

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

A C T A

ANNUS IV
VOLUMEN IV



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCXXXIX

INDEX

| | FOL. |
|---|-------------|
| 1. <i>Resoconto della solenne Tornata inaugurale del IV anno accademico all'augusta presenza di S. S. Pio XII e della I Tornata ordinaria (3 dicembre 1939)</i> | 1-XXXVI |
| <i>Resoconto della solenne Tornata ufficiale in commemorazione del Santo Padre Pio XI di venerata memoria (18 febbraio 1940)</i> | XXXVII-LII |
| <i>Resoconto della seconda Tornata ordinaria del IV anno accademico (18 febbraio 1940)</i> | LIII-LX |
| <i>Resoconto della terza tornata ordinaria del IV anno accademico (19 maggio 1940)</i> | LXI-LXXVIII |
| 2. G. COLONNETTI, <i>Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il caso della presso-flessione) (cum 1 fig.)</i> | 1-14 |
| 3. L. MARCHETTI, <i>Sulla costanza dei tensori ϵ</i> | 15-22 |
| 4. T. LEVI-CIVITA, <i>Nozione adimensionale di vortice e sua applicazione alle onde trocoidali di Gerstner</i> | 23-30 |
| 5. G. PALUMBI, <i>La fine vascolarizzazione ed innervazione del globo carotideo dei mammiferi</i> | 31-36 |
| 6. G. GUIDI, <i>Le tensioni interne nel cordone di saldatura trasversale</i> | 37-48 |
| 7. B. GROSS, <i>Über den breiteneffekt der komischen Strahlung (cum 5 fig.)</i> | 49-60 |
| 8. G. COLONNETTI, <i>Di un nuovo procedimento per la messa in tensione delle armature nelle strutture in cemento armato (cum 3 fig.)</i> | 61-68 |
| 9. G. COLONNETTI, <i>Studi di coazione da armature incrociate</i> | 69-72 |
| 10. P. SCATIZZI, <i>Profili di spiaggia (cum 2 fig.)</i> | 73-80 |
| 11. V. DARWIN, <i>Le grandezze fisiche di un magnete secondo la nuova metrologia (cum 1 fig.)</i> | 81-88 |

| | FOL. |
|--|---------|
| 12. S. A. DE MAYOLO, <i>Loi des forces dans un système gravitationnel du type soleil-planète</i> | 89-96 |
| 13. M. CIMINO, <i>Nuova orbita del pianeta 747 Winchester e perturbazioni speciali di Giove dal 1929 al 1940</i> | 97-114 |
| 14. V. VOLTERRA, <i>Energia nei fenomeni elastici ereditari</i> | 115-130 |
| 15. G. APRILE, <i>Sul calcolo degli stati di regime in circuiti sottoposti a F. E. M. periodiche di forma qualunque (cum 1 fig.)</i> | 131-136 |
| 16. G. ALBENGA, <i>In margine d'una nota del Colonnetti (cum 3 fig.)</i> | 137-142 |
| 17. G. COLONNETTI, <i>Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il problema della sezione parzializzata) (cum 1 tab.)</i> | 143-146 |
| 18. G. GARCÍA, <i>Reducción de las ecuaciones pendulares à la ecuación de V. Volterra de secunda especie</i> | 147-154 |
| 19. G. COLONNETTI, <i>Elasticità e resistenza di travi con armature preventivamente tese (Nota prima) (cum 4 fig. ed 1 tab.)</i> | 155-162 |
| 20. A. MELICCHIA, <i>La distribuzione delle aree di bassa pressione sull'Atlantico Settentrionale e sull'Europa nel decennio 1930-39 (cum 12 fig.)</i> | 163-178 |
| 21. G. COLONNETTI, <i>Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il proporzionamento dell'armatura) (cum 1 fig.)</i> | 179-184 |
| 22. G. S. COEN, <i>Note malacologiche (cum 3 tab.)</i> | 185-192 |
| 23. G. APRILE, <i>Sul calcolo del regime periodico nei sistemi elettrici continui sottoposti a f. e. m. periodiche di forma qualunque (cum 1 fig.)</i> | 193-198 |
| 24. G. S. COEN, <i>Sul genere Astarte J. Sowerby 1811</i> | 199-202 |
| 25. W. SIERPIŃSKI, <i>Sur l'opération $\overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \Phi(x, y)$</i> | 203-206 |
| 26. W. SIERPIŃSKI, <i>Sur une propriété des ensembles ordonnés</i> | 207-210 |
| 27. W. SIERPIŃSKI, <i>Sur les bases dénombrables des familles de fonctions</i> | 211-214 |



Pius pp XII

RESOCONTO
DELLA SOLENNE TORNATA INAUGURALE
DEL IV ANNO ACCADEMICO
ALL'AUGUSTA PRESENZA DI S. S. PIO XII

(8 dicembre 1939)

Domenica, 8 dicembre 1939, all'Augusta presenza del Santo Padre, si è tenuta la solenne Tornata Inaugurale del quarto Anno Accademico della Pontificia Accademia delle Scienze.

In precedenza gli Accademici Pontifici, a norma dello Statuto, avevano ascoltato la Santa Messa, che Sua Eminenza Reverendissima il Signor Cardinale Luigi Maglione, Segretario di Stato di Sua Santità ed Accademico Pontificio Onorario, aveva celebrato nella Cappella Paolina per ottenere la benedizione di Dio sui lavori dell'Accademia, per ringraziarlo, per invocare la protezione divina sulla Chiesa e sul Sommo Pontefice e per suffragare gli Accademici defunti.

La solenne Tornata Inaugurale si è svolta alla Casina di Pio IV, nei Giardini Vaticani, nella nuova aula delle sedute.

Alla solenne Tornata hanno assistito le Loro Eminenze Reverendissime i Signori Cardinali: Luigi Maglione e Giuseppe Pizzardo, Accademici Pontifici Onorari; Augusto Hlond, Pietro Fumasoni-Biondi, Federico Tedeschini, Carlo Salotti, Enrico Sibilia, Francesco Marmaggi, Eugenio Tisserant, Ermenegildo Pellegrinetti, Camillo Caccia-Dominioni, Nicola Canali, Domenico Iorio, Vincenzo La Puma e Federico Cattani.

Erano presenti altresì S. Emza il Principe Ludovico Chigi Albani della Rovere, Gran Maestro del Sovrano Militare Ordine di Malta, Accademico Pontificio Onorario; S. E. il Marchese Camillo Serafini, Governatore dello Stato della

Città del Vaticano, S. E. il Marchese Carlo Pacelli, Consigliere Generale dello Stato; gli Eccm̃i Parenti di Sua Santità; le LL. EE. Reverendissime i Monsignor: Tardini, Segretario della Sacra Congregazione degli Affari Ecclesiastici Straordinari; Montini, Sostituto della Segreteria di Stato di Sua Santità; Ruffini, Malchiodi, De Romanis, Rosa, Costantini, Santin, Devoto, Caggiano, Carinci, Grazioli, Rossino, Giannattasio e Castelli; una larga rappresentanza dell'Excellentissimo Corpo Diplomatico accreditato presso la Santa Sede, accolto dal Comm. Belardo, della Segreteria di Stato di S. Santità, in cui erano rappresentate le seguenti Nazioni: Perù, Francia, Italia, Colombia, Spagna, Romania, Argentina, Polonia, Belgio, Sovrano Militare Ordine di Malta, Cuba, Venezuela, Ungheria, Equatore, Slovacchia, Lituania, Costarica, Irlanda, Germania, Brasile, Portogallo, Gran Bretagna e Jugoslavia; il Revmo P. Cordovani O. P., Maestro del Sacro Palazzo Apostolico; numerosi Prelati; Generali di Ordini Religiosi, tra cui il Revmo P. Schurmans S. J. Vicario del Preposito Generale, il Revmo P. Leonardo M. Bello O. F. M., il Revmo P. da Welle O. M. Cap.; il Gr. Uff. Prof. Pietro De Sanctis, Accademico Pontificio Onorario; S. E. il Ministro d'Olanda presso il Re d'Italia; rappresentanze degli Atenei e Accademie Ecclesiastiche di Roma; l'ing. Pietro Enrico Galeazzi, Delegato della Pont. Commissione per lo S. C. V.; ed altre molte personalità ecclesiastiche e laiche della Città del Vaticano.

La Reale Accademia d'Italia era rappresentata dal Vice Presidente Vallauri, appositamente delegato dal Presidente; presenti inoltre rappresentanze del Consiglio Nazionale delle Ricerche, della R. Università e di altri Enti culturali e scientifici di Roma, oltre a numerose personalità italiane ed estere.

Della Pontificia Accademia delle Scienze hanno partecipato alla solenne Tornata, oltre al Presidente Revmo P. Agostino Gemelli O. F. M., gli Accademici: Amaldi, Armellini, Bottazzi, Buytendijk, Colonnetti, Crocco, Ghigi, Giordani, Giorgi, Gola, Guidi, Lemaitre, Lepri, Levi-Civita, Lombardi, Somigliana, Michotte van den Berck, Noyons, Pensa, Petritsch, Pistolesi, Rondoni, Silvestri, Toniolo, Vallauri, Vercelli; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: Dom Albareda O. S. B., P. Gatterer S. J., Mons. A. Mercati, P. Stein S. J., ed il Cancelliere dell'Accademia Dott. Pietro Salviucci.

L'Augusto Pontefice, preceduto dalla Sua Nobile Corte e scortato dall'Esente di servizio della Guardia Nobile, è giunto alla Sede dell'Accademia alle ore 10,30, ed è sceso al Suo ingresso privato, ricevuto dal Presidente Revmo P. Agostino Gemelli O. F. M.

Il Santo Padre è subito entrato nell'Aula e, ricevuto l'omaggio degli Eminentissimi Cardinali intervenuti e dei componenti il distinto consesso Si è assiso alla presidenza dell'eletta assemblea, avendo ai lati S. E. Revma Mons. Arborio Mella di Sant'Elia, Maestro di Camera; S. E. Revma Mons. Migone, Arcivescovo titolare di Nicomedia, Elemosiniere Segreto e i Camerieri Segreti Partecipanti Illmi e Revmi Monsignori, Callori di Vignale, Confalonieri, Venini e Nasalli Rocca di Corneliano.

L'AUGUSTA PAROLA DEL SANTO PADRE

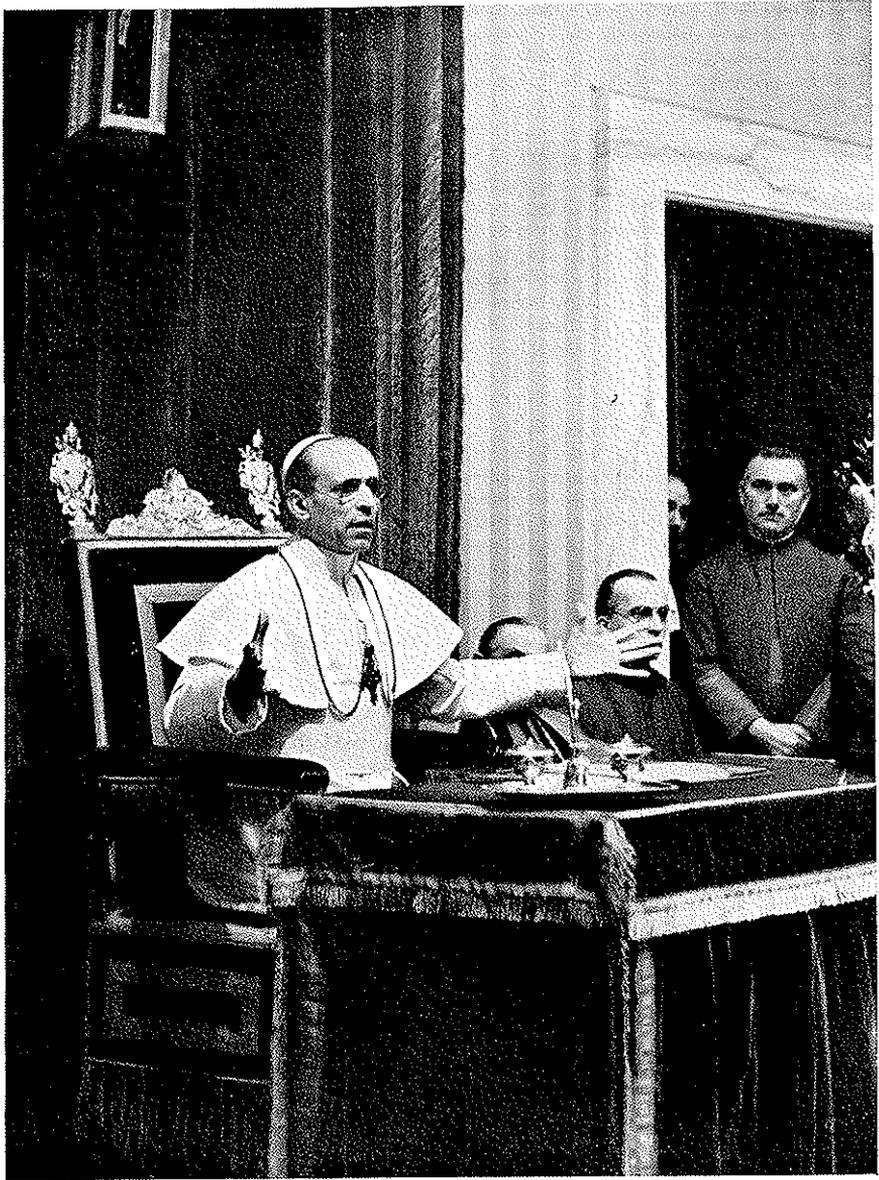
L'Augusto Pontefice, ricevuto il devoto omaggio di tutti gli intervenuti, ha subito proceduto all'inaugurazione del quarto Anno Accademico tenendo all'illustre uditorio il seguente mirabile discorso.

Al gradimento e alla compiacenza che proviamo nell'inaugurare il nuovo anno scientifico della Pontificia Accademia delle Scienze, risponde la Nostra soddisfazione di trovarCi in mezzo a questa nobile accolta di Emi Cardinali, di Eccmi diplomatici, di ragguardevoli personaggi, e di insigni maestri e indagatori delle scienze fisiche, matematiche e naturali e della loro storia. In un simile convegno e in questa stessa sala già altra volta voi udiste la Nostra modesta parola apportatrice del messaggio del Nostro incomparabile Predecessore Pio XI, quando egli, a riparare il diminuito vigore, non dell'animo ardimentoso, ma del corpo affievolito, piegò il suo volere al consiglio di chi vegliava sulla sua vita preziosa. Il suo glorioso nome ormai è scritto a caratteri indelebili nei fasti della Storia, non meno che nella prima pagina di questa Accademia delle Scienze da lui costituita, la quale, se nella struttura e nel titolo suona nuova, nella via della natura, nell'intento e nella mèta, rifà e riporta a più moderna altezza scientifica e universale l'antica e illustre Accademia dei Lincei, già rinnovata dal gran Pontefice Pio IX, Nostro Predecessore di imperitura memoria.

A Pio XI, assiso pure un anno fa in quest'aula — che ora si adorna della venerata sua effigie —, torna mesto e riverente il Nostro pensiero e

il grato affetto dell'animo Nostro, che ammirava nella mente e nel cuore di lui quelle potenti ascensioni ed ardimenti di spirito pensoso del passato, del presente e del futuro, le quali ammantarono il trono di lui dei fulgori della più alta pietà, del più indefesso sacrificio, della più vigilante sollecitudine, della più ampia dilatazione della fede, del più vivido avviamento del sapere ecclesiastico, del più moderno incremento e frutto dell'investigazione scientifica. Quest'Accademia — da lui stesso già affidata alle cure del benemerito ed infaticabile Presidente, P. Gemelli — parla a voi del suo più ardito vanto. È un'alpestre salita di lui sull'eccelsa e vasta cerchia delle Alpi delle scienze, dove la verità leva alta la fronte sopra le valli e i piani che separano regioni e paesi; dove la verità, che sale dagli abissi della terra e dei mari e scende dalle profondità dei cieli aduna, o illustri scienziati, i vostri ingegni indagatori e la vostra voce sapiente a cantare l'inno della ragione umana alle orme lasciate nell'universo dal Creatore, quando ebbe compiuti i cieli e la terra e tutto il loro ornato (Gen., 2-12). Riposando Iddio da nuove opere, dice sant'Agostino, non partì, abbandonando a sè stesso il mondo (S. Augustini, De Genesi ad Litteram, l. 4, c. 12, n. 22; Migne, PL., t. 34, col. 304); ma conservò nell'eterno suo consiglio il provvido pensiero dell'uomo, e sostenendo sul nulla col dito della sua onnipotenza l'universo e il suo moto, lo lasciò alle dispute degli uomini, senza che l'uomo scopra l'opera che Dio fa dal principio alla fine (Eccle., 3, 11). È un grande enigma, che al genere umano decaduto Dio ha proposto perchè nello scioglierlo si affatichi (Eccle., 1, 13); quell'enigma del Dio ignoto operante nel creato, che l'apostolo Paolo additava ai filosofi Epicurei e Stoici nell'Areopago ateniese, dicendo che un tal Dio ignoto aveva sparso la progenie degli uomini su tutta la terra attraverso i tempi, perchè cercassero Dio, se mai lo rinvenissero, quantunque egli non sia lungi da ciascuno di noi (Act., 17, 18-27).

L'enigma del creato ha affaticato da secoli l'ammirazione e l'intelletto di tutte le genti; delle sue soluzioni multiformi ha fatto risuonare i portici e le scuole dell'Accademia, del Peripato e dello Stoa; dei suoi volumi ha riempito le biblioteche antiche e moderne; delle dispute sopra le vie del decifrarlo ha suscitato lotte fra i sapienti indagatori della natura, della materia e dello spirito. Queste fatiche, queste lezioni, questi volumi,



queste lotte altro non sono che ricerche della verità nascosta nelle fasce dell'enigma. Che altro mai, esclama il genio di Ippona, che altro mai più desidera l'anima umana se non la verità? (S. Augustini, *In Joannis Evangelium*, tract. XXVI, n. 5; Migne, *PL.*, t. 35, col. 1609).

Sì, le vostre anime, o illustri Accademici, bramano e cercano la verità, che palpita nell'involucro di ciò che vediamo, ascoltiamo, flutiamo, gustiamo, tocchiamo, e sentiamo in mille forme, e inseguiamo col nostro pensiero negli avvolgimenti dei pesi, dei numeri, delle misure, dei moti visibili e invisibili, dove si agita, si trasforma, si mostra e si cela per apparire più vicina o più lontana; dove sfida il nostro acume, le nostre macchine, le nostre esperienze, e spesso ci minaccia col terrore di una forza più valida dei nostri strumenti e dei nostri congegni, meravigliosi portenti della mano e dell'industriosa arte nostra. Tale è il vigore, l'allettamento, la bellezza e la impalpabile vita della verità, che si sprigiona dall'aspetto e dall'indagine della immensa realtà che ci circonda.

Voce e verbo, che la realtà delle cose manda alla nostra mente attraverso i mirabili sensi della nostra natura plasmata di carne e di spirito, è la verità da noi cercata per le smisurate vie dell'universo. Come noi non creiamo la natura, così non creiamo la verità: i nostri dubbi, le opinioni nostre, le nostre noncuranze o negazioni non la mutano. Noi non siamo la misura della verità del mondo, nè di noi stessi, nè dell'alto fine a cui siamo destinati. L'arte nostra sagace misura la verità dei nostri arnesi e strumenti, dei nostri apparecchi e congegni, trasforma e incatena e doma la materia, che la natura ci offre, ma non la crea; e deve restare paga a seguire la natura, come il discepolo fa col maestro, del quale imita l'opera. Quando il nostro intelletto non si conforma alla realtà delle cose o è sordo alla voce della natura, vaneggia nella illusione dei sogni, e corre dietro a vanità che pure persona. Onde disse bene il sommo Poeta italiano che la natura lo suo corso prende - dal divino intelletto e da sua arte... - che l'arte vostra quella, quanto puote, - segue, come il maestro fa 'l discente, - sì che vostr'arte a Dio quasi è nipote (*Inf.*, XI, 99-105).

Ma non solo l'arte nostra è nipote a Dio, bensì lo è ancora la verità del nostro intelletto, perchè nella scala della verità conosciuta esso si trova

quaggiù, per così dire, al terzo gradino nella discesa sotto la natura e sotto Dio. Fra Dio e noi sta la natura. Inseparabile è la verità della natura di fronte all'infalibile arte della mente creatrice che la sostiene nell'essere e nell'operare, e così ne misura la verità nella realtà delle cose. Accidentale invece alla natura e alle cose è la relazione di verità, di cui le riveste, come effetto della loro contemplazione e investigazione, il debole intelletto nostro, che non possiede, come pensarono alcuni, idee innate dalla nascita; ma per via del senso inizia la conoscenza delle cose percepite nelle loro esteriori accidentalità e qualità che sono per se stesse sensibili; sicchè può appena per mezzo di questi fenomeni esterni giungere all'interna cognizione delle cose, anche di quelle le cui accidentalità sono perfettamente percepite dai sensi (*Contra Gent.*, l. IV, cap. 1). E perciò l'ingegno umano, non offuscato da pregiudizi e da errori, comprende che, come la natura è figlia di Dio, misurata nella sua verità dalla mente divina, così, misurando essa stessa la cognizione della mente nostra che l'apprende per mezzo dei sensi, fa sì che la verità della nostra scienza sia figlia di lei e quindi nipote a Dio.

Non vi stupite pertanto se Noi scorgiamo in voi, sapienti scrutatori della natura e delle cose sensibili, i forti e profondi evocatori delle verità più recondite latenti nella natura, secondo il grande principio del Filosofo di Stagira che *cognitio nostra incipit a sensu*; principio che ci fa conoscere la stanza data quaggiù da Dio a quel divino straniero che è l'uomo; straniero, delle create cose la più bella, dalla fronte che guarda il ciel e al cielo tende, dalla mano che tutto sente e tutto afferra, - e nell'arte incallisce, e ardita e pronta - cittadini innalza e opposti monti atterra; dallo spirito, immagine dell'Eterno, spirito, del quale ciascuno di voi che ne conosce l'ammiranda prigione di muscoli e di ossa e nervi e vene e sangue e fibre, deve sentire in sé la nobiltà e la grandezza, ed esclamare davanti a ogni figlio d'Adamo decaduto, che fra il tumulto degli affetti conserva ancora sul volto le reliquie dell'antiche forme: Ancor dell'alta origine divina - i sacri segni riconosco; ancora - sei bello e grande nella tua rovina (Monti, *La bellezza dell'universo*).

L'uomo per la scala dell'universo sale fino a Dio: l'astronomo arrivando al cielo, sgabello del trono di Dio, non può essere incredulo alla voce del firmamento; di là dai soli e dalle nebulose astrali varca il pen-

siero seguito dall'amore e dall'adorazione, e veleggia verso un Sole che illumina e riscalda non la creta dell'uomo, bensì lo spirito che l'avviva.

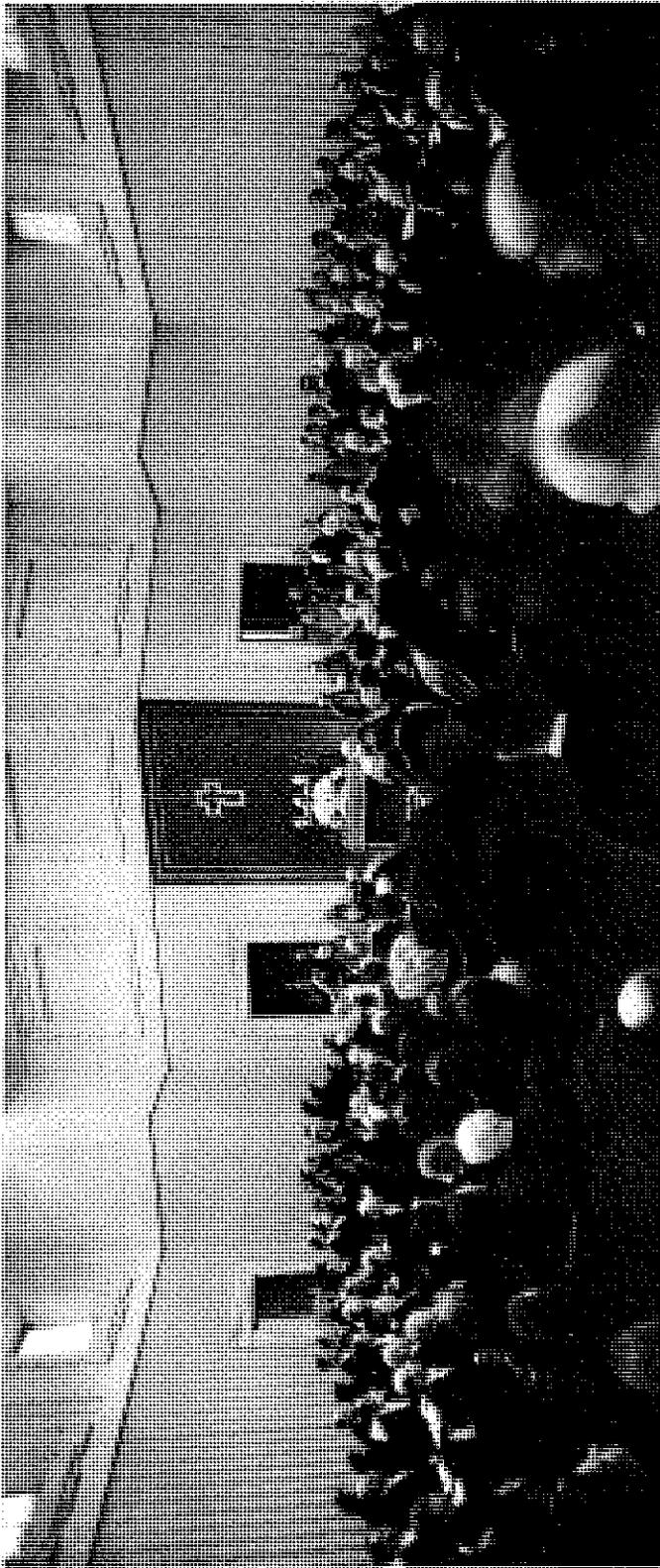
Ecco la gioia del conoscere e del sapere, anche poco, dello smisurato pelago di verità che ci circonda, noi vaganti nella navicella della nostra vita con la bussola del nostro ingegno! Ma in questa crociera intellettuale Vi è più che indarno da riva si parte, - perchè non torna tal qual ei si move, - chi pesca per lo vero e non ha l'arte (Par., XIII, 121).

Con la gioia del conoscere, voi, eletti ingegni, congiungete l'arte della ricerca del vero, e tornate nei ritiri dei vostri studi e dei vostri laboratori non quali ne siete usciti, ma ricchi di un pensiero ch'è la conquista di un enigma, per accrescere il mirabile patrimonio della scienza. È questa la via del progresso umano, via scabrosa, via segnata dalle orme dei più audaci eroi dell'indagine, da Talete, da Aristotele, da Archimede, da Tolomeo, da Galeno a Bacone, a Leonardo da Vinci, a Copernico, a Galilei, a Kepler, a Newton, a Volta, a Pasteur, a Curie, a Hertz, a Edison, a Marconi, a cento altri; a voi, infine che, da loro ricevendo la fiaccola dell'investigazione e del sapere, la trasmettete più luminosa a più giovani eroi, non timidi degl'inciampi e dei cimenti del cammino nè paurosi dei funerei monumenti dei gloriosi caduti per via. L'ammaestramento è padre dell'indagine. Poca favilla gran fiamma seconda. Alle scoperte dei predecessori si sovrappongono, ampliando e correggendo i nuovi frutti delle invenzioni dei continuatori, prodigi di scienza fisica, matematica e industriale, che rendono attonita ed altera l'età presente, presaga e avida di più portentose meraviglie. L'arcano del vero, da secoli nascosto e sepolto nell'universo, voi lo andate svelando; vi apprestate a scomporre lo stesso atomo, per tentar di penetrare più intimamente nella conoscenza della costituzione dei corpi; destate e rivelate forze, incognite agli avi nostri, le imprigionate e dirigete dove vi aggrada, ne propagate la voce e la moltiplicate fino agli estremi della terra e, insieme colla parola, vi preparate a far risplendere innanzi al nostro sguardo la immagine viva dei fratelli e del mondo antipodo, mentre con ala rombante v'innalzate dal suolo a contendere il regno dei venti alle aquile e a vincerle nel volo e nell'altezza.

Questa meravigliosa elevazione che fa l'uomo nel cielo sopra le città e le pianure e i monti del globo a Noi pare che Dio l'abbia concessa al-

l'ingegno umano nel nostro secolo per rammentargli una volta di più, come da « l'aiuola che ci fa tanto feroci » (Par., XXII, 151) l'uomo possa ascendere a Dio per quella medesima via per la quale discendono le cose; cosicchè, mentre tutte le perfezioni delle cose discendono ordinatamente da Dio, sommo vertice degli esseri, l'uomo invece, cominciando dalle inferiori e salendo di grado in grado, possa avanzarsi nella conoscenza di Dio, prima causa, sempre più nobile di ogni suo effetto. La verità, che a voi dicono le cose inferiori nella loro varietà e diversità, non è quella che odium parit, bensì quella verità che si solleva sopra le divisioni e i dissensi degli animi, che affratella gl'ingegni e gli spiriti nell'amore del vero, perchè una verità ama l'altra e, come sorelle, figlie di una medesima madre, la sapienza divina, si baciano in fronte alla presenza di Dio. In voi, perspicaci indagatori della natura, il Nostro Antecessore di veneranda memoria ravvisò i grandi amici della verità, nel cui amore la scienza vostra vi affratella e fa di voi, in mezzo alle lotte che insanguinano il mondo, un esempio insigne di quell'unione di pacifici intenti, che non turbano le frontiere dei monti e dei fiumi, dei mari e degli oceani.

Amica della verità, la Chiesa ammira e ama il progresso del sapere al pari di quello delle arti e di ogni cosa, che vede bella e buona ad esaltare lo spirito e a promuovere il bene. Non è forse la Chiesa stessa il progresso divino nel mondo e la madre del più alto progresso intellettuale e morale dell'umanità e del vivere civile dei popoli? Ella si avvanza nei secoli, maestra di verità e di virtù, lottando contro gli errori, non contro gli erranti, non distruggendo ma edificando, piantando rose e gigli senza sradicare olivi e lauri. Custodisce e, più volte, santifica i monumenti e i templi della pagana grandezza romana e greca. Se nei suoi musei non hanno più cultori Marte e Minerva, nei suoi monasteri e nelle sue biblioteche parlano ancora Omero e Virgilio, Demostene e Tullio; nè disdegna che accanto all'aquila d'Ippona e al sole di Aquino stiano Platone e Aristotele. Ogni scienza essa invita nelle università da lei fondate; chiama intorno a sè l'astronomia e le matematiche a correggere l'antica misura del tempo; chiama ogni arte, segnata dallo splendore del vero, ad emulare in onore di Cristo le basiliche dei Cesari e a superarle con cupole vertiginose, con ornamenti, con immagini, con simulacri che eternano il nome di chi le compie.



Come ogni arte, così ogni scienza serve a Dio, perchè Dio è *scientiarum dominus e docet hominem scientiam* (Psal., 93, 10). Nella sua alta scuola l'uomo ha due libri. Nel quaderno dell'universo la ragione umana studia in cerca della verità delle cose buone fatte da Dio; nel quaderno della Bibbia e del Vangelo l'intelletto studia al fianco della volontà in cerca di una verità superiore alla ragione, sublime come l'intimo mistero di Dio, solo a Lui noto. Alla scuola di Dio s'incontrano filosofia e teologia, parola divina e paleontologia, la divisione della luce dalle tenebre e l'astronomia, la terra in eterno fissa (Eccle., 1, 4) e il suo giro intorno al sole, lo sguardo di Dio e lo sguardo dell'uomo. La bontà di Dio, quale madre, quasi balbetta il linguaggio umano (1 Thess., 2, 7) per far ritenere all'uomo l'eccelso vero che gli manifesta in una scuola di verità amiche che lo esaltano e lo fanno nello studio della natura e della fede discepolo di Dio. Tale scuola è pure fatta dalla Chiesa sua scuola e suo magistero. Non è forse la ragione al servizio della fede, a cui porge quel *rationabile obsequium* (Rom., 12, 1) di fondamento e difesa, che emana dalla impronta della divina similitudine onde si abbellisce? E la fede, a sua volta, non esalta la ragione e la natura, invitando a benedire il Signore tutta la varia moltitudine delle creature dell'universo, dai cieli alla terra, col cantico dei tre fanciulli tra le fiamme di Babilonia? E voi vedete la Chiesa col suo Rituale benedire le opere della ragione e del genio umano, le macchine librarie e le biblioteche, le scuole e i laboratori, i telegrafi e le vie ferree, le fonti elettriche e gli aeroplani, i carri e le navi, le fornaci e i ponti e tutto quanto la mente e l'arte dell'uomo reca al verace e sano progresso del vivere e del consorzio civile.

No, l'ossequio della ragione alla fede non umilia la ragione, ma l'onora e la sublima, perchè è sommo vanto del progresso della civiltà umana l'agevolare la fede per la sua evangelica via nel mondo. La fede non è superba, non è signora che tiranneggi la ragione, nè la contraddica: il sigillo di verità non è diversamente da Dio impresso nella fede e nella ragione. Che anzi, non che dissentire, a vicenda, come già accennammo, si aiutano, giacchè la retta ragione dimostra i fondamenti della fede e al suo lume ne chiarisce i termini, e la fede preserva da errori la ragione, ne la libera caduta e l'ammaestra con multiforme cognizione. Onde

Noi non dubitiamo che torni ad onore di questa Pontificia Accademia delle Scienze il rammentare innanzi a voi ciò che definiva il gran Concilio Vaticano, affermando che tantum abest ut Ecclesia humanarum artium et disciplinarum culturae obsistat, ut hanc multis modis iuvet atque promoveat. Non enim commoda ab iis ad hominum vitam dimanantia aut ignorat aut despicit; fatetur immo, eas, quemadmodum a Deo scientiarum Domino profectae sunt, ita, si rite pertractentur, ad Deum iuvante eius gratia perducere. A voi, pertanto, nobili campioni delle discipline e delle arti umane, la Chiesa riconosce la giusta libertà del metodo e dell'indagine, libertà, sulla quale il Nostro immortale Predecessore, Pio XI, fondava questa Accademia, ben consapevole di quel che aggiunge il medesimo Concilio che la Chiesa nec sane vetat, ne huiusmodi disciplinae in suo quaeque ambitu proprius utantur principiis et propria methodo; sed iustam hanc libertatem agnoscens, id sedulo cavet, ne divinae doctrinae repugnando errores in se suscipiant, aut fines proprios transgressae ea, quae sunt fidei, occupent et perturbent (Concil. Vatic., III, c. 4).

In queste parole del sacro universale Senato della Chiesa Cattolica sta ogni vostra giusta libertà scientifica e la più alta lode dei vantaggi da voi recati al vivere civile, dei quali la Chiesa pure si giova per la sua missione nel mondo. È lode infatti delle scienze e delle loro mirabili invenzioni, se l'araldo di Cristo precorre le stagioni, prevede i turbini e le tempeste, vola sui piani e sui monti, visita veloce mille luoghi deserti e gelati, moltiplica la sua voce e i suoi benefici, accorcia la durata dei suoi viaggi, si fa medico e curatore dei corpi per rigenerare le anime. È lode dell'incomparabile vostro collega, il compianto Marconi, se la Nostra paterna parola e benedizione risuona oltre i mari e gli oceani e porta ai popoli lontani l'affetto e le speranze del Nostro cuore, mentre alla Nostra voce fanno eco potente gli obelischi dell'Urbe. Non sono dunque le scienze degne e meritevoli di tutta la Nostra stima e onore?

E di questo ammirevole e legittimo vincolo delle scienze con la fede, di questo vestibolo che le scienze e le arti innalzano all'entrata del tempio della fede, una immagine già da secoli stupefà il mondo nella Stanza vaticana della Segnatura, dove la scienza e la fede si guardano di fronte e s'illuminano a vicenda nella luce sublime del pensiero e del pennello

dell'impareggiabile pittore di Urbino. Voi certo vi siete arrestati, ammirando, innanzi alla scena che va sotto il nome di Scuola d'Atene. In quei personaggi voi avete riconosciuto i vostri più antichi antecessori nell'indagine della materia e dello spirito, nella contemplazione e nella misurazione dei cieli, nello studio della natura e dell'uomo, nelle elucubrazioni matematiche e nelle sapienti discussioni. La ricerca del vero anima e colorisce quei volti e le movenze di quelle immagini, che sembrano parlare, quale d'una e quale dell'altra delle tante scienze speculative e pratiche, delle loro veglie, della loro mente concentrata e quasi rapita fuori dei sensi a discutere con se stessa, provando e riprovando, per giungere a ritrovare oh quanto poco di vero in mezzo al molto più di creduto vero, per architettare un mondo di mondi diversi, non tutti possibili ad esser reali. E voi vedete in quel tempio della scienza Platone additare nel cielo la fonte del sapere, Aristotele nella terra, e contendere tra loro, non paghi intieramente delle loro alte conclusioni. Sentono insaziata l'infinita sete dell'intelletto umano ad abbracciare tutto; sentono che di là dalla natura di quaggiù vive e impera una suprema potenza in un mondo non manifesto. Sentono in sè uno spirito immortale che li sospinge in alto, ma non sentono lo spirito che vivifica e dia loro le ali al volo.

