] \quad J_l = I_2 I_3 \dots I_l = \frac{c_l^l}{c_l^l}, \quad (l = 2, \dots, k, \text{ si } k \leq n - 2),$$

$$J_l = I_2 I_3 \dots I_l = \frac{c_l^l}{b_l^l}, \quad (l = 2, \dots, n, \text{ si } k = n - 1)$$

sont aussi des invariants de contact. Dans le cas $k = n - 1$ ces invariants ont été donnés par M. B. SÈGRE⁽¹⁾, tandis que l'invariance de J_l pour $k \leq n - 2$ a été signalée par M. BUCHIN SU⁽²⁾. En employant les notations précédentes, on peut énoncer le théorème suivant: *L'invariant J_k est égal à la limite du rapport anharmonique $(MN, P_0 P_k)$ lorsque M tend vers A , tandis que, dans le cas $k = n - 1$, l'invariant J_n est égal à la limite de $(MN, P_0 P_n)$.*

Il serait intéressant d'indiquer une généralisation possible de l'invariant I_n pour deux courbes ayant un contact d'ordre $n - 1$. Pour une famille de repères $AA_1 \dots A_n$ d'ordre $k \leq n - 1$ de C les composantes relatives $\omega_k^{k+1}, \dots, \omega_k^n$ sont aussi des multiples de ω_0^k . Posons

$$[34] \quad \xi_k^\rho = \frac{\omega_k^\rho}{\omega_0^k}, \quad \rho = k + 1, \dots, n.$$

Après le changement de repères [23] les quantités $\bar{\xi}_k^\rho$ correspondantes à la famille de repères $\bar{A}\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$ sont liées aux ξ_k^ρ par les relations

$$[35] \quad \alpha_1^1 \alpha_k^k \xi_k^\rho = \sum_{\sigma=k+1}^n \alpha_\sigma^\sigma \bar{\xi}_k^\rho \quad (\rho = k + 1, \dots, n).$$

(1) B. SÈGRE, *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori*, « Rendiconti Accad. dei Lincei », (VI) 22 (1925₂), pag. 392-399.

(2) B. SU, *Some arithmetical invariants of a curve in projective space of n dimensions*, à paraître dans le « Journal de Science Mathématique de l'Université de Tucuman ».

On voit que la transformation sur ξ_k^0 est la transformation homographique la plus générale possible. Nous nous contentons ici de faire la remarque qu'il serait possible de définir, au moyen des ξ_k^0 , des invariants de contact de $n - k + 1$ courbes ayant un contact d'ordre k les unes avec les autres au même point A .

Ajoutons encore une remarque concernant l'invariance de I_k par rapport aux projections. Projetons, en effet, les courbes C et C^* de la variété plane $A_{l+1} \dots A_n$ ($l \geq k$) à $n - l - 1$ dimensions dans $AA_1 \dots A_l$. Il est facile de vérifier que les projections de C et C^* ont en A un contact d'ordre k si $l \geq k + 1$ et qu'elles ont au moins un contact d'ordre $k - 1$ si $l = k$. De plus, dans le cas $l \geq k + 1$, l'invariant d'ordre k de C et C^* est égal à celui de leurs projections, tandis que, pour $l = k$, il est égal à l'invariant généralisé de SMITH-MEHMKE de leurs projections. En remarquant que la variété plane $A_{l+1} \dots A_n$ est arbitraire, on a le théorème: *L'invariant de contact d'ordre k de deux courbes reste inaltéré, si l'on les projette d'une variété plane arbitraire à $n - l - 1$ dimensions $l \geq k + 1$, qui ne rencontre pas la variété plane osculatrice à k dimensions, commune $AA_1 \dots A_k$, dans une variété plane à l dimensions, qui contient $AA_1 \dots A_k$. Cet invariant est aussi égal à l'invariant généralisé de SMITH-MEHMKE des projections des deux courbes dans $AA_1 \dots A_k$ d'une variété plane à $n - k - 1$ dimensions, qui ne rencontre pas $AA_1 \dots A_k$.*

§ 3. QUELQUES INVARIANTS DE CONTACT DES SURFACES DANS L'ESPACE ORDINAIRE. — Indiquons comment nos considérations peuvent être appliquées aux surfaces tangentes dans l'espace projectif ordinaire.

A cet effet, considérons deux surfaces tangentes au point commun A . Prenons le repère $AA_1 A_2 A_3$ tel que le plan $AA_1 A_2$ soit le plan tangent commun en A . En définissant les coordonnées non homogènes x, y, z d'un point M par rapport au repère $AA_1 A_2 A_3$ par la relation

[36]

$$M = A + xA_1 + yA_2 + zA_3,$$

on peut écrire les équations des deux surfaces respectivement dans les formes

$$[37] \quad z = \frac{1}{2} (ax^2 + 2bxy + cy^2) + \dots,$$

$$[38] \quad z = \frac{1}{2} (a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2) + \dots$$

Il serait facile de vérifier, avec les méthodes employées plus haut, le fait bien connu que les quantités

$$[39] \quad \frac{a_1c_1 - b_1^2}{ac - b^2}, \quad \frac{ac_1 - 2bb_1 + ca_1}{ac - b^2}$$

sont des invariants de contact.

Cependant, les méthodes précédentes conduisent, pour deux surfaces ayant un contact du deuxième ordre au point A, à deux invariants de contact qui me semblent nouveaux. On peut supposer les équations des deux surfaces dans les formes

$$[40] \quad z = xy + \frac{1}{3} (px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3) + \dots,$$

$$[41] \quad z = xy + \frac{1}{3} (p_1x^3 + 3q_1x^2y + 3r_1xy^2 + s_1y^3) + \dots,$$

où les termes non écrits sont au moins du quatrième ordre par rapport à x, y . Si $AA_1A_2A_3$ est le repère par rapport auquel les surfaces ont les équations des formes [40], [41], le repère le plus général $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ ayant la même propriété est donné par les équations

$$[42] \quad \begin{aligned} \bar{A} &= A, & \bar{A}_1 &= \rho A + \alpha A_1, & \bar{A}_2 &= \sigma A + \beta A_2, \\ & & \bar{A}_3 &= \tau A + \lambda A_1 + \mu A_2 + \alpha\beta A_3, \end{aligned}$$

ou

$$[43] \quad \begin{aligned} \bar{A} &= A, & \bar{A}_1 &= \rho A + \alpha A_2, & \bar{A}_2 &= \sigma A + \beta A_1, \\ & & \bar{A}_3 &= \tau A + \mu A_1 + \lambda A_2 + \alpha\beta A_3, \end{aligned}$$

où le changement [43] peut être regardé comme le produit de [42] et du changement

$$[44] \quad \bar{A} = A, \quad \bar{A}_1 = A_2, \quad \bar{A}_2 = A_1, \quad \bar{A}_3 = A_3.$$

Si les équations des surfaces [40], [41] par rapport au repère $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ défini par [42] sont

$$[45] \quad z = xy + \frac{1}{3} (\bar{p}x^3 + 3\bar{q}x^2y + 3\bar{r}xy^2 + \bar{s}y^3) + \dots,$$

$$[46] \quad z = xy + \frac{1}{3} (\bar{p}_1x^3 + 3\bar{q}_1x^2y + 3\bar{r}_1xy^2 + \bar{s}_1y^3) + \dots,$$

on obtient

$$[47] \quad \begin{aligned} \bar{p} &= \frac{\alpha^2}{\rho} p, & \bar{s} &= \frac{\beta^2}{\alpha} s, \\ \bar{p}_1 &= \frac{\alpha^2}{\beta} p_1, & \bar{s}_1 &= \frac{\beta^2}{\alpha} s_1, \end{aligned}$$

d'où

$$[48] \quad \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}} = \frac{p_1}{p}, \quad \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}} = \frac{s_1}{s}.$$

D'autre part, le changement du repère [44] transforme les quantités p_1/p et s_1/s d'après les formules

$$[49] \quad \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}} = \frac{s_1}{s}, \quad \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}} = \frac{p_1}{p}.$$

Il en résulte que les quantités

$$[50] \quad H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{p} + \frac{s_1}{s} \right), \quad K = \frac{p_1}{p} \cdot \frac{s_1}{s}$$

sont indépendantes du choix du repère $AA_1A_2A_3$. Elles sont deux invariants de contact des surfaces [40], [41] au point A.

Pour donner une interprétation géométrique à H, K, considérons une quadrique Σ ayant un contact du deuxième ordre avec les deux surfaces au point A et prenons sur elle un point quelconque Q. Par un choix convenable du repère $AA_1A_2A_3$ on peut supposer la quadrique Σ d'avoir l'équation

$$[51] \quad z = xy$$

et le point Q de confondre avec A_3 . Cela posé, prenons une droite quelconque passant par A_3 et infiniment voisine de A_3A . Soient P, M, N ses points d'intersection avec la quadrique Σ et les deux surfaces respectivement. On a donc

$$P = A + \delta A_1 + \varepsilon A_2 + \delta \varepsilon A_3$$

$$M = P + \left\{ \frac{1}{3} (p\delta^3 + 3q\delta^2\varepsilon + 3r\delta\varepsilon^2 + s\varepsilon^3) + \dots \right\} A_3,$$

$$N = P + \left\{ \frac{1}{3} (p_1\delta^3 + 3q_1\delta^2\varepsilon + 3r_1\delta\varepsilon^2 + s_1\varepsilon^3) + \dots \right\} A_3,$$

où δ, ε sont des infiniment petits. On en déduit que

$$[52] \quad (MN, A_3P) = \frac{p_1\delta^3 + 3q_1\delta^2\varepsilon + 3r_1\delta\varepsilon^2 + s_1\varepsilon^3 + \dots}{p\delta^3 + 3q\delta^2\varepsilon + 3r\delta\varepsilon^2 + s\varepsilon^3 + \dots}.$$

Si la droite A_3P tend vers A_3A le long des deux directions asymptotiques, les limites du rapport anharmonique (MN, A_3P) sont p_1/p et s_1/s .