Davanti a questa scena e assemblea di « spiriti magni » (Inf., IV, 119), che un'arte mirabile ripresenta al nostro sguardo Noi chiniamo la fronte e rimaniamo turbati, pensando quanto sia aspro il cammino per i sentieri della scienza e come tutta la scienza conquistata a prezzo di grandi fatiche non acquieti nella felicità le speranze e le brame dell'animo umano. Siamo immortali, siamo nati fatti per un altro mondo, per quel mondo non manifesto alla ragione che dirimpetto alla Scuola d'Atene ci rivela e figura la grande composizione, a cui fu dato il nome di Disputa del Sacramento. Nel disegnare queste due viventi scene pare che il genio di Tommaso d'Aquino abbia guidato la mano di Raffaello, additandogli i tre gradini della conoscenza riguardo a Dio: il primo, raffigurato nell'accolta delle scienze, per cui l'uomo sale dalle creature a Dio col solo lume naturale della ragione; il secondo, simboleggiato nell'altare del Sacramento, sintesi e centro della verità divina trascendente l'umano intelletto e discendente a noi quaggiù per modo di rivelazione presentata alla nostra credenza; il terzo, svelato nell'apparizione della corte celeste intorno a Dio allo

sguardo della mente umana, sollevata a vedere perfettamente le cose rilette (*Contra Gent.*, l. 4, c. I). Dalla scienza alla fede; dalla fede alla visione intuitiva della prima e somma verità, fonte di ogni verità.

Sono tre scuole, l'una più alta dell'altra, dalle quali per gradi si sale al pieno appagamento dell'intelletto umano. Nella scuola della natura, mentre i cieli narrano la gloria di Dio, ci sono maestre le cose corporee che celano le ultime loro cause, ma con le loro forme e coi loro moti le fanno sentire ai nostri sensi, quasi ansiose, perchè esse non possono conoscere, di volersi far conoscere. Parlano a noi con la loro bellezza, col loro ordinamento, con la loro forza e grandezza smisurata. Se voi interrogate gli astri, il sole, la luna, la terra, il mare, gli abissi e i viventi tutti che vi si muovono, vi risponderanno, come ad Agostino di Tagaste: Non siamo noi il tuo Dio; cerca sopra di noi: Non sumus Deus tuus; quaere super nos (*Conf.*, l. 10, c. 6, n. 9). O uomo, smarrito innanzi al mondo, non fare, come nota la Sapienza divina, degli avanzi della natura un dio ad immagine tua, da assicurare con un ferro alla parete, affinché non cada (*Sap.*, 13, 15-16); non invocare per la sanità di un infermo, per la vita di un morto, per aiuto un essere inutile, per fare un viaggio chi non può camminare (*Sap.*, 13, 18).

Sopra la scuola della natura è la scuola della fede, dove siede maestro infallibile di Dio presente e nascosto nel sacramento dell'altare, Sapienza divina incarnata, Verbo del Padre, la cui voce onnipotente, come insegna agli antichi e moderni filosofi l'origine dell'universo dal nulla, così manda i suoi Apostoli a istituire tutte le genti in una scienza più alta della ragione, cui non possono resistere nè contraddire tutti i suoi avversari (*Luc.*, 21, 15), e fa i suoi discepoli, al fianco dei grandi Pontefici romani e della corte dei Padri e Dottori, i sommi ingegni della poesia, delle scienze e delle arti e coi principi della terra le anime estasiato ed oranti dei semplici fedeli. In quell'ostensorio s'incontra tutta la fede cristiana; ivi è il medesimo Dio, via, verità e vita, cui addita in cielo col suo braccio il Dottore che si erge presso l'altare.

E nel cielo, Raffaello sublima la propria fede, tentando col pennello di rendere Cristo sopra e di là dalle nubi della fede, nell'aperto splendore di viva luce eterna, sul trono dell'anfiteatro celeste, circondato dalla corona dei santi e degli angeli, insieme col Padre e con lo Spirito Santo.

Quel cielo è l'eccelsa scuola divina; quel trono è la cattedra del Maestro dei maestri, in quo sunt omnes thesauri sapientiae et scientiae absconditi (Colos., 2, 3): Egli la sapienza di tutte le cose e dei misteri divini; egli la scienza di tutte le cose create, perchè è il Verbo per cui tutte le cose furon fatte e nulla senza di lui fu fatto (Jo., 1, 3). Oh quando ci sarà dato di elevarci lassù a essere discepoli di tanto Maestro, e contemplarlo e udirlo; e alla sua ineffabile scuola e nella sua luce divina con l'occhio dell'anima, conoscere il magistero e l'arte, le cagioni e gli effetti, la materia, le formazioni e l'ordine di quanto è sparso e compreso nel cielo e nella terra, quanto è mondo e natura; e nel volume dell'eterne e infinite idee del Verbo divino intendere tutto, nell'attimo di uno sguardo, più di quel che faremmo in mille anni di studio, e meglio che se possedessimo l'acume di tutti i più forti ingegni della terra, e più perfettamente che se mirassimo le cose in se stesse! Quando veniam et apparebo ante faciem Dei? (Psal., 41, 2).

Lassù a quella sublimissima e beatificante scuola e conoscenza in Dio di tutte le scienze umane e divine, ove resta soddisfatta l'insaziabile brama di intendere e comprendere tutti i generi, le specie e le virtù e l'ordine dell'universo, in che si assomma la perfezione anche naturale della nostra natura spirituale; a quel convito di sapienza e scienza, inesauribile e perpetuo, ove si perde ogni errore della passata via; nell'intimo affetto di Vicario di Cristo e Padre Comune elevando i Nostri voti al cielo, preghiamo Dio che a noi tutti conceda un giorno di salire a ricevere imperituro premio delle nostre fatiche di quaggiù. In quell'aula superna di gloria, allora, dimenticando anche l'altera figurazione di Raffaello, sogno di concetti mortali, veramente finiremo in noi l'ardore del desiderio, e con la divina visione dell'Alighieri, nel suo viaggio, oltremondano arrivato all'Empireo, entrando con l'occhio nell'« alta luce che da se è vera » (Par., XXXIII, 54), vedremo come nel suo profondo..... s'interna, - legato con amore in un volume, - ciò che per l'universo si squaderna (Par., XXXIII, 85-88).

Il Santo Padre, come già aveva detto nel Suo discorso con elevatissime parole, ha inaugurato, nella solenne circostanza, il busto del Suo venerato Prede-

cessore Pio XI, pregevole opera dello scultore Roscioli, e apposto nella parete di fronte al seggio presidenziale.

Ai lati del busto sono le seguenti epigrafi:

PIVS XI PONT. MAX.
 PRO BONARVM ARTIVM ALACRI STVDIO
 ET MVNIFICENTIA SINGVLARI
 LYNCAEORVM ACADEMIAM
 A FRIDERICO CESI PRINCIPE FVNDATAM MDCIII
 INTER PRIMIORES SOCIOS A GALILAEO ILLVSTRATAM
 POST VARIAM TEMPORVM RERVMQVE FORTVNAM
 PII IX P. M. CVRA RESTITVTAM MDCCCLVII
 VILLVLA PII IV P. M. SEDE PROPRIA DONAVIT
 AVLA HAC NOVA AVXIT
 AD SOCIORVM CONVENTVS APTIVS AGENDOS
 QVAM AN. IVB. XIX A REPARATA SALVTE
 MCMXXXIII A. D. XVI KAL. IAN.
 PRAESENS DEDICAVIT

PIVS XI PONT. MAX.
 CVM IN HAC SEDE VATICANA
 QVASI QVODDAM SAPIENTIAE AC DOCTRINARVM DOMICILIVM
 ANIMO CERNENTE PRAESENTIA PROVIDENTE FVTVRA
 TEMPORVM NECESSTATI OBSECVTVS CONSTITVISSET
 COLLEGIVM ET QVASI SENATVS DOCTORVM HOMINVM
 NATVRAE VIRIBVS COGNOSCENDIS ILLVSTRANDIS
 FELICITER INSTAVRAVIT
 PONTIFICIAM SCIENTIARVM ACADEMIAM
 AD DEI LAVDEM REIQVE INCREMENTVM
 IPSE PER SE CONDIDIT CONSILIO INGENS ET MENTE
 LEGIBVSQUE COMMVNITAM
 VERA EXQVIRENTIBVS APERVIT
 V KAL. NOV. MDCCCXXXVI PONTIFICATVS XV
 DIE FAVSTO FAVSTIS OMINIBVS
 SEQVENTIS AEVI MEMORIAE EXCVLTISSIMA QVAEQVE
 LVMINE CLARISSIMO PRAELATVRVS

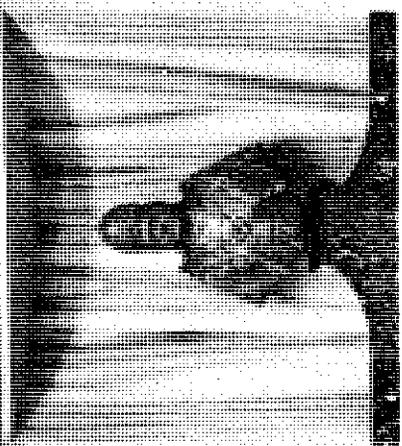
Sotto corre la seguente iscrizione:

PIVS XII P. M. AENEVM SIGNVM IMMORTALIS MEMORIAE
 PII XI DECESSORIS SVI PONENDVM CVRAVIT
 III NON. DEC. A. MCMXXXIX PONT. SVI I.

FIVE-AL POINT MAIL

For the first time in the history of the postal service, the Five-Point Mail is being introduced. It is a new type of mail which is designed to give you the most efficient service possible. It is a mail which is designed to give you the most efficient service possible.

It is a mail which is designed to give you the most efficient service possible. It is a mail which is designed to give you the most efficient service possible. It is a mail which is designed to give you the most efficient service possible.



FIVE-AL POINT MAIL

For the first time in the history of the postal service, the Five-Point Mail is being introduced. It is a new type of mail which is designed to give you the most efficient service possible. It is a mail which is designed to give you the most efficient service possible.

It is a mail which is designed to give you the most efficient service possible. It is a mail which is designed to give you the most efficient service possible. It is a mail which is designed to give you the most efficient service possible.

THE NEW FIVE-POINT MAIL IS THE MOST EFFICIENT OF ANY MAIL EVER INTRODUCED IN THE HISTORY OF THE POSTAL SERVICE. IT IS A MAIL WHICH IS DESIGNED TO GIVE YOU THE MOST EFFICIENT SERVICE POSSIBLE.

LA RELAZIONE DEL PRESIDENTE

Quindi il Presidente della Pontificia Accademia delle Scienze Revmo P. Agostino GEMELLI O. F. M., ottenuto l'Augusto assenso del Santo Padre, ha letto la seguente relazione del terzo anno di vita dell'Accademia.

Beatissimo Padre,

si degni Vostra Santità accogliere l'omaggio di filiale amore e di devota gratitudine che gli Accademici Pontifici porgono al Vicario di Cristo ed anche alla Vostra Persona per avere voluto inaugurare il quarto anno accademico con l'augusta Vostra presenza e con la Vostra venerata parola.

In questi primi mesi di Pontificato, Vostra Santità ha dato numerose e varie prove di paterno interessamento: con sollecitudine previdente alla nostra Accademia Vostra Santità ha provveduto affinché essa fiorisca, regalmente ha provveduto ai suoi bisogni affinché essa possa assolvere il suo compito; con bontà indulgente Vostra Santità ha accolto molti di noi per darci preziosi insegnamenti e paterni consigli. Oggi poi, con il discorso che testè abbiamo ascoltato con animo profondamente commosso, Vostra Santità ha destato in noi ancor più vivi sentimenti di gratitudine e di filiale amore.

Padre Santo! ci avete data un'ora di spirituale godimento, di alto conforto, di preziosi insegnamenti. Noi conserveremo nella memoria la dolce e paterna immagine Vostra; conserveremo come prezioso dono per le nostre anime ciò che ci avete insegnato; al Vostro cuore di Padre diamo l'assicurazione, che speriamo torni di consolazione, che i Vostri Accademici Pontifici, sia quelli che hanno oggi la gioia di assistere a questa solenne Tornata — sia quelli che sono stati impediti di intervenire per la lontananza resa ancora più grande a causa della guerra, sia quelli che sono assenti perchè spendono la loro opera a servizio del proprio paese — vogliono con opera indefessa ed assidua, nel campo

delle scienze alle quali si sono dedicati, essere degni dell'alto onore di essere annoverati tra i membri di un'Accademia che vive e prospera rendendo testimonianza alla missione di verità della Chiesa cattolica e cooperando all'approfondimento dell'umano sapere.

Ricordiamo infatti che, quando fummo chiamati dal Vostro Predecessore a far parte di questa Accademia, udimmo dal Vostro labbro — allorchè in nome Suo ne inauguraste la restaurata attività — quanto è alto il compito nostro. Vostra Santità ci ha in quella occasione insegnato, a conforto della nostra quotidiana fatica e ad illuminazione della nostra mente, che questa Accademia è stata « concepita e creata per il progresso delle scienze e della investigazione umana, per l'onore della Sede Apostolica, faro di verità e di salute, per la conoscenza di Dio ».

Soprattutto allorchè le difficoltà incontrate ci impediscono di raggiungere la mèta della conquista di una verità a lungo ricercata, ci ricordiamo ciò che Vostra Santità in quella solenne occasione ci insegnò, e cioè che a « chi per poco rifletta che la scienza è la ricerca della verità come si trova nella naturale rivelazione del creato, e la Fede è l'ossequio dell'intelletto creato alla verità direttamente rivelata dal Creatore », riesce evidente che « questo ossequio dell'intelletto creato alla rivelazione diretta del Creatore, mai non sarà più degno e della creatura e del Creatore, come quando è illuminato dagli splendori della scienza ».

Questi Vostri insegnamenti ci siamo ricordati soprattutto quando Voi foste elevato al Trono di Pietro, quando in varie occasioni Voi rivolgeste le Vostre Auguste parole di Pastore delle anime a tutto il mondo. Ringraziammo allora Iddio perchè aveva prescelto Vostra Santità a Suo Vicario in terra. Quando poi leggemmo e meditammo la Enciclica *Summi Pontificatus*, che al mondo donaste per la Festa della Regalità di Cristo, come norma per il nostro vivere, conforto per il nostro sperare e stimolo per il nostro operare, ed udimmo dal labbro di Vostra Santità proclamare: « Noi di nulla ci sentiamo più debitori al Nostro ufficio, come anche al Nostro tempo, che di rendere con apostolica fermezza testimonianza alla verità », conoscemmo di quale profonda gratitudine filiale Vi eravamo debitori. Infatti, se compito dello scienziato è la ricerca ed il servizio della verità, come noi non

possiamo stringerci con fedeltà e con amore intorno a Colui che proclama essere adempimento del proprio dovere il rendere testimonianza alla verità? « Nell'adempimento di questo nostro dovere, scrisse Vostra Santità, non ci lasceremo influenzare da terrene considerazioni, nè ce ne tratteremo per diffidenze e contrasti, per rifiuti ed incomprensioni, nè per timore di misconoscimenti e di false interpretazioni; ma lo faremo sempre animati da quella paterna carità che, mentre soffre dei mali che travagliano i figli, indica loro il rimedio ». Solo per attendere all'adempimento di questo altissimo ministero, solo per assolvere questo compito di insegnare la verità, Vostra Santità si è degnata oggi di venire tra noi; e a noi, modesti ed umili servitori delle verità naturali, Voi Maestro infallibile delle verità soprannaturali, ci avete dato per bene nostro e per incitarci ad adempiere l'alto compito nostro, insegnamenti preziosi, che sono come lo svolgimento e l'applicazione di quei concetti che sono il nucleo evidente del Vostro santo ministero. È dunque un titolo nuovo di gratitudine che si aggiunge ai precedenti. Noi, come figli, ci stringiamo intorno alla Vostra Cattedra per attestarVi, in qualche modo, come ci è possibile, i nostri filiali sentimenti.

* * *

Vostra Santità mi consenta un breve cenno del testè decorso terzo anno accademico.

Fu per noi un anno particolarmente doloroso per la morte del Vostro indimenticabile Predecessore, che la nostra Accademia restaurò elevandola ad una grandezza e ad una importanza pari a quella avuta nei suoi primi secoli. Noi siamo grati a Vostra Santità perchè, Successore Suo nell'alto ministero di guidare le anime nostre, ne avete voluto ricordare le care sembianze in questa aula, nella quale più volte ascoltammo le Sue parole indimenticabili.

Solo il dono datoci da Dio della elevazione di Vostra Santità a Vicario di Nostro Signore ci ha confortati nell'immenso dolore per la grande perdita.

Ci proponiamo, con il vostro benevolo consenso, nella prima e prossima ricorrenza della Sua santa morte di degnamente commemorare

il Vostro Predecessore, non solo per attestare la nostra gratitudine per quanto Egli ha fatto per la nostra Accademia, per ricordare quanto Egli ha promosso il culto delle scienze, delle lettere e delle arti, ma anche per ricordare quanto il mondo di coloro che studiano è debitore a Pio XI per l'esempio nobilissimo dato nel coltivare il sapere umano, mosso dal fine ancor più alto di dilatare e approfondire la conoscenza delle cose divine. È questo un modo conforme alla missione propria della nostra Accademia per commemorare Colui che l'ha restaurata e chiamata ad alti compiti.

Feconda fu l'attività dell'Accademia durante il terzo anno di vita. Numerose sono state le *Memorie* e le *Comunicazioni* scientifiche presentate dagli Accademici, sia in nome proprio, sia in nome di estranei. Raccolte, costituiscono due grossi volumi, che mi permetto umiliare ai Vostri piedi, con la preghiera di gradirne l'omaggio. È merito Vostro se possiamo presentare a Vostra Santità e al mondo scientifico, che li apprezza, questi lavori; e, poichè il padre gioisce di ciò che il figlio fa, così siamo certi che Vostra Santità benevolmente accoglierà questo omaggio.

A questo punto il Santo Padre, che prestava la sua Sovrana attenzione alle parole del Presidente, Si è degnato accogliere i volumi presentati Gli dal Cancelliere dell'Accademia.

Il Presidente ha quindi proseguito:

L'Accademia ha partecipato attivamente a varie riunioni internazionali grazie all'attività dei propri Accademici; ne ricorderò solo alcune e in primo luogo la partecipazione alla solenne celebrazione tenuta a Pavia del Centenario dell'abate Lazzaro Spallanzani. Gli Accademici Abderhalden, Bottazzi, Pensa, insieme con il Presidente, presentarono lavori e pronunciarono discorsi. Partecipò inoltre l'Accademia al quarto Congresso Internazionale di Patologia comparata tenuto in Roma dal 15 al 17 maggio, specie grazie all'attività degli Accademici Rondoni e Bottazzi; al Centenario di Théodule Ribot a Parigi nel giugno decorso mediante l'opera dell'Accademico Michotte Van der Berck; al IV Congresso internazionale del cancro mediante il contributo dell'Accademico Rondoni. La partecipazione, già preparata, ad altri importanti



convegni internazionali, ad Edimburgo, a Bruxelles, a Bucarest, ed altrove, fu impedita dalla sopravvenuta situazione internazionale.

Di questi giorni si sarebbe dovuto tenere, in questa sede, la prima « *Settimana di studio* », una iniziativa che, grazie alla munificenza di Vostra Santità, ha lo scopo di stabilire annualmente contatti fra cultori di una determinata disciplina con lo scopo di apportare un contributo positivo alla risoluzione di problemi scientifici controversi. L'organizzazione di queste « *Settimane di studio* » è fondata sull'invito ad un numero ristretto di scienziati che, avendo studiato in modo particolare un determinato problema, sono arrivati a conclusioni divergenti. Costoro, per alcuni giorni, insieme con Accademici Pontifici particolarmente competenti, attendono allo studio di quel determinato problema. Liberi da ogni preoccupazione di ogni genere, procedono ad un esame accurato avendo per fine di formulare in modo preciso le ragioni che sono a base delle divergenze di opinioni, sia per arrivare ad un accordo su una determinata soluzione, sia per arrivare alla constatazione che, allo stato attuale delle nostre conoscenze, è impossibile stabilire una unità di dottrina in quel determinato punto, così che il problema deve nuovamente essere impostato su nuove basi, e nuove ricerche debbono essere compiute.

Come argomento della prima « *Settimana di studio* » venne stabilito: « *Il problema dell'età dell'Universo* » secondo ricerche fondate a) sopra i movimenti stellari, b) sopra l'energia irradiata dalle stelle e la conseguente evoluzione stellare, c) sopra la velocità di recessione delle nebulose extragalattiche, d) sopra i processi radiattivi ed intratomici constatati nei meteoriti e nei minerali della crosta terrestre.

A questa prima « *Settimana di studio* » hanno accettato di dare il loro contributo il Dr. H. N. Russel, Direttore del Princeton University Observatory negli Stati Uniti d'America; il Dr. James Jeans di Cleveland Lodge (Dorking, Inghilterra); il Dr. F. A. Paneth del Departement of Chemistry della University of Durham (Inghilterra); il Dr. H. Mineur dell'Osservatorio Nazionale di Parigi; il Dr. K. G. Mahnquist dell'Osservatorio di Stoccolma; il Dr. H. Jeffreys del Collegio S. Giovanni di Cambridge.

Le difficoltà create dal tristissimo stato di guerra di alcune Nazioni ha reso necessario rimandare di alcun poco il Convegno; noi speriamo,

e la nostra speranza è alimentata da molte ragioni, di poterlo tenere al più presto.

È stato stabilito di conferire il premio Pio XI ogni due anni; la prossima volta ossia nel 1940, esso sarà conferito ad uno scienziato che abbia conseguito risultati degni di considerazione nel campo della Astronomia. Si è scelta questa disciplina per rendere omaggio alla munificenza della Santa Sede che con la Specola Vaticana, specie grazie all'opera indefessa degli Accademici Stein e Gatterer, ha così altamente contribuito al progresso scientifico in questo campo da raccogliere larga messe di plauso universale.

È stato inoltre stabilito di conferire nel 1941 un premio intitolato al nome Augusto e caro di Pio XII. Nella tornata ordinaria del pomeriggio di oggi verrà determinata in quale disciplina si dovrà scegliere il cultore al quale il premio dovrà essere assegnato.

* * *

Da due lutti gravissimi, fummo colpiti l'anno testè decorso.

È mancato ai vivi l'Accademico *Victor Gregoire*, professore di Biologia generale dell'Università Cattolica di Lovanio.

Di lui ricordiamo innanzitutto che fu sacerdote zelante. La cattedra universitaria fu per Victor Gregoire anche il mezzo per operare in mezzo ai giovani, che lo amavano perchè la sua bontà, la sua carità, la sua umiltà erano un invito costante ed efficace alla pratica vita cristiana. Il Gregoire fu anche un biologo di altissima fama. Allievo e successore a ventott'anni di Carnoy, il fondatore della Scuola biologica di Lovanio, la sua attività è dimostrata dalla produzione di ben centocinquanta lavori, nei quali i contributi portati alla biologia furono soprattutto rivolti allo studio della riduzione dei cromosomi, della loro struttura e del processo di divisione, arrivando a dare fondamento positivo alla dottrina della permanenza morfologica dei cromosomi. È da ricordare poi che il Gregoire, come maestro nella formazione di una *élite* di ricercatori, indirizzò numerosi allievi suoi ad esplorare fruttuosamente vari campi, allargando il campo delle conoscenze nostre sulla struttura delle cellule e delle leggi della sua moltiplicazione specie nel

campo vegetale. Se il Gregoire fu un citologo rotto a tutte le finezze della tecnica, fu però anche biologo nel senso più lato della parola, onde egli affrontò i più grandi problemi dello studio della vita, in ogni campo apportando il contributo del suo vasto ingegno. L'Università di Lovanio e la nostra Accademia piangono un sacerdote ed uno scienziato che, in testa ad un foglio bianco, dopo mesi di lunghe e penose sofferenze, scrisse, negli ultimi giorni della vita, queste parole per tutti ammonitrici: « Non debbo avere altra inquietudine che quella di non aver fatto il bene che avrei potuto fare ».

Ora poco più che un mese abbiamo pianto la morte e suffragata la nobile anima di *Charles Barrois*, professore di Geologia dell'Università di Lilla, Direttore dell'Associazione dei Geologi Francesi e amministratore della Società delle Miniere di Anice e delle Miniere demaniali della Sarre. Allievo e successore di Gosselet fece dell'insegnamento la principale occupazione della sua vita. Nel 1907 creò il Museo carbonifero e diede allo studio dei carboni tale impronta che l'Università di Lilla occupa oggi un posto di prima importanza fra gli Istituti che si occupano dei problemi carboniferi. Grazie ai suoi studi, il carbonifero francese è diventato il tipo classico al quale si paragonano tutti gli altri giacimenti del mondo; onde il Museo del carbone di Lilla diede le direttive per gli studi dei bacini carboniferi degli Urali e della Siberia e per i lavori dei Governi di Berlino, dell'Aia e di Russia. Profondamente religioso, cristiano esemplare, chiuse gli occhi a ottantanove anni con una morte esemplare.

Ora deve l'Accademia colmare i vuoti lasciati da questi due insigni studiosi, nonchè quelli creati dalle dolorose perdite del precedente anno accademico, con uomini che rechino alla nostra Accademia l'onore di una fama scientifica indiscussa e la testimonianza di una vita messa a servizio della scienza e della Religione.

* * *

Padre Santo! Voi avete voluto degnarvi di aprire i nostri lavori del quarto anno accademico con la vostra Augusta parola; Vi chiedo ora di permettere all'Accademico *Georges Lemaître*, illustre professore

dell'Università di Lovanio di commemorare l'Accademico *Lord Rutherford*.

Vi chiediamo poi, a chiusura di questa solenne Tornata di impartirci la Vostra benedizione apostolica, onde da Dio, per mano e intercessione Vostra, ci sia dato di mostrarci degni dell'alto onore di essere Accademici Pontifici. Chiediamo a Vostra Santità di benedirci perchè in un momento storico, come quello nel quale la Provvidenza divina ci ha chiamati a vivere, noi possiamo con i nostri studî, con il servire la scienza, con l'istruire i giovani, con il mantenere vivo nel nostro cuore e in quello dei nostri discepoli l'amore per la verità, possiamo sul tragico spettacolo di un mondo in guerra, far risplendere la luce del sapere a dimostrazione che l'Umanità può, fiduciosa nell'attesa della vittoria della pace largita da Dio agli uomini di buona volontà, sperare ancora, ad onta di tutto, che i beni e i frutti dell'incivilimento non abbiano ad essere travolti e distrutti.

Alla fine della relazione il Santo Padre Si compiaceva esprimere al Presidente le Sue paterne congratulazioni e i sensi del Suo Sovrano gradimento per le attività accademiche svoltesi nel decorso anno.

LA COMMEMORAZIONE DI LORD E. RUTHERFORD OF NELSON

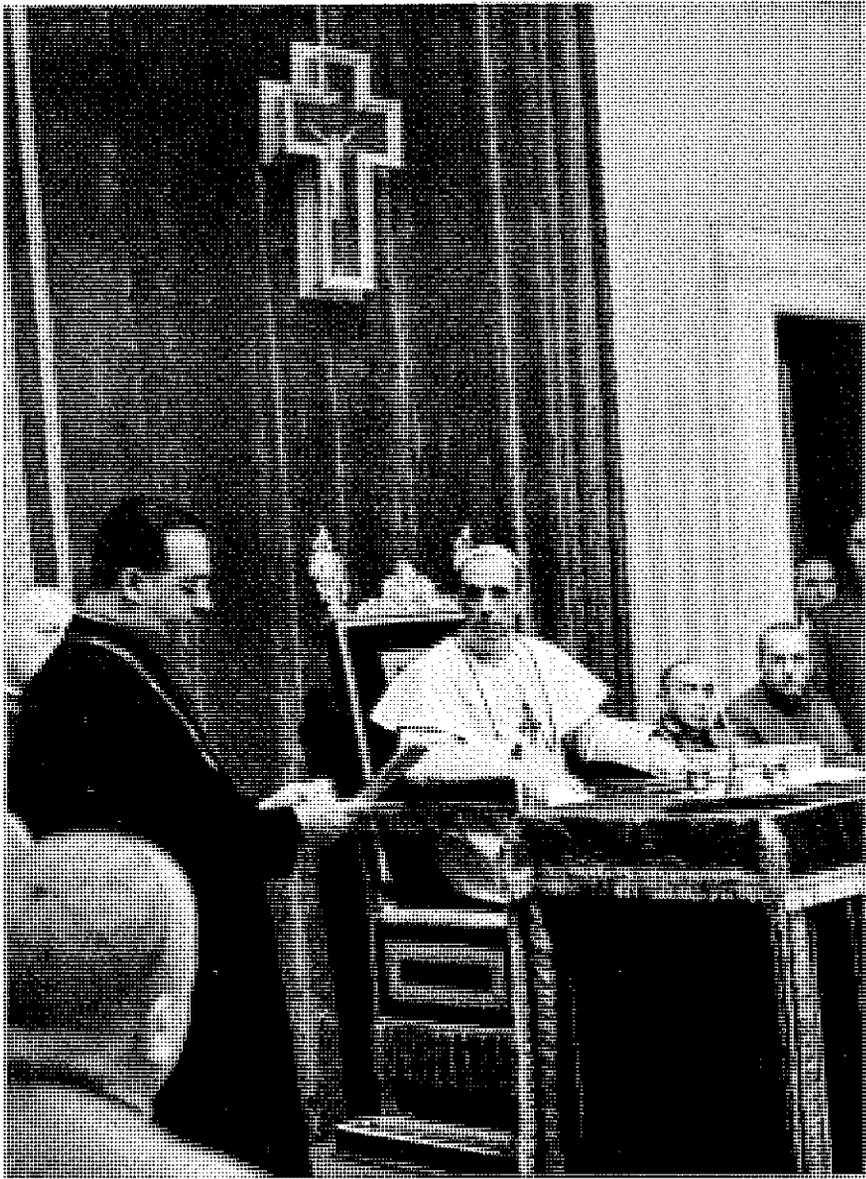
IL DISCORSO LEMAÎTRE

Si è proceduto quindi alla commemorazione del defunto Accademico Pontificio Lord E. RUTHERFORD OF NELSON.

L'Accademico Pontificio Georges LEMAÎTRE, professore di Metodologia matematica e di Storia delle Scienze fisiche e matematiche nell'Università di Lovanio, ha pronunciato il seguente discorso.

Très Saint Père,

C'est pour moi un grand honneur et une lourde charge d'avoir à rendre hommage, au nom de notre Académie à la mémoire d'un de ses Membres les plus illustres: Lord Rutherford of Nelson.



Il est de ces personnalité qui dominent leur époque et dont l'œuvre a laissé une empreinte si profonde qu'ils ont cultivée, qu'ils ont renouée et, pour ainsi dire crée de toutes pièces.

Retracer l'œuvre de Rutherford ce serait raconter le développement de l'atomistique. Ce serait expliquer comment la science a pu être amenée à cette description si inattendue de la constitution de la matière où tout le mystère de l'activité physique semble s'être réfugié dans des grains minuscules: ces noyaux des atomes que Rutherford a découverts, dont il a expliqués les transformations spontanées qui constituent le phénomène de la radioactivité et dont il a pu le premier provoquer artificiellement la désintégration.

Rutherford est né en Nouvelle Zelande le 30 août 1871 à Nelson et obtint à l'Université de son pays natal ses grades de Master of Arts et de docteur en sciences.

En 1895, il est boursier à Cambridge. Il venait d'inventer le détecteur magnétique pour ondes hertziennes; l'abilité et le sens de l'organisation qu'il montra en essayant et en perfectionnant son détecteur attira immédiatement sur lui l'attention de son Maître J. J. Thomson.

Dès cette époque Rutherford commença à attaquer le grand problème qui sous une forme ou sous une autre devait l'occuper pendant plus de vingt ans: l'élucidation des phénomènes de radioactivité qui venaient d'être découverts par Henri Becquerel.

Après un séjour de trois ans à Cambridge, Rutherford fut nommé professeur au Canada, à l'Université Mc Gill de Montréal. Il en revint en 1907 pour occuper la chaire de physique à l'Université de Manchester. En 1919 il revint à Cambridge comme titulaire de la chaire Cavendish et directeur du laboratoire du même nom. Il mourut en pleine activité, des suites d'une opération le 10 octobre 1937.

C'est à Mc Gill que Rutherford trouva les lois suivant lesquelles les corps radioactifs se désintègrent en émettant rayons alfa, beta et gamma. Il découvrit les émanations: ces corps gazeux radioactifs qui conservent leurs propriétés pendant quelque temps puis deviennent inertes en laissant des dépôts actifs sur les objets solides.

Dès cette époque apparaissent les qualités maîtresses du grand expérimentateur: l'extrême audace de l'imagination, la vision de l'idée simple

à laquelle personne ne pense et qui va tout clarifier, et par ailleurs, la défiance de toute spéculation vide qui planerait loin des faits sans contact évident avec la réalité.

Il savait apercevoir toute la portée d'une anomalie expérimentale et pousser son idée jusqu'à ses conséquences extrêmes.

La manière dont il découvrit l'existence des noyaux atomiques ou la façon dont il décela la transformation de l'azote en oxygène par une discussion irréfutable d'anomalies dans les nombres enregistrés par des compteurs restent pour tout étudiant de la physique un sujet d'admiration et presque de stupeur.

Dès son retour en Angleterre à Manchester d'abord, à Cambridge ensuite, le laboratoire de Rutherford devint un centre international où les physiciens de tous pays vinrent collaborer avec le maître ou se laisser pénétrer de son empreinte.

Il serait difficile de citer le nom d'un savant qui ait eu une influence comparable à la sienne; et tous ceux qui l'ont approché même de loin, qui ont assisté à ses leçons ou entendu ses rapports se sont laissés gagner par le dynamisme de cette personnalité puissante où l'on découvrait de la bonté.

Le modèle de l'atome qui sert de base aux recherches actuelles est généralement désigné sous le nom d'atome de Rutherford, puisque c'est au cours d'une féconde collaboration à Manchester que le physicien danois a distribué les électrons en orbites elliptiques autour du noyau découvert par Rutherford: telles des planètes tournant autour d'un soleil.

Sous l'impulsion de Rutherford, le Cavendish Laboratory, était devenu un centre remarquable de recherches nucléaires où l'on s'efforçait de briser le noyau atomique en le bombardant par les particules électriques lancées par des champs intenses. Après avoir délimité le mystère et posé le problème du noyau atomique, Rutherford et ses collaborateurs ont commencé à accumuler les données qui en préparent la solution.

En annonçant la mort de Lord Rutherford un journal scientifique a pu dire de lui que ses recherches expérimentales et son génie scientifique forment la partie principale de l'empressionnante structure de la physique moderne.

Je ne puis mieux faire que de terminer par ces paroles ce modeste hommage à la mémoire de Lord Rutherford of Nelson.

L'Augusto Pontefice si degnava esprimere il Suo paterno compiacimento anche all'illustre oratore quindi, impartita l'Apostolica Benedizione, si tratteneva alquanto con gli Eminentissimi Cardinali ed ammetteva singolarmente — presentatiGli uno per uno dal Presidente GEMELLI — al bacio del Sacro Anello gli Accademici Pontifici presenti ed infine il Cancelliere dell'Accademia.

Quindi, ricevuto l'omaggio fervidissimo della eletta assemblea, lasciava la Sede dell'Accademia e faceva ritorno al Palazzo Apostolico Vaticano.

RESOCONTO
DELLA PRIMA TORNATA ORDINARIA
DEL IV ANNO ACCADEMICO

(Sabato 3 dicembre 1939)

Presiede il Revmo Prof. P. A. GEMELLI O. F. M., Presidente.

Sono presenti gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, BOTTAZZI, BUYTENDIJK, COLONNETTI, CROCCO, GEMELLI, GHIGI, GIORDANI, GIORGI, GOLA, GUIDI, LEMAÎTRE, LEPRI, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, SOMIGLIANA, MICHOTTE VAN DEN BERCK, NOYONS, PENZA, PETRITSCH, PISTOLESI, RONDONI, SILVESTRI, TONIOLO, VALLAURI, VERCELLI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

Ordine del giorno: 1) Approvazione del Verbale della precedente Tornata. 2) Comunicazioni del Presidente. 3) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 4) Varia.

Il Presidente GEMELLI dichiara aperta la seduta alle 16,15.

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione, e poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI comunica al Corpo Accademico l'Augusta soddisfazione del Santo Padre per la riuscita cerimonia della mattina e riferisce le espressioni di sovrano gradimento che Egli a questo scopo Si era benignato rivolgergli.

Tutti i presenti ascoltano in piedi le parole del Presidente il quale termina il suo dire interpretando i sentimenti degli Accademici presenti con il proporre l'immediato invio di un telegramma di riconoscente devozione al S. Padre.

Il Corpo Accademico plaude alla proposta ed il Presidente invita il Cancelliere a dare lettura del testo del telegramma:

Santo Padre — Città del Vaticano — Accademici Pontifici grati per la paterna bontà e per i preziosi insegnamenti impartiti da Vostra Santità nella Seduta inaugurale del quarto Anno Accademico rinnovano filiale riconoscenza tanto Augusta degnazione nella fiducia che loro attività scientifica sia feconda dimostratrice mutui rapporti scienza Fede secondo definizione Concilio Vaticano oggi loro illustrato da eloquente parola Vostra Santità. Prostrati innanzi Vicario Cristo chiedono rinnovata Benedizione Apostolica sui loro lavori onde riescano onore per la Chiesa — Padre Gemelli, Presidente.

Il Corpo Accademico che ha ascoltato in piedi la lettura del telegramma approva per acclamazione il testo del dispaccio che viene immediatamente spedito.

Proseguendo nello svolgimento dell'ordine del giorno, il Presidente GEMELLI comunica al Corpo Accademico che dei sei invitati a partecipare alla Settimana di studio sull'«Età dell'universo», che doveva tenersi in questo mese di dicembre, quattro hanno fatto presente alla presidenza l'impossibilità pratica di potersi trovare nella Città del Vaticano per l'epoca stabilita, date le attuali condizioni internazionali.

La settimana di studio viene pertanto solo rimandata a data che è da augurarsi prossima.

Invita quindi gli Accademici che avessero eventuali proposte da fare a prender la parola.

L'Accademico TONIOLO chiede se oltre agli Accademici possono intervenire a queste riunioni anche persone non invitate, ma particolarmente competenti della disciplina oggetto di studio.

Il Presidente GEMELLI fa notare che è desiderabile che la riunione abbia uno stretto valore di ricerca e di studio. Ora invitando numerose persone, va perduto quel carattere di intimità che garantisce il risultato della riunione stessa. D'altra parte essendo già stato deciso di invitare le persone più interessate all'argomento in esame, non crede necessario allargare il numero dei partecipanti alla discussione.

Il Presidente GEMELLI passa quindi alle proposte sulla disciplina cui attribuire il premio Pio XII. L'Accademico ARMELLINI rileva che dei due precedenti premi Pio XI, uno è stato dato all'astronomia e l'altro alle scienze fisiche. Occorre quindi decidere se il nuovo premio va attribuito alle scienze fisico-matematiche o a quelle naturali.

L'Accademico PISTOLESI propone la matematica pura.

L'Accademico RONDONI crede che sarebbe conveniente valorizzare le scienze che meritano di essere incoraggiate.

Il Presidente GEMELLI fa notare che il premio è stato istituito per premiare un uomo in seguito ad una sua determinata attività, e non per metterlo in palio affinché studiosi lavorino attorno ad un determinato argomento.

L'Accademico ARMELLINI non ha nulla in contrario all'attribuzione del premio alla matematica.

L'Accademico BOTTAZZI propone che il nuovo premio sia dato ad un cultore di fisica colloidale.

L'Accademico CROCCO osserva che la proposta BOTTAZZI unisce i due rami della fisica e della chimica, e quindi merita di essere presa in considerazione.

L'Accademico PENSA è pure favorevole alla proposta BOTTAZZI.

L'Accademico LOMBARDI propone una sospensione sulla discussione, perchè non c'è stata la necessaria preparazione e le proposte riescono un po' improvvisate.

L'Accademico BOTTAZZI propone di devolvere la decisione al Consiglio Accademico, perchè ne riferisca al Corpo Accademico in una prossima Tornata.

Il Presidente GEMELLI rileva come le due osservazioni LOMBARDI e BOTTAZZI, si completano a vicenda, e poichè quella LOMBARDI ha un carattere più generale propone di votare su di essa.

L'Accademico COLONNETTI appoggia la proposta LOMBARDI, anche perchè si tratta di sapere se il regolamento del premio Pio XI varrà anche per il premio Pio XII.

Il Presidente GEMELLI ricorda come il Santo Padre abbia molto gradito la istituzione di questo nuovo Premio intestato al Suo Augusto Nome. Propone quindi che il Consiglio elabori una proposta definitiva, dopo aver sentito anche gli Accademici assenti, specie quelli stranieri, in modo da presentarla, se possibile, alla prossima Tornata.

La proposta è approvata dal Corpo Accademico.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico ARMELLINI comunica la seguente proposta che ha ricevuto dal brasiliano S. E. Mons. PROSPERO BERNARDI Vescovo titolare di Palto.

Nella nomenclatura astronomica del cielo, luna, pianeti, ecc., sono ricordati uomini grandissimi e altri meno importanti. Uno scienziato altissimo che ha appartenuto a questa Accademia, Guglielmo MARCONI, non vi è ricordato. L'Accademia potrebbe interessarsi perchè il nome del grande studioso sia dato a qualche oggetto celeste.

L'Accademico GIORGI, fa osservare che ci sono anche altri nomi grandissimi, ad esempio VOLTA, per i quali si dovrebbe fare allora la stessa cosa.

L'Accademico ARMELLINI, ricorda che egli non ha fatto che trasmettere una proposta che gli è pervenuta, ma che egli approva giacchè crede che per il MARCONI si tratti di un caso assolutamente eccezionale.

Il Presidente GEMELLI, propone di rimandare la proposta al Consiglio perchè l'esamini ed eventualmente la ripresenti al Corpo Accademico.

Il Corpo Accademico approva.

L'Accademico ARMELLINI presenta quindi in omaggio una sua pubblicazione dal titolo: *Il Contributo italiano al progresso dell'Astronomia, negli ultimi cento anni*, estratto dall'opera « Un secolo di progresso scientifico italiano 1839-1939 », edito dalla Società Italiana per il Progresso delle Scienze.

L'Accademico BOTTAZZI presenta in omaggio i primi due volumi del nuovo *Trattato di Fisiologia*, al quale ha collaborato un gruppo di fisiologi italiani, e di cui egli assunse la direzione. Egli avrebbe presentato prima questi volumi, se fosse stato pronto anche il volume terzo ed ultimo. Ma per varie ragioni questo volume non sarà pronto prima del prossimo anno 1940.

Il primo volume tratta della Fisiologia generale, intesa come dottrina delle proprietà morfologiche, chimiche, chimico-fisiche e funzionali della materia vivente, e della fisiologia dei tessuti. Il secondo volume è interamente dedicato alla Fisiologia del Sistema nervoso centrale e periferico e a quella degli organi dei sensi. Il terzo conterrà la fisiologia così detta della « vita vegetativa »: funzioni della circolazione, della respirazione, della nutrizione, delle ghiandole endocrine e rispettivi ormoni ecc., ed egli non mancherà di presentarlo non appena sarà pronto.

L'Accademico COLONNETTI presenta le seguenti Note:

G. GUIDI - *Le tensioni interne nel cordone di saldatura trasversale.*

L'autore riassume i risultati di alcuni precedenti studi sulla ripartizione delle tensioni nei cordoni di saldatura trasversale, ed osserva che essi, trascurando gli effetti della plasticità del metallo, conducono a conclusioni che non sono confermate dall'esperienza pratica. Indica un modo di valutare il grado di plasticità del materiale, e trova una relazione sperimentale fra questo indice di plasticità e la resistenza alla trazione del giunto.

Questo studio è tanto più importante in quanto potrebbe essere il punto di partenza di studi teorici sull'argomento, studi che hanno dato buoni risultati in altri campi.

G. PIZZETTI - *Sul problema dell'equilibrio elasto-plastico dei tubi.*

Questo problema è stato studiato a fondo da tempo. Sono classiche le ricerche degli artiglieri francesi e in modo particolare del Generale Malavel e dei suoi allievi. I risultati da essi ottenuti e dall'esperienza confermati si trovano qui inquadrati nella teoria dell'equilibrio elasto-plastico che dà del problema una soluzione rigorosa ed estremamente generale.

L'Accademico GEMELLI presenta le seguenti Note:

GEMELLI e SACERDOTE - *Metodi nuovi e risultati sullo studio dell'altezza tonale nel linguaggio.*

BANISSONI e PACITTI - *L'evoluzione della preghiera nel periodo puberale.*

L'Accademico GEMELLI presenta quindi in omaggio il 1° e 2° fascicolo del volume I dell' « Archivio di Psicologia, Neurologia Psichiatrica e Psicoterapia », pubblicato a Milano sotto gli auspici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

L'Accademico LEVI-CIVITA presenta le seguenti Note:

T. LEVI-CIVITA - *Nozione adimensionale di vortice e sua applicazione alle onde trocoidali di Gerstner.*

Quando il moto di un fluido è dotato di potenziale di velocità, il vortice si annulla, come è ben noto, mentre sono appunto i vortici e le linee vorticose, che

mettono teoricamente e sperimentalmente in evidenza le eventuali rotazioni intestine. Se però si mira ad apprezzare di quanto un moto devia dal comportamento idealmente tipico della irrotazionalità, non è proprio il vortice che può fornire un criterio adeguato. La ragione è chiara, perchè il vortice non è un puro numero, bensì una quantità fisica che ha la dimensione dell'inversa di un tempo, e quindi un valore numerico il quale, quando non sia rigorosamente nullo, dipende dalla scelta dell'unità tempo. Sono invece criteri adimensionali che possono talora permettere di tradurre correttamente in numeri degli apprezzamenti di qualità (come accade per i coefficienti di rendimento, o per le misure di divario da un regime limite). Si è così in particolare condotti a sostituire al vortice istantaneo dell'Helmholtz il suo prodotto per un tempo, o, più precisamente, il vortice integrale, che viene appunto illustrato in questa Nota, con applicazione specifica ad un tipo importante di moto ondoso irrotazionale, cioè alle onde trocoidali di Gerstner.

G. D. MATTIOLI - *Sopra gli effetti secolari delle marce e dell'irraggiamento di massa sugli elementi dei sistemi binari e il problema dell'evoluzione secolare delle stelle doppie.*

L'autore riprende le classiche, ma assai laboriose ricerche del Darwin sugli effetti cosmogonici delle maree, riuscendo, specie nel caso tipico di due corpi a nucleo solido sferico, a rendere, con considerazioni sintetiche, snelle ed espressive le equazioni del moto perturbato. Criteri analoghi valgono per perdite dissipative dovute all'irraggiamento. Con queste equazioni il Mattioli può seguire nel tempo la evoluzione dei vari elementi delle stelle binarie (anche per rilevanti eccentricità) e confrontarle coi dati di osservazione, mentre le geniali trattazioni del Krall e dell'Armellini hanno soprattutto di mira il comportamento asintotico.

L'Accademico LEVI-CIVITA offre quindi in omaggio il «The Rice Institute Pamphlet», vol. XXV, October 1938, No 4, contenente tre letture di soggetto matematico che egli tenne al Rice Institute nella City of Houston, Texas, nel settembre 1936 dal titolo rispettivo:

- 1) *A New Deal for the Elementary Foundation of Relativity.*
- 2) *What Are Waves?*
- 3) *The Trigonometry of Curvilinear Triangles on a Surface.*

L'Accademico PENSA presenta la seguente Nota:

G. PALUMBI - *La fine vascolarizzazione ed innervazione del glomo carotideo dei mammiferi.*

L'autore ha ripreso in esame la fine vascolarizzazione ed innervazione del glomo carotideo, con particolare riguardo a quello umano. I preparati di iniezione vasale dimostrano che il glomo rappresenta un sistema di vasi capillari disposti in glomeruli, intercalati, nell'uomo, fra rami della carotide e rami della vena giugulare interna. Ciò può spiegare la sua particolare sensibilità ad ogni variazione pressoria che si verifichi nell'interno delle vene giugulari interne.

Riguardo all'innervazione l'autore distingue una parte effettrice ed una recettrice. La parte effettrice, per le cellule parenchimali dell'organo e per i vasi, è rappresentata dal complesso dei neuriti — fibre postgangliari — delle cellule, dal ganglio simpatico iustaglomico e dagli elementi multipolari disposti in seno ai plessi nervosi del glomo; cellule che ricevono le loro fibre pregangliari dal glosso faringeo e dal vago; inoltre da fibre provenienti direttamente dai gangli simpatici della catena cervicale e dal plesso simpatico pericarotideo.

La parte recettrice consta invece di fibre glosso faringeo e vagali le quali, nel glomo, danno luogo non solo ad espansioni sensitive periarteriose, ma soprattutto ad un complesso sistema espansionale periferico sensitivo diffuso in tutto l'organo rappresentato da strutture terminali non individualizzate in formazioni separate e distinte.

L'autore infine espone i motivi per i quali presume che il glomo oltre a determinare, in alcuni casi di improvvisa aumentata pressione nell'interno delle vene giugulari, l'insorgenza di riflessi vasomotori di compenso, rappresenti un organo sensitivo motore paragonabile ai fusi neuro muscolari ed all'apparato nervoso del nodo seno-atriale del cuore. Sarebbe il segnalatore delle variazioni di pressione e di contrattilità vasale che si determinano nei territori periferici che sono sotto il controllo dell'apparato nervoso del seno carotideo e del glomo.

L'Accademico PISTOLESI presenta la seguente Nota:

E. PISTOLESI - *Sull'interferenza delle gallerie aerodinamiche a contorno misto.*

Si indica un procedimento per la determinazione dell'interferenza di un canale aerodinamico a sezione circolare a contorno misto, basato sull'uso di una funzione che assume valori reali su alcuni tratti della circonferenza, valori immaginari sui tratti rimanenti. Con tale procedimento si possono risolvere tutti i problemi del contorno circolare misto, cioè formato di n tratti rigidi e di n tratti

liberi. Nel caso di $2n$ tratti rigidi di uguale ampiezza intercalati a $2n$ tratti liberi pure di uguale ampiezza si può anche trovare il limite del fattore di interferenza per n tendente dell'infinito. Il procedimento è applicabile tanto se l'ala è sostituita con una doppietta, quanto se lo è con una coppia di vortici e quindi in generale ad una distribuzione qualunque di vorticità lungo l'apertura.

L'Accademico Soprannumerario P. STEIN presenta la seguente Nota :

M. TIBOR - *The distribution of the Stars in the Taurus-Auriga region.*

Evidemment la classification spectrale des étoiles jusqu'à une grandeur aussi faible que possible est d'une importance fondamentale pour la solution du grand problème de la structure de la Voie Lactée. Pour contribuer à cette solution, l'auteur a fait choix de 15 régions, chacune de 4 degrés carrés, situées le long de l'équateur galactique, en évitant autant que possible les nébuleuses obscures, dont la présence se manifeste par une diminution notable de la densité stellaire apparente. Les résultats de l'examen de trois de ces régions ont été déjà publiés dans les Mémoires de l'Académie. La région Taurus-Auriga, dont le centre se trouve à 149° de longitude et à 2° de latitude galactiques, fut photographiée au moyen de réfracteur de Zeiss à objectif quadruple, de 40 cm. d'ouverture et de 2 m. de distance focale, muni d'un prisme objectif à angle réfringent de 4 degrés. Les quatre poses (de 10^m, 20^m, 1^h et 4^h) furent échelonnées de manière à rendre possible la classification de toutes les étoiles, au nombre de 1780, depuis la 8^{me} jusqu'à la 17^{me} grandeur, et même pour la plupart sur deux ou trois plaques. Pour cette classification l'auteur s'est servi de la méthode et des critères adoptés dans les publications de Potsdam par les astronomes Fr. Becker et Brück. En outre les indices de couleur furent déterminés en comparant les grandeurs photographiques avec les grandeurs photovisuelles, obtenues au moyen d'un filtre jaune; un châssis à coulisse permettait de photographier sur la même plaque, l'une à côté de l'autre, la région à étudier et celle de la séquence polaires. Ce qui est surprenant c'est le nombre assez grand d'étoiles des classes F et G à excès de couleur négatif.

Les diagrammes de la distribution superficielle et la distribution dans l'espace présentent une ressemblance remarquable avec les diagrammes des trois régions antérieures et avec ceux de la grande Durchmusterung spectrale de 10 000 étoiles faite par le Dr. Nachmann de Hambourg. Parmi les étoiles les plus luides la classe A est prédominante, tandis que la classe G est relativement la plus nombreuse parmi les étoiles de faible grandeur. En général les courbes indiquent une diminution marquée de la densité stellaire à partir d'une distance de 1000

parsecs. En faut-il conclure à une raréfaction réelle dans l'espace? Avant de pouvoir donner une réponse péremptoire il faudra tenir compte d'une absorption possible de la lumière dans l'espace, de la fréquence relative des étoiles naines et géantes et de la dispersion des courbes de luminosité moyenne des diverses classes spectrales, questions qui devront être discutées à fond, lorsque le programme en cours sera réalisé.

Si passa quindi al quarto punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI dà la parola al Cancelliere perchè comunichi lo stato delle votazioni per i seggi vacanti in corso di votazione, e riferisca sul rinvio della votazione.

Il Cancelliere riferisce che nella Tornata segreta che ebbe luogo immediatamente dopo la terza Tornata ordinaria del terzo anno accademico (27 maggio 1939) si è proceduto alla votazione per le terne definitive, per i seggi: 21 (De Filippi, Geografo-residente), 41 (Luigioni, Entomologo-residente), 50 (Parravano, Chimico-residente).

Dato che il Santo Padre si è degnato fissare per la giornata odierna la solenne inaugurazione del quarto anno accademico non è stato possibile avvertire tempestivamente gli Accademici lontani onde potessero avere il tempo di inviare per iscritto le schede di votazione per la elezione definitiva.

La Presidenza dell'Accademia ha stabilito pertanto di rimandare alla prossima Tornata segreta tale votazione definitiva per la elezione dei nuovi accademici ai seggi suddetti.

Il Cancelliere dà quindi notizia dei seguenti lavori originali presentati prima della presente Tornata:

- P. TEOFILATO - *Gli effetti del secondo ordine nelle vibrazioni elastiche.* (Nota I).
- P. TEOFILATO - *Gli effetti del secondo ordine nelle vibrazioni elastiche.* (Nota II).
- G. COLONNETTI - *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese.*
- G. COLONNETTI - *Contributo alla teoria delle travi inflesse in stato di coazione.*
- ATH. BROÏKOS - *Sur le mouvement discontinu d'une fluide limité par une paroi fixe et une ligne libre.*
- F. SBRANA - *Sull'energia interna della terra.*
- L. MARCHETTI - *Sulla costanza dei tensori ϵ .*

A. MERCATI - *Lettere dell' Abate Lazzaro Spallanzani da un Codice della Biblioteca Vaticana.*

F. SERANA - *Sopra alcune ricerche riguardanti il calcolo degli operatori funzionali.*

La seduta viene tolta alle ore 17,20.

Dopo la Tornata pubblica ha avuto luogo la Tornata segreta.

Gli Accademici con le Signore e gli invitati si intrattengono quindi ad un thè offerto dalla Presidenza nelle sale dell'antica Casina di Pio IV.

La sera alle ore 20,30 gli Accademici presenti in Roma hanno partecipato ad un banchetto offerto dalla Presidenza dell'Accademia, alla fine del quale l'Accademico BUYTENDIJK ha rivolto al Presidente le seguenti parole:

« Monsieur le Président, veuillez me permettre de vous remercier vivement au nom des Académiciens ci-présent de la charmante invitation et de l'accueil si aimable que vous nous avez réservé.

Je tiens en outre à vous dire toute notre reconnaissance pour votre intervention auprès de nos gouvernements, mesures qui ont permis aux Académiciens même non italiens d'assister à cette magnifique séance d'aujourd'hui.

Nous éprouvons une grande joie de retrouver dans la Pontificia Academia Scientiarum un endroit où tous les esprits visent un seul but: de servir la science dans ses aspects les plus divers dans l'intérêt commun de la vérité et de l'humanité.

J'ose espérer que l'activité de notre Académie si magistralement et si brillamment formulé ce matin par le Saint Père ne manquera point d'enflammer nos cœurs et de diriger nos actes.

Ainsi l'Académie sous l'enfatigable direction de notre président répondra sous tous les rapports aux lignes directives de son fondateur, l'Auguste défunt Pontife Pie XI de vénéralée memoire.

M. le Président — convaincu que l'Académie sous votre direction saura remplir le noble rôle et tâche de grande envergure, que le Saint-Siège lui a donné, je me permets de proposer de boire à la santé du Souverain Pontife le Pape Pie XII, et aussi bien à la vôtre ».



RESOCONTO
DELLA SOLENNE TORNATA UFFICIALE
IN COMMEMORAZIONE
DEL SANTO PADRE PIO XI DI VENERATA MEMORIA

(Sabato 18 febbraio 1940)

Domenica, 18 febbraio 1940, alle ore 10, si è tenuta la solenne commemorazione ufficiale del defunto Pontefice Pio XI di venerata memoria, Augusto Fondatore della Pontificia Accademia delle Scienze.

Alla solenne Tornata che si è svolta alla Casina di Pio IV, nei Giardini Vaticani, nella nuova aula delle sedute, hanno assistito le Loro Eminenze Reverendissime i Signori Cardinali: Giuseppe Pizzardo, Accademico Pontificio Onorario, Pietro Fumasoni-Biondi, Francesco Marmaggi, Ermenegildo Pollegrinetti, Vincenzo La Puma. L'Ermo Cardinale Nicola Canali era rappresentato dall'Illmo e Revmo Mons. Principi.

Erano presenti altresì S. Enza il Principe D. Ludovico Chigi Albani della Rovere, Gran Maestro del Sovrano Militare Ordine di Malta, Accademico Pontificio Onorario; le Loro Eccellenze Reverendissime i Monsignori De Romanis, Ruffini e Carinci; gli Eccmi Parenti di Sua Santità; gli Eccmi Monsignori Tardini e Montini, impossibilitati ad intervenire avevano inviato la loro adesione; gli Illmi e Revmi Monsignori: Callori di Vignale, Confalonieri, Venini, Magnoni ed altri Prelati; il Gr. Uff. Prof. Pietro De Sanctis, Accademico Pontificio Onorario; il Revmo P. Bello, il P. Monti; il Dott. Galeazzi-Lisi, il Conte Salimei, il Colonnello De Mandato, il Colonnello de Sury d'Aspremont, il Barone de Pfyffer d'Altishofen, il Prof. Giordani e numerose altre personalità della Corte Pontificia, del Patriziato Romano e degli Istituti romani di alta coltura.

Gli Eminentissimi Signori Cardinali e gli altri personaggi venivano ricevuti dal Presidente Revmo P. Gemelli coadiuvato dal Cancelliere dell'Accademia Dott. Salviucci.

Della Pontificia Accademia delle Scienze hanno partecipato alla solenne Tornata, oltre al Presidente Revmo P. Agostino Gemelli O. F. M., gli Accademici: Amaldi, Armellini, Boldrini, Bottazzi, Crocco, Dal Piaz, Gemelli, Ghigi, Giorgi, Guidi, Lepri, Levi-Civita, Lombardi, Somigliana, Rondoni, Silvestri, Toniolo, Vercelli; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: Dom Albareda O. S. B., P. Gatterer S. I., P. Stein S. I., ed il Cancelliere dell'Accademia Dott. Pietro Salviucci.

L'AUGUSTA PARTECIPAZIONE DEL SANTO PADRE

Il Presidente dell'Accademia P. GEMELLI ha aperto la Tornata e, dopo aver ringraziato gli Eminentissimi Principi che avevano voluto intervenire alla Commemorazione dell'indimenticabile Pontefice rendendola più solenne con lo splendore della loro Porpora, ha letto, tra la devota attenzione dei presenti, il seguente telegramma inviato dall'Eminentissimo Cardinal Segretario di Stato, con l'Augusta partecipazione di Sua Santità:

P. Agostino Gemelli, Presidente Pontificia Accademia Scienze — Città del Vaticano — Alla solenne commemorazione del compianto Suo Predecessore, rinnovatore ispirato della Pontificia Accademia delle Scienze, è presente nella più desta e commossa partecipazione Sua Santità, Che rievocando con gl'illustri Accademici l'immortale Pontefice mecenate di ogni nobile disciplina educatrice delle menti e dei cuori all'Eterna Verità, rinnova alla memoria di Lui l'espressione della gratitudine universale e all'Accademia stessa i voti delle migliori fortune a gloria della scienza e della Fede.

Onorato interprete degli Augusti sensi, chiedo all'illustre Assemblea di scusare la mia forzata assenza e di considerarmi presente ad una manifestazione che interessa così profondamente i miei più intimi affetti. — L. Cardinale Maglione.

IL DISCORSO COMMEMORATIVO

L'Accademico Pontificio Alessandro Ghigi, Professore Ordinario di Fisiologia generale e Rettore della Università di Bologna, ha pronunciato il seguente discorso:

*Eminentissimi Principi
Eccellenze, Signore, Signori*

L'immagine di Pio XI, che, vedemmo alzarsi luminosa sui popoli per virtù, dottrina e previdenza, appare, a un anno della Sua scomparsa, ancora più alta e splendente, come una grande figura che, entrando nell'immortalità, abbia accresciuto la sua luce; i popoli della terra vedono oggi sull'orizzonte della storia il Pontefice della Pace come stella che vince la notte.

Noi oggi Lo rievochiamo in ispecial modo come Fondatore della Pontificia Accademia delle Scienze; ma non intende a pieno l'atto regale, con cui Egli aperse ai ricercatori del vero le porte di questo Istituto, chi non ricongiunga l'opera a tutta l'alta concezione, dalla quale Egli trasse l'unità del Suo pensiero e delle Sue azioni.

Veniva da una regione ospitale e fiorente. Fin da fanciullo aveva amato gli ampi orizzonti, le vie aperte sul mondo, le cime che innalzano.

Alla Sua alacre e pensosa giovinezza convengono i versi di un poeta della Sua terra:

Colli beati e placidi
Che il vago Eupili mio,
Cingete con dolceissimo
Insensibil pendio
Dal bel rapir mi sento
Che natura vi diè.

L'incanto di una terra, che mite clima e suolo ferace rendono costantemente verde, dove ogni pianta delle più lontane regioni cresce come nella stessa sua patria, dove sopra ad azalee in fiore e a rodo-

dendri delle più alte montagne dell'Asia, si ergono gigantesche le wellingtonie delle Montagne Rocciose e le araucarie delle Ande, aveva plasmato la Sua anima, che nelle bellezze della natura sentiva la bellezza e la potenza del Creatore. L'azzurro cupo del lago, che divide la dolce penisola lariana dalle maestose cime delle Alpi, quasi per rendere più gigantesco il loro slancio verso il cielo, le alte vette ammantate di neve e inscrutate nella profondità dei ghiacciai, avevano elevato ogni giorno il suo spirito a Dio.

Fin dall'adolescenza le alte montagne Lo avevano attratto « per riposare lo spirito dalle fatiche degli studi e ristorare le forze », come Egli stesso, già Pontefice, ebbe a scrivere al Vescovo di Annecy in occasione delle onoranze a San Bernardo da Mentone, Patrono della montagna. In quelle ascensioni si era aperta verso le vette l'anima del naturalista, perchè come Egli soleva dire, le grandi altezze lanciano lo spirito ai culmini più eccelsi negli abissi dei cieffi. Ricorderanno gli illustri Accademici la voce nostalgica con cui Egli qui rievocava il 30 gennaio 1938, una notte indimenticabile, trascorsa ad oltre 4600 metri « piena di luce, vera immagine della notte luminosa che circonda il Creato ». Pio XI si riferiva ad una delle maggiori ascensioni alpinistiche da Lui compiute quando per nuove vie aveva raggiunto le vette del Monte Rosa, percorrendo primo, con i Suoi compagni la traversata del colle Zumstein. Nella descrizione che Egli ci ha lasciato, si rivela un metodo scientifico impeccabile nella preparazione dell'impresa: accuratissima la ricerca e la discussione critica dei precedenti, per evitare di attribuire a Sè un primato, senza avere la certezza assoluta di averlo realmente conquistato, interessante la narrazione della vicenda, analitica la descrizione dei luoghi. Fra rocce, ghiacciai e distese di neve, si leva improvviso dal Suo cuore il canto della natura, che offre alla nostra mente come quadro vivo, il passaggio da Lui veduto e sentito.

Quella notte Egli e i Suoi compagni si erano fermati « all'ombra di un'enorme massiccia parete di ghiaccio purissimo, il cui ciglio sporgendosi all'infuori stendeva sopra di loro un vero padiglione di cristallo; numerose candele di ghiaccio pendevano come frange di enormi brillanti dal suo lembo esterno.

« Tutto è grandioso lassù — Egli scrive — le masse che ti circondano, come le distanze che le separano, le linee generali del pae-



saggio, come i suoi particolari. Ma appunto perchè tutto è tale, la grandiosità viene in qualche modo a dissimularsi nell'armonia del tutto. È del resto quello che succede anche nelle grandi opere dell'arte umana: l'alpinista che ha veduto S. Pietro in Vaticano e il porticato del Bernini, così colossali e graziosamente armonici, dalle parti così disperate e pur sì facili ad adunarsi nella magnifica semplicità di un colpo d'occhio, quegli sa che anche in questo particolare è sempre nella imitazione della natura che l'arte nostra si imparenta con quella di Dio, artefice primo di ogni cosa bella ».

Dopo questo volo lirico la narrazione riprende pacata; ma ad un tratto di nuovo sboccia in immagini veramente poetiche:

« Chi avrebbe potuto dormire con quell'aria purissima che ci ricercava le fibre e con quello spettacolo che ci stava dinanzi? A quell'altezza... nel centro di quel grandiosissimo fra i più grandi teatri alpini, in quell'atmosfera tutta pura e trasparente, sotto quel cielo del più cupo zaffiro, illuminato da un filo di luna e, fin dove l'occhio giungeva, tutto scintillante di stelle... in quel silenzio! via! non tenterò di descrivere l'indescrivibile... ci sentivamo dinanzi ad una per noi nuova, imponentissima rivelazione della Onnipotenza e Maestà di Dio ».

L'alpinismo era dunque da Lui considerato non soltanto come un esercizio fisico, che esige prudenza, coraggio, forza e costanza, ma come la capacità di esprimere e di sentire la natura e le sue più riposte bellezze, talora tremende, sempre sublimi. Tutte Egli volle conoscere le Alpi italiane, e, fra il 1885 e il 1913, in una ventina di escursioni, il San Bernardo, il San Gottardo, il Gran Paradiso, il Monte Rosa, il Cervino, il Monte Bianco e molte alte cime furono mèta delle Sue ascensioni, onde Egli aveva acquistato delle Alpi una conoscenza diretta, come forse pochi geografi posseggono. Non sono molti i Suoi scritti sull'argomento; ma questa è spesso caratteristica del naturalista, esteta della natura, che molto ama vedere e poco raccontare, perchè ferma entro l'animo le più sconfinare visioni.

Dopo la neve e il ghiaccio Egli volle conoscere il fuoco del vulcano e nella notte che chiudeva il secolo decimonono e dava principio al secolo ventesimo, sali, con grande gioia e volontà di studio, il Vesuvio.

« Dal cono sorgente al fondo del cratere, come da cespo di vivide fiamme, un elegante... getto di materie incandescenti balzava gigantesco zampillo seguendo la verticale e raggiunta l'altezza nell'orlo e

superata di parecchio, si espandeva non meno elegantemente in ampio lembo convesso, ricadendo come pioggia di fuoco sui ripidi fianchi del cono medesimo. Fu un momento: poi mentre il rombo andava come allontanandosi nelle profondità della terra, il getto igneo si abbassava rapidamente e le bocche del cono... si andavano richiudendo: le fiamme ne lambivano guizzando per pochi istanti ancora gli orli e finalmente tutto rientrava ancora nell'oscurità e nel silenzio solenne della notte ».

Più di un biografo ha asserito che Egli fu sul punto di dedicarsi esclusivamente allo studio delle scienze naturali, il cui amore era stato avvivato nel Suo animo dal vulcanologo Mercalli fin dai corsi del Liceo. Ma la fiamma della carità e della fede, la mente temprata allo studio e il cuore rivolto alla pietà e alla religione, portarono a pieno fiore la Sua vocazione al sacerdozio e orientarono definitivamente il Suo spirito scientifico verso le discipline storiche, filosofiche e teologiche.

I ventisei anni trascorsi nella Biblioteca Ambrosiana a Milano, e i quattro successivi, passati a Roma nella Biblioteca Vaticana, formano il periodo della maggiore attività scientifica del sacerdote Achille Ratti; sono gli anni in cui Egli potè darsi tutto agli studi, dai quali trasse quei tesori di dottrina e sapienza, che destarono l'ammirazione del mondo.

La fiducia dell'allora regnante Pontefice Gli affidò il delicato ufficio di Visitatore Apostolico e poi di Nunzio in Polonia, elevandolo in pari tempo alla Sede Titolare di Lepanto.

Nominato Arcivescovo di Milano, fu poco dopo creato Cardinale di Santa Romana Chiesa nel Concistoro del giugno 1921.

Questi altissimi uffici accrebbero in Lui senza dubbio l'esperienza degli uomini e dei Governi; ma non si erra pensando che la Sua mente, nella formazione universale, di cui diede come Pontefice le più alte prove, fosse già maturata nella Biblioteca Ambrosiana e in quella Vaticana.

Chi legga la documentazione dei lavori compiuti da Achille Ratti all'Ambrosiana di Milano, trova innanzi tutto degna del maggiore rilievo la completa obbedienza, con cui Egli procurò di interpretare e attuare nel nuovo secolo le volontà del fondatore.

Il Cardinale Federico Borromeo aveva voluto che il Bibliotecario studiasse per sè e pubblicasse i risultati dei suoi studi; Achille Ratti, in un primo tempo, si dedicò allo studio della Storia Ecclesiastica e specialmente di quella lombarda; diede alle stampe contributi vari e un'opera in parecchi volumi sulla Chiesa di Milano, che raccoglie i documenti e gli Atti degli Arcivescovi di quella Diocesi, dalle origini ai nostri giorni. Scoperse nella Biblioteca un codice di Bobbio e preparò il *Liber diurnus Romanorum Pontificum*; più tardi compose il *Missale Ambrosianum duplex* e mise in luce una serie di contributi notevoli di storia religiosa. L'uomo e lo scienziato di larghe vedute non suole esaurirsi in un solo argomento, sia pur vasto: e il Ratti scrisse di molti altri argomenti storici e letterari nei « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », nel « Giornale Storico della Letteratura Italiana » e in altri periodici ogni qual volta la scoperta di un documento lo poneva di fronte a un argomento in qualche modo interessante. Molti di noi leggendo nei « Promessi Sposi » l'episodio della Signora di Monza hanno provato una certa curiosità di fronte all'enigma di quel personaggio. Il Ratti rinvenne un giorno un manoscritto autografo del Cardinale Federico Borromeo, intitolato: « Di Suor Virginia penitente ». Individuò in quella suora la « Signora di Monza » e scrisse, qual contributo Suo al cinquantenario di Alessandro Manzoni, la « Vita della Signora di Monza abbozzata per sommi capi dal Cardinale Federico Borromeo e una lettera della Signora al Cardinale ».

Il Cardinale Federico aveva voluto che il Bibliotecario si tenesse in relazione costante coi dotti d'Europa ed il Ratti fu più volte a Parigi, a Vienna, a Londra, dove visitò le biblioteche, esaminando, confrontando, cogliendo quanto di nuovo avrebbe potuto essere opportunamente applicato nella Sua Ambrosiana.

Il Cardinale Federico aveva imposto al Bibliotecario di essere di guida agli studiosi frequentatori dell'Istituto ed Egli si prodigò per tutti con la parola e cogli scritti, come attesta il gran numero delle Sue lettere le quali costituiscono di per sè un monumento letterario di alto valore.

Il fondatore dell'Ambrosiana aveva voluto una Galleria di quadri e una Galleria di statue che formassero un Museo accanto alla Biblioteca. Achille Ratti riordinò e accrebbe la prima, apersè la Sala delle

Stampe, quella delle Armi, quella della Rosa, che contiene i cimeli di Leonardo, creò il Museo Settala.

Ad una cosa non aveva forse pensato il Cardinale Federico: che i libri deperiscono ed i manoscritti sono delicatissimi: Achille Ratti istituì il Laboratorio per il restauro dei libri e dei manoscritti, percorrendo l'Istituto di Patologia del libro.

Tre secoli sono lunghi e gli ambienti invecchiano. Achille Ratti, abituato all'aria aperta e al sole delle Alpi trasformò e rinnovò l'antico l'Istituto esaltando le glorie del passato nel più ampio respiro dei tempi moderni.