On arrive donc à l'interprétation géométrique suivante de p_1/p et s_1/s (c'est-à-dire de H et K): Prenons une quadrique Σ ayant un contact du deuxième ordre avec les deux surfaces en A et un point quelconque Q sur Σ . Une droite quelconque passant par Q rencontre Σ et les deux surfaces aux points P, M, N. Lorsque cette droite tend vers QA le long des directions asymptotiques, le rapport anharmonique (MN, QP) tend vers p_1/p et s_1/s pour tout choix de la quadrique Σ et du point Q sur Σ .

SOPRA UNA PROPRIETÀ DI LIMITE CARATTERISTICA DELLE FUNZIONI OLOMORFE (*)

MARIA ZEVI

SUMMARIVM. — Quoad functionem $f(z)$ complexi variabilis z , functio interpolaris quae a quolibet variabilium complexorum numero pendeat perpenditur, eiusque limes quinam sit, si haec variabilia ad z tendant, inquiritur; qua ratione auctor novas functionum holomorphicarum variabilis z notaciones invenit.

In una nota del Prof. PICONE, dal titolo *Sul calcolo delle derivate d'ordine superiore*, in corso di stampa nel Periodico di Matematica, sono considerate le seguenti questioni.

Detta $f(z)$ una funzione della variabile complessa $z = x + iy$, definita in un campo A del piano (x, y) , assunti arbitrariamente $n + 1$ punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} del campo A, si ponga

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} & z_1^n \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-1} & z_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_{n+1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} & z_{n+1}^n \end{vmatrix} = V(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$$

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \cdot V(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} & f(z_1) \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{n-1} & f(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & z_{n+1} & \dots & z_{n+1}^{n-1} & f(z_{n+1}) \end{vmatrix}$$

$$\sigma = |z_1 - z| + |z_2 - z| + \dots + |z_{n+1} - z| ;$$

(*) Nota presentata l'8 luglio 1941, dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi.

nella nota indicata, supposto il punto z in A , si studia il limite

$$[1] \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}),$$

e constatato che tale limite, se $f(z)$ è olomorfa in A , riesce

$$\frac{f^{(n)} z}{n!},$$

senza alcun vincolo fra gli $n + 1$ punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} , al tendere di essi a z , si domanda: data comunque la $f(z)$, dall'esistenza del limite [1] determinato e finito, per ogni punto z di A , si può dedurre l'olomorfia della $f(z)$?

Più in generale, dall'esistenza e finitezza dello stesso limite con prescritti vincoli fra i punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} , quale classe di funzioni si caratterizza?

A tali domande è risposto nella nota indicata in due casi particolari, istruttivi, ed è mostrato che:

I. — *La classe delle funzioni $f(z)$ che, considerate come funzioni di x e di y sono dotate in A delle derivate parziali rispetto ad x e ad y prime e seconde finite e continue, e per le quali esiste, determinato e finito, per ogni punto z di A , il limite*

$$[2] \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} f(z, z + \zeta, z - \zeta),$$

essendo ζ variabile complessa è data dalle funzioni che possono decomporci nella somma di una funzione olomorfa in z e di una funzione lineare in x e in y .

II. — *La classe delle funzioni $f(z)$ che, considerate come funzioni di x e di y , sono differenziabili in A , secondo STOLZ, e per le quali esiste determinato e finito, per ogni punto z di A , il limite*

$$[3] \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(z, z + \zeta, z + \epsilon \zeta)$$

dove ϵ è un fissato numero complesso diverso da zero e da uno e ζ tende a zero con anomalia determinata (funzione di z), è quella delle funzioni olomorfe in A .

Tali esempi mostrano la profonda differenza delle circostanze che si presentano a seconda che nel tendere a z dei punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} ,

essi si mantengano allineati con z o non si mantengano tali; nel primo caso, per lo studio della questione, si è dovuto ammettere l'esistenza del limite [2], comunque il vettore ζ tende a zero, ed inoltre l'esistenza e la continuità delle derivate parziali prime e seconde della $f(z)$, pervenendo a caratterizzare le funzioni che possono decomporre nella somma di una funzione olomorfa in A e di una funzione lineare; nel secondo è bastato supporre la differenziabilità secondo STOLZ della funzione $f(z)$ delle variabili x e y e l'esistenza e finitezza del limite [3] mantenendo (funzione di z) immutata l'anomalia del vettore infinitesimo ζ , cioè immutata l'orientazione del triangolo dei punti z_1, z_2, z_3 , che tende a concentrarsi nel suo vertice in z , mantenendosi omotetico ad un triangolo fisso, per dedurre che la classe delle funzioni coincide con quella delle funzioni olomorfe in A .

Dietro consiglio del Prof. PICONE⁽¹⁾, ho voluto considerare in generale tali circostanze, considerare cioè il limite [1] assumendo un numero arbitrario di punti, in un primo tempo allineati con z ed in un secondo non allineati con z e precisamente formanti i vertici di un $(n+1)$ -gono regolare avente il centro in z .

Ed ecco a quali interessanti risultati sono pervenuta.

I. - Si fissino $n+1$ numeri reali t_1, t_2, \dots, t_{n+1} funzioni di z e si assuma un vettore infinitesimo ζ . I punti $z_1 = z + t_1 \zeta, z_2 = z + t_2 \zeta, \dots, z_{n+1} = z + t_{n+1} \zeta$ sono evidentemente allineati con z , e giacenti su una retta per z avente l'anomalia di ζ . Ebbene si ha che: la classe delle funzioni $f(z)$ delle variabili x e y , continue in A con le derivate parziali dei primi n ordini, per le quali esiste determinato e finito il limite

$$[4] \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} f(z + t_1 \zeta, z + t_2 \zeta, \dots, z + t_{n+1} \zeta)$$

ove ζ tende a zero con $n+1$ assegnate anomalie, è costituita dalle funzioni che possono decomporre nella somma di un polinomio arbitrario di grado $n-1$ in x e in y e di una funzione di z , olomorfa in A .

Per $n=1$ si perviene dunque alla olomorfia della $f(z)$ essendo però in tal caso sufficiente supporre la differenziabilità della funzione secondo STOLZ.

(1) Mi è grato ringraziare pubblicamente il Prof. PICONE per i suggerimenti datimi nell'espletare il presente lavoro.

II'. - Supposto $n \geq 2$ e detta ε una radice $(n+1)$ -ma dell'unità si ponga per un vettore infinitesimo ζ

$$z_1 = z + \zeta \quad z_2 = z + \varepsilon \zeta \quad \dots \quad z_{n+1} = z + \varepsilon^n \zeta$$

con che i punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} formano i vertici di un $(n+1)$ -gono regolare avente il centro in z . Ebbene si ha che: la classe delle funzioni di x e di y differenziabili in A secondo STOLZ per le quali, per ogni punto z di A , esiste determinato e finito il limite

$$[5] \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} f(z + \zeta, z + \varepsilon \zeta, \dots, z + \varepsilon^n \zeta)$$

ove ζ tende a zero mantenendo immutata la sua anomalia (funzione di z), è precisamente quella delle funzioni olomorfe in A .

Tale teorema cade in difetto per $n=1$, nel qual caso i punti

$$z_1 = z + \zeta, \quad z_2 = z - \zeta,$$

vengono a trovarsi allineati con z e l'esistenza e finitezza del limite [5] caratterizza, a norma del teorema I', le funzioni olomorfe, quando ζ tende a zero potendo assumere due anomalie distinte.

1. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA I'.

Per gli $n + 1$ punti

$$z_1 = z + t_1 \zeta \quad z_2 = z + t_2 \zeta \quad \dots \quad z_{n+1} = z + t_{n+1} \zeta$$

si ha

$$[6] \quad f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{1}{\zeta^n} \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{n-1} & f(z + t_1 \zeta) \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{n-1} & f(z + t_2 \zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^{n-1} & f(z + t_{n+1} \zeta) \\ \hline 1 & t_1 & \dots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^{n-1} & t_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

L'ipotesi dell'esistenza e continuità, per la $f(x, y)$, delle derivate parziali fino a quelle d'ordine n incluse, consente di scrivere, posto $\zeta = \xi + i\eta$,

$$\begin{aligned}
 f(z + t_k \zeta) &= f(x + t_k \xi, y + t_k \eta) = f(z) + (\xi f_x + \eta f_y) t_k \\
 &+ \frac{1}{2} (f_x \xi + f_y \eta)^{(2)} t_k^2 + \dots \\
 &+ \frac{1}{n!} (f_x \xi + f_y \eta)^{(n)} t_k^n + \omega_n(\zeta) |\zeta|^n t_k^n,
 \end{aligned}$$

essendo

$$(f_x \xi + f_y \eta)^{(n)} = \sum_k^n \binom{n}{k} \xi^k \eta^{n-k} f_{x^k y^{n-k}},$$

ove $\lim_{\zeta \rightarrow 0} \omega(\zeta) = 0$.

Sostituendo tali espressioni di $f(z + t_k \zeta)$ nella [6] si ha

$$\frac{(f_x \xi + f_y \eta)^{(n)}}{n! \zeta^n} + \frac{|\zeta|^n}{\zeta^n} \begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{n-1} & \omega_1(\zeta) t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{n-1} & \omega_2(\zeta) t_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^{n-1} & \omega_{n+1}(\zeta) t_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

Il secondo addendo, essendo $\frac{|\zeta|^n}{\zeta^n}$ di modulo uno, tende a zero al tendere a zero di ζ , in virtù della tendenza a zero delle $\omega_n(\zeta)$, mentre il primo, assegnata al vettore ζ una anomalia di tangente μ , ha per limite l'espressione

$$[7] \quad \frac{f_{x^n} + \binom{n}{1} f_{x^{n-1}y} \mu + \dots + \binom{n}{n-1} f_{xy^{n-1}} \mu^{n-1} + f_{y^n} \mu^n}{1 + \binom{n}{1} i \mu + \dots + \binom{n}{n-1} i^{n-1} + i^n \mu^n}$$

Se si richiede che tale limite riesca, per ogni punto (x, y) di A , determinato per $n + 1$ anomalie assegnate a ζ , cioè per $n + 1$ valori diversi di μ , deve di necessità risultare, identicamente in A

$$f_x^n = \frac{f_{x^{n-1}y}}{i} = \frac{f_{x^{n-2}y^2}}{i^2} = \dots = \frac{f_{xy^{n-1}}}{i^{n-1}} = \frac{f_y^n}{i^n}$$

cioè

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left(f_x - \frac{1}{i} f_y \right) = 0 ,$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x \partial y^{n-2}} \left(f_x - \frac{1}{i} f_y \right) = 0 ,$$

.....

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \left(f_x - \frac{1}{i} f_y \right) = 0 ,$$

e deve pertanto aversi

$$[8] \quad f_x - \frac{1}{i} f_y = P(x, y) ,$$

ove $P(x, y)$ designa un polinomio di grado $n - 2$.

Si tratta ora di trovare tutte le soluzioni dell'equazione a derivate parziali [8].

Osserviamo che dette f e g due soluzioni distinte, si ha

$$(f-g)_x - \frac{1}{i} (f-g)_y = 0$$

e pertanto la $f-g$ riesce olomorfa in A . Tutte le soluzioni della [8] si hanno dunque aggiungendo ad una sua particolare una qualsivoglia funzione olomorfa. Ricerchiamo allora una particolare soluzione della [8]. È facile vedere che si può effettivamente verificare la [8] con un po-

linomio di grado $n-1$ nel quale anzi rimangono arbitrari n coefficienti. Ed invero, posto

$$P(x, y) = \sum_0^{n-2} P_k(x, y)$$

ove le $P_k(x, y)$ designano polinomi omogenei di grado k , se si vuole soddisfare alla [8] con un polinomio

$$Q(x, y) = \sum_0^{n-1} Q_k(x, y)$$

di grado $n-1$, ove le $Q_k(x, y)$ designano polinomi omogenei di grado k , deve aversi

$$\frac{\partial Q_{k+1}}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial y} = P_k \quad (k=0, 1, \dots, n-2)$$

Basterà dunque per il nostro scopo mostrare che, assegnato un polinomio omogeneo di grado m

$$P(x, y) = \sum_0^m p_k x^k y^{m-k},$$

esiste un polinomio omogeneo di grado $m+1$

$$Q(x, y) = \sum_0^{m+1} q_k x^k y^{m+1-k}$$

che verifica l'equazione

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial Q}{\partial y} = P(x, y)$$

e per il quale rimane arbitrario il coefficiente q_0 .

Ora è immediato che tale equazione porta alle seguenti fra i coefficienti p_k e q_k

$$[9] \quad (k+1)q_{k+1} - \frac{1}{i}(m+1-k)q_k = p_k \quad (k=0, 1, \dots, m)$$

soddisfatte le quali è soddisfatta l'equazione stessa.

Le equazioni [9] possono essere verificate assegnando arbitrariamente il coefficiente q_0 in seguito a che tutti gli altri riescono determinati.

Se si riflette poi che, ponendo nella frazione [7] una funzione $f(z)$ qualsivoglia che sia la somma di una funzione olomorfa in A e di un polinomio di grado $n-1$, la frazione stessa assume un valore indipendente da μ , il teorema I' può ritenersi dimostrato.

2. - DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA II'.

Con la posizione fatta

$$z_1 = z + \zeta, \quad z_2 = z + \varepsilon\zeta, \quad \dots, \quad z_{n+1} = z + \varepsilon^n\zeta$$

riesce (cfr. la nota citata del Prof. PICONI)

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{f(z + \zeta) + \varepsilon f(z + \varepsilon\zeta) + \dots + \varepsilon^n f(z + \varepsilon^n\zeta)}{(n+1)\zeta^n}$$

Posto

$$\zeta = \xi + i\eta \quad \varepsilon^k = \alpha_k + i\beta_k \quad (k=0, 1, \dots, n)$$

l'ipotesi della differenziabilità secondo STOLZ per la $f(x, y)$ ci permette di scrivere

$$f(z + \varepsilon^k\zeta) = f(z) + (\alpha_k\xi - \beta_k\eta)f_x + (\alpha_k\eta + \beta_k\xi)f_y + \omega_k(\zeta)|\zeta|$$

essendo

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \omega_k(\zeta) = 0.$$

Il numeratore dell'espressione $f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ si può così scrivere

$$\begin{aligned} & \sum_0^n (\alpha_k + i\beta_k) [(\alpha_k \xi - \beta_k \eta) f'_x + (\alpha_k \eta + \beta_k \xi) f'_y] + \omega(\zeta) |\zeta| = \\ & = f'_x \left(\xi \sum_0^n \alpha_k (\alpha_k + i\beta_k) - \eta \sum_0^n \beta_k (\alpha_k + i\beta_k) \right) + \\ & + f'_y \left(\xi \sum_0^n \beta_k (\alpha_k + i\beta_k) + \eta \sum_0^n \alpha_k (\alpha_k + i\beta_k) \right) + \omega(\zeta) |\zeta|, \end{aligned}$$

dove

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \omega(\zeta) = 0.$$

Dobbiamo calcolare

$$\sum_0^n \alpha_k (\alpha_k + i\beta_k), \quad \sum_0^n \beta_k (\alpha_k + i\beta_k).$$

Osserviamo che, per $n \geq 2$

$$\sum_0^n (\alpha_k + i\beta_k) \alpha_k + i \sum_0^n (\alpha_k + i\beta_k) \beta_k = \sum_0^n (\alpha_k + i\beta_k)^2 = \sum_0^n \varepsilon^{2k} = 0,$$

e che

$$\sum_0^n (\alpha_k + i\beta_k) \alpha_k - i \sum_0^n (\alpha_k + i\beta_k) \beta_k = \sum_0^n (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = n + 1$$

Si trova quindi

$$\sum_0^n (\alpha_k + i\beta_k) \alpha_k = \frac{n+1}{2},$$

$$\sum_0^n (\alpha_k + i\beta_k) \beta_k = -\frac{n+1}{2i},$$

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{\frac{n+1}{2} (\xi - i\eta) (f'_x + i f'_y) + \omega(\zeta) |\zeta|}{(n+1) \zeta^n}$$

Se tale funzione di ζ deve aver limite determinato e finito per ζ infinitesimo vuol dire che il suo prodotto per ζ^{n-1} deve tendere a zero; deve cioè essere infinitesima, per ζ che tende a zero, la funzione

$$\frac{1}{2} \frac{\zeta - i\eta}{\zeta + i\eta} (f_x + if_y) + \frac{\omega(\zeta)}{n+1} \frac{|\zeta|}{\zeta}$$

Il secondo addendo di tale somma è infinitesimo, laddove il primo ha il valore

$$-\frac{1}{2} (f_x + if_y)$$

se la fissata anomalia di ζ è $\pm \frac{\Pi}{2}$; ha il valore

$$\frac{1}{2} \frac{1 - i\mu}{1 + i\mu}$$

se μ è la tangente della fissata anomalia di ζ , supposta diversa da $\pm \frac{\Pi}{2}$. Segue quindi, in A,

$$f_x + if_y = 0$$

cioè la olomorfia di $f(z)$.

OSSERVAZIONE ALLA NOTA DI MARIA ZEVI (*)

(VOL. V, N. 16, DI QUESTI « ACTA »)

MAURO PICONE

SUMMARIVM. — Auctor determinat quid requiratur quidque sufficiat ut ratio variandi in spatio quod est circa singula puncta campi complexae superficiei ex interpolari plurium variabilium functione, quae complexi variabilis functionem respiciat, notet huius holomorphiam in illo campo.