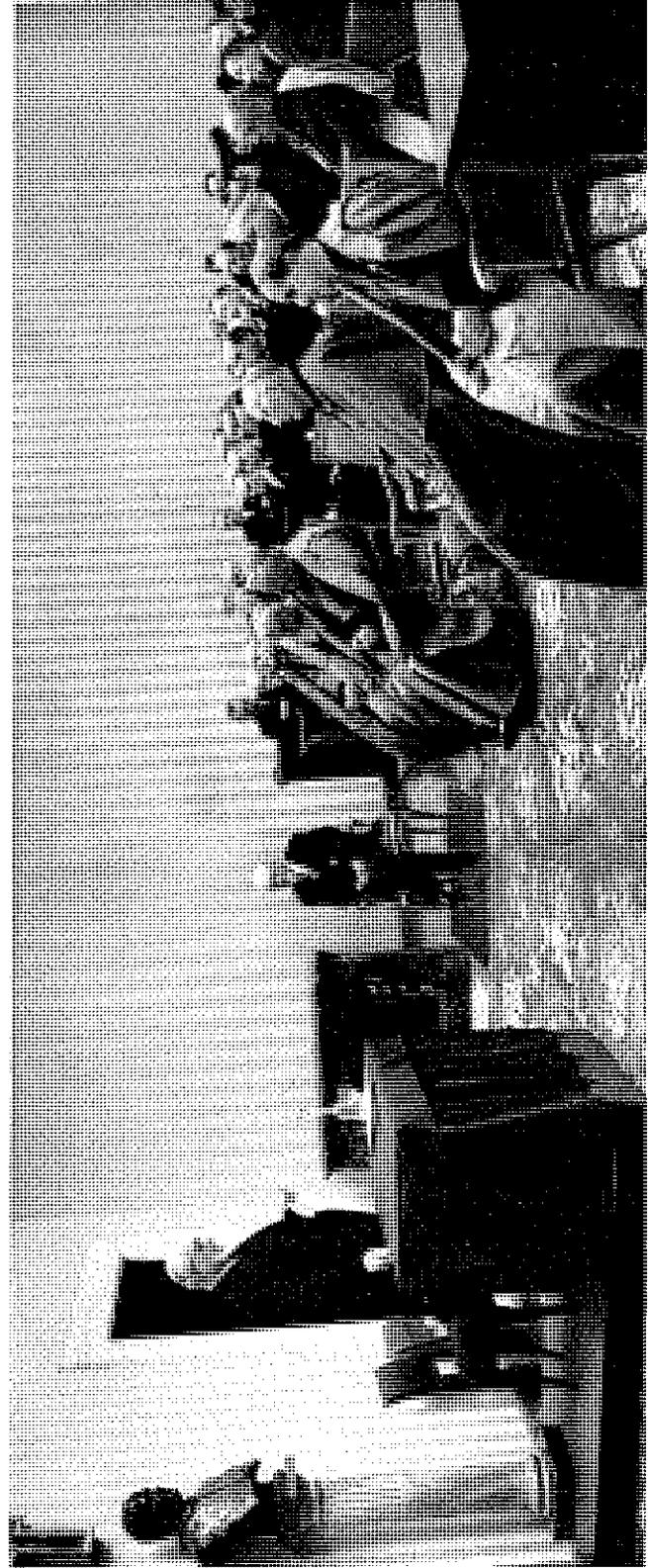
Il medesimo procedimento di continuatore e ampliatore, Egli tenne rispetto agli studi scientifici, non appena divenne Pontefice.

La Pontificia Accademia delle Scienze è la continuazione diretta dell'Accademia dei Lincei, che fondata nel 1603 da Federico Cesi aveva poi, come tutte le cose umane, avuto una serie di alterne vicende di splendore e di decadenza. Pio IX nel 1847 per ricondurre l'Istituto a nuova opera feconda la restaurò in Campidoglio col nome di « Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei ». La restaurazione del 1847 a differenza della fondazione e delle restaurazioni precedenti, dovute ad iniziativa privata, avveniva invece per la diretta autorità del Pontefice e del suo Governo.

Pio IX aveva giustamente voluto distinte le scienze umanistiche, le quali studiano i fatti umani e sono essenzialmente morali, e le scienze che studiano i fatti naturali, essenzialmente conoscitive. A queste aveva ristretto il campo dell'Accademia, per dare alle ricerche un fine esplicito e diretto quale è il vero scientifico e per « promuovere e giovare con cognizioni e con l'influenza le tecniche discipline e le industrie che dalle scienze dipendono ».

La risorta Accademia divenne allora il massimo organo scientifico della Santa Sede, sia per la rigogliosa attività, sia per la valentia dei suoi membri, fra i quali annoverava i più illustri scienziati di quel secolo.

Ma le seguenti vicende politiche posero la Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei in condizione di svolgere un'attività scientifica sempre



più modesta e tale da non potere più corrispondere agli scopi cui tendeva la restaurazione di Pio IX.

Benedetto XV, che col nome significava di voler essere nella Sede di Pietro, come già in quella di S. Petronio, il continuatore di Benedetto XIV, il quale aveva fondato a Bologna l'Accademia Benedettina, e restaurato a Roma, nel 1740, l'Accademia dei Lincei, intravide nell'immediato dopo-guerra, che la protezione rivolta dalla Chiesa agli studi scientifici, avrebbe potuto altamente giovare all'opera di pacificazione negli animi.

Intuiva l'intelligentissimo Pontefice che una manifestazione pubblica di rinnovato favore per gli studi scientifici, da parte del Papa, avrebbe non solo ripristinato le relazioni scientifiche internazionali, che significano avvicinamento e comprensione di ingegni di tutte le terre nella ricerca del vero, ma avrebbe anche potuto rialzare lo spirito dei popoli conducendoli dalla depressione e dallo scetticismo a un pensiero superiore.

L'opera di restaurazione era stata appena iniziata, quando Benedetto XV venne a morte e gli succedette Pio XI.

Questi, che aveva in sè il fuoco sacro della scienza e conosceva i metodi e le necessità delle ricerche sperimentali, avvalorò l'idea del predecessore, proponendosi di creare un organo di consultazione scientifica a servizio della Santa Sede, col concorso di rappresentanti della Scienza Mondiale e senza preoccupazione della loro fede religiosa, purchè animati dal sincero intento di cercare la verità così come appare nella naturale rivelazione del Creato. Egli rifuggiva da una riforma improvvisa, che non avrebbe dato garanzie sufficienti di stabilità nei risultati e dispose una graduale restaurazione dell'Accademia, ammettendo nell'alto consesso, a mano a mano che si rendevano liberi i posti, uomini nuovi di indiscusso valore scientifico, curando ad un tempo la scelta delle pubblicazioni da inserire negli Atti e nelle Memorie e dandole una nuova Sede in questa magnifica, artistica e suggestiva Casina di Pio IV, in mezzo ai Giardini Vaticani, dove la Biblioteca, la Specola, gli Archivi, la Pinacoteca, i Musei parlano di Scienza e di Arte. Era Suo intendimento di assistere almeno una volta all'anno alle tornate accademiche, per avere la possibilità di conversare con i singoli Accademici e per chiarire con i limpidi e vigorosi Suoi discorsi le direttive dell'opera grande.

Quando Pio XI onorò la prima volta con la Sua presenza nel 1924, l'Accademia nella nuova Sede, espresse nella Sua allocuzione la letizia che gli aveva dato quanto aveva veduto ed ascoltato, e ringraziò Iddio di avergli ispirato di destinare a Sede dell'Accademia quel gioiello d'arte che è la Casina di Pio IV.

Nell'esaltare la quiete del luogo e la bellezza dei suoi contorni, con incisiva immagine mise in evidenza quale tesoro di preziose promesse derivi dalla contiguità di istituti dedicati alla scienza ed all'arte, e designò a noi tutti come simboli, il panorama di Monte Mario con la Via Trionfale annunciatrice di nuovi trionfi della scienza e dall'altra la mirabile cupola di S. Pietro, dove un supremo sforzo d'arte e di scienza sembrano aver voluto portare più vicino al Creatore, il pensiero, l'anima pensante ed ascendente al vero.

L'antico patronimico di « Lincei » con il quale si fregiavano allora gli Accademici, suggeriva a Lui l'idea della « scienza dalla lunga vista dalla vista lungiveggente e lungimirante, sempre in traccia di qualche cosa che sta oltre, più in là, più in alto; dal particolare all'universale, dall'effetto alle cause, dalle cause immediate alle cause remote, dalle cause seconde alla causa prima, alla 'causa causarum', dove la vostra scienza assurge al grado ed alla sostanza di vera altissima sapienza, nella quale i tesori tutti si adunano, tutti i tesori della nostra scienza prendono la loro più alta valorizzazione, così da poter essere giustamente chiamati: 'divitiae salutis, sapientiae et scientiae' ».

Or chi rilegga le allocuzioni pronunciate da Pio XI all'Accademia, sempre trova assillante e ardente questa sovrana aspirazione alla verità, mèta ultima della scienza e dello scienziato. In occasione dell'Anno Santo, aperto agli uomini per unir il bene al vero, Egli augurava all'Istituto di diventare: « sorgente sempre più ricca di quella benefica Carità che è la Verità ».

Nell'anno del Centenario Voltiano, Egli si rallegrava che il grande scopritore potesse essere qui commemorato, non solo perchè era stato un credente e aveva professato col pensiero e con le opere la Fede, ma anche perchè la sua invenzione, ampliata e potenziata da una serie inesausta di ingegni, che giunge fino a Pacinotti e a Marconi, aveva messo a disposizione della Verità Cristiana un mezzo di rapida e meravigliosa diffusione.

Fra le cortesi espressioni, che Egli soleva rivolgere agli Accademici, commuove oggi il ricordare quelle che disse in occasione del Suo Giubileo Sacerdotale, quando affermò che fra le manifestazioni in Suo onore, « poneva quella della Sua Accademia fra le più care e le più apprezzate e le più preziose, perchè gli veniva dalle altissime regioni dell'intelligenza e della scienza, sulle quali l'Intelligenza divina lancia i suoi raggi più luminosi e più illuminati, raggi di infinita luce e splendore, in quanto provengono dall'Essere che è in se stesso la Luce ». Il Santo Padre, in una parola, si compiaceva di considerare l'Accademia come il Magistero della Scienza accanto al Magistero della Fede; il Senato della Scienza accanto al Senato Gerarchico. A Suo giudizio l'amore e l'interesse per la scienza non possono in nessun modo essere esclusi dal ministero del Papa, che, nell'opera per le anime, non può prescindere dall'amore per la scienza che è verità, illumina la vita, riceve aiuto dalla Fede e a questa offre in ricambio inestimabile sussidio. Di questo gli Accademici dovevano essere certi, perchè alle loro investigazioni si rivela più infinita la sapienza di Dio Creatore, di Dio Legislatore. Il Papa illustrava questi Suoi concetti con particolare insistenza il giorno in cui era presente ad una tornata dell'Accademia, Guglielmo Marconi, che aveva presieduto alla costruzione della potenza stazione Radio. Pio XI esaltava la immensa sapienza di Dio, sia che essa « tracci la traiettoria agli astri, ai mondi immensi, sia, e forse ancor più, che celi nel mistero degli atomi, infinitamente piccoli, le meraviglie di così grandi, così precise, così costanti leggi, tali per cui veramente può dirsi che nulla di ciò che noi vediamo e che si impone alla nostra vista sfugge per la sua infinita piccolezza e abituale insondabile nascondimento, nulla sfugge ad una mirabile legge, anzi ad una rete di leggi che basterebbe da sola ad illustrare non solo l'esistenza ma anche la infinita sapienza del Legislatore ».

L'armonia fra Scienza e Fede, tra Verità e Carità, che appare sempre luminosa ad ogni conquista della Scienza, erasi a Lui rivelata ancor più grande dopo che la Radio aveva recato un aiuto così valido alla parola della Fede. « Quando si parla — esclamava il Pontefice — di presupposti contrasti fra la Scienza e la Fede, si fa dire alla Scienza quello che la Scienza non dice o si fa dire alla Fede quello che la Fede non insegna ».

Per questa stessa visione, che nel contemplare tutte le forme dello spirito, non può essere detta che universale Egli volle da ultimo che l'Accademia assumesse carattere veramente universale. Come abbiamo detto, voleva il Santo Padre che accanto al Trono di Pietro le scienze della conoscenza fossero rappresentate dai più insigni cultori di ogni paese per rendere omaggio alla Verità; voleva che tale omaggio fosse reso dai più illustri cultori di quelle scienze sperimentali, che uomini di poca scienza avevano vanamente cercato nel precedente secolo di far apparire nemiche della Religione. Pio XI voleva insomma dimostrare apertamente che la Chiesa non ha nessun timore della vera scienza, anzi la ritiene una delle maggiori forze date all'uomo nell'indagine del vero.

Aspirazione del Santo Padre era di fare dell'Accademia una accolta di scienziati, non soltanto per onorarli ma anche per consultarli, senza che si possa, sia pur lontanamente sospettare che la Chiesa voglia aggrogare la ricerca scientifica o comunque coartarla. A questa serena e costruttiva concezione fu da Lui ispirata non solo la ricerca di consulenti insospettabili, ma la costante raccomandazione a indagare il vero scientifico senza preconcetti o indirizzi di ordine diverso da quelli strettamente conoscitivi.

Così preparata e pubblicamente annunziata nel discorso che il Pontefice tenne il 12 gennaio 1936, l'Accademia rinnovata ebbe quegli Statuti e quella struttura che oggi la caratterizzano. La Santa Sede ne ebbe, come fu attestato dalla stampa di tutto il mondo, nuovo e pubblico riconoscimento di grandezza, l'Accademia nuovo fulgore. Questa pertanto a buon diritto oggi si prostra innanzi alla grande Figura del suo Fondatore, per ringraziarlo non solo della fondazione stessa, ma anche della solenne garanzia, offerta dal Supremo Magistero della Fede alla libertà della scienza nel campo della sua attività specifica.

Senonchè sia qui lecito avvertire che l'istituzione dell'Accademia Pontificia non fu che un punto del suo grandioso programma.

L'Accademia non è la sola istituzione scientifica alla quale Pio XI abbia dedicato le Sue amorevoli cure; molti altri organismi culturali di carattere scientifico sperimentale, debbono al Suo spirito innovatore forme moderne o addirittura la fondazione.

È noto che gli studi ecclesiastici furono da Lui ricostituiti *ab imis*; ma è meno noto al pubblico che fra le discipline che Egli volle in essi curate sono le scientifiche e sperimentali.

La Specola Vaticana, dotata di ottima sede e di mezzi adeguati, a Castel Gandolfo, fu un'altra prova luminosa dell'orientamento scientifico di Lui. Ma una istituzione scientifica che può essere detta unica, sia per la originalità, sia come testimonianza del grande sviluppo dato all'etnografia delle Missioni Cattoliche merita, nella celebrazione di Papa Ratti, una specialissima menzione: la fondazione del Museo Missionario Etnologico, derivato in gran parte dalla mirabile Esposizione Missionaria del 1925.

A chi Gli chiedeva allora quali criteri fossero da adottarsi nella scelta delle pubblicazioni da inserire nella rivista etnologica « Annali Lateranensi » pubblicazione ufficiale del Pontificio Museo Missionario, il Papa aveva risposto che unico criterio dovesse essere quello scientifico e che ogni persona, di qualunque fede, potesse illustrare il materiale del Museo, purchè avesse una reale preparazione scientifica. In questa risposta troviamo riconfermato lo spirito scientifico di Pio XI, derivante dalla profondità stessa della Sua Fede e corroborato da solida preparazione speculativa e dottrinale.

Lo stretto legame tra Scienza e Fede, da Lui sempre sentito e esaltato, appare inoltre nello sviluppo che Egli diede alle Missioni per la propagazione della Fede, dove l'ordinamento delle stesse è spesso riferibile ai risultati degli studi compiuti dai Missionari sugli usi e costumi dei popoli.

Pio XI è stato designato da taluno col nome di Papa Missionario. Non è mio ufficio di esporre, sia pure fuggacemente quanto Egli abbia fatto per le Missioni Cattoliche; quali siano state le Sue iniziative quali le riforme nell'opera della Propagazione della Fede. Basterà ricordare che la popolazione cattolica posta sotto la giurisdizione della Sacra Congregazione di Propaganda Fide crebbe dal 1922 al 1933, Anno Santo, di sei milioni di anime. A me preme rilevare che l'Esposizione Missionaria del 1925, dopo aver suscitato un interesse vivissimo in tutto il mondo e aver dato uno straordinario sviluppo alle conoscenze etnografiche, è oggi nel Palazzo Apostolico del Laterano non solo quel primissimo Museo Etnologico di cui ho parlato, ma anche una scuola pratica permanente ad uso dei missionari.

Intenti e metodi strettamente scientifici reggono anche questa scuola e ci rendono ammirati dell'opera missionaria di Pio XI, psicologo profondo che ha valorizzato il clero indigeno e, con larga visione delle esi-

genze peculiari dei singoli popoli, ha affidato i fedeli a Vescovi indigeni, ogni qual volta ciò gli sia stato possibile. Il Missionario è un apostolo; ma quando egli può essere sostituito da un Capo che appartiene alla medesima razza dei nuovi fedeli, questi vedono in lui l'esponente della loro stirpe, la guida spirituale che ne conosce il cuore e la mente.

L'aver il Pontefice informato l'alta Sua azione apostolica a questa necessità superiore, mostrandosi sollecito del vero spirito sostanziale è un'altra insigne prova che la Sua mente non invano si era fin dai primi anni educata anche negli studi storici e scientifici.

Siamo così giunti anche per questa via all'universalità del Suo apostolato umano e spirituale.

Mi sia infine concesso, a chiusura di questa mia Commemorazione, e quale Accademico Pontificio appartenente alla Nazione italiana, una delle ventuno Nazioni attualmente rappresentate in seno ad essa, ricordare in questa sede l'opera mirabilmente da Lui compiuta della Conciliazione.

Anche questo grande avvenimento di importanza universale, se ben si riguarda, ebbe la sua prima origine nello spirito storico, filosofico e scientifico, per cui Egli costantemente tendeva alla ricerca del vero.

Tutta la Sua vita sacerdotale aveva insegnato a Lui che anche nel governo dei popoli esiste una sostanza che è verità illuminata dal Vangelo ed un'apparenza che conduce all'errore.

Il diritto, fonte di bene e derivato dal bene, è luce di verità e la giustizia è realtà naturale che tende alla conservazione dell'ordine nelle cose, all'armonia nei rapporti umani. L'uso della forza è spesso negazione dell'ordine e dell'armonia. Le questioni di prestigio, e per l'individuo e per la collettività, non collimano sempre colla sostanza, ossia colla verità, colla realtà.

Pio XI sentì questa verità e realtà della eterna universalità della Chiesa Cattolica, quando, non appena eletto Papa, impartì la Sua apostolica benedizione all'Urbe ed all'Orbe. Ebbe la fortuna di incontrarsi con un Forte, che rigettata la pregiudiziale dottrina, valutò la potenza spirituale della Chiesa nella sua universalità.

La Conciliazione avvenne: fatto spirituale, trionfo della verità e della realtà, prima che fatto materiale, trionfo della politica.

La grande anima di Pio XI ammonisce i Governi che, agitando questioni di prestigio ed usando la forza, spargono sangue e lacrime sulla travagliata umanità e la Sua figura si alza, esempio indelebile dei beni supremi, ai quali conducono le vie della giustizia, della conciliazione e della pace.

La commemorazione, seguita attentamente dall'eletto Uditorio, veniva coronata da un vibrante generale applauso. Gli Eminentissimi Cardinali e le altre personalità intervenute si congratulavano fervidamente con l'illustre Accademico

RESOCONTO
DELLA SECONDA TORNATA ORDINARIA
DEL IV ANNO ACCADEMICO

(Sabato 18 febbraio 1940)

Presiede il Revmo Prof. P. A. GEMELLI O. F. M., Presidente.

Sono presenti gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, BOLDRINI, BOTTAZZI, CROCCO, DAL PIAZ, GEMELLI, GRIGI, GIORGI, GUIDI, LEPRI, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, SOMIGLIANA, RONDONI, SILVESTRI, TONIOLO, VERCELLI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

Ordine del giorno: 1) Approvazione del Verbale della precedente Tornata. 2) Comunicazioni del Presidente. 3) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 4) Varia.

Il Presidente GEMELLI dichiara aperta la seduta alle 11,15.

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione, e poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI comunica al Corpo Accademico il sovrano gradimento per il telegramma di filiale omaggio fatto pervenire al Santo Padre dall'Accademia in occasione della prima Tornata Ordinaria del corrente IV Anno Accademico.

Il Presidente invita il Cancelliere a dare lettura del testo del venerato dispaccio a firma dell'Eminentissimo Cardinale Segretario di Stato, che tutti i presenti ascoltano in piedi.

Padre Gemelli Presidente Pontificia Accademia Scienze — Città del Vaticano — Grato omaggio Accademici Pontifici occasione solenne Seduta Inaugurale quarto anno accademico conferma Sua Santità liete speranze relative alta funzione attività scientifica religiosa illustre Consesso e offre Augusto Pontefice propizia occasione rinnovare paterni sensi e Benedizione Apostolica — L. Card. Maglione

Il Presidente GEMELLI comunica quindi la dolorosa notizia della morte della Consorte dell'Accademico BIANCHI e prega il Cancelliere di dare lettura del telegramma di condoglianze inviato dal Presidente e nome dell'Accademia.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico ARMBELLINI presenta la seguente Nota :

M. CIMINO - *Nuova orbita del Pianeta 747 Winchester e perturbazioni speciali di Giove dal 1929 al 1940.*

Il Cancelliere dell'Accademia comunica, da parte dell'Accademico COLONNETTI assente, la presentazione delle seguenti Note:

G. COLONNETTI - *Di un nuovo procedimento per la messa in tensione delle armature nelle strutture in cemento armato.*

G. COLONNETTI - *Stati di coazione di armature incrociate.*

Il calcolo rigoroso degli stati di coalizione che si determinano in una massa di calcestruzzo mettendo simultaneamente in tensione due o più armature incrociate — cioè disposte secondo direzioni differenti — presenta qualche difficoltà.

Ciò dipende dal fatto che ciascuna armatura viene ad essere sollecitata, non solo dalla sua tensione longitudinale, ma anche da pressioni laterali dipendenti dalle tensioni delle armature che essa incrocia.

Se però le armature vengono preventivamente avvolte da un sottile strato di materia plastica, atto ad impedire che esse aderiscano al calcestruzzo, ogni azione sulla loro superficie laterale praticamente si annulla, ed esse restano soggette a sole tensioni longitudinali.

Il problema diviene allora suscettibile di una soluzione che è, ad un tempo, semplice e rigorosa.

L'Accademico GEMELLI presenta la seguente Nota:

G. SACERDOTE - *Proprietà dei campi acustici.*

Si esaminano dapprima le proprietà geometriche generali del gradiente di pressione in un campo acustico bidimensionale a regime. Si considera il campo di interferenza fra onda diretta ed onda riflessa da un piano, e si studia la possibilità di un metodo di misura del potere riflettente da determinazioni di gradiente di pressione in un punto qualsiasi del campo. Si esamina in seguito il campo generato da un sistema di sorgenti concentrate determinando le caratteristiche del gradiente di pressione.

L'Accademico GIORGI presenta la seguente Nota:

A. CHIellini - *Sugli invarianti delle equazioni differenziali del primo ordine a derivate ordinarie, del tipo $y' = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} c_i y^{n-i}$.*

Si determina un sistema completo di invarianti relativi e assoluti dell'equazione $y' = f(x)$, con f polinomio in y di grado $n \geq 3$, a coefficienti funzioni della x , mediante un procedimento analogo a quello tenuto dall'Autore in un precedente lavoro, per $n = 3$.

Come prima applicazione dei risultati ottenuti, l'Autore stabilisce le condizioni necessarie e sufficienti affinché l'equazione $y' = f(x)$ sia riducibile ad una a coefficienti costanti ed infine le condizioni necessarie e sufficienti affinché l'equazione stessa sia riducibile alle quadrature.

L'Accademico LEVI-CIVITA presenta la seguente Nota:

P. SCATIZZI - *Profili di spiaggia.*

Con semplici ipotesi statiche l'Autore ha determinato l'assetto di regime che rimane subordinato in un fondo sabbioso dal martellamento incessante delle onde. La curva cui si atteggia il fondo risulta del tipo della cicloide. Il soggetto porge anche il destro ad una induzione del profilo da dare alle dighe marine.

L'Accademico SILVESTRI presenta in omaggio una sua recente pubblicazione dal titolo: *Compendio di Entomologia applicata (agraria-forestale-medica-veterinaria)*. Parte Speciale, vol. I. — Portici, Tipografia Bellavista, 1939.

L'Accademico Soprannumerario P. ALBAREDA, presenta in omaggio la recente pubblicazione, edita dalla Biblioteca Apostolica Vaticana, de *La carta dei paesi Danubiani e delle Regioni Contermini di Giacomo Castaldi (1546)*, riprodotta dall'unico esemplare conosciuto, che si conserva nella Biblioteca Vaticana, con un commento illustrativo di Roberto Almagià.

L'Accademico Soprannumerario P. GATTERER, presenta la seguente Nota:

A. GATTERER - *Über den meteorstein von Rio Negro.*

Im September 1934 beobachtete man bei Rio Negro in Brasilien den Fall eines Steinmeteoriten. Ein grösseres Bruchstück im Gewichte von 1300 g wurde von R. P. Crysostomo Adams O. F. M. dem Astrophysikalischen Laboratorium der Vatikanischen Sternwarte zum Zwecke der Analyse zur Verfügung gestellt. P. Junkes und ich haben diese Untersuchung durchgeführt und ich möchte deren Resultat der hohen Akademie heute vorlegen.

Der Rio Negro ist ein Gemenge von Nickeleisen und Silikatmineralien mit dem spezifischen Gewicht 3,5. Das Spektrum zeigt als Hauptbestandteile: Si, Mg, Fe, Ni, Ca und Na. Die quantitative chemische Analyse, die für den magnetischen Teil des Meteoriten vollständig durchgeführt wurde, liess einen häufiger vorkommenden Typus von Eisensilikatmeteoriten erkennen. Qualitativ und selbst quantitativ entspricht der Rio Negro sehr weitgehend dem Stein von Lanzenkirchen (Österreich), dessen ausführliche Analyse E. Dittler im Jahre 1934 veröffentlicht hat, wie auch dem Meteoriten von Albareto, über den Professor Paolo Gallitelli

in Modena erst vor kurzem eine eingehende und sorgfältige chemisch-mineralogische Monographie herausgegeben hat.

Entsprechend diesem Befunde verlegten wir und vor allem darauf, mit Hilfe der neuen spektrochemischen Methoden die etwa vorhandenen selteneren Bestandteile des Steine qualitativ nachzuweisen und, soweit möglich auch quantitativ zu bestimmen. Die qualitative Analyse wurde an der Substanz *in natura*, also am feingepulverten, chemisch nicht weiter veränderten Meteoritenmaterial durchgeführt. Etwa 10 mg des Pulvers wurden in die Bohrung einer spektralreinen Kohle gefüllt und im elektrischen Lichtbogen zum Verdampfen gebracht. In Hunderten der sehr linienreichen Spektren konnte die Anwesenheit von 18 chemischen Elementen nachgewiesen werden, von denen 7 nämlich Ba, Cu, Li, (Pb), Sr, Ti, und V in so geringer Menge vorhanden sind, dass sie chemisch nicht, oder wie im Falle des Ti erst bei Verarbeitung grosser Substanzmengen entdeckt werden konnten.

Besonderes Gewicht wurde auf die quantitative Bestimmung einiger der selteneren Elemente wie Cr, Mn, Co, Ti und Li gelegt. Bekanntlich liegen schon zahlreiche ähnliche Arbeiten auf geochemischem Gebiete vor; es sei in diesem Zusammenhange nur auf V. M. Goldschmidt und seine zahlreichen Mitarbeiter in Göttingen, jetzt Oslo, und das Ehepaar I. und W. Noddack in Freiburg verwiesen. Goldschmidt und seine Schule arbeiten auch quantitativ mit der festen pulverisierten Substanz, deren Spektrum mit dem von entsprechend zusammengesetzten Eichpulvern verglichen wird. Um höchste Empfindlichkeit zu erreichen, muss die Emission der Kathodenglimmschicht des Lichtbogens verwendet werden. Da diese Methode bei allen ihren Vorzügen auch einige gewichtige Nachteile hat, versuchten wir einen anderen Weg, nämlich statt fester Pulver Lösungen zu verwenden. Dazu war es notwendig, den Stein so vollständig in Lösung zu bringen, dass keiner der seltenen Bestandteile verloren ging, aber auch keine fremde Beimengung eingeschleppt wurde, die zu Irrtümern Anlass geben konnte. Nach Überwindung einiger Schwierigkeiten war der Versuch allem Anscheine nach von Erfolg begleitet und die erhaltene Lösung des Rio Negro konnte mit leicht herzustellenden Eichlösungen verglichen und quantitativ auf die oben genannten Elemente analysiert werden. Die Methode scheint sich zu bewähren und hat gegenüber der Verwendung von Eichsubstanzen in Pulverform den Vorteil einer wesentlich grösseren Homogenität der Probesubstanz. An Genauigkeit und Empfindlichkeit dürfte sie auch kaum nachstehen. Ohne auf Einzelheiten weiter eingehen zu können, erwähne ich zum Schlusse, dass nach dieser Methode im Rio Negro gefunden wurden: Mn 0,16 %, Cr 0,16 %, Co 0,11 %, Ti 0,1 % und Li 0,0004 %.

Si passa quindi al quarto punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI comunica al Corpo Accademico che il Consiglio, secondo l'incarico demandatogli, ha esaminato la proposta di promuovere l'assegnazione del nome di GUGLIELMO MARCONI a qualche oggetto celeste, secondo quanto espose l'Accademico ARMELLINI nell'ultima Tornata ordinaria, e come già fu fatto per molti uomini insigni. Su proposta del Presidente il Corpo Accademico approva la nomina di una Commissione di Accademici Astronomi incaricata di studiare la questione e fare proposte particolari. La Commissione risulta composta dagli Accademici: ARMELLINI, BIANCHI, GUTHNICK, GATTERER e STEIN.

L'Accademico BETTAZZI interpretando i sentimenti di tutti i presenti presenta le più vive congratulazioni al Presidente GEMELLI per la laurea *honoris causa* recentemente conferitagli dall'Università di Coimbra; gli Accademici presenti si associano plaudendo, e il Presidente GEMELLI ringrazia per la cordiale, graditissima manifestazione.

La Seduta viene tolta alle ore 11,40.

Dopo la Tornata pubblica ha avuto luogo la Tornata segreta.

RESOCONTO
DELLA TERZA TORNATA ORDINARIA
DEL IV ANNO ACCADEMICO

(Domenica 19 maggio 1940)

Presiede il Revmo Prof. P. A. GEMELLI O. F. M., Presidente.

Sono presenti gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, BIANCHI, BOTTAZZI, COLONNETTI, CROCCO, DAL PIAZ, DAINELLI, GEMELLI, GIORGI, GUIDI, LEFRI, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, PIERANTONI, SOMIGLIANA, SEVERI, PENZA, PISTOLESI, RONDONI, TONIOLO, VERCELLI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

Ordine del giorno: 1) Approvazione del Verbale della precedente Tornata.
2) Comunicazioni del Presidente. 3) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 4) Varia.

Il Presidente GEMELLI dichiara aperta la seduta alle 17,15.

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione, e, poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI comunica che avendo, a norma dell'art. 23 degli Statuti, umiliato al Santo Padre l'esito delle votazioni per i Seggi N. 21, N. 41 e N. 50 resisi vacanti per la morte degli Accademici De Filippi, Luigioni e Parravano, il Cardinale Segretario di Stato ha comunicato le nuove nomine.

Il Cancelliere dà lettura del venerato dispaccio N. 11727 che Sua Eminenza Reverendissima il Signor Cardinale Luigi Maglione Segretario di Stato di Sua Santità ha spedito in data 5 aprile 1940 per comunicare le seguenti Sovrane decisioni del Santo Padre :

La Santità di Nostro Signore Pio Papa XII si è benignamente degnata di nominare Accademici Pontifici gl'Ill.mi Signori Professori Giotto Dainelli, Ordinario di Geologia e Geografia Fisica nell'Università di Firenze, Umberto Pierantoni, Ordinario di Zoologia nella Università di Napoli, e Francesco Severi, Ordinario di Analisi Infinitesimale nell'Università di Roma.

Il Presidente GEMELLI interpretando i sentimenti dei Colleghi tutti si rallegra con i nuovi Accademici Pontifici che partecipano oggi per la prima volta alle Tornate, presenta le migliori felicitazioni per l'altissimo riconoscimento dei loro meriti scientifici e dà il benvenuto da parte del Corpo Accademico e suo personale.

Il Cancelliere procede quindi alla distribuzione delle insegne ai nuovi Accademici.

I nuovi Accademici PIERANTONI, SEVERI e DAINELLI si dicono, con elevate parole, sensibilissimi all'alto onore che il Corpo Accademico ha loro fatto nel designarli al Santo Padre, ed esprimono sentimenti di profonda soddisfazione e

devota gratitudine al Sommo Pontefice per l'atto col quale si è benignato annoverarli fra i Membri di questa Pontificia Accademia, di questo alto Consesso di scienziati dove l'universalità della scienza e gli scopi dell'opera altissima alla quale essi sono chiamati, si trovano così al disopra delle divisioni e passioni umane da richiamare gli spiriti alla concordia, all'unione, alla pace.

Il Presidente GEMELLI comunica che l'Accademia il 2 marzo scorso in occasione del primo anniversario della Elezione del Santo Padre Pio XII gloriosamente regnante Gli ha inviato un telegramma di filiale devozione al quale il Santo Padre si è degnato rispondere a mezzo del Suo Eminentissimo Cardinale Segretario di Stato.

Il Cancelliere dà lettura dei documenti relativi.

(Telegramma)

Santo Padre Pio XII — Città del Vaticano. — La Pontificia Accademia delle Scienze nello universale giubilo odierna fausta ricorrenza elevazione Vostra Santità al Trono Augusto di Pietro umilia al Vicario di Cristo i propri fervidissimi voti e i sentimenti di filiale sudditanza e di assoluta devozione. — Gemelli, Presidente.

(Telegramma)

Padre Gemelli Presidente Pontificia Accademia Scienze — Città del Vaticano. — Santo Padre risponde fervido omaggio augurale presentatogli da Pontificia Accademia Scienze ricorrenza Sua Elevazione Sommo Pontificato con cordiale Benedizione Apostolica auspicio progressi sereno culto verità fedele pratica virtù — Cardinale Maglione.

Il Presidente GEMELLI si dice lieto di comunicare al Corpo Accademico il Sovrano gradimento del Santo Padre per le pubblicazioni accademiche che ebbe l'onore di umigliarGli nella ultima Udienza concessagli.

Il Santo Padre si degnò inoltre fargli inviare dall'Eminentissimo Cardinale Segretario di Stato una benevola lettera di augusto compiacimento.

Il Cancelliere dà lettura del venerato dispaccio.

SEGRETERIA DI STATO
DI SUA SANTITÀ

Dal Vaticano, 11 Marzo 1940.

N. 11876

Reverendissimo Padre,

Sono lieto di farmi interprete presso la Paternità Vostra Reverendissima del gradimento con cui l'Augusto Pontefice ha accolto le prime pubblicazioni del corrente IV Anno Accademico della Pontificia Accademia delle Scienze.

Le dotte dissertazioni e le sagge deliberazioni, di cui il Santo Padre ha preso conoscenza sfogliando le pagine delle pubblicazioni stesse, Gli hanno dimostrato di quali ricche linfe la vita della cara Accademia vigoreggia sotto l'illuminata guida del suo Preside.

Augurando a codesto Istituto sempre più prospere sorti, Sua Santità ricambia l'atto ossequioso e devoto con l'Apostolica Benedizione.

Con sensi di distinta stima io poi mi confermo

*della Paternità Vostra Reverendissima
dev.mo del Signore
(f.to) L. Card. Maglione*

Reverendissimo Padre

P. Agostino Gemelli O. F. M.

Presidente della Pontificia Accademia delle Scienze

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico Armellini presenta le seguenti Note:

W. SIERPINSKI - *Sur une propriété des ensembles ordonnés.*

W. SIERPINSKI - *Sur les bases dénombrables des familles de fonctions.*

W. SIERPINSKI - *Sur l'opération $\overline{\lim}_{y \rightarrow +\infty} \Phi(x, y)$.*

L'Accademico COLONNETTI presenta le seguenti Note:

G. COLONNETTI - *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il problema della sezione parzializzata).*

G. COLONNETTI - *Elasticità e resistenza di travi con armature preventivamente tese (Nota prima).*

In queste due note si trovano documentati i più recenti studi dell'Autore sul problema delle travi con armature preventivamente tese. Nella prima di queste Note si completano le deduzioni teoriche esposte in lavori precedenti, trattando il problema della resistenza delle travi a sezione parzializzata, problema che ha una grande importanza dal punto di vista della determinazione teorica dei margini di sicurezza. Nella seconda Nota sono esposti i primi risultati delle ricerche sperimentali con cui l'Autore sta cercando di trovare la conferma delle conclusioni a cui conduce la teoria delle coazioni.