Dirò che gli $n + 1$ punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} , del piano complesso $z = x + iy$, tendono omoteticamente al punto z , se, essendo t una quantità infinitesima, reale e positiva, $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$, $n + 1$ fissati numeri complessi, si ha

$$z_k = z + t \zeta_k \quad (k = 1, 2, \dots, n + 1).$$

Introdotta la funzione interpolare

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{|1, z_k, \dots, z_k^{n-1}, f(z_k)|}{|1, z_k, \dots, z_k^{n-1}, z_k^n|} \quad (1),$$

il teorema II della precedente nota di MARIA ZEVI stabilisce che:

Se, per $n \geq 2$, supposta $f(z)$ funzione di x e di y differenziabile secondo STOLZ nel campo A del piano z , riesce determinato e finito, per

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi, l'8 luglio 1941.

(1) Essendo $g_0(z), g_1(z), \dots, g_n(z)$, $n + 1$ funzioni di z , col simbolo

$$|g_0(z_k), g_1(z_k), \dots, g_n(z_k)|,$$

intendo indicare il determinante d'ordine $n + 1$:

$$\begin{vmatrix} g_0(z_1) & g_1(z_1) & \dots & g_n(z_1) \\ g_0(z_2) & g_1(z_2) & \dots & g_n(z_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_0(z_{n+1}) & g_1(z_{n+1}) & \dots & g_n(z_{n+1}) \end{vmatrix}$$

ogni punto z di A , il limite di $f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ quando i punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} tendono omoteticamente al punto z , disponendosi secondo i vertici di un $(n+1)$ -gono regolare col centro in z , la $f(z)$ è olomorfa in A .

Ora è spontaneo domandarsi: Qual'è la più generale configurazione dei punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} tale che dall'esistenza e finitezza, in ogni punto z di A , per una funzione $f(z)$, ivi funzione di x e y differenziabile secondo STOLZ, del limite di $f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ al tendere omoteticamente dei detti punti al punto z , si possa dedurre l'olomorfia di $f(z)$ in A ?

A tale questione si risponde subito al modo seguente.

Fissati, per ogni punto z di A , i numeri $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$, posto $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, si ha, per $n=1$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(z + t\zeta_1, z + t\zeta_2) = \frac{(\xi_2 - \xi_1)f_x + (\eta_2 - \eta_1)f_y}{\xi_2 - \xi_1 + (\eta_2 - \eta_1)i},$$

comunque si assuma la funzione (differenziabile) f . Per $n=2$, si ha

$$f(z + t\zeta_1, z + t\zeta_2, z + t\zeta_3) = \frac{|1, \zeta_k, \xi_k| f_x + |1, \zeta_k, \eta_k| f_y + \omega(t)}{|1, \zeta_k, \zeta_k^2| t},$$

con

$$\lim_{t \rightarrow 0} \omega(t) = 0,$$

e pertanto, se

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t f(z + t\zeta_1, z + t\zeta_2, z + t\zeta_3)) = 0,$$

si ricava

$$|1, \zeta_k, \xi_k| f_x + |1, \zeta_k, \eta_k| f_y = 0.$$

Ma

$$|1, \zeta_k, \xi_k| + |1, \zeta_k, \eta_k| i = 0,$$

onde segue $if_x - f_y = 0$, se non è $|1, \xi_k, \eta_k| = 0$, e si ha dunque che:

La funzione $f(z)$ è olomorfa in A se, non essendo i punti z_1, z_2, z_3 allineati, si ha, posto $\sigma = |z_1 - z| + |z_2 - z| + |z_3 - z|$, in ogni punto z di A ,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\sigma f(z_1, z_2, z_3)) = 0,$$

quando i punti z_1, z_2, z_3 tendono omoteticamente a z , in particolare, se è determinato e finito il limite di $f(z_1, z_2, z_3)$, nel detto modo di tendere dei punti z_1, z_2, z_3 .

Per $n \geq 3$, si ha

$$f(z + t\zeta_1, z + t\zeta_2, \dots, z + t\zeta_{n+1}) = \frac{|1, \zeta_k, \dots, \zeta_k^{n-1}, \xi_k| f_x + |1, \zeta_k, \dots, \zeta_k^{n+1}, \eta_k| f_y + \omega(t)}{|1, \zeta_k, \dots, \zeta_k^{n-1}, \zeta_k^n| t^{n-1}},$$

con $\lim \omega(t)$ (per $t \rightarrow 0$) = 0, e quindi se

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t^{n-1} f(z + t\zeta_1, z + t\zeta_2, \dots, z + t\zeta_{n+1})) = 0,$$

si ricava

$$|1, \zeta_k, \dots, \xi_k^{n-1}, \xi_k| f_x + |1, \zeta_k, \dots, \zeta_k^{n-1}, \eta_k| f_y = 0,$$

onde segue $i f_x - f_y = 0$, quando sia

$$|1, \zeta_k, \bar{\zeta}_k, \zeta_k^2, \dots, \zeta_k^{n-1}| \neq 0 \quad (1),$$

e si ha dunque che:

La funzione $f(z)$ è olomorfa in A , se, verificandosi per i punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} ($n \geq 3$) la disequaglianza

$$[1] \quad |1, z_k, \bar{z}_k, z_k^2, \dots, z_k^{n-1}| \neq 0$$

si ha, posto $\sigma = |z_1 - z| + |z_2 - z| + \dots + |z_{n+1} - z|$, per ogni punto z di A ,

$$[2] \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} (\sigma^{n-1} f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})) = 0,$$

quando i punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} tendono omoteticamente a z , in particolare se è determinato e finito il limite di $f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$, nel detto modo di tendere dei punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} .

(1) Con $\bar{\zeta}_k$ indico la quantità complessa coniugata con ζ_k .

Detta ε una radice primitiva $(n+1)^{\text{ma}}$ dell'unità, per $\zeta_1 = \zeta, \zeta_2 = \varepsilon\zeta, \dots, \zeta_{n+1} = \varepsilon^n\zeta$, i punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} si dispongono secondo i vertici di un $(n+1)$ -gono regolare col centro in z , e riesce

$$\left| 1, \zeta_k, \bar{\zeta}_k, \zeta_k^2, \dots, \zeta_k^{n-1} \right| = \frac{\zeta \bar{\zeta} \zeta^2 \dots \zeta^{n-1}}{\varepsilon \varepsilon^2 \dots \varepsilon^n} \left| 1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \dots, \varepsilon^{nk} \right| \neq 0;$$

si ritrova pertanto il risultato della ZEVII. Per $n=3$, l'eguaglianza $|1, z_k, \bar{z}_k, z_k^2| = 0$, equivale alle seguenti

$$|1, x_k, y_k, x_k^2 - y_k^2| = |1, x_k, y_k, x_k \cdot y_k| = 0,$$

onde la condizione $|1, z_k, \bar{z}_k, z_k^2| \neq 0$, impone ai punti z_1, z_2, z_3, z_4 di non trovarsi simultaneamente su due iperbole equilatera di equazioni:

$$a_1(x^2 - y^2) + b_1x + c_1y + d_1 = 0, \quad a_2xy + b_2x + c_2y + d_2 = 0, \quad \text{ecc.}$$

Con quanto è stato osservato in questa e nella precedente mia nota, citata dalla ZEVII, si può dunque enunciare la curiosa proposizione:

Se $f(z)$, come funzione di x e y è differenziabile nel campo A , e se per ogni punto z di A , sussiste, con la condizione [1], la relazione di limite [2], per $n (\geq 2)$ determinata funzione di z , i punti z_1, z_2, \dots, z_{n+1} tendendo omoteticamente al punto z , allora esiste sempre, determinato e finito, il limite

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f(z_1, z_2, \dots, z_{v+1}), \quad \sigma = |z - z_1| + |z_1 - z_2| + \dots + |z_v - z_{v+1}|,$$

per qualsivoglia numero naturale v e senza che i punti z_1, z_2, \dots, z_{v+1} siano assoggettati ad alcun vincolo!

AL DI LÀ DEI LIMITI DELLA TEORIA CLASSICA DELL'ELASTICITÀ (*)

(Con quattro figure)

GUSTAVO COLONNETTI

Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Auctor, perhibens quomodo suae investigationes de elastoplasticorum corporum statica peragantur, declarat eam suam ratio differat a rationibus quas alii Auctores de eadem re inquirentes adhibere solent.

Ogni deformazione (sia pur piccolissima) di un corpo naturale può sempre riguardarsi come composta di due parti: l'una *elastica* che scompare al cessar delle cause che l'hanno prodotta; l'altra *plastica* che permane anche dopo che quelle cause hanno cessato di agire.

Nella maggior parte dei corpi naturali, fino a che la sollecitazione non oltrepassa un certo limite, la prima parte del fenomeno prevale, e la deformazione plastica si mantiene trascurabile rispetto alla deformazione elastica.

Questo limite — detto *limite di elasticità* — varia naturalmente da corpo a corpo; esso non ha d'altronde che un valore convenzionale, che dipende dalla precisione dei nostri mezzi di osservazione e dal grado di approssimazione che vogliamo raggiungere.

Sta però di fatto, in ogni caso, che, al di là di detto limite, le deformazioni plastiche non potranno più venir trascurate e la teoria classica dell'elasticità, che da esse prescinde, non potrà più venire applicata.

Le esigenze, rapidamente crescenti, della tecnica moderna hanno pertanto posto il problema delle nuove ipotesi che occorre introdurre

(*) Nota presentata nella Tornata dell'8 giugno 1941.

e delle varianti che dovranno in conseguenza venir apportate alla teoria, per tener conto della presenza del fenomeno plastico.

* * *

Il problema è stato, in questi ultimi tempi, affrontato per vie diverse da diversi autori, i quali però si sono generalmente occupati più della sua impostazione analitica che dell'aspetto fisico della questione⁽¹⁾.

Qui io vorrei richiamar l'attenzione sopra certi risultati dell'esperienza che non possono e non debbono venir persi di vista, in quanto delimitano nettamente e definitivamente il campo delle nostre possibili indagini.

Ciò varrà, se io non mi inganno, a giustificare la particolare impostazione che io ho data ai miei studi sull'argomento⁽²⁾, ed a chiarire le ragioni per cui credo di dover insistere in essa.

* * *

Premetto che, in queste indagini, io continuerò a supporre che le deformazioni siano piccolissime rispetto alle dimensioni del corpo, e

(1) Alludo in modo particolare ai recenti lavori di:

P. LOCATELLI, *Sopra il teorema del minimo lavoro per corpi non perfettamente elastici*, R. Accademia d'Italia 1939; *Estensione del teorema di Castigliano*, R. Istituto Lombardo 1939; *Estensione, flessione, torsione di corpi elasto plastici*, R. Istituto Lombardo 1940; *Estensione del principio di St. Venant a corpi non perfettamente elastici*, R. Accademia delle Scienze di Torino 1940; *Ancora sul principio di St. Venant per corpi non perfettamente elastici*, R. Accademia delle Scienze di Torino 1941.

B. FINZI, *Principio variazionale nella meccanica dei continui*, R. Accademia d'Italia 1940; *Il problema ristretto tridimensionale nella teoria della plasticità*, R. Accademia delle Scienze di Torino 1941.

M. PASTORI, *Il problema delle distorsioni nei corpi imperfettamente elastici*, R. Istituto Lombardo 1940; *Le distorsioni nei mezzi elasto plastici del Colonnetti*, R. Istituto Lombardo 1940.

(2) Cfr. G. COLONNETTI, *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche*, R. Accademia Nazionale dei Lincei, 1937; *Incrudimento ed isteresi elastica nel quadro della nuova teoria dell'equilibrio elasto plastico*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Commentationes », 1938; *La statica dei corpi elasto plastici*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Commentationes », 1938; *Alla ricerca dei fondamenti sperimentali della teoria dell'equilibrio elasto plastico*, R. Accademia Nazionale dei Lincei, 1938.

Ovvero: G. COLONNETTI, *Scienza delle costruzioni*, Torino (Einaudi), 1941.

che esse possano perciò venire nei calcoli riferite alla configurazione iniziale del sistema come se questo non si fosse mai deformato.

È noto che, nel campo delle deformazioni elastiche, questa ipotesi conduce direttamente alla formulazione della legge di Hooke, vale a dire alla proporzionalità fra forze e deformazioni.

Nel campo delle deformazioni plastiche le cose devono invece andare ben diversamente.

L'esperienza dimostra infatti che la deformazione plastica di un elemento materiale non è, generalmente parlando, determinata dalla sollecitazione a cui l'elemento stesso è *attualmente* soggetto, ma dipende dalle sollecitazioni a cui esso è stato assoggettato in precedenza (e precisamente: dalla loro grandezza, dalla durata della loro azione, dall'ordine con cui si sono succedute).

È quindi, a parer mio, da considerarsi come non rispondente a realtà qualsiasi tentativo di studiare le deformazioni plastiche di un elemento come delle funzioni (più o meno complesse poco importa) della sollecitazione *attuale* dell'elemento stesso.

La cosa potrebbe tutt'al più avere un senso quando, in virtù di particolari convenzioni, la successione delle sollecitazioni precedenti potesse intendersi implicitamente definita dalla sollecitazione attuale. Ma un tal modo di procedere potrà bensì venire utilizzato nella trattazione di qualche caso particolare; non potrà mai condurre ad una soluzione generale del problema.

In linea di massima sembra più conforme alla realtà delle cose il considerare la deformazione plastica di ciascun elemento come indipendente dalla sollecitazione attuale dell'elemento stesso, e condizionata soltanto alla circostanza che la sollecitazione abbia (attualmente o precedentemente) raggiunto il limite di elasticità del materiale.

* * *

Questo modo, apparentemente semplicistico, di impostare il problema è indubbiamente sufficiente quando la deformazione plastica è preesistente (epperò fa parte dei dati del problema) e si tratta soltanto di studiarne l'influenza sul regime statico determinato da una sollecitazione che sopravviene in seguito e che non raggiunge il limite

di elasticità del materiale — sicchè l'andamento del fenomeno si può rappresentare con un diagramma del genere di quello disegnato in figura 1.

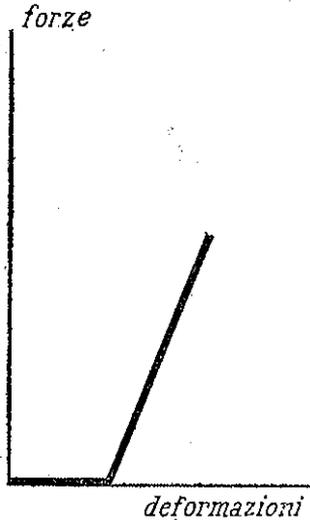


FIG. 1.

Ma quando si tratta invece di studiare il modo con cui la deformazione plastica si genera (sovrapponendosi alla deformazione elastica) sotto l'azione di una sollecitazione che tocca il limite di elasticità del materiale — per modo che l'andamento del fenomeno viene a doversi rappresentare con un diagramma del tipo di quello disegnato in figura 2 — debbo convenire che, alla mia impostazione del problema, può ragionevolmente farsi qualche obbiezione.

Il diagramma di cui si tratta rappresenta infatti un comportamento molto particolare, il quale non trova riscontro in pratica se non nel caso di certi metalli (come il ferro omogeneo o l'acciaio dolce) che, al limite di elasticità, presentano fenomeni di snervamento molto netti e ben definiti.

È stato poi anche osservato che, nei corpi omogenei, un tale comportamento implica una distribuzione di tensioni uniforme in tutte le regioni in cui si sono verificate delle deformazioni plastiche, cioè

che non è compatibile colle equazioni dell'equilibrio per forze di massa non tutte nulle.

Ma l'ipotesi della perfetta omogeneità non ha notoriamente che il valore di una pura e semplice astrazione.

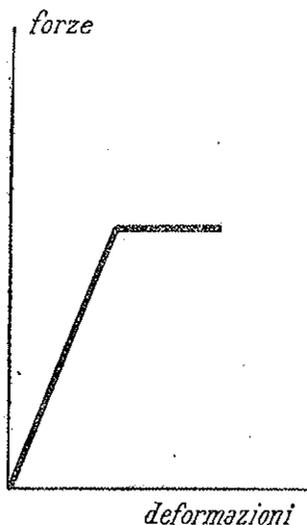


FIG. 2.

Nessun corpo naturale è, a rigore, omogeneo.

Vien quindi fatto di chiedersi se non convenga, nella teoria, sostituire a questa ipotesi astratta quella, più conforme a verità, di una ragionevole eterogeneità del materiale.

In realtà ogni difficoltà scompare se — come io ho già avuto, altra volta, occasione di suggerire — si conviene di considerare i corpi naturali come aggregati regolari di elementi dotati di limiti di elasticità differenti, opportunamente scalati tra due valori estremi ben definiti.

In queste condizioni accade infatti che, quando un elemento raggiunge il suo limite di elasticità, esso cessa di arrecare nuovi contributi alla resistenza dell'insieme, e si limita a secondare, deformandosi plasticamente, le deformazioni elastiche degli elementi attigui, a limite di elasticità più elevato; nei quali soltanto, a partire da quel momento,

si verificheranno quegli incrementi di tensioni interne che sono necessari per equilibrare gli ulteriori incrementi della sollecitazione.

In un certo senso si può dire che le tensioni interne emigrano, man mano che se ne presenta la necessità, dagli elementi che hanno toccato il limite delle loro possibilità di prestazione, a quelli che posseggono ancora un margine più o meno largo di resistenza.

Ne segue che in questi elementi (i quali, al crescere della sollecitazione, si van facendo sempre meno numerosi) l'accrescimento delle

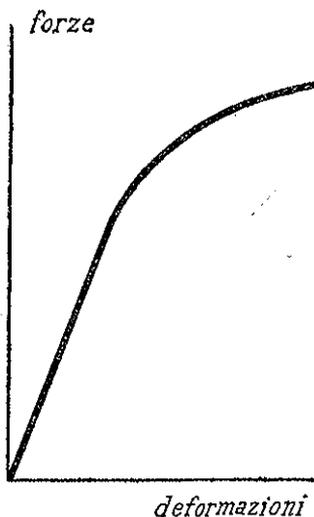


FIG. 3.

tensioni, e quindi anche delle deformazioni elastiche, si farà sempre più rapido.

Il diagramma « forze-deformazioni » si incurverà pertanto verso l'asse delle deformazioni assumendo un andamento — del genere di quello rappresentato in figura 3 — del tutto conforme a quello che l'esperienza ci rivela nella maggior parte dei materiali naturali.