L'Accademico CROCCO presenta la seguente Nota:

G. A. CROCCO, *Elisse di stabilità dei motovelivoli*, Parte II.

In tale comunicazione l'Autore dà conto degli ulteriori suoi studi sul problema della stabilità longitudinale dei motovelivoli per concludere sulle norme da osservare nella costruzione di nuove aeronavi.

L'Accademico GEMELLI a nome anche del collega Accademico BOTTAZZI presenta in omaggio una copia del volume da essi testé edito dal titolo: « *Il fattore umano del lavoro* ». *Aspetti biologici, fisiologici e psicologici del lavoro*. Milano, Vallardi, pag. xiv-908, 1940.

A questo volume hanno collaborato numerosi studiosi, tra i quali sono da ricordarsi: BOLDRINI, BANISSONI, QUAGLIARIELLO, MARGARIA, PALMA, PIZZUTI, PONZO, VITO, i quali insieme con il BOTTAZZI e il GEMELLI hanno esposto sistematicamente i problemi che nello studio del lavoro umano debbono essere affrontati da chi fa oggetto della propria ricerca l'attività umana. Il grosso volume

rappresenta adunque la prima sistemazione della enorme massa di nozioni che in questi ultimi anni si sono accumulati da che la trasformazione sociale ha dato al lavoro industriale, ma anche a quello agricolo, una ben distinta fisionomia.

Non si tratta quindi di una esposizione scolastica quale potrebbe essere fatta in un manuale, bensì di una sistemazione in cui soprattutto si prospettano i nuovi problemi che l'attività lavorativa dell'uomo suscita e si indica lungo quali linee debbono essere compiute le ricerche per riuscire a difendere la vita umana dai danni del lavoro e per rendere il lavoro umano più proficuo.

Insomma, quei problemi che dalla fisiologia del lavoro e dalla psicotecnica erano stati risolti specialmente da studiosi russi e nordamericani nel senso di procurare il massimo fruttamento dell'attività umana, qui vengono presentati in una luce nuova in cui le esigenze della vita sociale e della economia vengono comparate con le esigenze dell'uomo quali vengono illustrate dalle scienze biologiche.

L'Accademico GIORGI presenta la seguente Nota:

G. APRILE - *Sul calcolo degli stati di regime in circuiti sottoposti a f. e. m. periodiche di forma qualunque.*

Viene descritto un procedimento che permette il calcolo del regime periodico in circuiti sottoposti a f. e. m. periodiche di *forma qualunque*, partendo dalla conoscenza del fenomeno transitorio di inserzione, e limitando le calcolazioni solo al primo periodo da questa. Viene mostrato un esempio di applicazione, in un caso semplice tipico.

L'Accademico SOMIGLIANA presenta in omaggio le seguenti pubblicazioni:
Il contributo italiano al progresso della meccanica razionale e della fisica matematica negli ultimi cento anni. Estratto dall'opera « Un secolo di progresso scientifico italiano: 1839-1939 ».

Ipotesi e discussioni cosmogeniche (discorso letto il 5 novembre 1939-xviii).

Il campo gravitazionale della Terra. Estratto di « Scentia », Gennaio 1940.

L'Accademico PENZA presenta la seguente Nota:

F. LORETI, *Ulteriori osservazioni sulla struttura della fibra muscolare striata degli arti degli artropodi.*

L'Autore illustra i reperti offerti dalla fibra muscolare striata degli arti (zampe ed ali) negli insetti (Coleoptera, Ryncota), cimentata col micromanipolatore ed osservata in luce ordinaria trasmessa, in luce polarizzata ed in campo oscuro. Rileva i caratteri di viscosità e di elasticità del miocolloide e le modificazioni cui vanno incontro dette condizioni fisiche nei diversi momenti funzionali nella fibra; dimostra inoltre l'inesistenza di movimenti browniani a carico dei granuli J, i quali rappresentano, in campo oscuro, e nella fibra in condizioni di perfetto equilibrio chimico-fisico, gli unici elementi otticamente attivi. Il miocolloide diventa luminoso in campo oscuro solo in conseguenza di una rottura di detto equilibrio.

L'Autore ritiene il miocolloide della fibra muscolare striata, negli insetti, quale un idrogel, nel senso di MAYER e di SCHAEFFER, otticamente inattivo in campo oscuro; e, anche riferendosi a sue precedenti ricerche, considera la « miofibrilla », quale si manifesta « in vivo » non una struttura stabile, ma solo espressione di uno stato, o condizione fisica, reversibile in vita e mutevole a seconda delle condizioni funzionali.

La miofibrilla comparirebbe invece come entità concreta e stabile colla morte della fibra, per effetto di una pronunciata separazione di fasi, il cui meccanismo genetico è da ricercarsi in fenomeni di coagulazione e di disidratazione.

L'Accademico LEVI-CIVITA presenta in omaggio da parte dell'Accademico CONWAY la seguente pubblicazione: *The Mathematical Papers of Sir Rowan Hamilton*. Volume II: *Dynamics*, edited for the Royal Irish Academy by A.W. Conway and A. J. McConnell. Cambridge University Press.

È questo il secondo volume delle *opere complete* di Sir W. ROWAN HAMILTON (1805-1865), insigne matematico, astronomo e fisico-matematico, irlandese, tra i più grandi, se non il più grande continuatore di Lagrange nel classico assestamento della meccanica analitica. L'HAMILTON concepì e illustrò il fecondo connubio dell'ottica colla dinamica, inventò il metodo dei quaternioni e lasciò anche vari manoscritti inediti, la cui importanza si può ben giudicare a più di 70 anni dalla morte dell'Autore, ora che si trovano inseriti nelle Opere complete.

Il Prof. CONWAY, ora Presidente della Irish Academy, si è reso benemerito della Scienza e della Storia delle scienze per aver promosso questa iniziativa, per averla curata con particolare amore e sagacia, in collaborazione successiva con due altri eminenti specialisti, i Professori SYNGE e McCONNELL, e per avere finora, coll'appoggio della Irish Academy, così egregiamente, lussuosamente, conseguita la stampa dei primi due volumi.

L'Accademico TONIOLO presenta la seguente Nota:

A. MELICCHIA - *La distribuzione delle aree di bassa pressione sull'Atlantico settentrionale e sull'Europa nel decennio 1930-1939.*

In questo studio con un metodo statistico e geografico ideato dal FABRIS, si è analizzata la distribuzione delle aree di bassa pressione nell'emisfero settentrionale in ciascun giorno del decennio 1930-1939.

La fascia di globo studiata è quella dell'Oceano Atlantico settentrionale e dell'Europa.

Il metodo usato consiste nel cercare per ciascuno dei 200 riquadri in cui tale fascia è stata suddivisa, lo stato di ciclonicità o di anticiclonicità giornaliero e di numerarne le frequenze indipendentemente dalla intensità.

Lo stato di ciclonicità o di anticiclonicità fu rilevato dalle carte giornalmente pubblicate dal « Meteorological Office » di Londra, e riproducenti la situazione isobarica dell'emisfero settentrionale.

La statistica della ciclonicità per tutti i mesi e per tutti gli anni del decennio ha permesso di costruire carte della situazione isociclonica media per i 12 mesi dell'anno.

Il confronto di queste carte isocicloniche con quelle isobariche pubblicate sul « Manual of Meteorology » dello Shaw permette rilevare la grande analogia delle rappresentazioni della distribuzione della pressione, presa sotto il suo duplice aspetto di frequenza e di intensità.

L'analisi di queste situazioni cicloniche medie mensili, mostra, come già aveva trovato il FABRIS in una sua precedente pubblicazione, che la situazione barica fondamentale interessante l'Europa ed il Mediterraneo è costituita da due fasce orientate secondo due assi, una di alta pressione che si estende da sud-ovest a nord-est dall'Atlantico alla Russia, attraverso l'Europa centrale, più frequente nel semestre caldo, e l'altra da nord-ovest a sud-est di bassa pressione dall'Atlantico nord-occidentale all'Asia Minore, che si incrocia con la precedente, pure sull'Europa Centrale, e più frequente nel semestre freddo.

Lo spostamento dei due assi, secondo i quali sono orientate le due fasce bariche, determina le altre situazioni che si stabiliscono sul complesso delle regioni esaminate, influenzando la climatologia locale

Il centro di azione secondario del Mediterraneo, con attività particolarmente intensa nei mesi di novembre e dicembre, si inserisce nella striscia di bassa pressione.

A conferma di quanto si era potuto intuire nell'analisi della ciclonicità nel periodo 1881-1930, per cui la ciclonicità aveva toccato un massimo intorno al 1925 e tendeva in seguito a diminuire, i diagrammi (della fig. 5) dimostrano che la diminuzione della ciclonicità è un fenomeno generale per quasi tutta l'Europa centrale ed il Mediterraneo dopo il 1930, per i mesi di luglio di tutto il decennio.

Anche per quanto riguarda le lunghezze del periodo di questa ciclonicità risulterebbe, col confronto dell'andamento di altri elementi meteorologici, di circa 70 anni, comprendente a sua volta due periodi di 35 anni (dei quali uno è evidente sui diagrammi della fig. 6) con massimi intorno al 1890 e al 1925 e minimo intorno al 1905.

L'estensione dello studio all'andamento della ciclonicità di tutti gli altri mesi dell'anno e l'analisi delle cartine costruite per quinquenni successivi, simili a quelle qui presentate e tracciate per i mesi di aprile degli anni 1930-1939, permetteranno di porre in luce eventuali variazioni nella posizione delle condizioni isobariche fondamentali.

Le cartine dei quinquenni successivi relative al mese di aprile, mostrano infatti una diminuzione di ciclonicità sull'Atlantico, uno spostamento dell'aria di maggior frequenza ciclonica verso nord, un assottigliamento della stessa, accompagnato da un movimento di rotazione che ha il suo centro tra l'Europa centrale e le Isole Britanniche, nonchè una tendenza ad una maggiore e più estesa influenza dell'anticiclone russo-siberiano verso sud.

L'Accademico SOMIGLIANA presenta a nome dell'Accademico VOLTERRA la seguente Nota:

V. VOLTERRA - *Energia nei fenomeni elastici ereditari.*

In questa Nota si estendono al caso dei corpi elastici alcune proporzioni relative a sistemi aventi un numero finito di gradi di libertà allorchè si tien conto dei fenomeni ereditari. Il risultato generale al quale si giunge è che il lavoro eseguito dallo sforzo esterno si trasforma in parte in energia cinetica, in parte in energia elastica e in parte si dissipa. La quantità di energia che in virtù dei fenomeni ereditari si dissipa si può calcolare.

Passando al quarto punto dell'ordine del giorno il Presidente GEMELLI è lieto di comunicare al Corpo Accademico che proprio in giornata era giunta all'Accademia l'ultima parte del manoscritto del lavoro dell'Accademico Padre ERNESTO GHERZI S. J., direttore dell'Osservatorio meteorologico e sismologico di Zi-Ka-Wei in Cina e prega il Cancelliere di dare lettura del piano dell'opera.

Il lavoro, del quale è già iniziata la composizione, ha per titolo: *La meteorologia della Cina* e costituirà il primo e completo contributo strettamente scientifico sul clima di questa immensa regione.

Questa grandiosa opera sintetica sarà redatta secondo gl'indirizzi della moderna meteorologia basandosi anche sugli studi delle masse di aria e sopra i sondaggi aerologici.

L'opera comprende più parti con numerosi grafici e tavole fuori testo e costituirà un volume di oltre 500 pagine di cui è già vivissima l'attesa nel mondo di questi studi.

I dati climaterici sono nella più gran parte assolutamente nuovi ed inediti, mentre il movimento atmosferico della Cina viene studiato in relazione con le altre regioni dell'Estremo Oriente.

Un interesse del tutto particolare, a causa delle sue relazioni con la termodinamica degli stessi, avrà il capitolo sui tifoni.

Il volume del testo sarà completato da un Atlante Climaterico della Cina. L'Accademico LOMBARDI prende la parola per dire come egli stesso abbia avuto occasione di visitare il Padre GHERZI nel suo osservatorio in Cina, ed abbia potuto rendersi conto della enorme importanza e della vastissima risonanza che hanno in quel paese i lavori compiuti dal GHERZI specialmente sui tifoni.

Su questa questione il dotto autore ha preparato inoltre degli atlanti che sono di grande vantaggio per la navigazione, mentre a Shanghai si pubblica, appunto per i navigatori, un suo bollettino meteorologico che esce di ora in ora.

Il Padre GHERZI non compie così soltanto una grande opera di scienziato, ma anche una preziosissima opera umanitaria poichè risparmia spessissimo con le sue indicazioni ai naviganti i più gravi disastri salvando dalla morte grande numero d'uomini.

L'oratore propone che l'Accademia invii il proprio compiacimento a questo esponente della milizia religiosa e della milizia scientifica.

Il Cancelliere dà poi notizia degli altri lavori originali presentati da Accademici prima dell'attuale Tornata:

V. DARWIN, *Le grandezze fisiche di un magnete secondo la nuova metrologia.*

S. A. DE MAYOLO, *Loi des forces dans un système gravitationnel du type soleil-planète.*

G. ALBENGA, *In margine d'una nota del Colonnetti.*

La seduta viene tolta alle ore 18,30.

Dopo la Tornata pubblica ha avuto luogo la Tornata segreta.

Gli Accademici con le Signore e gli invitati si intrattengono quindi ad un tè offerto dalla Presidenza nelle sale dell'antica Casina di Pio IV.

ORDINATIONES

ORDINATIO
DE ACADEMICORVM VACATIONIBVS SVPPLENDIS
AD NORMAM ART. XXIII STATVTORVM (1)

ART. 1. — Si qua vacatio in Academicorum coetu contingat, Praeses litteris circularibus Academicos rogabit ut candidatum proponant.

Singuli Academici unum tantum candidatum proponere possunt; qui, si fieri possit, residens vel non residens esse debet, prout Academicus defunctus residens fuerit, vel non residens; ac praeterea ad eandem scientiarum classem pertinere, ad quam defunctus Academicus pertinuit.

ART. 2. — Nomina quae proponuntur, ad Praesidem litteris significanda sunt sub clauso involuero mittendis; quibus, si fieri possit, notitiae de candidati doctrina eiusque vitae curriculo addi debent.

ART. 3. — Post duos menses quam litteras circulares ad Academicos misit, Praeses Censoribus et Academiae Consilio significabit nomina candidatorum, qui a duobus saltem Academicis sint propositi; iubebitque Censores opportunas de iis notitias exquirere, quas cum Consilio communicare Censorum erit.

ART. 4. — Ex candidatis quos Academici proposuerint, Consilium tres seliget, quorum nomina Academicis cunctis significabuntur, addita de singulis relatione.

ART. 5. — Ad suffragium ferendum pro electione, omnes Academici ad secretam sessionem convocabuntur, non ante mensem.

(1) Lata in secreta congregatione tertiae ordinariae sessionis anni academici IV (18 maii 1940) in ordinationis antea vigentis locum, quam cfr. in « Acta », vol. II, n. 1, p. LI.

ART. 6. — Academici, qui, quamlibet ob causam, impediuntur quominus sessioni, de qua in superiore articulo, intersint, possunt scriptum votum Praesidi transmittere, sub clauso involucro in ipsa sessione aperiendo.

ART. 7. — Ad normam art. IV Statutorum, candidatus, quem probaverit pars absolute maior (seu plus quam dimidia) eorum qui suffragium, sive praesentes sive per epistolam, dederint, Summo Pontifici proponetur ut Academici titulo honestetur.

ART. 8. — Si trium candidatorum nemo requisitum suffragiorum numerum retulerit, Praeses per epistolam de vocationis negativo exitu Academicos omnes certiores faciet, eos convocans ad suffragium in subsequenti sessione ferendum pro alterutro candidatorum qui plura vota habuerit.

ART. 9. — Ad normam art. IV p. II Statutorum, Praeses a forma superius descripta, si peculiariter adiuncta suadeant, discedere potest, candidati nomen Summo Pontifici directe proponens.

REGOLAMENTO
PER LA NOMINA DEGLI ACCADEMICI AI SEGGI VACANTI
IN APPLICAZIONE DELL'ART. XXIII DEGLI STATUTI (1)

ART. 1. — Quando si verifichi la vacanza di un posto Accademico, il Presidente invita con apposita circolare gli Accademici a presentare le loro proposte per la elezione del nuovo Accademico. Ogni Accademico può proporre un solo nome; inoltre gli Accademici proporranno di preferenza un candidato residente o non residente, a seconda che l'Accademico defunto era residente o non residente; nei limiti del possibile, essi proporranno come candidato uno scienziato appartenente al medesimo gruppo di disciplina al quale apparteneva il defunto.

ART. 2. — Le proposte di cui sopra dovranno essere inviate al Presidente in busta chiusa, e possibilmente accompagnate da una nota illustrativa dell'attività scientifica e dal *curriculum vitae* del candidato proposto.

ART. 3. — Trascorsi due mesi dall'invito del Presidente, questi comunica ai Censori ed al Consiglio Accademico quelle proposte presentate da almeno due Accademici. Il Presidente incarica i Censori di assumere, in proposito, quelle informazioni che si renderanno opportune e che i Censori stessi comunicheranno al Consiglio.

ART. 4. — Valendosi delle candidature proposte dagli Accademici il Consiglio designerà una terna di nomi che verrà proposta a tutti gli Accademici insieme con una relazione sui singoli ternati.

(1) Approvato nella Seduta Segreta della Torza Tornata Ordinaria del IV Anno Accademico (18 maggio 1940), ad emendamento ed in sostituzione del precedente regolamento di cui negli « Acta », vol. II, n. 1, pag. LI.

ART. 5. — Gli Accademici saranno in seguito, e non prima di un mese, invitati a partecipare ad una Tornata segreta nella quale avrà luogo la votazione per la designazione al seggio vacante.

ART. 6. — Quegli Accademici che per qualunque motivo fossero impediti di intervenire alla Tornata di cui all'articolo precedente, potranno votare per iscritto inviando la scheda al Presidente, in busta chiusa, da aprirsi nella Tornata stessa.

ART. 7. — A norma dell'art. IV degli Statuti quel candidato che otterrà un numero di voti uguale almeno alla metà più uno degli Accademici votanti, ivi contati anche quelli che avranno votato per iscritto, verrà proposto al Santo Padre per la nomina ad Accademico Pontificio.

ART. 8. — Se nessuno dei candidati otterrà il numero dei voti di cui all'articolo precedente, il Presidente informerà per lettera ciascun Accademico dell'esito negativo della votazione e lo inviterà a votare, in una successiva Tornata segreta, per uno dei candidati che hanno riportato maggior numero di voti. In tale ulteriore votazione di ballottaggio gli assenti potranno votare per iscritto in conformità all'art. 6, e verrà designato quello dei due candidati che avrà riportato maggior numero di voti.

ART. 9. — A deroga del disposto dei precedenti articoli, il Presidente, a norma del comma II dell'art. IV degli Statuti, potrà in particolari circostanze proporre direttamente al Santo Padre il nome di un candidato.

TEORIA E CALCOLO DELLE TRAVI CON ARMATURE PREVENTIVAMENTE TESE (*)

(IL CASO DELLA PRESSO-FLESSIONE)

(Con 1 figura)

GUSTAVO COLONNETTI

Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Auctor exponit novam rationem computandi trabes, quarum fulturae antea distantiae sint, et ostendit quomodo haec ratio ad peculiarem casum presso-flexionis applicari valeat.

È noto che la tecnica del cemento armato si va oggi orientando verso l'uso di armature preventivamente tese, cioè incorporate nel calcestruzzo mentre sono elasticamente deformate.

A presa avvenuta, gli ancoraggi per la messa in tensione delle armature vengono soppressi, e queste tendono naturalmente a riprendere le loro dimensioni primitive; ma ne sono, almeno in parte, impediti dalla presenza del calcestruzzo che le avvolge.

Si viene così a creare uno stato di coazione in cui le armature restano tese ed il calcestruzzo compresso; stato di coazione che, in determinate circostanze, può conferire al sistema caratteristiche eminenti di resistenza alle sollecitazioni esterne (1).

(*) Nota presentata il 15 settembre 1939.

(1) G. COLONNETTI, *Problemi nuovi e nuovi orientamenti*, «Il cemento armato», 1939, n. 2; *Prospettive autarchiche in materia di cemento armato*, id., 1939, n. 4; *La nuova tecnica del cemento armato*, id., 1939, n. 8.

Di qui la necessità di una teoria di questi stati di coazione e di un metodo di calcolo che ne metta in evidenza le caratteristiche.

* * *

È chiaro che, agli effetti di questa teoria, si possono considerare come « deformazioni impresse » quelle che ciascun elemento dell'armatura, se fosse libero di riprendere il suo stato naturale non deformato, presenterebbe per rapporto allo stato in cui esso venne incorporato nel calcestruzzo; o, se si vuole, per rapporto alla cavità che nel calcestruzzo esso è destinato ad occupare.

Supposte le armature disposte tutte parallelamente all'asse geometrico della trave, assunto come asse delle z , tali deformazioni impresse soddisferanno alle condizioni seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_x = -\frac{1}{m} \bar{\varepsilon}_z \quad \bar{\varepsilon}_y = -\frac{1}{m} \bar{\varepsilon}_z \\ \bar{\gamma}_{yz} = 0 \quad \bar{\gamma}_{zx} = 0 \quad \bar{\gamma}_{xy} = 0 \end{array} \right\} \text{(con } \bar{\varepsilon}_z \text{ indipendente da } z)$$

Vien fatto allora di chiedersi se sia possibile una soluzione del problema dell'equilibrio elastico della trave in cui le componenti della deformazione totale soddisfino a condizioni analoghe:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x = -\frac{1}{m} (\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z) \quad \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y = -\frac{1}{m} (\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z) \\ \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = 0 \quad \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = 0 \quad \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy} = 0 \end{array} \right\} \text{(con } \varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z \text{ indipendente da } z)$$

nel qual caso le condizioni stesse dovranno necessariamente riuscire soddisfatte dalle componenti della deformazione elastica:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = -\frac{1}{m} \varepsilon_z \quad \varepsilon_y = -\frac{1}{m} \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{zx} = 0 \quad \gamma_{xy} = 0 \end{array} \right\} \text{(con } \varepsilon_z \text{ indipendente da } z)$$

Ma, come immediata conseguenza di queste, si deve avere ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 & \sigma_y &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 & \tau_{zx} &= 0 & \tau_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione postulata comporta pertanto una sola componente speciale di tensione non identicamente nulla - la σ_z (indipendente da z) - epperò altro non è che un caso generalizzato di presso-flessione.

Con una ovvia estensione della teoria classica di DE SAINT VENANT, noi completeremo pertanto le nostre ipotesi sulla deformazione totale introducendo il concetto della conservazione delle sezioni piane, cioè ponendo:

$$\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \lambda + \mu y + \nu x \quad (\text{con } \lambda, \mu, \nu \text{ costanti})$$

e quindi:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E(\lambda + \mu y + \nu x - \bar{\varepsilon}_z)$$

Ciò posto, detta A una sezione retta generica della trave, ed \mathcal{N} , \mathcal{N}_x , \mathcal{N}_y , le tre componenti non nulle della sollecitazione esterna relativa a tale sezione, dovranno, per l'equilibrio, essere verificate le tre equazioni:

$$[1] \quad \mathcal{N} = \int_A \sigma_z dA \quad \mathcal{N}_x = \int_A \sigma_z y dA \quad \mathcal{N}_y = \int_A \sigma_z x dA$$

Se poi si passa a considerare il tronco di trave compreso fra due sezioni rette vicinissime di quote z e $z + dz$, dovrà inoltre essere soddisfatta la condizione ⁽²⁾:

$$dz \int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} dA + dz \int_A \bar{\varepsilon}_z \sigma_z dA = \text{minimum}$$

⁽¹⁾ Cfr.: G. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni*, vol. I (U. T. E. T. 1928), pag. 87, formule (40) e (41).

⁽²⁾ G. COLONNETTI, *Sul problema delle coazioni elastiche*, «Rend. R. Accademia dei Lincei», serie V, vol. XXVII (1918); *Per una teoria generale delle coazioni elastiche*, «Atti R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LVI (1921); *La statica dei corpi elasto-plastici*, Pontificia Academia Scientiarum, «Commentationes», vol. II (1938), n. 12.

per rapporto a tutti i valori che l'espressione al primo membro può assumere compatibilmente colle deformazioni impresse e colle forze esterne date.

Ciò è quanto dire che dovrà essere verificata l'equazione:

$$[2] \quad \int_A (\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z) \delta \sigma_z dA = 0$$

per tutte le variazioni $\delta \sigma_z$ che sono compatibili colle equazioni generali della statica, testè citate, ossia per tutte le variazioni $\delta \sigma_z$ che soddisfano alle condizioni:

$$[3] \quad \int_A \delta \sigma_z dA = 0 \quad \int_A \delta \sigma_z y dA = 0 \quad \int_A \delta \sigma_z x dA = 0$$

Ora è facile verificare che nell'ipotesi assunta:

$$\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \lambda + \mu y + \nu x$$

la [2] si riduce alla forma:

$$\lambda \int_A \delta \sigma_z dA + \mu \int_A \delta \sigma_z y dA + \nu \int_A \delta \sigma_z x dA = 0$$

che è identicamente verificata quando son soddisfatte le [3].

Se ne conclude che la deformazione postulata rappresenta una soluzione effettivamente possibile del problema proposto.

Siamo anzi in grado di precisare i valori che le costanti indeterminate λ, μ, ν dovranno assumere in ciascun caso concreto.

Se infatti nelle [1] si sostituisce a σ_z la sua espressione:

$$\sigma_z = E(\lambda + \mu y + \nu x - \bar{\varepsilon}_z)$$

quelle equazioni divengono:

$$\mathcal{N} = \lambda E_c \int_A \frac{E}{E_c} dA + \mu E_c \int_A \frac{E}{E_c} y dA + \nu E_c \int_A \frac{E}{E_c} x dA - E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z dA$$

$$\mathcal{N}_x = \lambda E_c \int_A \frac{E}{E_c} y dA + \mu E_c \int_A \frac{E}{E_c} y^2 dA + \nu E_c \int_A \frac{E}{E_c} xy dA - E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z y dA$$

$$\mathcal{N}_y = \lambda E_c \int_A \frac{E}{E_c} x dA + \mu E_c \int_A \frac{E}{E_c} xy dA + \nu E_c \int_A \frac{E}{E_c} x^2 dA - E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z x dA$$

In esse si è indicato con E_c il modulo di elasticità del calcestruzzo, assunto come valore di riferimento.

In conseguenza si denoteranno con:

$$\mathcal{A} = \int_A \frac{E}{E_c} dA \quad \mathcal{J}_x = \int_A \frac{E}{E_c} y^2 dA \quad \mathcal{J}_y = \int_A \frac{E}{E_c} x^2 dA$$

rispettivamente l'area della sezione *ridotta in calcestruzzo* ed i suoi due momenti d'inerzia rispetto ai due assi principali centrali, con cui s'intendono, al solito, coincidenti gli assi delle x e delle y .

Se si tiene conto che, così facendo,

$$\int_A \frac{E}{E_c} x dA = 0 \quad \int_A \frac{E}{E_c} y dA = 0 \quad \int_A \frac{E}{E_c} xy dA = 0$$

dalle tre equazioni scritte si ricavano subito i valori:

$$[4] \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{\mathcal{N} + E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z dA}{E_c \mathcal{A}} \\ \mu &= \frac{\mathcal{N}_x + E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z y dA}{E_c \mathcal{J}_x} \\ \nu &= \frac{\mathcal{N}_y + E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z x dA}{E_c \mathcal{J}_y} \end{aligned}$$

Deformazioni e tensioni si possono ormai pertanto considerare come delle funzioni note della sollecitazione esterna e delle deformazioni impresse.

In assenza della sollecitazione esterna, lo stato di coazione determinato nella trave dalle deformazioni impresse riesce caratterizzato dai valori:

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda} &= \frac{\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z dA}{Cl} \\
 \bar{\mu} &= \frac{\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z y dA}{J_x} \\
 \bar{\nu} &= \frac{\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z x dA}{J_y}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

* * *

Queste formule si prestano bene al calcolo numerico, il quale riesce anzi singolarmente semplificato per il fatto che le deformazioni impresse sono differenti da zero solo in corrispondenza delle armature.

Detto pertanto E_a il modulo di elasticità di queste, si potrà senz'altro mettere in evidenza il valore (costante) del rapporto E_a/E_c .

Gli integrali che compaiono nelle espressioni di $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$ si ridurranno così a delle semplici sommatorie in cui ciascun termine corrisponde ad un elemento di armatura e dipende soltanto dalle dimensioni e posizione dell'elemento, e dallo stato di tensione (e quindi di deformazione) in cui esso si trovava all'atto della sua incorporazione nel calcestruzzo.

Consideriamo per esempio una trave a sezione rettangolare, di cm. 15 di larghezza e 30 di altezza, armata superiormente con tre tondi da 10 ed inferiormente con tre tondi da 16 mm. simmetricamente disposti rispetto alla mediana verticale (asse delle y).

Supponiamo, tanto per fissar le idee,

$$E_a = 2000 \text{ t/cm}^2$$

ed

$$E_c = 250 \text{ t/cm}^2$$

quindi

$$\frac{E_a}{E_c} = 8$$

Avremo subito

$$Cl = 517 \text{ cm}^2$$

La distanza dell'asse orizzontale baricentrico (asse delle x) dal bordo inferiore della sezione risulta eguale a cm. 14,32. In conseguenza

$$J_x = 43.158 \text{ cm}^4$$

Immaginiamo che le armature siano state incorporate nel calcestruzzo mentre erano sottoposte ad uno sforzo di trazione pari a 2000 kg/cm^2 , sicchè

$$\bar{\varepsilon}_z = -\frac{1}{1000}$$

Si ha

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z dA = -\frac{67}{1000}$$

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z y dA = -\frac{307}{1000}$$

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z x dA = 0$$

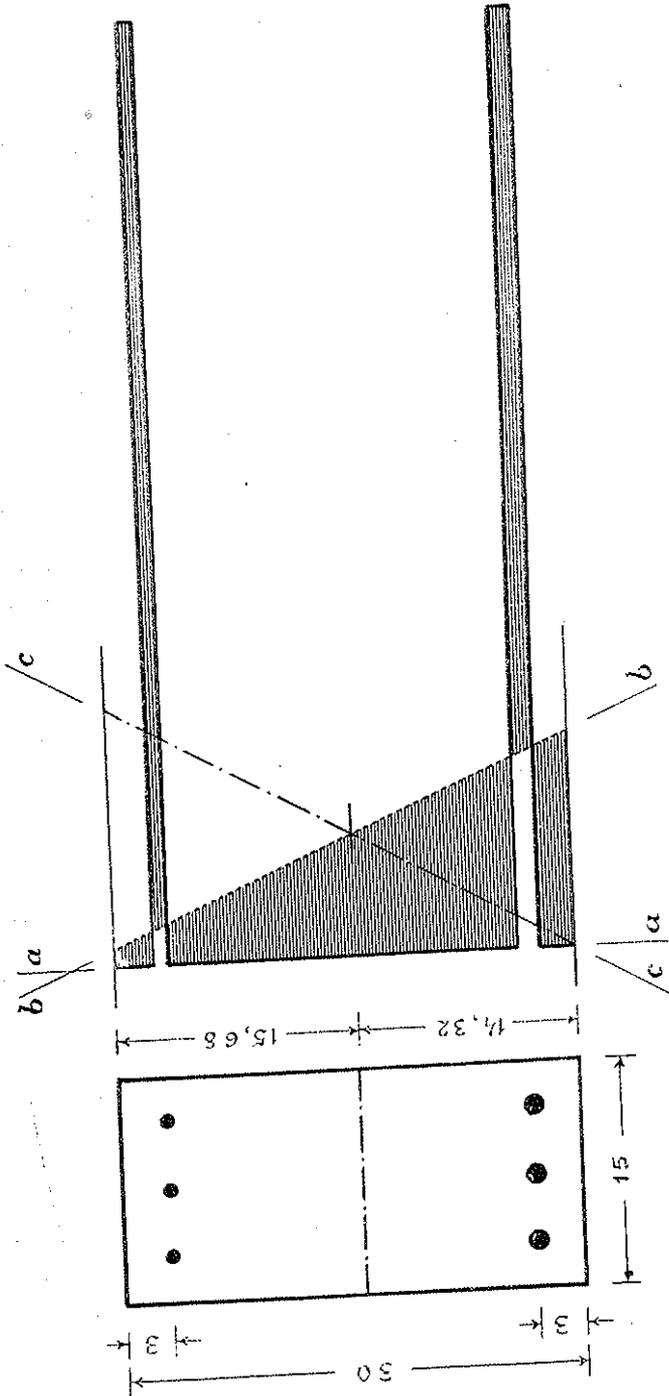


FIG. 1.

In conseguenza:

$$\bar{\lambda} = -\frac{0,13}{1000} \quad \bar{\mu} = -\frac{0,0071}{1000} \text{ cm}^{-1} \quad \bar{\nu} = 0$$

e lo stato di coazione, in assenza di sollecitazioni esterne, viene caratterizzato dai seguenti valori delle tensioni unitarie:

| Tensioni unitarie σ_z in kg/cm ² | nel calcestruzzo | nelle armature |
|--|------------------|----------------|
| al bordo superiore della sezione | - 5 | + 1920 |
| al bordo inferiore della sezione | - 57,5 | + 1580 |

Tale stato di coazione si può in modo molto espressivo rappresentare graficamente disegnando, a partire da una fondamentale aa , il diagramma delle deformazioni impresse $\bar{\epsilon}_z$ (linea a tratto pieno nella figura allegata) e riferendolo poi ad una nuova fondamentale bb la cui posizione, per rapporto alla prima, sia definita precisamente dalle costanti $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$.

Il diagramma rappresenta allora, colle sue ordinate contate a partire dalla fondamentale bb , le deformazioni elastiche ϵ_z nella stessa scala che ha servito per la rappresentazione delle deformazioni impresse e delle due costanti $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$.

Vi si potranno d'altronde direttamente leggere le tensioni σ_z , così nel calcestruzzo come nelle armature, sol che si abbia l'avvertenza di servirsi all'uopo di nuove scale, in relazione coi rispettivi valori del modulo.

Inmaginiamo ora che la trave venga sollecitata a flessione semplice: più precisamente che sulla sua sezione generica agisca un momento flettente \mathcal{M}_x .

Questo darà origine ad una distribuzione di tensioni:

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{M}_x y}{J_x}$$

e ad una curvatura elastica:

$$\frac{\mathcal{M}_x}{E_c J_x}$$

Non v'è dubbio infatti che il fenomeno si manterrà perfettamente elastico, e la sezione interamente reagente, almeno fino a che non intervengano sforzi di trazione nel calcestruzzo; vale a dire: fino a che la nuova tensione (positiva) che si viene a determinare in corrispondenza del bordo inferiore della sezione non giunga ad eguagliare la tensione (negativa) che ivi preesiste in virtù dello stato di coazione.

Il fatto si verifica per

$$\mathcal{M}_x = 172.500 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

e la distribuzione di tensioni che ne consegue è la seguente:

| Tensioni unitarie σ_x in kg/cm^2 | nel calcestruzzo | nelle armature |
|---|------------------|----------------|
| al bordo superiore della sezione | - 67,5 | + 1520 |
| al bordo inferiore della sezione | 0 | + 1940 |

Graficamente il nuovo stato di equilibrio si può rappresentare immaginando il solito diagramma delle deformazioni impresse riferito ad una nuova fondamentale cc ruotata rispetto a bb di

$$\frac{\mathcal{M}_x}{E_c J_x} = + \frac{0,0160}{1000} \text{ cm}^{-1}$$

e la cui posizione, per rapporto alla fondamentale primitiva aa , sarà perciò definita dai valori:

$$\lambda = \bar{\lambda} = - \frac{0,13}{1000} \quad \mu = \frac{\mathcal{M}_x}{E_c J_x} + \bar{\mu} = + \frac{0,0089}{1000} \text{ cm}^{-1}$$

* * *

Ritiro e plasticità del calcestruzzo possono, com'è noto, modificare profondamente questi risultati: sono infatti delle nuove deformazioni impresse che vengono ad aggiungersi a quelle delle armature, e quindi a complicare le cose.

Non è detto naturalmente che il problema non possa venir affrontato e risolto anche in questo caso più generale. Chè anzi se fosse lecito limitarsi a considerare le sole $\bar{\epsilon}_x$ (forma restando l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane) la soluzione sarebbe presto trovata, e tutto si ridurrebbe ad una meno particolare applicazione delle [4] e delle [5].

Tuttavia una estensione della nostra teoria in questa direzione ci sembra di dubbia utilità, data l'incertezza che regna sui dati stessi del problema, cioè sulla entità dei fenomeni di ritiro e di plasticità che si vorrebbero mettere in conto.

Allo stato delle cose ci sembra più interessante studiare il modo con cui in pratica si riesce ad attenuare l'influenza di quei fenomeni: l'adozione cioè di armature molto deformabili - fatte per esempio con acciai ad alto limite elastico - e le alterazioni che ne conseguono nello stato di equilibrio della trave.