* * *

Se poi il diagramma « forze-deformazioni » è noto (come accade, per esempio, quando esso è stato, su di un dato materiale, rilevato sperimentalmente) la legge secondo cui, in quel materiale, varia da

punto a punto il limite di elasticità — o, ciò che fa lo stesso, la legge, secondo cui, al crescere della sollecitazione, i singoli suoi elementi passano allo stato plastico — può considerarsi come determinata in conseguenza.

Si consideri infatti il fascio dei raggi uscenti dal polo arbitrario P ed aventi le direzioni delle successive tangenti al diagramma; e lo si immagini intersecato da una qualsiasi parallela all'asse delle forze (fig. 4).

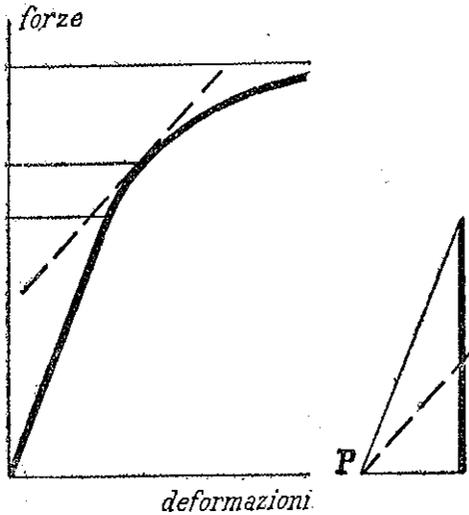


FIG. 4.

È facile constatare che l'ordinata intercetta su tale retta dal raggio corrispondente alla fase elastica del fenomeno viene, da uno qualunque degli altri raggi del fascio, divisa in parti proporzionali ai numeri degli elementi che, pel corrispondente valore della sollecitazione, si trovano rispettivamente in regime elastico ed in regime plastico.

Si arriva così a trarre, dal diagramma « forze-deformazioni » rilevato sperimentalmente, una vera e propria *definizione strutturale* del materiale, la quale giustifica e, in un certo senso, spiega la comparsa progressiva delle deformazioni plastiche e rende ragione dei fenomeni di incrudimento che le accompagnano.

Una conclusione si impone, ed è questa: che per tentar di interpretare il fenomeno plastico non giova sostituire alla classica legge di Hooke una legge non lineare la quale rappresenti più o meno bene l'andamento del fenomeno della deformazione per sollecitazioni gradatamente crescenti.

Bisogna invece, prima di tutto, rinunciare alla reversibilità del fenomeno, vale a dire alla biunivocità della corrispondenza tra forze e deformazioni.

Dopo di che — se si resta nel campo delle deformazioni piccolissime — non è neppur più necessario rinunciare alla linearità del legame. Ai fini che qui ci proponiamo è infatti pienamente sufficiente che quel legame, pur restando lineare, cessi di essere omogeneo.

APPUNTI DI MALACOLOGIA MEDITERRANEA
SULLE SPECIE DEL GRUPPO *ACANTHOCARDIUM* (*)

(Con una tavola fuori testo)

G. S. COEN

SUMMARY. — *Cardia* mediterranea nota ad sectionem *Acanthocardium* pertinentes hic examinantur; species nova describitur.

Genus *CARDIUM* Linnaeus 1758.

Sub-genus *CERASTODERMA* (Poli 1795) Mörch 1853.

Sectio *ACANTHOCARDIUM* E. Römer 1869.

Le forme mediterranee di *Acanthocardium*. pur ben distinte fra loro, sono state oggetto di sinonimia e di confusione, dovuta in gran parte alla sinonima stessa.

Ci aiuta nella loro descrizione e discussione l'opera magistrale di B. D. D. (1), che rimane classica, anche se in qualche punto si può dissentirne. B. D. D. descrivono dunque come mediterranee le specie qui sotto elencate, insieme al *C. paucicostatum* Sowerby (= *C. ciliare* Poli non Lin.) che il mio Maestro, il compianto Marchese di Monterosato, considera specie unica e tipo della sua sezione *Sphaerocardium*, e del quale pertanto non si occupa la presente nota.

Si ha quindi:

1. *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) ACULEATUM* Linneo (fig. 1, 2)
2. » » *ERINACEUM* Lamarck (fig. 3)
3. » » *DESHAYESII* Payraudeau (fig. 4),

specie sulle quali non ha luogo alcuna discussione,

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi, il 10 agosto 1941.

(1) BUCQUOY, DAÜTZENBERG e DOLLFUS, *Mollusques marins du Roussillon*. Paris, (Baillièrè), 1887-1898, vol. II.

B. D. D. escludono dal Mediterraneo il *C. echinatum* Linneo ⁽¹⁾, che è atlantico, almeno nella sua forma tipica e nella varietà *Duregnei* (De Boury mss.) Monterosato 1891 ⁽²⁾, attribuendo invece al nostro Mare, come varietà mediterranea dell'*echinatum*, il *C. mucronatum* Poli, di cui dirò più sotto.

Ora, il *C. echinatum* è effettivamente atlantico, e la fig. 5 ne rappresenta un individuo inglese; ma il Chierighini lo ammette come adriatico, e così pure Danilo e Sandri ⁽³⁾. Non credo che questi Autori adriatici abbiano confuso la specie con le altre: certo è che fu pescato al largo di Venezia il *C. echinatum*, di forma non precisamente tipica, avvicinandosi alla var. *Duregnei*, ma meno trasverso e con le coste molto meno oblique; questa forma, assai rara, rappresento a fig. 6, che riproduce l'esemplare della mia collezione, e la chiamerò *C. echinatum adriaticum*, nov. var.

A questa è prossima la var. *fasciata* Spinelli mss. in coll. ⁽⁴⁾ sicchè la lista deve comprendere anche:

4. *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) ECHINATUM ADRIATICUM* nov. var.
e *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) ECHINATUM FASCIATUM* Spinelli mss. ⁽⁴⁾.

Va notato che la descrizione e le figure 4 e 5 della tav. XVII del Poli ⁽⁵⁾ descrivono e rappresentano il *C. erinaceum* sotto il nome dell'*echinatum*, mentre descrive e figura perfettamente il suo *C. mucronatum*; evidente equivoco: l'*echinatum* vero non è affatto citato dal Poli.

Penso che il *C. echinatum adriaticum* abbia potuto trarre in errore gli autori che hanno attribuito alla sua specie il *C. mucronatum* Poli, come varietà ⁽⁶⁾.

⁽¹⁾ Ibid., vol. II, pag. 266, 267.

⁽²⁾ MONTEROSATO, *Relazione fra i Molluschi del Quaternario e le sp. viventi*. 1891, pag. 2.

⁽³⁾ DANILLO e SANDRI, *Elenco dei Molluschi lamellibranchi marittimi dei dintorni di Zara*. 1856, litografato, pag. 5, specie 30.

⁽⁴⁾ La var. *adriatica* è elencata in COEN, *Nuovo saggio di una Sylloge Moll. adriaticorum*, 1937, pag. 115, sp. 744, insieme alla var. *fasciata* Spinelli mss. in collez. del Museo di Venezia.

⁽⁵⁾ POLI, *Testacea utriusque Siciliae*, 1791, vol. I, ord. II, pag. 90, tav. XVII, fig. 4, 5.

⁽⁶⁾ B. D. D., *op. cit.*, vol. II, pag. 266, tav. XLII, fig. 4, 5.

Il Monterosato, a sua volta, citava il *C. mucronatum* come sinonimo di *C. echinatum* e di *C. Deshayesii* (1) ma corresse poi tale evidente errore perchè tutti i suoi esemplari di ogni luogo, a me dati, e che ho in collezione colle sue indicazioni autografe, accuratamente conservate, sono etichettati come *mucronatum*, ed a ragione; perchè, se vi sono due specie, pur prossime ma completamente diverse, questo è proprio il caso.

Il *C. echinatum* è globoso, trasverso, obliquo, tipicamente inequilaterale, con le coste radiali oblique, convesse, non piatte; mentre il *C. mucronatum* Poli (2) è assai più compresso, quasi equilaterale, con le coste radiali partenti quasi simmetricamente dagli umboni submediani, elevate e piatte, a sezione quadrangolare, come ben dice il Poli: « costae interjectae rectangulae », libere dalla scultura concentrica dei loro intervalli; infine, le sue papille, o tubercoli, non solo « spatuliformes » (B. D. D.) ma addirittura cupuliformi, sono caratteristiche della specie.

Abbiamo dunque ancora:

5. *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) MUCRONATUM* Poli (fig. 7, 8) e le sue varietà: *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) MUCRONATUM HIRTISSIMUM* nov. var. (fig. 9) più globoso, con papille molto più abbondanti e salienti, e *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) MUCRONATUM SUBMUTICUM* nov. var. (fig. 10) forma compressa, più equilaterale, le cui coste sono tanto profondamente solcate nel mezzo, da apparire bifide, e le papille rade e tenuissime.

Quanto al *C. propexum* Monterosato (3), che B. D. D. annettono come altra varietà all'*echinatum*, dal quale è invece diversissimo (gli autori sembrano non conoscerlo) esso va escluso dal Mediterraneo, sulla fede del Monterosato stesso: io non lo ebbi mai sott'occhio vivente, ma il Monterosato me ne donò un co-tipo fossile, con le seguenti note autografe che accompagnano l'esemplare della mia collezione: « fossile di Ficarazzi, vivente nei mari di Norvegia, non mediterraneo », e: « emigrato dal Mediterraneo come la *Cyprina islandica* »; ab abundantiam

(1) MONTEROSATO, *Enumerazione e sinonimia delle conchiglie mediterranee*, 1878, pag. 10.

(2) POLI, *op. cit.*, ibid., pag. 59, fig. 7, 8.

(3) B. D. D., *op. cit.*, vol. II, pag. 267.

e per confronto, figuro anche il co-tipo (fig. 11) chiarendo così anche questo punto.

Alle cinque specie sopraelencate devo aggiungerne una sesta, tuttora ignota, e molto differente dalle precedenti. Trattasi di un esemplare, a mia notizia fino ad oggi unico reperto, adulto e freschissimo, pescato ad Aci-Trezza e favoritomi dal chiaro prof. O. De Fiore, cui vado debitore di altre forme nuove mediterranee (¹).

6. *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) NOVUM* nov. spec.

Testa cordiformis subventrosa, solida, crassa, aequivalvis, valde inaequilateralis, postice paullum hians.

Valvae extus costis radialibus viginti, convexis, latitudine interstitiis paribus, longitudinaliter non sulcatis, ininterrupte papillarum vel tuberculorum serie horrescentibus; papillae valvas totas ornant, versus ventralem marginem fortiores, antice cupuliformes, postice in aculeos mutatis, qui conici, erecti, versum marginem acuti fiunt.

Ipsae papillae versum marginem ventralem sic intumescunt, ut ibi costae trilobatorum catenae spissorum tuberculorum videntur.

Interstitia costarum concentricè minute rugata.

Valvae intus laeves, albae, fere opacae, sulcis profundis costis exterioribus respondentibus omnino exsculptae; adductorum signa vix impressa, pallealis linea integra fere indistincta.

Cardo normalis dentibus fortibus.

Ligamentum exterius paullum saliens, inconspicuis nymphis umbo-nibus contiguis perfertum.

Colore extus fulvo ferrugineo pallido, concentricè albido confuse fasciato: tubercula ac aculea candida.

Conchiglia cuoriforme, subventricosa, solida, spessa, equivalve, fortemente inequilaterale, leggermente jante al lato posteriore.

Le valve portano all'esterno 20 coste radiali, larghe quanto i loro intervalli, convesse, non solcate per il lungo, irte di una serie continua di papille o tubercoli regnanti sull'intera valva, che divengono più forti verso il margine ventrale, cupuliformi verso l'avanti, e verso l'indietro

(¹) Vedi COEN, *Di una nuova forma mediterranea di « Calliostoma »* Ann. Mus. Genova, 1926, pag. 272-274; « *Emarginulae* » nuove del Mediterraneo, « Acta » Pont. Acc. Scientiarum, vol. III, n. 10, 1939; *Note malacologiche*, ibid., vol. IV, n. 22, 1940.

trasformantisi in aculei conici, eretti, pungenti, adunchi verso il margine.

Tali papille divengono tanto spesse verso il margine ventrale, che le coste ivi assumono l'aspetto di catene ininterrotte di tubercoli trilobati.

Interno delle valve liscio, bianco, quasi opaco, solcato in tutta la sua superficie profondamente in corrispondenza delle coste esterne: impressioni degli adduttori appena segnate, linea palleale integra quasi indistinta.

Cerniera normale con denti forti; ligamento esterno poco saliente portato da ninfe indistinte contigue agli umboni.

Colorazione esterna fulvo-ferruginoso pallido, con fascie biancastre confuse: tubercoli ed aculei candidi.

Diametro umbo-ventrale mm. 57.

» antero-posteriore mm. 65.

Spessore mm. 48.

NOTA. - La presente diagnosi segue passo passo quelle di B. D. D. (*op. cit.*) delle specie prossime, per necessario confronto.

Va osservato anzitutto l'*habitus* generale, assolutamente diverso da quello degli altri *Acanthocardia*, perchè particolarmente inequilaterale ed obliquo: poi il lato posteriore della conchiglia, che è aperto, « hians », « bâillant », come avviene soltanto nel *C. aculeatum*, mentre i *C. echinatum*, *erinaceum*, *Deshayesii*, *mucronatum* sono perfettamente chiusi. Si badi che, se anche in qualche esemplare le valve di queste specie possono combaciare non rigorosamente, esse portano sempre le crenature, corrispondenti alle coste, bene alternate in perfetta reciprocità: mentre nei margini della fessura (il « *bâillement* » di B. D. D.) del *C. aculeatum* e del *C. novum* la crenatura scompare, perchè in quel tratto le coste non raggiungono il margine della valva.

B. D. D. escludono dal Mediterraneo il *C. echinatum* Linneo (1), che è atlantico, almeno nella sua forma tipica e nella varietà *Duregnei* (De Boury mss.) Monterosato 1891 (2), attribuendo invece al nostro Mare, come varietà mediterranea dell'*echinatum*, il *C. mucronatum* Poli, di cui dirò più sotto.

Ora, il *C. echinatum* è effettivamente atlantico, e la fig. 5 ne rappresenta un individuo inglese; ma il Chierighini lo ammette come adriatico, e così pure Danilo e Sandri (3). Non credo che questi Autori adriatici abbiano confuso la specie con le altre: certo è che fu pescato al largo di Venezia il *C. echinatum*, di forma non precisamente tipica, avvicinandosi alla var. *Duregnei*, ma meno trasverso e con le coste molto meno oblique; questa forma, assai rara, rappresento a fig. 6, che riproduce l'esemplare della mia collezione, e la chiamerò *C. echinatum adriaticum*, nov. var.

A questa è prossima la var. *fasciata* Spinelli mss. in coll. (4) sicchè la lista deve comprendere anche:

4. *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) ECHINATUM ADRIATICUM* nov. var.
e *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) ECHINATUM FASCIATUM* Spinelli mss. (4).

Va notato che la descrizione e le figure 4 e 5 della tav. XVII del Poli (5) descrivono e rappresentano il *C. erinaceum* sotto il nome dell'*echinatum*, mentre descrive e figura perfettamente il suo *C. mucronatum*; evidente equivoco: l'*echinatum* vero non è affatto citato dal Poli.

Penso che il *C. echinatum adriaticum* abbia potuto trarre in errore gli autori che hanno attribuito alla sua specie il *C. mucronatum* Poli, come varietà (6).

(1) Ibid., vol. II, pag. 266, 267.

(2) MONTEROSATO, *Relazione fra i Molluschi del Quaternario e le sp. viventi*. 1891, pag. 2.

(3) DANILLO e SANDRI, *Elenco dei Molluschi lamellibranchi marittimi dei dintorni di Zara*. 1856, litografato, pag. 5, specie 30.

(4) La var. *adriatica* è elencata in COEN, *Nuovo saggio di una Sylloge Moll. adriaticorum*, 1937, pag. 115, sp. 744, insieme alla var. *fasciata* Spinelli mss. in collez. del Museo di Venezia.

(5) POLI, *Testacea utriusque Siciliae*, 1791, vol. I, ord. II, pag. 90, tav. XVII, fig. 4, 5.

(6) B. D. D., *op. cit.*, vol. II, pag. 266, tav. XLII, fig. 4, 5.

Il Monterosato, a sua volta, citava il *C. mucronatum* come sinonimo di *C. echinatum* e di *C. Deshayesii* (1) ma corresse poi tale evidente errore perchè tutti i suoi esemplari di ogni luogo, a me dati, e che ho in collezione colle sue indicazioni autografe, accuratamente conservate, sono etichettati come *mucronatum*, ed a ragione; perchè, se vi sono due specie, pur prossime ma completamente diverse, questo è proprio il caso.

Il *C. echinatum* è globoso, trasverso, obliquo, tipicamente inequilaterale, con le coste radiali oblique, convesse, non piatte; mentre il *C. mucronatum* Poli (2) è assai più compresso, quasi equilaterale, con le coste radiali partenti quasi simmetricamente dagli umboni submediani, elevate e piatte, a sezione quadrangolare, come ben dice il Poli: « costae interjectae rectangulae », libere dalla scultura concentrica dei loro intervalli; infine, le sue papille, o tubercoli, non solo « spatuliformes » (B. D. D.) ma addirittura cupuliformi, sono caratteristiche della specie.

Abbiamo dunque ancora:

5. *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) MUCRONATUM* Poli (fig. 7, 8) e le sue varietà: *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) MUCRONATUM HIRTISSIMUM* nov. var. (fig. 9) più globoso, con papille molto più abbondanti e salienti, e *CARDIUM (ACANTHOCARDIUM) MUCRONATUM SUBMUTICUM* nov. var. (fig. 10) forma compressa, più equilaterale, le cui coste sono tanto profondamente solcate nel mezzo, da apparire bifide, e le papille rade e tenuissime.

Quanto al *C. propexum* Monterosato (3), che B. D. D. annettono come altra varietà all'*echinatum*, dal quale è invece diversissimo (gli autori sembrano non conoscerlo) esso va escluso dal Mediterraneo, sulla fede del Monterosato stesso: io non lo ebbi mai sott'occhio vivente, ma il Monterosato me ne donò un co-tipo fossile, con le seguenti note autografe che accompagnano l'esemplare della mia collezione: « fossile di Ficarazzi, vivente nei mari di Norvegia, non mediterraneo », e: « emigrato dal Mediterraneo come la *Cyprina islandica* »; ab abundantiam

(1) MONTEROSATO, *Enumerazione e sinonimia delle conchiglie mediterranee*, 1878, pag. 10.