Immaginiamo perciò che le armature siano fatte con un materiale che possa sopportare una tensione unitaria quadrupla, pari cioè ad 8000 kg/cm^2 ; e che pertanto la loro sezione sia ridotta alla quarta parte di quella dianzi prevista.

Fermi restando i valori dei moduli, si ha:

$$A = 467 \text{ cm}^2$$

La distanza dell'asse orizzontale baricentrico (asse delle x) dal bordo inferiore della sezione risulta eguale a $\text{cm. } 14,80$. In conseguenza

$$J_x = 36.478 \text{ cm}^4$$

Posto poi

$$\bar{\varepsilon}_z = -\frac{4}{1000}$$

si trova

$$\bar{\lambda} = -\frac{0,148}{1000} \quad \bar{\mu} = -\frac{0,0093}{1000} \text{ cm}^{-1} \quad \bar{\nu} = 0$$

e lo stato di coazione, in assenza di sollecitazioni esterne, viene così caratterizzato:

| Tensioni unitarie σ_z in kg/cm ² | nel cal- cestruzzo | nelle armature |
|--|-----------------------|-------------------|
| al bordo superiore della sezione | - 1,75 | + 7930 |
| al bordo inferiore della sezione | - 71,5 | + 7480 |

Sotto l'azione del momento flettente

$$\mathfrak{M}_x = 172.500 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

le tensioni divengono:

| Tensioni unitarie σ_z in kg/cm ² | nel cal- cestruzzo | nelle armature |
|--|-----------------------|-------------------|
| al bordo superiore della sezione | - 73,62 | + 7470 |
| al bordo inferiore della sezione | - 1,50 | + 7930 |

L'adozione di tensioni unitarie più elevate nelle armature conduce dunque a più elevate sollecitazioni anche nel calcestruzzo; e pertanto implica l'uso di calcestruzzi di più elevata compattezza.

Nelle armature poi, le variazioni delle tensioni unitarie determinate dall'intervento delle sollecitazioni esterne, per quanto lievemente

accresciute in valore assoluto, risultano, in valor relativo, grandemente ridotte.

Quest'ultimo risultato può avere qualche importanza dal punto di vista del comportamento dei materiali alle sollecitazioni ripetute (resistenza alla fatica). E meritava perciò di essere, sia pure incidentalmente, segnalato.

* * *

S'intende che, nei casi più semplici, il problema trattato qui può anche venire risolto per via elementare, vale a dire imponendo di volta in volta l'eguaglianza delle deformazioni locali nelle armature e nel calcestruzzo.

HOYER, per esempio, tratta così il caso delle travi rettangolari a semplice armatura (1).

Ma bisogna provarsi ad affrontare i casi più complessi - in cui diverse armature sono incorporate nel calcestruzzo in differenti stati di tensione preventiva - per riconoscere tutta la superiorità del procedimento di calcolo che si fonda sulla teoria generale delle coazioni.

(1) E. HOYER, *Der stahlsaitenbeton*, Band I, Berlin, 1939, pag. 41 e seg.

SULLA COSTANZA DEI TENSORI ε (*)

LUIGI MARCHETTI

SUMMARIVM. — Exposita, quoad tensoros, notione «aequalitatis per parallelam transvectionem» et «constantiae», Auctor ex hac aequitate demonstrat tensoros ε nunquam mutari.

1. — Come è ben noto, i sistemi ε (rispettivamente covariante e controvariante) del calcolo differenziale assoluto⁽¹⁾ sono stati introdotti, fin dal 1901, dal RICCI⁽²⁾. Lo stesso autore annunciò, verificandola⁽³⁾, la proprietà dei sistemi ε di comportarsi *come costanti* di fronte alla

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Tullio Levi-Civita, il 28 settembre 1939.

(1) Intendendo con \sqrt{a} la radice del discriminante della forma fondamentale

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx^i dx^k$$

fissiamo il segno da dare ad essa per un determinato sistema di variabili indipendenti x^1, x^2, \dots, x^n , e conveniamo che questo segno cambi operando una trasformazione con jacobiano < 0 . Il sistema d'ordine n , i cui elementi $\varepsilon_{r_1 r_2 \dots r_n}$ sono nulli, se gl'indici $r_1 r_2 \dots r_n$ non sono tutti distinti, e uguali a \sqrt{a} , o a $-\sqrt{a}$, secondochè questi indici formano una permutazione di classe pari o dispari rispetto alla permutazione fondamentale $(1, 2, \dots, n)$, è *covariante*. Gli elementi $\varepsilon^{r_1 r_2 \dots r_n}$ del sistema reciproco *controvariante* sono rispettivamente uguali a 0, $+\frac{1}{\sqrt{a}}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}$. Indicando con Δ lo jacobiano di n funzioni z_1, z_2, \dots, z_n preso rispetto ad n variabili x^1, x^2, \dots, x^n e diviso per \sqrt{a} , si ha l'identità

$$\Delta \equiv \sum_{r_1 \dots r_n}^n \varepsilon^{r_1 \dots r_n} \frac{\partial z_1}{\partial x^{r_1}} \dots \frac{\partial z_n}{\partial x^{r_n}}$$

da cui deriva, come il RICCI stesso fa notare, la proprietà invariante di Δ . Vedi RICCI-CURBASTRO-T. LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, in «Math. Ann.», B. 54, 1901, pag. 135.

(2) Id., pag. 135.

(3) Id., pag. 139.

derivazione covariante. Definita tale derivazione covariante in vari modi fu naturalmente sempre verificata la proprietà della costanza rispetto a tale derivazione⁽²⁾. Tuttavia queste verifiche, per la costanza ed anche per l'invarianza, presentano l'inconveniente di non essere comprensive; si limitano a far vedere che quella certa proprietà sussiste, senza chiarire il significato della proprietà stessa.

Coll'introduzione del « parallelismo » da parte del LEVI-CIVITA è stato reso possibile il confronto di tensori, e quindi l'introduzione del concetto di « equivalenza per trasporto parallelo » da cui è risultato un perfezionamento per accertare il comportamento invariante.

Analogo perfezionamento mi propongo di esporre, in questa Nota, per la costanza.

2. - In una qualunque varietà sia dato un campo C, e in ogni punto di C sia attaccato un ben determinato tensore m^{plo} T di componenti

$$X_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_q} \quad (\text{con } p + q = m),$$

funzioni del posto, riferite ad un certo sistema di coordinate generali x^i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Se L è una linea della varietà contenuta in C, conveniamo di dire⁽³⁾ che il tensore T è *costante lungo L* se le sue determinazioni nei punti di L sono *equivalenti lungo L* per trasporto parallelo, cioè se

$$\sum_{j=1}^n X_{i_1 \dots i_p | j}^{k_1 \dots k_q} \lambda^j = 0 \quad (i_1, \dots, i_p; k_1, \dots, k_q = 1, 2, \dots, n)$$

essendo $\lambda^j = \frac{dx^j}{dL}$ ($j = 1, \dots, n$) i parametri della direzione di L.

(1) Cfr. per esempio, CISOTTI, *Lezioni di calcolo tensoriale*, pag. 75, Ed. Poligrafica, Milano, 1928; FINZI, *Tensori vettoriali e loro derivazione*, in « Atti Acc. Lincei », Rendiconti, vol. XVI, 2° sem., 1932, pag. 404-409, serie VI.

(2) Cfr. in proposito A. MASOTTI, *Sul concetto di tensore costante in varietà qualunque*, in « Atti Acc. Lincei », Rendiconti, serie VI, vol. VII, 1928, pag. 457-459.

Ora, se questa costanza si manifesta qualunque sia la linea L , diremo che tale tensore T è *costante assolutamente* su C .

Ciò richiede che sia identicamente

$$X_{i_1 \dots i_p | j}^{k_1 \dots k_q} = 0 \quad (i_1, \dots, i_p; k_1, \dots, k_q; j = 1, \dots, n)$$

3. - Ciò premesso, posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1^1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \lambda_2^1 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^1 & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{vmatrix}$$

consideriamo la forma

$$F = \sqrt{a} \cdot \Delta$$

plurilineare nei parametri degli n vettori $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \dots, \underline{\lambda}_n$, che ha per coefficienti (dei vari prodotti di questi argomenti) gli elementi $\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n}$, componenti covarianti del sistema ε .

Colla regola di trasporto per parallelismo lungo il cammino elementare δx^j calcoliamo il δF ⁽¹⁾, trattando naturalmente ciascuna serie di variabili λ_α^i ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) come le ξ^i (componenti controvarianti di un vettore $\underline{\xi}$, che si trasporta per parallelismo), e \sqrt{a} come funzione del posto.

Notiamo anzitutto che

$$[1] \quad \delta \Delta = \sum_{\alpha, i}^n \Lambda_{\alpha}^i \delta \lambda_{\alpha}^i$$

(1) T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, raccolte da E. Persico, pag. 165 s., ed. Stock., Roma, 1925.

dove si designano con Λ^i_α i complementi algebrici dei singoli elementi λ^i_α .

Ma abbiamo che ⁽¹⁾

$$[2] \quad \delta\lambda^i_\alpha = - \sum_1^n \sum_{j \neq i} \left\{ \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} \right\} \lambda^j_\alpha \delta x^j$$

Sostituendo nella [1] e modificando l'ordine delle sommatorie, si può scrivere

$$\delta\Delta = - \sum_1^n \sum_{j \neq i} \left\{ \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} \right\} \delta x^j \sum_1^n \Lambda^i_\alpha \lambda^j_\alpha$$

La somma interna rispetto ad α dà il determinante Δ per $l = i$ e zero per $l \neq i$. Perciò è inutile considerare il contributo dei termini in cui l è diverso da i , perchè tale contributo è nullo. Rimane perciò della somma doppia rispetto ad l e ad i soltanto una somma semplice, per esempio rispetto ad i , e precisamente, raccogliendo Δ a fattore,

$$\delta\Delta = - \Delta \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} \right\} \delta x^j = - \Delta \sum_1^n \delta x^j \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} j \\ i \end{matrix} \right\}$$

Il sommatorio interno non è altro che

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^j} \quad (2)$$

e quindi si ha

$$[3] \quad \delta\Delta = - \frac{\Delta}{\sqrt{a}} \delta\sqrt{a}$$

(1) T. LEVI-CIVITA, op. cit., formola (52), pag. 158.

(2) Dalla (26) di pag. 130 della citata opera del LEVI-CIVITA, si ha infatti:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^j} = \sum_1^n \left\{ \begin{matrix} i \\ j \end{matrix} \right\}$$

In base alla [3] la differenziazione dell'invariante $F = \sqrt{a} \cdot \Delta$ dà

$$\delta F = 0$$

il che prova che le derivate covarianti dei coefficienti ε della forma invariante F sono *identicamente* nulle.

Analogamente, posto

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \lambda_{1|1} & \lambda_{1|2} & \dots & \lambda_{1|n} \\ \lambda_{2|1} & \lambda_{2|2} & \dots & \lambda_{2|n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n|1} & \lambda_{n|2} & \dots & \lambda_{n|n} \end{vmatrix}$$

potremo considerare la forma

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{a}} \Delta_i$$

plurilineare nei momenti degli n vettori $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \dots, \underline{\lambda}_n$, che ha per coefficienti gli elementi $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$, componenti controvarianti del sistema ε .

Ripetendo considerazioni analoghe a quelle precedenti, abbiamo successivamente:

$$[1'] \quad \delta \Delta_i = \sum_{\alpha, i}^n \Delta_{i|\alpha} \delta \lambda_{i|\alpha}$$

dove si designano con $\Delta_{i|\alpha}$ i complementi algebrici dei singoli elementi $\lambda_{i|\alpha}$.

Ed avremo anche (1)

$$[2'] \quad \delta \lambda_{i|\alpha} = \sum_{j, i}^n \begin{Bmatrix} i i \\ j \end{Bmatrix} \lambda_{j|\alpha} \delta x^i$$

(1) T. LEVI-CIVITA, op. cit., formula (52'), pag. 158.

Sostituendo in [1'], avremo successivamente:

$$\delta \Delta_i = \sum_1^n \sum_{j, l, i} \begin{Bmatrix} il \\ j \end{Bmatrix} \delta x^l \sum_1^n \Lambda_{i|\alpha} \lambda_{j|\alpha} = \Delta_i \sum_1^n \sum_{i, l} \begin{Bmatrix} il \\ i \end{Bmatrix} \delta x^l = \Delta_i \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^i} \delta x^i$$

Sarà cioè:

$$[3'] \quad \delta \Delta_i = \Delta_i \delta \sqrt{a}$$

E, per la [3'], la differenziazione dell'invariante

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{a}} \Delta_i$$

dà:

$$\delta F_i = 0$$

il che prova che le derivate covarianti delle componenti controvarianti del sistema ε sono *identicamente* nulle.

E dall'essere nulle le componenti covarianti o controvarianti del tensore derivato risulta la costanza assoluta del tensore ε .

NOZIONE ADIMENSIONALE DI VORTICE
E SUA APPLICAZIONE
ALLE ONDE TROCOIDALI DI GERSTNER (*)

TULLIO LEVI-CIVITA
Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Vorticis mensurae iuxta Helmholtziana definitionem, eadem sunt ac temporis cuiusdam inversa; vortex igitur non est a mensurae unitate independens, sicut opus esset ad qualitativam notam habendam, scilicet locale discrimen ab non-rotazionalità motus. Quem in finem commode adhiberi potest integrale temporale vorticis in puncto quodam.

Auctor id applicat ad quoddam undosi motus genus peculiaris momenti.

I. — PREMESSE E CONSIDERAZIONI GENERALI.

La nozione classica di vortice, secondo l'HELMHOLTZ, è desunta dal campo della velocità di un fluido in movimento. Se, nello spazio occupato dal fluido ad un dato istante t , la particella, che si trova in questo istante nella posizione generica P , è animata dalla velocità $v(P, t)$, si definisce notoriamente come vortice (in P , all'istante t) il vettore $\omega(P, t)$, dedotto da v mediante l'operatore differenziale « rotore »,

$$\omega(P, t) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} v(P, t)$$

o, ciò che è formalmente lo stesso, riferendosi ad assi cartesiani $Oxyz$, mediante le componenti

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

(*) Memoria presentata il 3 dicembre 1939.

Se il vettore v (durante un certo intervallo di tempo) deriva da un potenziale, ω è zero (in quell'intervallo), e il moto dicesi irrotazionale. L'annullarsi del vortice caratterizza così, come ben si sa, i moti irrotazionali; e, almeno all'ingrosso, si è indotti a riguardare il vortice ω (o un qualche scalare positivo che si annulli col suo valore assoluto ω) come un naturale criterio di divario locale dai moti irrotazionali. Però si vede subito che, se ciò può andare comparativamente e qualitativamente, non è invece certo corretto ravvisare in ω , o ricavare da esso soltanto, un indice quantitativo del divario. La ragione è chiara, perchè ω non è un puro numero, bensì una quantità fisica di dimensione t^{-1} , il cui valore numerico, quando non sia rigorosamente nullo, dipende dalla scelta dell'unità di tempo.

Questa difficoltà pregiudiziale si evita associando (moltiplicativamente) ad ω una durata, per esempio moltiplicando per il tempuscolo dt ed eventualmente integrando durante un intervallo finito di tempo. Si è così condotti, per far intervenire l'andamento del moto in tutto un intervallo, diciamo $0 \text{---} t$, ad integrare, sempre nello stesso posto (poichè il fenomeno fisico della produzione o dissipazione dei vortici concerne essenzialmente circostanze locali), il vortice ω , facendo capo al valore assoluto di

$$\Omega(P, t) = \int_0^t \omega(P, t) dt ,$$

che si dirà *vortice integrale*. Esso si annulla identicamente nel caso di moti sempre irrotazionali nell'intervallo di tempo che si considera.

D'altra parte conviene riflettere che la genesi fisica del vortice in un determinato punto P può essere attribuita all'azione, in un intorno di P , di forze, certo non conservative, ma esplicitanti del resto, secondo i casi, nell'uno o nell'altro senso; quindi forze non aventi necessariamente il carattere di resistenze passive, bensì eventualmente anche tali da provocare vortici diretti ora in un verso, ora in verso opposto. Perciò, a partire da un regime conservativo, e in particolare da un istante $t = 0$ in cui $\omega(P, t)$ fosse zero, $\Omega(P, t)$ potrà avere un andamento a priori arbitrario, onde il suo valore assoluto Ω sarà suscettibile, secondo i casi, sia di andare oscillando, sia di tendere a zero,

sia anche di essere indefinitamente crescente, come per esempio accadrebbe nel caso di ω costante. Comunque, è sempre giustificato di riguardare il più grande valore di $\Omega(P, t)$, nell'intervallo di tempo $0 \rightarrow t$, come misura del massimo divario dalla irrotazionalità, riscontratosi nel punto P , durante tutto quell'intervallo di tempo.

Una applicazione specifica di questa misura numerica di scostamento dalla irrotazionalità può essere fatta alle onde trocoidali di GERSTNER. Come si sa, queste onde costituiscono una soluzione, ad un tempo rigorosa e semplice, delle equazioni idrodinamiche, suscettibile di essere espressivamente illustrata per via geometrica elementare. Esse vengono particolarmente utilizzate nelle applicazioni nautiche e geofisiche, pur essendo ben consci i cultori di meccanica dell'obiezione fondamentale che il moto delle particelle, da cui vengono generate tali onde, non è irrotazionale, sicchè la sua produzione dovrebbe ritenersi subordinata a circostanze complicate ed artificiali (per esempio un'azione del vento regolata *ad hoc*), e quindi poco probabili in natura. Resta però il fatto incontestabile che la teoria elementare serve bene a rappresentare i tratti salienti del fenomeno, sebbene faccia intervenire il moto vorticoso.

La spiegazione risiede probabilmente nel fatto che i moti in questione sono bensì vorticosi, ma prossimi alla irrotazionalità, come avrebbe potuto ragionevolmente presumersi in base ai risultati sperimentali di una importante indagine grafico-numerica del prof. H. FAVRE⁽¹⁾. Questi istituì un accurato confronto delle linee di flusso, rispetto ad osservatori animati dalla stessa velocità di propagazione, e, nei due casi delle onde trocoidali di GERSTNER e di quelle, rigorosamente irrotazionali, da me assegnate⁽²⁾. Riconobbe così che, a parità di lunghezza d'onda λ e di altezza a , le caratteristiche del fenomeno, nel suo aspetto stazionario, e più precisamente le suddette linee di flusso, sono praticamente confondibili, purchè il rapporto a/λ non superi $1/20$.

(¹) *Le problème des vagues*, Schweizerische Bauzeitung, vol. 108, 1936, n. 1 e 2.

(²) *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie*, Math. Ann., B. 93, 1925, pag. 264-314.

II. — RICHIAMI CONCERNENTI LA RAPPRESENTAZIONE MATEMATICA
DELLE ONDE DI GERSTNER.

Notoriamente le equazioni che individuano le onde trocoidali di GERSTNER, con l'asse delle y verticale verso il basso e l'asse delle x orizzontale nel senso opposto alla propagazione, sono ⁽¹⁾

$$[1] \quad \begin{aligned} x &= \alpha + e^{-\beta} \sin(\alpha + ct) , \\ y &= \beta + e^{-\beta} \cos(\alpha + ct) , \end{aligned}$$

dove, per semplicità, si è assunta la lunghezza d'onda λ eguale a 2π , mentre la velocità di propagazione c è ad essa legata dalla relazione $c^2 = g\lambda/2\pi$, che diviene, con la nostra scelta particolare dell'unità di lunghezza,

$$c^2 = g .$$

Si suppone specificamente α suscettibile di tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$; e β soltanto di valori positivi. Il determinante funzionale dei primi membri delle [1] rapporto ad α , β , vale

$$1 - e^{-2\beta} ,$$

e questo, nell'ipotesi testè ammessa $\beta > 0$, rimane costantemente positivo. Le [1] stesse sono quindi atte a definire inversamente α e β in funzione di x , y (e di t) in tutto il campo del moto. Tornando a considerare le [1] quali equazioni parametriche, ricordiamo che per $\beta = \text{cost.} > 0$, esse definiscono (rispetto ad un osservatore animato dalla velocità di propagazione $-c$; il che si rende manifesto, facen-

(1) Cfr. per esempio APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. III, cap. XXXVI, pag. 509 (3^a ediz., Paris, Gauthier-Villars, 1920).

dovi apparire $x_1 = x + ct$, $\alpha_1 = \alpha + ct$, in luogo di x e di α) altrettante *trocoidi* che sono tutte *isobariche*, talchè una qualunque di esse può essere assunta come *pelo libero*. Noi supporremo per semplicità di discussione, non solo $\beta > 0$, ma addirittura β superiore ad un numero positivo B , scegliendo per B la radice positiva B^* della equazione

$$B - e^{-B} = 0$$

A questo proposito va osservato in primo luogo che, per B positivo, il primo membro $B - e^{-B}$ è funzione crescente di B , la quale ha il valore -1 per $B = 0$ e il valore positivo $1 - e^{-1}$ per $B = 1$. Esiste perciò una ed una sola radice nel frapposto intervallo, la quale vale approssimativamente

$$[2] \quad B^* = 0,57 .$$

Possiamo dunque ritenere

$$[3] \quad \beta \geq B \geq B^* > 0 .$$

Ciò posto, dalla seconda delle [1] apparisce che, lungo il pelo libero ($\beta = B \geq B^*$; $\alpha =$ costante arbitraria), il valore medio di y , al variare di t per un periodo (cioè in un intervallo di ampiezza $2\pi/c$), è β , talchè $e^{-\beta}$ si presenta come massima sopraelevazione del pelo libero sul suo livello medio $y = \beta$. Per conseguenza, essendosi assunto 2π come lunghezza d'onda, il rapporto $e^{-\beta}/2\pi$ fra altezza e lunghezza è sempre inferiore a

$$e^{-B}/2\pi \leq e^{-B^*}/2\pi = 0,57/2\pi = 0,08 .$$

Come ha rilevato il FAVRE, per i casi che possono interessare in pratica, si ha sempre

$$e^{-B}/2\pi \leq \frac{1}{20} = 0,05 ,$$

sicchè la limitazione precedente è certo soddisfatta, e quella che segue senz'altro applicabile. Essa si riduce del resto a combinare la seconda delle [1] con le disuguaglianze $\beta \geq B > e^{-B}$.

Ne consegue

$$y \geq \beta - e^{-B} \geq B - e^{-B} ,$$

$$y \leq \beta + e^{-B} ,$$

da cui si desume che il pelo libero $\beta = B$ (il quale, ad un osservatore fisso, appare in generale oscillante col posto e col tempo) resta sempre compreso nella striscia limitata superiormente dalla orizzontale $y = B - e^{-B}$, inferiormente dalla orizzontale $y = \beta + e^{-B}$.

III. — VORTICE E VORTICE INTEGRALE PER UN OSSERVATORE FISSO TERMINE SECOLARE - CONGETTURA INDUTTIVA.

Il vortice spettante ad una particella generica nel tipo di onde di cui qui ci occupiamo ha il valore numerico ⁽⁴⁾

$$[4] \quad \omega = c \frac{e^{-2\beta}}{1 - e^{-2\beta}} ,$$

e conseguentemente il vortice integrale, a partire dall'istante $t = 0$ fino ad un generico istante t , l'espressione

$$[5] \quad \Omega = \int_0^t \omega dt ,$$

(4) APPELLI, *loc. cit.*, pag. 215.

la quale, ponendo

$$[6] \quad \tau = ct ,$$

può anche essere scritta

$$[7] \quad \Omega = \int_0^{\tau} \frac{e^{-2\beta}}{1 - e^{-2\beta}} d\tau ,$$

dove β deve ricavarsi dalle [1], in funzione di x, y e $\tau = ct$: le coordinate x, y del generico posto che si considera (fisso nel canale) vanno, come si è detto nelle considerazioni del paragrafo I, trattate quali costanti. La quantità β , la quale figura sotto il segno nella espressione [7] di Ω , pur dovendo essere riguardata funzione di y e di τ , rimane sempre, in base alla disuguaglianza [3], non inferiore alla costante positiva B.

Per conseguenza la funzione integranda $\frac{e^{-2\beta}}{1 - e^{-2\beta}}$ ha come limite inferiore la costante positiva

$$[8] \quad \frac{e^{-2B}}{1 - e^{-2B}} ,$$

e ciò mostra che questa funzione (periodica di τ) presenta certo un *termine secolare positivo* $\tilde{\omega}$ che porta all'integrale il contributo $\tilde{\omega}\tau$.

Ω ha così l'espressione

$$\Omega = \tilde{\omega}\tau + F(\tau) ,$$

dove $F(\tau)$ è funzione periodica. La conclusione si è che il vortice integrale Ω , e quindi il divario dalla irrotazionalità in un posto *fisso* generico, va crescendo indefinitamente col tempo.

Ciò lascia presumere che lo scostamento in parola, pur non essendo, come ha constatato il FAVRE, rilevabile nei casi concreti, ri-

spetto ad un osservatore solidale con l'onda, dovrebbe invece poter essere, o meglio divenire macroscopicamente avvertibile, anche per piccoli increspamenti, cioè anche per piccoli valori di a/λ quali quelli contemplati dal FAVRE, dopo un tempo sufficientemente lungo. Bisognerebbe all'uopo escogitare un qualche dispositivo inteso a fornire (direttamente o indirettamente) un apprezzamento di Ω per un osservatore immobile nel canale. Simili apprezzamenti avrebbero automaticamente, rispetto ai diagrammi del FAVRE, la superiorità che gli effetti di divario, per quanto esigui, andrebbero accumulandosi nel tempo.

LA FINE VASCOLARIZZAZIONE ED INNERVAZIONE DEL GLOMO CAROTIDEO DEI MAMMIFERI (*)

GENNARO PALUMBI

SVMMARIVM. — Auctor describit vascularizationem lobulorum glomi, quae glomerulari ratione fiat; et ostendit innervationem effectricem, quae forsitan sympaticam indolem habet, et innervationam receptricem, quae ex nervis glossopharingeo et vago dependet.

Molti dati sulla fine struttura del glomo carotideo — piccolo organo situato, come è noto, nell'uomo, in corrispondenza della biforcazione della carotide comune — sono ancora controversi e molto poco chiari. Molta confusione regna ancora sui caratteri morfologici, istochimici, sul significato e sull'origine delle cellule specifiche parenchimali dell'organo. Per quanto riguarda l'innervazione, particolarmente dubbi sono i seguenti punti essenziali per la comprensione della sua funzionalità: quanta parte esattamente abbiano, nell'innervazione del glomo, il glosso faringeo e il vago; se ed in quale misura gli elementi simpatici concorrono alla innervazione stessa del glomo.

Nell'intento di apportare qualche schiarimento ai due punti suesposti ho ripreso in esame lo studio dei più fini dettagli degli apparecchi nervosi reperibili in questo organo, avvalendomi per il momento della sola indagine istoanatomica. Per lo studio delle strutture nervose mi sono servito del metodo BIELSCHOWSKY con la mia modificazione.

Parallelamente allo studio delle strutture nervose ho ripreso in esame l'impalcatura vascolare dell'organo. I miei preparati di inie-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Antonio Pensa, il 3 dicembre 1939.

zione vasale mi hanno principalmente dimostrato che il glomo si può considerare quale un complesso sistema di reti capillari, suddiviso in glomeruli, interposto, nell'uomo, fra arteria carotide interna e vena giugulare interna ed in connessione con la rete avventiziale della attigua zona carotidea; sistema caratterizzato da una superficie vasale enormemente estesa in proporzione della piccola mole del glomo e dotata di una squisita sensibilità ad ogni minima rottura di equilibrio che avvenga soprattutto nell'interno dei vasi venosi principali con i quali è in connessione. Attorno alle anse capillari e negli spazi intercapillari di ciascun glomerulo sono disposte le cellule parenchimali specifiche del glomo sui cui caratteri morfologici, nella presente Nota, tralascio di scendere in particolari. In rapporto a detta disposizione glomerurale dei vasi, tutto l'organo, nelle sezioni colorate con i comuni metodi, appare suddiviso in lobi e lobuli.

Gli apparati nervosi contraggono con detto sistema vasale e cellulare alcuni particolari rapporti che non erano stati finora rilevati da alcun ricercatore.

Intanto, i tronchi nervosi che si portano verso il glomo risultano costituiti da fibre midollate con ogni probabilità di natura glosso faringea e vagale, e da fibre molto sottili, apparentemente amieliniche, presumibilmente di natura simpatica.

Le fibre mieliniche, molto più numerose delle amieliniche, in gran parte raggiungono direttamente e si distribuiscono nel glomo carotideo; in parte si interrompono in un ganglietto simpatico iustaglomico e si mettono in rapporto con cellule multipolari isolate o raccolte in microgangli, disposte in seno ai plessi nervosi dell'organo. Queste ultime fibre midollate che si connettono colle cellule nervose multipolari sopra menzionate, rappresentano in gran prevalenza, se non esclusivamente, fibre pregangliari del glosso faringeo o vagali. Sebbene non mi sia stato possibile constatarlo direttamente, è possibile che in gran parte i cilindrassi delle cellule multipolari in parola siano destinati a raggiungere il glomo quali fibre postgangliari amieliniche o scarsamente mielinizzate. Oltre a ciò, parte delle fibre sottili apparentemente amieliniche, che si portano verso il glomo, derivano direttamente dal ganglio cervicale superiore del simpatico e dal cordone del simpatico cervicale ed in parte dal plesso carotideo. Tutte queste fibre sono con ogni verosomiglianza fibre destinate sia alla innervazione dei vasi del

glomero formando delicati plessi nervosi perivasali, e sia a quella delle cellule parenchimali dell'organo. Infatti nell'interno dei lobuli è disposta una finissima rete terminale a diretto contatto degli elementi parenchimali dell'organo e dei capillari glomerulari. Questa finissima rete terminale intralobulare, per i suoi caratteri morfologici, è del tutto simile ai plessi di fibre amieliniche simpatiche perivasali che si trovano anche in molti altri organi già ben conosciuti dal punto di vista della loro innovazione.

Le fibre midollate invece che si distribuiscono direttamente al globo carotideo rappresentano fibre di natura recettrice di spettanza del glosso faringeo e del vago. Secondo lo schema fornito dal maggior numero degli autori queste fibre, dividendosi ed intrecciandosi ripetutamente fra loro, darebbero dapprima origine al plesso interstiziale; quindi ai plessi peri- ed intralobulari ed infine si esaurirebbero in corrispondenza delle cellule parenchimali dell'organo, nel plesso terminale o intralobulare. Invece dai miei preparati risulta che queste fibre midollate si esauriscono su alcuni punti della superficie dei lobi ed a ridosso dei singoli lobuli dando luogo a strutture nervose che rappresentano vere e proprie strutture espansionali terminali sensitive la cui caratteristica peculiare è quella di non essere individualizzate in formazioni separate e distinte non essendo delimitate da guaine o capsule connettivali. Dette fibre midollate presentano generalmente lungo il loro decorso, più o meno complicato, numerose e brusche variazioni di calibro; giunte in corrispondenza della loro area espansionale e terminale sembrano perdere la loro guaina mielinica. Talora formano quindi una serie di multipli giri elico spirali con gran numero di restringimenti e di rigonfiamenti. Dalle anse varicose a struttura neuro fibrillare, si diramano poi in gran numero ramificazioni che presentano anch'esse rigonfiamenti e varicosità, che anastomizzandosi fra loro finiscono col formare un gomito terminale reticolare. È probabile che anche un certo numero di fibre nervose amieliniche di natura simpatica prendano parte alla costituzione di esso.

Queste strutture ricordano in modo speciale le formazioni espansionali terminali sensitive da me e VERGA descritte nel nodo del seno del cuore della talpa; ricordano anche i corpuscoli di MEISNER, ed alcune formazioni sensitive a gomito descritte recentemente da SUNDER PLASMAN e da STÖHR in altri organi. Hanno inoltre molti caratteri

di somiglianza e sembrano essere talora strettamente collegate colle terminazioni sensitive perivasali del glomo, già note. Nel glomo, come nel caso del nodo del seno, non si tratta di corpuscoli terminali individualizzati e distinti ma di grovigli nervosi che nel loro insieme costituiscono un sistema espansionale periferico sensitivo. In ogni sezione istologica appare pertanto manifesto il duplice carattere della innervazione superficiale e di quella interna dei singoli lobuli.

Riassumendo, in base ai dati morfologici surriferiti, mi sembra giustificato emettere il parere che il glomo carotideo rappresenti nel suo complesso un organo nella cui ricca innervazione, come in quella del nodo seno atriale della talpa, quale descritta da me e da VERGA, si possono distinguere una parte effettrice ed una recettrice. La parte effettrice anche qui è rappresentata dal complesso dei neuriti delle cellule principalmente disposte in un ganglietto annesso al glomo e da quelli delle cellule multipolari situate lungo i tronchi nervosi ed in seno ai plessi nervosi del glomo; cellule che a loro volta ricevono le fibre pregangliari in gran parte dal glossofaringeo e dal vago. Aggiungansi in minor grado, almeno nell'uomo, le fibre che dal cordone simpatico cervicale e dal ganglio cervicale superiore si portano direttamente e attraverso il plesso simpatico carotideo, verso l'organo. Tutte queste fibre effettrici in parte sono vasomotrici, in parte sono destinate ad innervare, nell'interno dei singoli lobuli, quelle cellule di natura ancora incerta che vengono considerate come cellule parenchimali dell'organo.

La parte recettrice invece è rappresentata non solo dalle espansioni periarteriose delle fibre del glossofaringeo e del vago, ma anche e soprattutto dal complesso di tutte quelle terminazioni così tipiche e diffuse in tutto l'organo, da me poste in evidenza.

Dal punto di vista funzionale credo possibile che le variazioni pressorie che avvengono nell'interno delle vene giugulari interne, ripercuotendosi sull'apparato vascolare del glomo, stimolino almeno in parte, le complesse espansioni nervose di esso, determinando l'insorgenza di riflessi vasomotori di compenso.

Ma oltre a ciò il glomo, presumibilmente, ha una funzione molto più importante: è probabile infatti che la stessa corrente nervosa effettrice riflessa che, in seguito a stimolazioni della zona glomo-carotidea, attua nei territori periferici il complesso delle modificazioni necessarie per il ristabilimento dell'equilibrio fra pressione arteriosa e venosa,

raggiunga collateralmente anche il glomo, attraverso le sue vie afferenti effettrici, e vi determini modificazioni vascolari ed anche a carico delle cellule parenchimali, proporzionalmente alla intensità dell'impulso riflesso principale. È presumibile che dette modificazioni intrinseche del glomo — quali che siano — eccitino a loro volta, proporzionalmente alla loro entità, gli apparati recettori del glomo. Si avrebbe in tal modo, permanentemente la percezione dello stato di equilibrio fra pressione arteriosa e quella venosa e la segnalazione del grado di risposta della muscolatura liscia vasale ad eventuali rotture di detto equilibrio.

Sotto questo ultimo punto di vista, il glomo ricorda i delicati tipici organi recettori disposti in seno alla muscolatura striata volontaria (fusi neuro muscolari) ed alla muscolatura striata involontaria del cuore (apparati nervosi del tessuto nodale). Come i detti organi ricevono le impressioni derivanti dallo stato funzionale della circostante muscolatura somatica e cardiaca, così il glomo, probabilmente apprezza le impressioni derivanti dalle reazioni vaso motorie dei territori vascolari periferici e cioè gli stati funzionali della muscolatura liscia dei vasi stessi, che conseguono ad impulsi partenti dallo stesso glomo oppure dalla attigua zona presso recettrice del seno.

La bibliografia verrà pubblicata nella Memoria più estesa.

LE TENSIONI INTERNE NEL CORDONE DI SALDATURA TRASVERSALE (*)

(Con cinque figure)

GUIDO GUIDI

SUMMARY. — Auctor breviter exponit conclusiones quas ex antea actis quibusdam studiis deduxit, circa tensionum distributionem in funibus transverse ferruminatis, animadvertens illas conclusiones, praetermissis effectibus plasticitatis metalli, experientia confirmari. Indicat praeterea quomodo possit gradus plasticitatis metalli mensurari; et relationem ex experientiis invenit inter hunc plasticitatis indicem, et coagmenti vim resistendi contra tractionem.

PREMESSE. — I cordoni di saldatura trasversali sono un tipo di collegamento meccanico nel quale le tensioni interne, generate dalle forze applicate agli elementi collegati, si ripartiscono in modo molto complesso.

Si deve innanzi tutto premettere che sulla ripartizione di queste tensioni possono influire le tensioni interne già preesistenti nel giunto, dovute, ad esempio, al ciclo termico che il giunto stesso ha subito durante l'operazione della saldatura; come possono influire le eterogeneità di composizione e di struttura del metallo del cordone di saldatura e delle zone adiacenti, rispetto al metallo base degli elementi collegati, per cui si venga a perdere la perfetta isotropia che deve essere ammessa, come postulato, in ogni ricerca sia teorica che sperimentale.

A questo scopo in tutti i saggi sperimentali si cerca sempre di portarsi quanto più possibile vicino alle condizioni di isotropia del

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Colonnetti, il 3 dicembre 1939.

materiale, con una opportuna scelta dei metalli, e con una razionale esecuzione della saldatura; nonchè in condizioni di assenza di tensioni interne, con processi di ricottura e bonifica applicati sul giunto dopo che è stato eseguito.

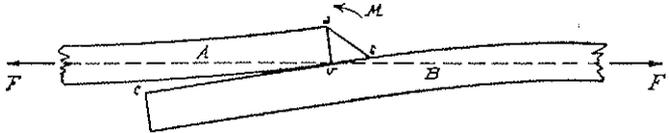


FIG. 1.

Le ricerche sul cordone di saldatura trasversale si possono suddividere in tre grandi categorie:

a) *Ricerche fotoelastiche* eseguite su modelli per lo più in bachelite od in vetro, che ricopiano fedelmente le forme geometriche del giunto, ma che sono in un sol pezzo, e quindi effettivamente senza saldatura.

b) *Ricerche dilatometriche* eseguite su provini metallici, che possono essere in un sol pezzo, come i precedenti, e quindi senza saldatura, oppure formati da due pezzi effettivamente collegati da un cordone di saldatura, ed in questo secondo caso adottando tutti gli accor-

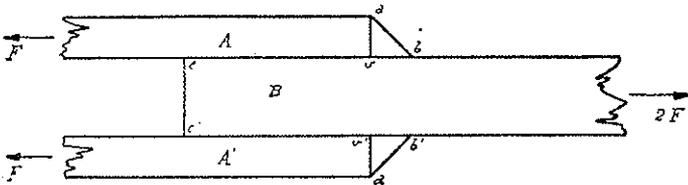


FIG. 2.

gimenti necessari per eliminare, come si è detto, le tensioni interne iniziali, e le eterogeneità di materiale fra cordone e metallo base.

c) *Ricerche analitiche*, le quali, partendo dalla forma geometrica del giunto e dalle forze esterne ad esso applicate, ne studiano la ripar-

tizione in base alle leggi della teoria della elasticità, sulle quali si fonda la scienza delle costruzioni.

Occorre ancora distinguere in pratica due tipi differenti di giunto con cordoni di saldatura trasversale, che corrispondono ai due tipi fondamentali di unione a semplice, ed a doppio coprigiunto, rispettivamente rappresentati schematicamente dalle figure 1 e 2. Nel tipo a semplice coprigiunto il giunto è soggetto ad un momento flettente causato dalla eccentricità della sollecitazione applicata ai due spezzi saldati, motivo per cui esso tende a ruotare nel senso indicato dalla freccia M , ed in conseguenza i due lembi a contatto nel tratto vc tendono ad allontanarsi.

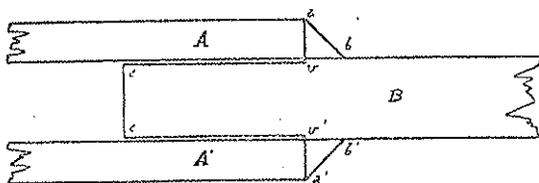


FIG. 3.

Nel collegamento a doppio coprigiunto l'unione, nel suo complesso, non è più soggetta ad un momento, perchè le due trazioni F e la $2F'$ si equilibrano; però ciascuno dei due cordoni, considerato indipendentemente, è ancora soggetto ad un momento flettente, con la condizione che la rotazione è impedita dalla simmetria del collegamento. Ne consegue che i lembi vc e $v'c'$ sono fortemente compressi fra loro, ed una parte notevole dello sforzo creato dalle trazioni applicate al giunto, si trasmette per attrito fra queste superfici. Nelle prove sperimentali, tendenti a studiare il cordone di saldatura, si vuole in generale prescindere da questa azione dell'attrito, ed allora i provini vengono preparati in modo da lasciare una luce di qualche decimo di millimetro fra i lembi affacciati vc e $v'c'$, come schematicamente rappresentato nella figura 3; con questa precauzione la ripartizione delle tensioni interne nel cordone del giunto rappresentato dalla figura 2, si avvicina sensibilmente alla ripartizione nel cordone rappresentato in figura 1.

A sua volta il cordone può avere la sezione di un triangolo scaleno con lato vb più lungo del lato va , oppure può avere la sezione di un triangolo rettangolo isoscele. È in generale sempre a questa seconda forma che si riferiscono la maggior parte degli studi fin qui eseguiti su questo argomento, ed in particolare a questo tipo si riferiscono gli esperimenti di cui si dirà in seguito.

Considero note le ricerche effettuate in precedenza, da vari studiosi, su questi cordoni di saldatura: ed in particolare le ricerche fotoelastiche pubblicate da A. G. SOLAKIAN⁽¹⁾ e le ricerche dilatometriche pubblicate da G. BIERETT e G. GRÜNING⁽²⁾, le prime su modelli in bachelite e semplice coprigiunto, le seconde su provini saldati a doppio coprigiunto del tipo schematicamente rappresentato in figura 3. Come anche considero note le ricerche analitiche sulla ripartizione delle tensioni interne eseguite da vari autori, ed in particolare da R. G. OLSSON⁽³⁾ sul tipo a doppio coprigiunto analogo al precedente.

Mi limito a svolgere delle considerazioni generali sui risultati di queste prove e di queste ricerche analitiche.

Dalle prove fotoelastiche si arriva alla conclusione che nei vertici v e b esistono delle concentrazioni di tensioni pari rispettivamente a 6,92 ed a 4,75 volte la tensione unitaria media esistente negli elementi uniti. Che queste rilevantissime concentrazioni di tensioni esistano realmente, è fuori discussione, perchè è documentato con tutta la evidenza dei sistemi della fotoelasticimetria.

D'altro lato se questi risultati fossero da trasferirsi senz'altro nell'impiego pratico, l'unica conclusione alla quale si potrebbe giungere, sarebbe quella di abolire dalla tecnica costruttiva il cordone di saldatura trasversale, poichè non potrebbe mai essere ritenuto conveniente un sistema di collegamento che raggiungesse il suo carico di rottura sotto una trazione che rappresenta soltanto un settimo circa del carico di rottura degli elementi collegati.

⁽¹⁾ A. G. SOLAKIAN, *Stresses in Transverse Fillet Welds by Photoelastic Methods*, « Journal of the American Welding Society », vol. 13, n. 2, 1934.

⁽²⁾ Dr. ing. G. BIERETT e dr. ing. GRÜNING, *Spannungszustand und Festigkeit von Stirnkehlnahtverbindungen*, « Der Stahlbau », Anno 6°, n. 22, 1933.

⁽³⁾ Dipl. ing. ROLF GRAN OLSSON, *Der ebene Spannungszustand der Schweissnaht*, « Der Bauingenieur », n. 21, 22 maggio 1932, Berlin.

Le prove dilatometriche, negli stessi vertici v e b , avrebbero dimostrato che si raggiungono soltanto tensioni rispettivamente uguali a 3,8 e 3,9 delle tensioni unitarie medie negli elementi uniti. Valori, come si vedono molto inferiori, ma sempre proibitivi ai fini di un impiego pratico di questo genere di collegamento.

Se poi si esperimentano a rottura dei provini effettivamente saldati, o dei modelli metallici aventi la esatta forma del giunto, ma senza saldatura, si vede che il giunto si rompe sotto carichi di rottura che, divisi per la sezione degli elementi collegati, oscillano fra valori abbastanza discosti a seconda delle caratteristiche del metallo impiegato, in genere compresi fra il 0,40 ed il 0,80 del valore della resistenza unitaria a rottura del metallo stesso, il che fa supporre che nei punti maggiormente sollecitati del giunto, esistano delle concentrazioni di tensioni pari rispettivamente a 2,5 fino a 1,25 delle tensioni unitarie medie di rottura del metallo base.

Come si vede risultati che variano sensibilmente al variare delle caratteristiche del metallo impiegato, ma in ogni caso molto discosti da quelli che le indagini fotoelastiche e quelle dilatometriche avrebbero lasciato presumere. E discosti anche dai risultati degli studi analitici, i quali, tra l'altro, porterebbero ad un valore unico, dipendente unicamente dalla forma geometrica del giunto, mentre, come ho accennato, in pratica, e senza uscire dalle leghe siderurgiche di normale impiego, il risultato varia per lo meno nel rapporto da 1 a 2.

In questa discordanza fra ricerche sperimentali ed analitiche, e risultati pratici, la tecnica costruttiva segue una terza via, che non si basa nè sulle prime, nè sui secondi, ed è assolutamente empirica. Si suole in pratica calcolare la resistenza dei cordoni di saldatura, con dei valori unitari costanti in base alla lunghezza dei cordoni stessi, essendo fissata la loro sezione trasversale: questo significa attribuire un valore unitario unico di resistenza al giunto, qualunque sia la qualità del materiale, sempre restando nel campo delle leghe siderurgiche da costruzione. Questo valore unitario di resistenza del giunto a rottura comunemente indicato dai manuali, secondo questo metodo di calcolo, per il cordone di saldatura trasversale, corrisponde a circa metà del carico unitario di rottura di un ordinario ferro omogeneo; e quindi nella pratica costruttiva corrente può essere ritenuto accetta-

bile. Ma con la adozione di metalli a carico unitario sempre più elevato, secondo le tendenze moderne, un simile metodo di calcolo può portare a discordanze anche molto sensibili con la resistenza reale.

CONSIDERAZIONI SULLA PLASTICITÀ DEL MATERIALE. — Da quanto esposto si deve logicamente arrivare alle seguenti conclusioni: quando un giunto costituito da una saldatura trasversale viene sottoposto ad una tensione crescente gradualmente, in un primo tempo le tensioni interne si distribuiscono esattamente con l'andamento rilevato nello

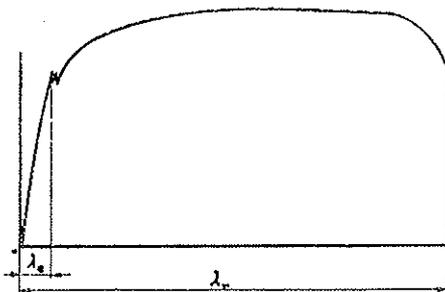


FIG. 4.

prove fotoelastiche, perchè questo evidentemente è il regime di ripartizione delle tensioni in campo elastico. Poichè d'altra parte, con questa ripartizione, rapidamente si raggiungono, nei punti di maggior concentrazione, dei valori delle tensioni unitarie che oltrepassano il limite di elasticità, avvengono, sotto carichi unitari medi ancora bassissimi, delle deformazioni plastiche locali, per effetto delle quali cambia la ripartizione delle tensioni interne, con tendenza ad una diffusione delle tensioni più omogenea. Ammessa questa ipotesi se ne deve anche concludere che maggiore è la plasticità del metallo e maggiore sarà il carico di rottura del giunto, a parità di ogni altra condizione, mentre in via di ipotesi, un metallo che fosse esclusivamente elastico, e niente plastico, dovrebbe dar luogo a giunzioni che si romperebbero a circa 1/7 del carico di rottura del materiale, così come le prove fotoelastiche fanno supporre.

Altra conclusione importante, e confermata dalla pratica, è che la resistenza del giunto non è più esclusivamente funzione delle dimensioni geometriche del giunto, ma anche in certa misura del grado di plasticità del metallo.

Orientato per questa via, ho cercato di definire in primo luogo un numero, che potesse costituire un indice della plasticità del metallo; ed in secondo luogo quale eventuale relazione passa fra questo indice e la resistenza del giunto.

Nel diagramma allungamenti-tensioni di un metallo ferroso, schematicamente rappresentato in figura 4, un primo tratto della curva, praticamente rettilineo, corrisponde al comportamento elastico, fino ad un determinato limite, più o meno demarcato, oltre il quale il comportamento è quasi esclusivamente plastico, contraddistinto da grandi deformazioni permanenti. L'area del diagramma, fino alla ascissa corrispondente al limite di elasticità, rappresenta il lavoro assorbito dal materiale in campo elastico: l'area rimanente rappresenta il lavoro assorbito in campo plastico. Nel caso del ferro omogeneo e degli acciai dolci con una approssimazione abbastanza grande, il diagramma in campo elastico può essere considerato triangolare, e quello in campo plastico rettangolare, e di uguale ordinata.

Ne consegue che le due aree dei due campi possono essere considerate proporzionali alla metà della ascissa per il primo, ed alla intera ascissa per il secondo. Ma l'ascissa del primo è l'allungamento al limite di elasticità λ_e e l'ascissa del secondo è l'allungamento totale di rottura λ_r , meno λ_e . Un indice del grado di plasticità del metallo potrà dunque essere costituito dal rapporto.

$$\frac{\frac{1}{2} \lambda_e}{\lambda_r - \lambda_e}$$

Nel caso di acciai dolci e di ferro omogeneo, data la piccolezza di λ_e rispetto a λ_r , si può anche assumere come indice di plasticità, addirittura lo stesso rapporto λ_e/λ_r .

Supponiamo di dividere il carico totale di rottura del giunto per la sezione dell'elemento unito, ed in particolare per la sezione in corrispondenza del lato *va* del cordone di saldatura: ne otterremo un

carico unitario ideale σ_i di rottura del giunto, che sarà tanto minore del carico di rottura del metallo σ_m quanto minore sarà la plasticità del metallo, se la ipotesi fatta in precedenza è esatta. Si tratterà quindi di rilevare se esiste, e quale sia, la funzione che lega queste quantità, sotto la forma:

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_i} = \varphi \left(\frac{\lambda_e}{2(\lambda_r - \lambda_e)} \right) = \sim \psi \left(\frac{\lambda_e}{\lambda_r} \right)$$

RICERCHE SPERIMENTALI. — Furono eseguite su una ventina di provini saldati con tutte le dovute precauzioni per avere la maggiore omogeneità ed isotropia nel metallo, e successivamente trattati termicamente per distruggere, per quanto possibile, le tensioni interne iniziali. Questi provini sono stati preparati con sei qualità differenti di metalli, comprese fra il ferro dolceissimo di Svezia, il ferro Armco, il ferro comune, il ferro omogeneo, l'acciaio dolce e l'acciaio semi-dolce, entrambi al carbonio. Naturalmente ogni singolo provino era costituito, nei due elementi uniti e nella saldatura, da una sola qualità di metallo; e per ogni qualità di metallo ho preso la media dei risultati dei singoli provini, generalmente in numero di tre. Per ogni qualità di metallo impiegato avevo, a parte, determinato il valore del rapporto λ_e/λ_r .

Ottenuti tutti questi valori, riassunti nella tabella unita, ho costruito un diagramma avente per ordinate i rapporti λ_e/λ_r e per ascisse

| Gruppi di Provette (valori medi) | λ_e % | λ_r % | λ_e/λ_r | σ_i Kg/mm ² | σ_m Kg/mm ² | σ_m/σ_i |
|---|------------------|------------------|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|---------------------|
| 1 | 0,0906 | 28,99 | 1/320 | 21,48 | 32,00 | 1,49 |
| 2 | 0,1123 | 27,51 | 1/245 | 24,42 | 38,35 | 1,57 |
| 3 | 0,1155 | 25,98 | 1/225 | 25,33 | 40,78 | 1,61 |
| 4 | 0,1355 | 22,36 | 1/165 | 24,20 | 41,87 | 1,73 |
| 5 | 0,1324 | 20,97 | 1/115 | 24,36 | 46,05 | 1,89 |
| 6 | 0,2270 | 15,89 | 1/70 | 24,22 | 55,22 | 2,28 |

i rapporti σ_m/σ_i . Riportati come punti su questo diagramma, i valori sperimentali suddetti, si osserva che essi occupano una zona relativamente molto limitata rispetto alla superficie totale del grafico, e quindi

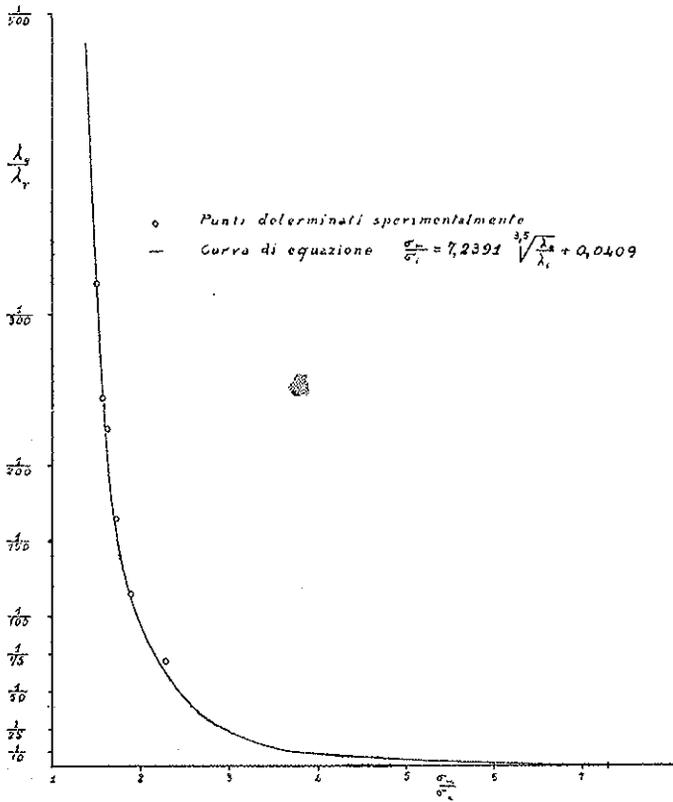


FIG. 5.

debbono considerarsi alquanto audaci le estrapolazioni dal campo sperimentale. Tuttavia questi valori vengono a trovarsi con buona approssimazione su di una curva esponenziale rappresentata in figura 5, la cui equazione è la seguente

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_i} = 7,2391 \sqrt[3,5]{\frac{\lambda_g}{\lambda_r}} + 0,0409$$

da cui si ricava

$$\sigma_m = \sigma_i \left(7,2391 \sqrt[3,5]{\frac{\lambda_e}{\lambda_r}} + 0,0409 \right)$$

È notevole il fatto che valori limiti di questa espressione, per un materiale di elevatissima plasticità, e per un materiale assolutamente privo di plasticità, sono rispettivamente i seguenti

$$\sigma_m = \sim 1,1 \sigma_i ; \quad \sigma_m = 7,28 \sigma_i$$

i quali valori, come si vede sono molto concordanti con la logica e con l'esperienza.

In particolare il secondo valore è alquanto superiore a quello ricavato nelle prove fotoelastiche, il che fa supporre che nelle stesse prove fotoelastiche, per quanto effettuate con carichi bassissimi, si sarebbe già raggiunto un certo piccolissimo grado di deformazione plastica. Anche questo risultato non è affatto contrario alla logica, in quanto le prove fotoelastiche alle quali mi riferisco furono eseguite su provini in bachelite. Se fossero state eseguite su vetro forse i risultati sarebbero stati anche più coincidenti.

Ad ogni modo le esperienze da me eseguite sono ancora troppo scarse per poterne ricavare conclusioni e leggi generali: quindi la stessa espressione algebrica sopra indicata, non sarà, con tutta probabilità, definitiva.

Tuttavia è notevole, e degno di segnalazione, il fatto che esiste e sembra ben definita, una corrispondenza univoca fra il grado di malleabilità del metallo, e la resistenza alla rottura del giunto; il che porta senz'altro a concludere che questo tipo di unione è sconsigliabile su metalli ad alta resistenza a trazione, e bassa plasticità.

In questi casi val meglio eseguire un collegamento eterogeneo, formato con un cordone composto con materiale di apporto a carico di rottura più basso, ma con elevata plasticità.

ÜBER DEN BREITENEFFEKT DER KOSMISCHEN STRAHLUNG (*)

(Mit fünf Abbildungen)

B. GROSS

(Instituto Nacional de Tecnologia do Ministerio de Trabalho)

SUMMARIVM. — Disputatur de variis opinionibus circa effectum Breiten cosmicorum radiorum in maritimae superficiei altitudine.

Die Ansichten über die Deutung des Breiteneffektes der kosmischen Strahlung in Meereshöhe haben sich in letzter Zeit wesentlich geändert. Schon in einer vorhergehenden Arbeit sind hierzu einige Ausführungen gemacht worden (¹). Unterdes haben sich weitere neue Gesichtspunkte ergeben; es erscheint also wünschenswert, die früheren Betrachtungen im Hinblick hierauf zu ergänzen. Wir verbleiben dabei ganz im Rahmen einer formalen Betrachtungsweise; eine solche erscheint zumindest solange wichtig und notwendig, als hinreichende theoretische Grundlagen über die Natur und den Absorptionsmechanismus der hier in Frage kommenden harten Strahlungskomponente fehlen.

Besonders charakteristisch für den Breiteneffekt in Meereshöhe ist bekanntlich sein plötzliches Einsetzen bei einer Breite von rund 50°, der kritischen Breite. Verschiedene Theorien unterscheiden sich gerade hinsichtlich der Deutung dieser Erscheinung. Die beobachtete Unstetigkeit kann nämlich entweder schon dem primären Energiespektrum

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Franco Rasetti il 2 febbraio 1939.

(¹) B. Gross, «Zeitschrift für Phys.», 105, 334, 1937.

eigen oder aber erst durch die Einwirkungen hervorgerufen worden sein, welche die Strahlung im Wirkungsbereich der Erde erleidet⁽¹⁾.

Zunächst hat man vor allem an die letztere Möglichkeit gedacht und angenommen, dass es sich um einen Absorptionseffekt handelt⁽²⁾. Sofern die Teilchen primär jonisierend sind (und dies ist aus der Tatsache zu schliessen, dass sie durch das Magnetfeld der Erde abgelenkt werden, also geladen sind), erfordert die Durchdringung der Atmosphäre eine Energie, die mindestens gleich der durch Jonisation verbrauchten sein muss. Ein Breiteneffekt in Meereshöhe kann also erst dann auftreten, wenn die durch das Magnetfeld der Erde bedingte Energiegrenze gleich der durch Jonisation bedingten geworden ist⁽³⁾. Wenn die Zahl der primär vorhandenen Teilchen mit abnehmender Energie stetig zunimmt, so wird mit wachsender Breite die in einer gegebenen Tiefe gemessene Intensität nach anfänglicher Konstanz also plötzlich beginnen stetig abzusinken. Für diese Deutung spricht eine numerische Übereinstimmung, die man erhält, wenn man die sich aus der LEMAITRE-VALLARTA'schen Theorie für die kritische Breite ergebende Grenzenergie berechnet und mit dem Energieverlust vergleicht, den die Strahlung in der Atmosphäre erleiden müsste unter plausiblen Annahmen über die spezifische Jonisation⁽⁴⁾.

Macht man die Annahme, dass die Reichweite der Teilchen proportional ihrer Energie ist, so kann man, nach ZANSTRA⁽⁵⁾, aus dem Breiteneffekt direkt die Energieverteilung der Strahlung berechnen. Freilich ist diese Annahme schon sehr viel spezieller als nötig ist, um die Deutung der kritischen Breite als Absorptionseffekt aufrecht zu erhalten. Denn sie setzt nicht nur Eindeutigkeit der Energie-Reichweiten-Beziehung voraus, sondern darüber hinaus einen von der Energie unabhängigen spezifischen Energieverlust. Alle Einwände, die sich gegen diese speziellen Annahmen richten, treffen daher auch die An-

(1) *Primär* nennen wir hier solche Eigenschaften der Strahlung, welche ausserhalb des Wirkungsradius der Erde (nicht des Sonnensystems) bestehen.

(2) J. CLAY, « Proc. Roy. Acad. Amsterdam », 33, 711, 1930; 35, 1282, 1932.

(3) Vgl. B. ROSSI und P. M. S. BLACKETT, *Actualités Scientifiques*, 230-233, 248.

(4) J. CLAY, *op. cit.*

(5) H. ZANSTRA, « Naturwissenschaften », 21, 171, 1934.

wendungen der ZANSTRA'schen Formel, wie sie etwa von COMPTON gemacht worden sind⁽¹⁾.

Um die Verschiebung des Breiteneffektes mit der Höhe und seinen Zusammenhang mit der Absorptionskurve zu erfassen, muss man der Existenz von Komponenten verschiedener Durchdringungsfähigkeit Rechnung tragen, nachdem diese heute allgemein anerkannt ist. Unter Annahme einer Proportionalität zwischen Energie und Reichweite sind solche Rechnungen von CLAY⁽²⁾ gemacht worden. Allerdings ergaben sich für grössere Höhen in äquatorialen Breiten Werte, welche sich doch wohl entschieden als zu klein herausgestellt haben.

Es lassen sich aber gegen die erwähnte Deutung allgemein Einwände erheben, wie etwa gleichzeitig von JANOSSY⁽³⁾, GROSS⁽⁴⁾ und VALLARTA⁽⁵⁾ hervorgehoben wurde.

Einmal müsste sich die kritische Breite mit zunehmender Höhe nach den Polen zu verschieben. Nach Messungen von COMPTON⁽⁶⁾, COSYNS⁽⁷⁾, CARMICHAEL⁽⁸⁾ und JOHNSON⁽⁹⁾ scheint dies aber in der Atmosphäre gar nicht der Fall zu sein. So lässt sich die von CARMICHAEL erhaltene Absorptionskurve mit der von PFOTZER⁽¹⁰⁾ befriedigend zur Deckung bringen, obwohl die erstere in Polnähe, letztere in 50° Breite gemessen wurde. CLAY⁽¹¹⁾ findet allerdings bei Messungen hinter Absorbern für die Strahlung, welche schon 1 Atmosphäre durchdrungen hat, Verschiebung der kritischen Breite mit der Absorberdicke.

Gegen die Eindeutigkeit der Energie-Reichweiten-Beziehung spricht das Fehlen einer « kritischen Tiefe », welche in der kritischen Breite in Meereshöhe auftreten müsste und zum Ausdruck bringen würde,

(1) A. H. COMPTON, « Phys. Rev. », 50, 1119, 1936; 51, 59, 1937; A. H. COMPTON, R. N. TURNER, « Phys. Rev. », 52, 799, 1937.

(2) J. CLAY, in *Kernphysik*, herausgegeben von E. Bretscher. Springer, 1936.

(3) L. JANOSSY, « Zeitschrift für Phys. », 104, 430, 1937.

(4) B. GROSS, *loc. cit.*

(5) M. S. VALLARTA, « Nature », 139, 839, 1937.

(6) A. H. COMPTON, « Phys. Rev. », 43, 387, 1933.

(7) M. COSYNS, « Nature », 135, 313, 1935.

(8) H. CARMICHAEL, E. DYMOND, « Nature », 141, 910, 1938.

(9) T. H. JOHNSON, « Phys. Rev. », 54, 151, 1938.

(10) G. PFOTZER, « Zeitschrift für Phys. », 102, 23, 1936.

(11) J. CLAY, « Physica », 2, 279, 1935.

dass hier die Grenzreichweite der betreffenden Komponente gerade gleich einer Atmosphäre geworden ist. Die Absorptionskurven von BARNÓTHY⁽¹⁾, EHMERT⁽²⁾ und WILSON⁽³⁾ lassen aber hier keine Unregelmässigkeit im Sinn einer Konkavität erkennen. Besonders zwingend scheinen die Messungen von EHMERT zu sein; sie zeigen dass die Absorptionskurve in Luft schon von etwa 1000 m Tiefe ab stetig abfallend ist.

All dies spricht also dagegen, den unvermittelten Einsatz des Breiteneffektes auf einen Absorptionseffekt, oder allgemein einen Effekt terrestrischer Natur, zurückzuführen. Es weist vielmehr darauf hin, dass das Energiespektrum der Strahlung schon ausserhalb des Wirkungsradius der Erde nach der Seite geringer Energien hin nicht stetig anwächst, sondern begrenzt ist.

Dieser Schluss ist allerdings noch nicht ganz zwingend. So nimmt EHMERT⁽⁴⁾ an, dass die E-R-Beziehung zwar eindeutig, aber nicht linear ist; und zwar soll sich die Reichweite mit wachsender Energie nur wenig ändern. Dann wird sich auch die kritische Breite mit der Höhe nur wenig verschieben und diese geringe Verschiebung könnte in die Grenzen der Messgenauigkeit fallen. Eine Konkavität im Verlauf der Absorptionskurve müsste allerdings auftreten. Sie wird aber durch das Vorhandensein mehrerer Komponenten abgeschwächt; EHMERT glaubt auch, Andeutungen hiervon in den Kurven von CLAY⁽⁵⁾ und seinen eigenen zu finden, aus letzteren allerdings doch wohl nur dann, wenn er die Werte in Luft und Wasser nicht massenproportional umrechnet, entgegen den bisherigen Ergebnissen. Uns erscheinen immer noch gerade seine Kurven als der beste Beweis für das Fehlen einer solchen Erscheinung.

Die Verhältnisse liegen etwas unübersichtlicher, wenn die E-R-Beziehung nicht mehr eindeutig ist. Der Grenzfall, dass nämlich die

(1) J. BARNÓTHY, « Zeitschrift für Phys. », 104, 744, 1937; J. BARNÓTHY, M. FORRÓ, « Phys. Rev. », 53, 848, 1938.

(2) A. EHMERT, « Naturwissenschaften », 25, 448, 1937; « Zeitschrift für Phys. », 106, 751, 1937.

(3) V. C. WILSON, « Phys. Rev. », 53, 204, 1938; 53, 337, 1938; 53, 908, 1938.

(4) A. EHMERT, « Phys. Zeitschrift », 38, 975, 1937.

(5) *Loc. cit.*

Absorptionsfunktion eines monochromatischen Strahlenbündels eine ganz stetige Funktion, nach Art der e -Funktion ist, wurde schon in der früheren Arbeit diskutiert. Dort ist auch gezeigt worden, in welcher Weise ein solches Verhalten bei der Ableitung des Energiespektrum berücksichtigt werden kann. Im allgemeinen wird ein Zwischenstadium vorliegen. Da die Strahlung primär jonisierend ist (spezifische Ionisation s), weiss man zunächst nur, dass die Absorptionsfunktion y eines Strahles der Energie E in der Tiefe $x = E/s$ auf 0 absinken muss.

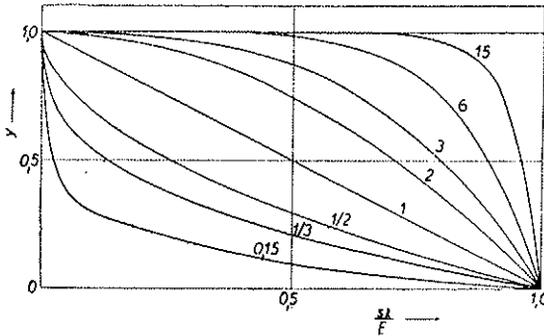


FIG. 1.

Die Absorptionsfunktion.

Der sonstige Verlauf der Funktion hängt davon ab, ob nur der konstante spezifische Energieverlust infolge Primärionisation vorliegt, oder darüber hinaus ein zusätzlicher Energieverlust oder Streuung, also allgemein zusätzliche Absorption. Man wird diese verschiedenen Verhältnisse in einer Kurvenschar $y = 1 - \left(\frac{s}{E} x\right)^n$, $0 < n < \infty$, darstellen können

(fig. 1). Den Reichweitenteilchen entsprechen die Kurven mit $n > 1$; Werte $n < 1$ bedeuten ein Überwiegen der zusätzlichen Absorption. Man kann nun einmal versuchsweise die entsprechenden Kurven für Absorption und Breiten effekt berechnen und sehen, wieweit sie den experimentellen Befund darstellen können.

Die Intensität, als Funktion von Breite und Tiefe, ist auf Grund der obigen Vorstellungen dann allgemein gegeben als

$$[1] \quad J(x, \lambda) = \int_{E=E_0}^{\infty} f(E) y(E, x) dE$$

Die Absorptionskurve in der Breite λ zerfällt in 2 Gebiete, je nachdem $x \geq E_\lambda s$ ist (wobei E_λ die zur Überwindung des erdmagnetischen Feldes in der Breite λ notwendige Grenzenergie ist). Für $sx < E_\lambda$ ist die untere Grenze des Integrals $E_0 = E_\lambda$; für $sx > E_\lambda$ ist sie $E_0 = sx$.

Auch für die Kurve des in der Tiefe x_0 gemessenen Breiteneffektes bestehen 2 Zonen: für Breiten mit $E_\lambda < sx_0$ ist $E_0 = sx_0$ und für Breiten mit $E_\lambda > sx_0$ ist $E_0 = E_\lambda$.

Dort, wo die beiden Gebiete aneinander grenzen, sind für endliche n die Kurven $J(x, \lambda)$ und ihre ersten Ableitungen stetig, ganz unabhängig von der Form der Energieverteilung. Um einige Kurven explizit zeichnen zu können, muss man über letztere allerdings spezielle Annahmen machen. Wir haben eine Verteilungsfunktion $f(E) dE = E^{-m} dE$ zugrunde gelegt, wie dies heute meist geschieht⁽¹⁾.

Die Figuren 2 bis 4 geben das Resultat.

Die *Absorptionskurven* sind für Reichweitenteilchen (also $n > 1$) zunächst konkav nach unten. Je grösser aber die zusätzliche Absorption, desto weniger ausgeprägt und in desto kleineren Schichtdicken ist diese Konkavität bemerkbar. Für die Kurven mit $n < 1$ verschwindet sie überhaupt und die Kurven sind in ihrem ganzen Verlauf stetig abfallend. In dem Gebiet $x > E_\lambda/s$ sind *alle* Kurven stetig abfallend, und zwar nach einem Potenzgesetz $J(x) \sim x^{-k}$, wobei $k = m - 1$ ist.

Der *Breiteneffekt* setzt immer ziemlich plötzlich ein. Das Auftreten einer kritischen Breite ist zwar am meisten ausgeprägt für Reichweitenteilchen, es ist aber sehr deutlich auch dann noch, wenn $n < 1$ geworden ist. Die Verschiebung der kritischen Breite mit der Höhe ist für alle Kurven im wesentlichen dieselbe wie in der ursprünglichen Theorie (lineare Beziehung zwischen E und R).

(1) Vgl. etwa L. NORDHEIM, « Phys. Rev. », 53, 694, 1938.

Das so abgeleitete Verhalten stimmt also mit der Erfahrung nicht überein. Denn wenn man auch dem Fehlen einer Konkavität in der Absorptionskurve durch Annahme eines zusätzlichen Energieverlustes und somit Aufgabe der Eindeutigkeit der E-R-Beziehung Rechnung tragen kann, so bleibt doch die Aussage bestehen, dass sich die kritische Breite mit der Höhe weitgehend verschieben müsste.

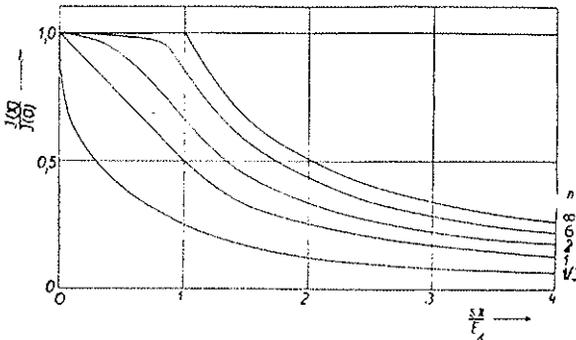


FIG. 2.

Verlauf der Absorptionskurven.

Es bleibt also auch unter diesem Gesichtspunkt nur noch die Möglichkeit, den Ausdruck für die Energieverteilung abzuändern in dem Sinn, dass die Teilchenzahl auf der Seite niedriger Energien nicht stetig anwächst, sondern nach Erreichen eines Maximums wieder abfällt, das heisst also, das rasche Einsetzen des Breiteneffektes durch eine Besonderheit des primären Energiespektrums zu deuten.

JANOSSY ⁽¹⁾ und VALLARTA ⁽²⁾ haben auch einen Effekt aufgezeigt, welcher eine solche extraterrestrische Begrenzung der Energieverteilung verursachen kann, nämlich die Ablenkung der Strahlung durch das Magnetfeld der Sonne. Allerdings scheint noch nicht endgültig geklärt zu sein, ob der Wert für das Dipolmoment der Sonne, welcher dann aus dem Breiteneffekt gefolgert werden muss, in Einklang steht mit ander-

⁽¹⁾ *Loc. cit.*

⁽²⁾ *Loc. cit.*

weitigen Daten über die magnetische Feldintensität an der Sonnenoberfläche. EPSTEIN (1) bejaht dies, während etwa BRUINS (2) Wider-

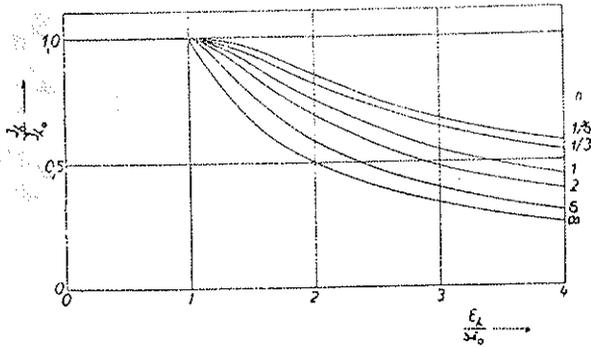


FIG. 3.