(2) POLI, *op. cit.*, ibid., pag. 59, fig. 7, 8.

(3) B. D. D., *op. cit.*, vol. II, pag. 267.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

- Fig. 1. *C. aculeatum*, Napoli, lato destro.
» 2. » » lato posteriore per mostrare l'*hiatus*.
» 3. *C. erinaceum*, » lato destro.
» 4. *C. Deshayesi*, Sardegna, le due valve.
» 5. *C. echinatum*, tipo d'Inghilterra, lato sinistro.
» 6. » *adriaticum*, Venezia, lato sinistro.
» 7. *C. mucronatum*, Napoli, lato sinistro.
» 8. » Venezia, lato destro.
» 9. » *hirtissimum*, fuori di La Spezia, 500 m. prof., lato sinistro.
» 10. » *submuticum*, Venezia, lato sinistro.
» 11. *C. propexum*, fossile di Ficarazzi, le due valve.
» 12. *C. novum*, Aci Trezza, valva destra, esterno.
» 13. » » valva sinistra, interno.
» 14. » » lato posteriore per mostrare l'*hiatus*.

(Tutte le figure sono approssimativamente di grandezza naturale).

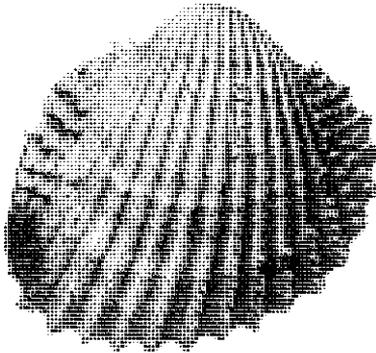


FIG. 1.

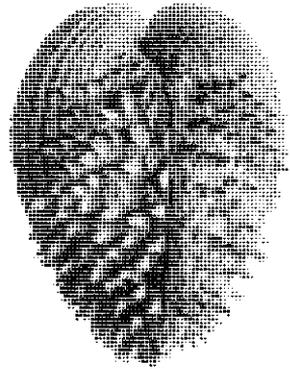


FIG. 2.

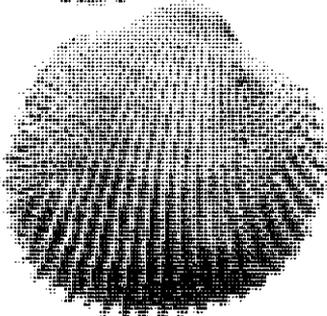


FIG. 3.

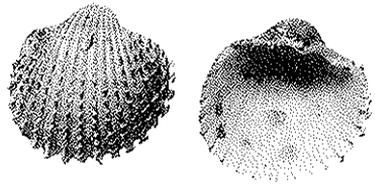


FIG. 4.



FIG. 5.



FIG. 6.

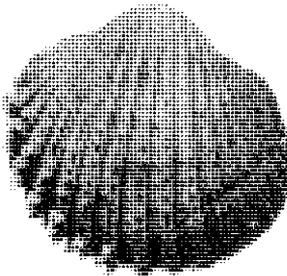


FIG. 7.

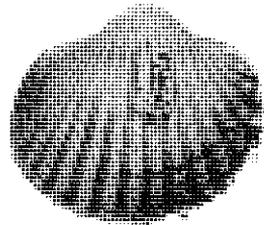


FIG. 8.

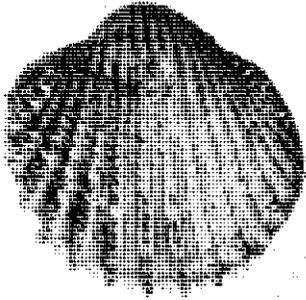


FIG. 9.

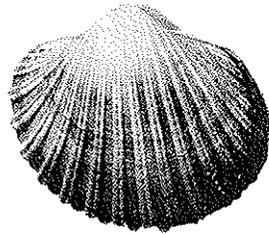


FIG. 10.

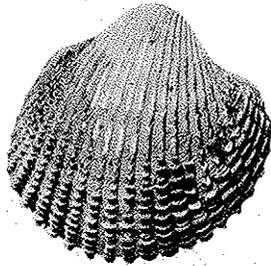


FIG. 11.

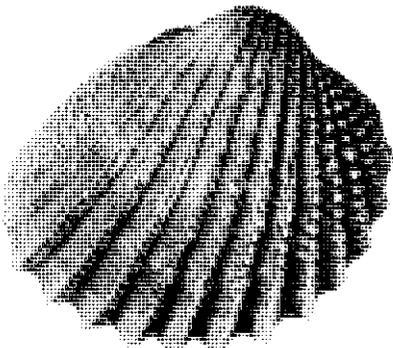
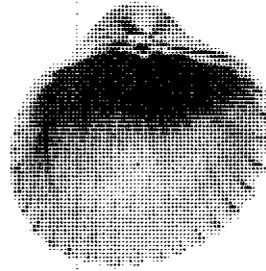


FIG. 12.



FIG. 13.

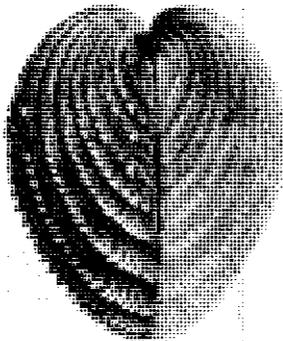


FIG. 14.

NUOVE VARIETÀ DI *ARGOBUCCINUM*^(*)

(Con una tavola fuori testo)

G. S. COEN

SUMMARY. — *Argobuccini gigantei* varietates adhuc non discretas hic describuntur.

L'*Argobuccinum giganteum* Lamarck, già tipo del genere *Ranella* Lamarck 1812 per la disposizione simmetrica bilaterale delle serie longitudinali di varici; esclusone poi per l'assenza del canale aperto posteriore al sommo dell'apertura; chiamato *Apollo gyrina* dal Montfort (fide Lamarck, Blainville); oggi tipo della sezione *Gyrina* Schumacher 1807 del genere *Argobuccinum*, è specie assai notevole per essere l'unica europea del genere, oltre che per la sua statura e per l'*habitus* particolare.

B. D. D. ⁽¹⁾ lo descrivono sommariamente, non tenendo conto della disposizione delle serie di varici. Tale disposizione è però caratteristica, perchè le varici sono in due serie longitudinali laterali, « subcontinue », come nelle *Ranella* ⁽²⁾; e se non sono assolutamente « continue » si è perchè la direzione di ciascuna varice nel rispettivo anfratto non è parallela all'asse della conchiglia e non forma con la sutura un angolo retto, ma è inclinata nel senso che la base di ogni varice è spostata all'indietro rispetto al sommo delle varice stessa: questa obliquità non infirma affatto la disposizione subcontinua delle loro serie, perchè la

^(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi il 8 settembre 1941.

⁽¹⁾ BUCQUOY, DAUTZENBERG e DOLLFUS, *Mollusques Marins du Roussillon*, 1882-1886, Paris, Baillière, vol. I, pag. 28, tav. III, fig. 1.

⁽²⁾ P. FISCHER, *Manuel de Conchyliologie et de Paléontologie conchyliologique*, 1887, Paris, Savy, pag. 655.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

- Fig. 1. Var. *oceanica* nov. var. (Arcachon).
» 2. » *bronniana* De Gregorio (Palermo).
» 3. » *curvicauda* nov. var. (Palermo).
» 4. » *magnifica* nov. var. (Aci Trezza?).
» 5. » *tenuis* nov. var. (Sardegna).
» 6. » *intusdentata* nov. var. (Mediterraneo).
» 7. » *nodosecarinata* nov. var. (Sicilia).
» 8. » *dilatata* nov. var. (Santa Margherita Ligure).

N. B. Tutte le figure sono esattamente in metà della grandezza naturale



FIG. 1.

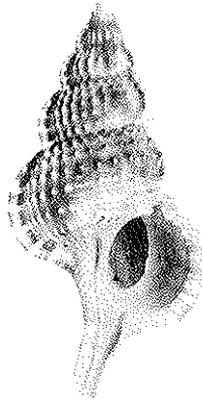


FIG. 2.

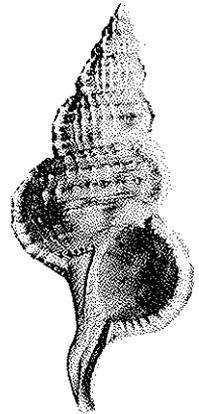


FIG. 3.

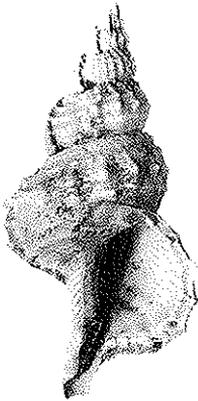


FIG. 5.



FIG. 4.



FIG. 6.

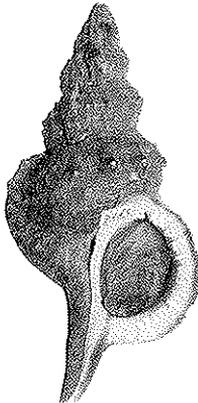


FIG. 7.



FIG. 8.