Kurven des Breiteneffektes in konstanter Tiefe.

sprüche findet. Es ist eben auch durchaus möglich, dass die Energieverteilungskurve schon primär, ausserhalb des Sonnensystems, vom Typ einer Plank'schen Kurve ist. Unberührt davon bleibt die Ablehnung

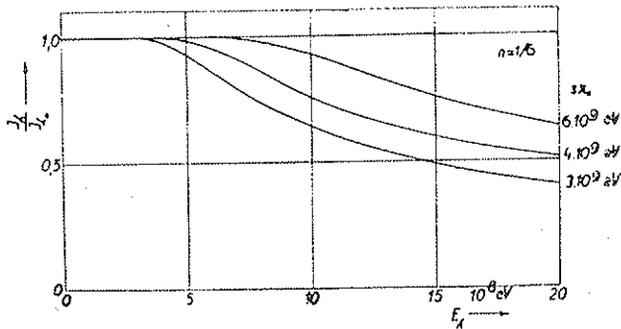


FIG. 4.

Kurven des Breiteneffektes in verschiedenen Tiefen.

(1) P. S. EPSTEIN, « Phys. Rev. », 53, 862, 1938.

(2) E. M. BRUINS, *Cosmische Strahlen*, Amsterdam, 1938.

der Deutung durch einen Absorptionseffekt, die heute wohl ziemlich allgemein erfolgt, so auch bei HERTLER ⁽¹⁾ und COMPTON ⁽²⁾.

Es mögen noch kurz die Konsequenzen dieser Auffassung zusammengefasst werden. Das Energiespektrum sei also primär bei einer Energie E_{\min} abgeschnitten. Dann kann auch hier die Absorptionsfunktion offenbar nicht vom Reichweitentyp sein, denn sonst müsste ja eine « Kritische Tiefe » beobachtet werden. — Früher war s durch die Bedingung bestimmt, dass für $x = 1$ Atm. $sx \simeq 3.10^9$ eV sein muss; diesmal besteht von vornherein keine solche Bedingung. — Die kritische Breite ist konstant, aber nur für Tiefen $x \ll E_{\min}/s$; für grössere Tiefen liegen die Verhältnisse offenbar genau so wie früher, das heisst die kritische Breite verschiebt sich mit zunehmender Tiefe nach dem Äquator zu (vgl. fig. 5). Man übersieht dies leicht, wenn man hier die Grenzen des Integrals [1], das ja ganz allgemein die Intensität in Funktion von Breite und Tiefe gibt, anschreibt. Es ist

$$a) \quad sx < E_{\min} \quad \begin{cases} E_0 = E_{\min}, & \text{falls } E_\lambda < E_{\min} \\ E_0 = E_\lambda, & \text{falls } E_\lambda > E_{\min} \end{cases}$$

$$b) \quad sx > E_{\min} \quad \begin{cases} E_0 = sx, & \text{falls } E_\lambda < sx \\ E_0 = E_\lambda, & \text{falls } E_\lambda > sx \end{cases}$$

Falls sich eine Verschiebung der kritischen Breite in grösseren Tiefen einmal beweisen liesse, so wäre hierin eine endgültige Bestätigung der hier diskutierten Annahme zu erblicken. In der Tat liegen nun in diesem Sinn die schon eingangs erwähnten. Resultate von CLAY ⁽³⁾, der gerade die Strahlung, welche mehr als 1 Atm. durchsetzt hat, misst.

Unterdes haben sich aber neue Gesichtspunkte noch von ganz anderer Seite ergeben. Bei den bisherigen Überlegungen ist stillschweigend vorausgesetzt, dass es sich bei der fraglichen Strahlung um eine primäre Komponente handelt. Nun hat aber besonders MILLIKAN ⁽⁴⁾

(1) W. HERTLER, « Proc. Roy. Soc. », 161, 261, 1937.

(2) A. H. COMPTON, R. A. TURNER, *loc. cit.*

(3) J. CLAY, *loc. cit.*

(4) J. S. BOWEN, R. A. MILLIKAN, H. V. NEHER, « Phys. Rev. », 46, 641, 1934; 52, 80, 1937; 53, 217, 1938.

die Meinung vertreten, dass die sämtlichen in der unteren Atmosphäre beobachteten Effekte sekundärer Natur seien. Hierfür sprechen in der Tat eine Reihe von Feststellungen. Nicht nur auf Meereshöhe, sondern auch in der Stratosphäre scheint der Breiteneffekt erst bei gegen 50° ein-

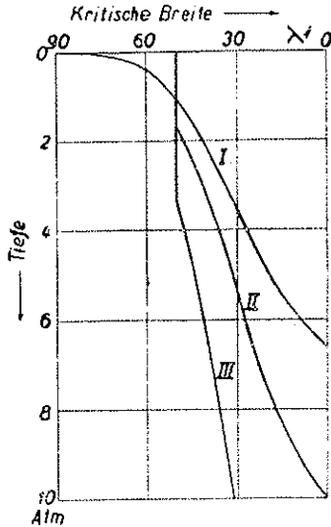


FIG. 5.

Verschiebung der kritischen Breite mit der Tiefe.

Kurve I nach der Absorptionstheorie. Kurve II und III bei primärer Begrenzung des Energiespektrums (für 2 verschiedene Werte von s)

zusetzen. Für das Energiespektrum des gesamten primär einfallenden Strahlenkomplexes hat MILLIKAN ⁽¹⁾ auf Grund ziemlich allgemeiner Überlegungen gezeigt, dass es schon vor dem Einfall nach Erreichen eines Maximums wieder abfällt, also ganz den Verlauf zeigt, den wir für das Energiespektrum der in Meereshöhe vorherrschenden harten Komponente geschlossen haben. In der Tat, beide müssen etwa konform gehen, wenn letztere sekundärer Natur ist. Die Bildung von se-

⁽¹⁾ J. S. BOWEN, R. A. MILLIKAN, H. V. NEHER, « Phys. Rev. », 53, 855, 1938.

kundären Teilchen der notwendigen hohen Energie in der Stratosphäre ist von SCHEIN ⁽¹⁾ auch direkt nachgewiesen worden.

Auch andere indirekte Überlegungen machen einen solchen Sachverhalt wahrscheinlich. Durch die Messungen besonders von WILSON ⁽²⁾ und BLACKETT ⁽³⁾ ist gezeigt worden, dass die durchdringende Komponente keine wesentlichen Strahlungsverluste und somit nur einen geringen spezifischen Energieverlust erleidet. Hierauf ist ja gerade ihre grosse Durchdringungsfähigkeit zurückzuführen. Der Gesamtenergieverlust ist also wahrscheinlich nicht viel grösser als der infolge Ionisation, und damit sollten die Teilchen der durchdringenden Komponente eben Reichweitenteilchen sein (Nichteindeutigkeit der E-R-Beziehung kann nur durch einen wesentlichen zusätzlichen Energieverlust bedingt sein), wie dies Blackett auch für wahrscheinlich ansieht. Wir haben aber eingangs gezeigt, dass gerade diese Annahme unvereinbar ist mit dem Verlauf der Absorptionskurve — unter der Voraussetzung, dass es sich um eine primäre Komponente handelt. Die Diskrepanz verschwindet aber sofort, wenn man zulässt, dass die Komponente sekundärer Natur ist.

Zu einer solchen Annahme gelangt man auch auf Grund von rein theoretischen Untersuchungen, nach EULER ⁽⁴⁾ und BHABHA ⁽⁵⁾, über die verschiedenen Prozesse, welche bei der Absorption einer sehr energiereichen Elektronenstrahlung auftreten.

Es ist also heute wohl denkbar, dass die Komponente auf Seehöhe sekundärer Natur ist; ihr Breiteneffekt spiegelt im wesentlichen den ihrer Primärstrahlung wider, der sich seinerseits nur auf die obersten Atmosphärenschichten beschränkt. Man könnte vielleicht fragen, ob nun nicht dieser Effekt durch weitere terrestrische Einflüsse entstellt ist. Wenn solche auch nicht vollständig auszuschliessen sind, nachdem COMPTON und TURNER ⁽⁶⁾ gezeigt haben, dass tatsächlich noch Einflüsse

⁽¹⁾ M. SCHEIN, V. C. WILSON, «Phys. Rev.», 54, 304, 1938.

⁽²⁾ J. G. WILSON, «Proc. Roy. Soc., London», 166, 482, 1938.

⁽³⁾ P. M. S. BLACKETT, «Proc. Roy. Soc. London», 159, 1, 1937; 159, 19, 1937; 165, 11, 1938.

⁽⁴⁾ H. EULER, «Naturwissenschaften», 26, 332, 1938.

⁽⁵⁾ H. J. BHABHA, «Proc. Roy. Soc. London», 164, 257, 1938.

⁽⁶⁾ *Loc. cit.*

bisher unbekannter Art beim Breiteneffekt mitspielen können, so kann die Konstanz der weichen Komponente in hohen Breiten sicherlich nur davon herrühren, dass ihr Teilchen der entsprechenden niedrigen Energien schon primär fehlen.

Zusammenfassend kann man also sagen, dass das rasche Einsetzen des Breiteneffektes aller Wahrscheinlichkeit nach kein terrestrischer Effekt ist, sondern im Wesen der Energieverteilung der primären Strahlung begründet ist.

Rio de Janeiro, Oktober 1938.

DI UN NUOVO PROCEDIMENTO
PER LA MESSA IN TENSIONE DELLE ARMATURE
NELLE STRUTTURE IN CEMENTO ARMATO (*)

(Con tre figure)

GUSTAVO COLONNETTI
Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Exhibet Auctor novam rationem tendendi fulturas in structuris ex armato coagmento constitutis; cuius rationis maiorem utilitatem ostendit prae ceteris quae adhiberi solent.

Due grandi problemi caratterizzano la nuova tecnica degli stati di coazione impressi nelle costruzioni in cemento armato.

Il primo è strettamente attinente alle operazioni stesse di messa in tensione delle armature; e dal modo con cui esso viene affrontato e risolto dipende l'importanza (e quindi il costo) dei macchinari e dei relativi ponti di servizio, nonché la durata della loro immobilizzazione a pie' d'opera.

Il secondo invece concerne la conservazione dello stato di coazione così creato, conservazione che è essenziale ai fini della stabilità della costruzione, ed a cui insidiano i fenomeni del ritiro e della plasticità dei calcestruzzi.

Alla risoluzione di questi problemi ha portato un primo contributo decisivo E. FREYSSINET. Egli ha infatti dimostrato che — mediante l'impiego di acciai ad alto limite elastico e di cementi di qualità, di cui con speciali accorgimenti viene sensibilmente accelerata la presa — si può da un lato limitare la durata di immobilizzazione dei macchi-

(*) Nota presentata il 18 febbraio 1940.

nari per la messa in tensione delle armature, e dall'altro ridurre entro limiti tollerabili l'influenza dannosa del ritiro e della plasticità dei calcestruzzi.

Più radicale è la soluzione escogitata da F. DISCHINGER. Questi è infatti riuscito a non eseguire la messa in tensione delle armature se non dopo che il calcestruzzo ha già fatta presa e raggiunta conveniente maturazione.

Ma per raggiungere questo brillante risultato il DISCHINGER lascia le armature fuori del getto, prevedendo in questo cunicoli appositi (che verranno riempiti solo più tardi) o collocando quelle addirittura fuori del profilo della struttura. Ora ciò non è privo di inconvenienti, nè è d'altronde sempre possibile. Il campo di applicazione del procedimento di DISCHINGER rimane pertanto necessariamente limitato.

Qui io mi propongo di mostrare come — secondo un recente brevetto italiano — gli opposti pregi di queste due soluzioni si possano, con un semplicissimo accorgimento, congiuntamente realizzare.

* * *

L'accorgimento consiste nel costituire attorno alle armature una specie di involucro isolante — vale a dire: atto ad impedire l'aderenza delle armature stesse al calcestruzzo — sotto forma di un sottile strato di una di quelle sostanze plastiche a base di gomme, olii e fibre di asbesto, che si trovano correntemente in commercio col nome di « cementi plastici ».

Spesso giova rivestire tale strato con un foglio di carta; questa semplice protezione basta ad impedire che la sostanza plastica sia accidentalmente asportata al momento del getto, e che questo venga in qualche punto a contatto diretto delle armature.

Sta di fatto che, a presa avvenuta, le armature si possono muovere a sfregamento dolce nelle loro sedi sotto l'azione di sforzi piccoli, dell'ordine di grandezza di quelli che si possono esercitare direttamente a mano o coll'aiuto di strumenti di modestissima potenza; e che questo stato di cose si mantiene a lungo, per mesi e mesi.

La messa in tensione delle armature può quindi venire ritardata a piacimento — pur senza rinunciare a disporre le armature nell'interno del getto in quelle posizioni che meglio si confanno alla resistenza della struttura — realizzando i seguenti tre vantaggi fondamentali:

1) il vantaggio di utilizzare la resistenza già acquisita dal calcestruzzo, sul quale gli apparecchi per la messa in tensione delle armature trovano il necessario contrasto, senza che si debba per ciò ricorrere a punti fissi esterni od a costosi ponti di servizio;

2) il vantaggio di realizzare la messa in tensione delle armature dopo che il calcestruzzo ha già subita una notevole frazione del suo ritiro, riducendo al minimo il calo delle tensioni che il ritiro porta necessariamente con sé;

3) il vantaggio di ridurre al minimo la durata delle operazioni per la messa in tensione delle armature, e la conseguente immobilizzazione dei macchinari ed apparecchi relativi.

Ed invero, raggiunto, per mezzo di tali macchinari, lo stato di tensione prescritto — e controllatane l'esattezza coll'aiuto di qualche estensimetro — si potrà senz'altro provvedere a rendere tale stato stabile e definitivo con la messa in opera di opportuni ancoraggi.

Poi, macchinari ed apparecchi potranno venire allontanati, e le armature troncate immediatamente dopo gli ancoraggi, e questi incorporati nella struttura mediante getti supplementari o di rivestimento.

* * *

La nuova tecnica del cemento armato trova in questa dichiarata rinuncia all'aderenza tra armature e calcestruzzo, quella che si potrebbe a buon diritto chiamare la sua attuazione integrale.

Non bisogna infatti dimenticare che l'aderenza era forse l'elemento più caratteristico della concezione classica, tradizionale, del cemento armato; concezione secondo la quale la funzione delle armature era notoriamente quella di prender su di sé, di volta in volta, una frazione più o meno importante delle tensioni determinate dalla solleci-

tazione esterna, anzi la totalità stessa di queste tensioni là dove il calcestruzzo, sollecitato a trazione, non era in grado di sopportarle.

Oggi noi tendiamo ad attribuire alle armature una ben diversa funzione: quella di creare nella struttura uno stato preventivo di coazione che elimini ogni possibile sollecitazione a trazione del calcestruzzo, e lo metta così in grado di resistere direttamente, e nelle condizioni più favorevoli, alle sollecitazioni esterne.

Ora, se si guardano le cose da questo punto di vista, l'aderenza perde senz'altro quella che era prima la sua funzione essenziale.

Di qui al farne senza, è breve il passo.

E noi abbiamo ormai dette le ragioni per cui questo passo meritava di esser compiuto.

* * *

Restano ora a dirsi poche parole su quelle che si potrebbero chiamare le caratteristiche specifiche della nuova tecnica: poichè ogni tecnica, razionalmente applicata, imprime un carattere alle strutture che ad essa si ispirano.

Incominciamo dunque col considerare il caso elementare di una trave semplicemente inflessa — le cui sezioni rette siano cioè tutte sollecitate da un medesimo momento flettente (positivo) — ed immaginiamo che le armature siano state preventivamente tese per modo che il calcestruzzo venga ad essere assoggettato ad una distribuzione di tensioni (negative) del tipo di quella rappresentata dal primo diagramma in figura 1.

È noto che a questo risultato si perviene se il punto di applicazione della risultante delle tensioni coincide col punto inferiore del contorno del nocciolo centrale della sezione.

Supponiamo ancora che il valore massimo di quelle tensioni — che si verifica in corrispondenza del bordo inferiore della sezione — sia eguale in valore assoluto alla massima tensione (positiva) che, in corrispondenza del medesimo bordo, verrà determinata dal momento flettente applicato; momento flettente che, come tutti sanno, dà origine

ad una distribuzione di tensioni del tipo di quella rappresentata nel secondo diagramma della stessa figura 1.

È chiaro allora che, per sovrapposizione, si otterrà la distribuzione effettiva delle tensioni sotto carico, coll'andamento rappresentato nel terzo ed ultimo diagramma della già citata figura.

Sotto l'azione del momento flettente applicato, la risultante delle tensioni creata preventivamente nella trave si è semplicemente spostata, senza tuttavia escire dal nocciolo centrale.

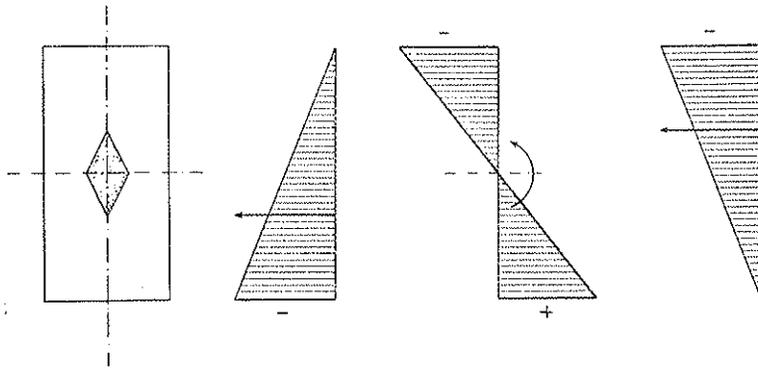


FIG. 1.

Veniamo ora al caso generale, in cui il momento flettente varia di intensità (ed eventualmente anche di segno) da sezione a sezione.

Perchè condizioni del genere di quelle dianzi indicate vengano a realizzarsi nelle diverse sezioni della trave, occorre intanto che i punti inferiori di nocciolo delle sezioni di massimo momento positivo ed i punti superiori di nocciolo delle sezioni di massimo momento negativo cadano tutti sulla linea d'azione della risultante delle tensioni preventive delle armature: siano dunque allineati.

Sullo stesso allineamento dovranno poi, per ragioni ovvie, disporsi i baricentri delle eventuali sezioni di momento nullo.

Si è così naturalmente condotti a concepire delle travi arcuate a sezione variabile — come quelle rappresentate schematicamente nelle

figure 2 e 3 — travi arcuate le quali realizzano le condizioni statiche caratteristiche dell'arco a curva delle pressioni tutta contenuta entro le linee di nocciolo, pur senza esercitare spinta alcuna sui vincoli.



FIG. 2.

Trave semplicemente appoggiata agli estremi.

La retta a tratto pieno indica la posizione dell'armatura.
Quella a tratto e punto indica l'andamento della curva delle pressioni sotto carico.

Con che anche il problema della resistenza allo sforzo di taglio — che necessariamente accompagna ogni variazione del momento flettente — trova la sua soluzione; e ciò, sia che le tensioni negative determinate su ciascuna sezione retta dalle tensioni preventive delle ar-

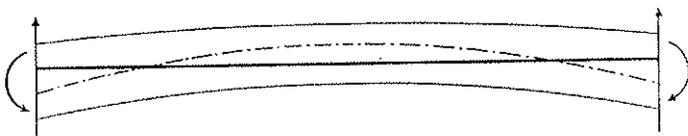


FIG. 3.

Trave incastrata agli estremi o continua su più appoggi.

La retta a tratto pieno indica la posizione dell'armatura.
Quella a tratto e punto indica l'andamento della curva delle pressioni sotto carico.

mature longitudinali bastino a contenere in limiti tollerabili le eventuali tensioni positive su elementi obliqui, sia che si voglia eliminare la possibilità stessa di tali tensioni positive per mezzo di un sistema di armature trasversali messe esse pure preventivamente in tensione.

BIBLIOGRAFIA.

- G. COLONNETTI, *La statica dei corpi elasto-plastici*, Pontificia Academia Scientiarum, « Commentationes », II, 12 (1938).
- *Un théorème fondamental sur l'équilibre des systèmes élastiques en état de coaction; Le rôle des états de coaction élastique dans la technique des constructions* (Conferenze tenute alla Sorbona addì 8 e 9 giugno 1939, Mécanique (Science et Industrie), Paris, sept.-oct. 1939.
- *La nuova tecnica del cemento armato*, « Il cemento armato », 1939, n. 8.
- E. FREYSSINET, *Une révolution dans les techniques du béton*, Paris (Eyrolles), 1939.
- A. PARIS, *Mise en tension préalable des armatures du béton armé: son principe, son calcul et ses applications*, « Bulletin technique de la Suisse Romande », Lausanne, 1936.
- G. COLONNETTI, *Contributo alla teoria delle travi inflesse in stato di coazione*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », III, 8 (1939).
- *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il caso della presso flessione)*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », IV, 2, 1940.

STATI DI COAZIONE DA ARMATURE INCROCIATE (*)

GUSTAVO COLONNETTI
Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Exhibet auctor rationem accurate supputandi status coactionis, qui in lapidum glutine fiunt si producatur tensio duarum vel plurium futurarum, iuxta varias directiones dispositarum.

Il calcolo rigoroso degli stati di coazione che si determinano in una massa di calcestruzzo mettendo simultaneamente in tensione due o più armature incrociate — cioè disposte secondo direzioni differenti⁽¹⁾ — presenta qualche difficoltà.

Ciò dipende dal fatto che ciascuna armatura viene ad essere sollecitata, non solo dalla sua tensione longitudinale, ma anche da pressioni laterali dipendenti dalle tensioni delle armature che essa incrocia.

Se però — conformemente a quanto io ho recentemente proposto⁽²⁾ — le armature vengono preventivamente avvolte da un sottile strato di materia plastica, atto ad impedire che esse aderiscano al calcestruzzo, ogni azione sulla loro superficie laterale praticamente si annulla, ed esse restano soggette a sole tensioni longitudinali.

Il problema diviene allora suscettibile di una soluzione che è, ad un tempo, semplice e rigorosa.

* * *

Per fissar le idee su di un caso tipico — a cui molti altri casi potranno, per approssimazione, riferirsi — poniamo che in una certa

(*) Nota presentata il 18 febbraio 1940.

(1) G. COLONNETTI, *Contributo alla teoria delle travi inflesse in stato di coazione*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », III, 8 (1939).

(2) G. COLONNETTI, *Di un nuovo procedimento per la messa in tensione delle armature nelle strutture in cemento armato*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », IV (1940).

regione di una data struttura coesistano tre armature, o sistemi di armature, disposte secondo tre direzioni fra loro ortogonali, che assumeremo senz'altro come direzioni degli assi coordinati di riferimento.

E supponiamo che, mediante piani paralleli ai piani coordinati, sia possibile isolare idealmente, nella massa del calcestruzzo, un parallelepipedo rettangolo tale che, attraverso le sue facce, non si trasmettano che azioni normali, uniformemente ripartite sulle facce stesse.

Lo stato di coazione così definito si potrà allora considerare come caratterizzato *nel calcestruzzo* dai valori (costanti) delle tre componenti speciali di tensione non identicamente nulle

$$\sigma_x \qquad \sigma_y \qquad \sigma_z$$

o dai valori (pure costanti) delle corrispondenti tre componenti della deformazione elastica

$$\frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right) \qquad \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \frac{\sigma_z + \sigma_x}{m} \right) \qquad \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \right)$$

dove E è il modulo di elasticità normale del calcestruzzo, ed m è il coefficiente di contrazione trasversale.

Dette poi

$$A_x \qquad A_y \qquad A_z$$

ed

$$a_x \qquad a_y \qquad a_z$$

le aree rispettivamente occupate dal calcestruzzo e dalle armature sulle facce del parallelepipedo normali ai tre assi, le analoghe componenti speciali di tensione *nelle armature* dovranno, per l'equilibrio, essere ordinatamente eguali a

$$\begin{array}{ccc} -\sigma_x \frac{A_x}{a_x} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y \frac{A_y}{a_y} & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_z \frac{A_z}{a_z} \end{array}$$

Esse daranno origine a deformazioni elastiche le cui componenti nelle direzioni delle tensioni (le sole che qui ci interessino) saranno rispettivamente

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{n\bar{E}} \sigma_x \frac{A_x}{a_x} \\ &-\frac{1}{n\bar{E}} \sigma_y \frac{A_y}{a_y} \\ &-\frac{1}{n\bar{A}} \sigma_z \frac{A_z}{a_z} \end{aligned}$$

n essendo, al solito, il rapporto fra il modulo di elasticità normale del materiale di cui son fatte le armature ed il modulo di elasticità normale del calcestruzzo.

Tali deformazioni elastiche si sovrappongono (e pertanto si sommano) alle deformazioni impresse, le cui componenti analoghe noi denoteremo ordinatamente con

$$\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}_x \\ &\bar{\varepsilon}_y \\ &\bar{\varepsilon}_z \end{aligned}$$

In queste condizioni, l'equazione generale dell'equilibrio nello stato di coazione che queste deformazioni impresse determinano (¹)

$$\int_V \left[(\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x) \delta \sigma_x + (\varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y) \delta \sigma_y + (\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z) \delta \sigma_z \right] dV = 0$$

dovendo, com'è noto, riuscir verificata per tutte le variazioni compatibili colle leggi della statica, si scinde senz'altro nelle tre seguenti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{E}} \left[\left(1 + \frac{A_x}{na_x} \right) \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_z \right] &= \bar{\varepsilon}_x \\ \frac{1}{\bar{E}} \left[\left(1 + \frac{A_y}{na_y} \right) \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_z \right] &= \bar{\varepsilon}_y \\ \frac{1}{\bar{E}} \left[\left(1 + \frac{A_z}{na_z} \right) \sigma_z - \frac{1}{m} \sigma_x - \frac{1}{m} \sigma_y \right] &= \bar{\varepsilon}_z \end{aligned}$$

(¹) G. COLONNETTI, *La statica dei corpi elasto-plastici*, Pontificia Academia Scientiarum, « Commentationes », II, 12 (1938).

Queste equazioni ci offrono la soluzione immediata del problema se a caratterizzare lo stato di coazione son date le tensioni σ e si cercano le deformazioni impresse $\bar{\epsilon}$.

Risolte rispetto alle σ esse si prestano invece alla soluzione del problema inverso: in cui cioè son date le deformazioni impresse e si cercano le tensioni che esse determinano.

* * *

S'intende che, per determinare un triplice sistema di tensioni non nulle, non occorre che tutte e tre le deformazioni impresse siano diverse da zero. Basta evidentemente che differisca da zero una di esse: poniamo la $\bar{\epsilon}_z$.

Delle nostre tre equazioni le prime due possono allora venir utilizzate per esprimere σ_x e σ_y in funzione di σ_z , mentre l'altra servirà a stabilire la legge di dipendenza di quest'ultima da $\bar{\epsilon}_z$.

Ciò significa che le armature disposte parallelamente ad x o ad y , anche se non sono state messe preventivamente in tensione, partecipano al fenomeno determinato dalla messa in tensione dell'armatura disposta secondo z opponendosi alle deformazioni trasversali che questa tende a produrre nel calcestruzzo (in cui le prime si intendono semplicemente ancorate nel loro stato naturale non deformato).

Così esse entrano alla lor volta in tensione: e la funzione che esse compiono, nei confronti dello stato di coazione, non differisce sostanzialmente da quella che, negli stati di deformazione determinati da sollecitazioni esterne, noi siamo abituati ad affidare al *frettagge*.

PROFILI DI SPIAGGIA (*)

(Con due figure e tre tavole)

PIO SCATIZZI

SUMMARIVM. — Ex mere staticis hypothesis A. determinat quodnam regimen producat, in arenosa profunditate, undarum non intermissa pulsatio: linea curva, qua maris fundus ex hoc delineatur, ad cycloidis typum prope accedit. Ex quo etiam aliqua deducuntur circa lineam iuxta quam moles fluctibus opponendae extrui debeant.

Chiunque si faccia a considerare una spiaggia marina, allo scopo di ricavarne qualche riferimento scientifico, si troverebbe a bella prima non poco a disagio; perchè se v'è cosa al mondo irregolare, disordinata, e direi, capricciosa, ella è dessa una spiaggia.

Anche perchè, rigorosamente parlando, ed in regime di vento, o anche solo di onde di risonanza, la conformazione di una spiaggia muta sempre incessantemente. Ma, ove si rifletta, che la medesima è lavorata, e come modellata dalle onde; e che in fondo queste si frangono in un modo abbastanza uniforme, quasi costante; ben s'intende prescindendo dalla loro intensità, è duopo convenire che il supporto mobile delle arene o ciottoli, dovrà almeno macroscopicamente trovare un assetto di regime.

Cerchiamo di caratterizzarlo, valendoci di intuizioni dinamiche particolarmente semplici.

Prima di tutto supporremo che, a regime stabilito la superficie di spiaggia sia cilindrica, a generatrici orizzontali, onde si tratterà di assegnarne il profilo in un piano verticale, perpendicolare alle generatrici stesse.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Tullio Levi-Civita il 18 febbraio 1940.

Va subito rilevato che dovremo ora impostare il problema di moto per una generica particella liquida sopra una traiettoria, che non è prestabilita, ma che ha assunto la sua configurazione finale per il giuoco delle forze. Data la natura del fenomeno, dobbiamo prendere in considerazione:

1) il peso della particella (verticale verso il basso) di intensità $p = mg$, con trasparente significato dei simboli;

2) una spinta orizzontale costante T , che schematizza l'azione diretta del vento e indiretta delle particelle liquide circostanti;

3) la reazione N del supporto (spiaggia). Supponiamo, a titolo d'assaggio, che questa reazione N annulli il peso, presentando poi una componente residua puramente normale all'incognito supporto. Tali ammissioni che ci permetteranno di determinare ad un tempo la forma della traiettoria e la legge del moto, vanno risguardate come una estensione all'incognito profilo della ipotesi elementare, che un sostegno prefissato privo d'attrito, offre soltanto reazione normale.

Dobbiamo ancora introdurre una ipotesi plausibile quanto all'intensità. Siccome, almeno qualitativamente, appare chiaro che quanto più intensa è la velocità della particella (che si può grossolanamente identificare con la velocità dell'onda), tanto più rilevante sarà la reazione N , il modo più spontaneo e più adatto per una prima traduzione matematica della questione, è di supporre N addirittura proporzionale alla velocità istantanea v della particella mobile. Porremo in conformità

[1]

$$N = kv.$$

Riguardando il coefficiente k (che ha le dimensioni mt^{-4} di una massa divisa per un tempo) come una costante.

Con tali premesse, si può senz'altro porre in equazione il problema del moto della particella nella fase d'investimento, e ne risulterà insieme determinata la sua traiettoria nel piano verticale, che è poi il profilo di spiaggia.

Quanto alla giustificazione delle suddette premesse, di cui ci siamo limitati ad indicare la plausibilità, potrà valere il confronto con l'os-

servazione diretta di cui alleghiamo un saggio nelle fotografie che accompagnano la presente Nota.

In base a quanto precede, possiamo esplicitare le equazioni del moto, riferendoci a due assi cartesiani ortogonali: Oxy , con Ox orizzontale nel senso del moto (dal mare alla spiaggia), e Oy verticale verso l'alto. I coseni direttori della tangente alla traiettoria nel senso del moto

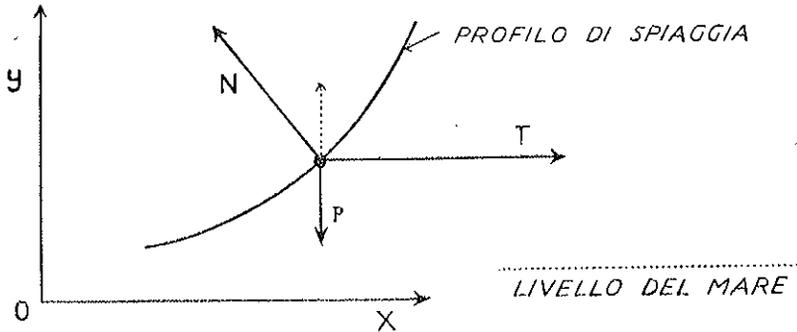


FIG. 1.

sono (designando la derivata rispetto al tempo con un punto sovrapposto) $\frac{\dot{x}}{v}, \frac{\dot{y}}{v}$; quelli della normale (ruotata di 90° nel verso di y) $-\frac{\dot{y}}{v}, \frac{\dot{x}}{v}$.

Le componenti della forza N , risulteranno così

$$-N \frac{\dot{y}}{v}, N \frac{\dot{x}}{v}$$

cioè in base alla [1] $-ky, kx$; e avremo senz'altro le equazioni del moto

$$[2] \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= T - ky \\ m\ddot{y} &= kx \end{aligned}$$

Ad integrarle, basta derivare una volta la prima, e sostituire ad \ddot{y} il suo valore ricavato dalla seconda; avremo allora l'equazione

$$\ddot{x} = -h\dot{y} = -h^2\dot{x}$$

avendo posto $h = \frac{k}{m}$.

Questa equazione è di secondo ordine in \dot{x} , la cui soluzione, ben nota nel problema del moto armonico, è data da:

$$[3] \quad \dot{x} = r \cos(ht + \theta_0); \quad \text{con } r \text{ e } \theta_0$$

due costanti d'integrazione. Cosicchè la seconda delle [2] dà in conseguenza

$$[4] \quad \ddot{y} = rh \cos(ht + \theta_0) \quad \text{e} \quad \dot{y} = r \sin(ht + \theta_0) + c_3$$

designando con c_3 un'ulteriore costante.

Integrando ancora una volta questa o la [3], si perviene alle equazioni parametriche dal profilo

$$[5] \quad x = \frac{r}{h} \sin(ht + \theta_0) + c_2; \quad y = -\frac{r}{h} \cos(ht + \theta_0) + c_3 t + c_4$$

(con c_2, c_4 costanti additive) o più sinteticamente, a mezzo delle posizioni

$$ht + \theta_0 = u, \quad \frac{r}{h} = \rho,$$

possiamo scrivere in definitiva:

$$[6] \quad x = \rho \sin u + c_2, \quad y = -\rho \cos u + c_3 u + c_4$$

con ρ, c_2, c_3, c_4 quattro costanti d'integrazione.

Come si vede tale curva è certamente del tipo della cicloide, ad assi scambiati. Di qui si può ricavare l'equazione cartesiana del «profilo di spiaggia»:

$$[7] \quad y = b \operatorname{arcsen} \left[\frac{x-a}{\rho} \right] - \sqrt{\rho^2 - (x-a)^2} + c ;$$

con a, b, c , in luogo di c_2, c_5, c_6 .

Avremo quindi tre curve dello stesso tipo corrispondenti alla cicloide «allungata» ossia con nodo; o «a cuspide» o «accorciata», a seconda della lunghezza del raggio ρ rispetto al coefficiente di u nelle equazioni semplificate, in cui $a=c=0$.

Forse desterà sorpresa l'affermazione che il profilo di spiaggia sia espresso da codeste curve, ma la meraviglia cessa quando si rifletta che l'ipotesi matematica da noi introdotta rispecchia soltanto la fase d'investimento. All'infuori di essa il fenomeno fisico non verifica più le stesse ipotesi. In realtà, sulla sabbia, la curva arriverà fin quasi al primo punto di tangenza con una retta parallela all'asse y , o tutto al più fino al nodo. Ma per il resto della curva rientrante, manchevole di supporto, l'edificio crolla. Eccetto in qualche caso, in cui sia la sabbia grassa o impastata di piccoli ciottoli, che permette di arrivare fino all'incrocio del nodo; come viene accennato nella figura 4.

Ciò che si è detto della spiaggia emersa si deve ripetere per la spiaggia immersa, fino al punto in cui il fondo non risente più del moto ondoso della superficie. Possiamo quindi, senza tema, asserire che poco prima del livello marino in quiete, deve esistere generalmente uno *scalino di sponda*, ultima parte del profilo di spiaggia immerso. Tale scalino varia a seconda della cedevolezza del materiale di fondo, come è ovvio. Riunendo insieme i vari successivi profili cicloidici di un medesimo piano normale, si ottiene il *profilo completo di spiaggia*.

Non si deve omettere qui un *effetto secondario* del moto ondoso dovuto al ritorno dell'onda, per cui l'arena, meno perspicuamente, e i ciottoli visibilmente, sono trasportati dall'alto in basso, accrescendo o meno l'effetto di profilo.

Ciò perchè sul principio del ritorno dell'onda, la velocità è minima; ma a mezza corsa, già possiede notevole forza viva, capace di

trasportare in basso il materiale; aumentando lo scalino di sponda e per lo meno quella parte inferiore della cicloide. Tale effetto dovrebbe comparire nelle equazioni con un termine addittivo; ma il fenomeno essendo troppo esiguo e irregolare non è trattabile con un istrumento analitico, nè riuscirebbe attendibile.

DIGHE. — È prezzo dell'opera esporre qui un'applicazione alquanto inaspettata, e forse al lettore sembrerà fuori di proporzione e di argomento. Ma una certa filosofia finalistica mi suggerisce, che in natura, *quando delle forze operano in un ambiente, questo viene da loro modificato nel modo più atto a contenerle*. Perciò ritengo che nulla di meglio del profilo di spiaggia sia capace di frenare le onde, e per conseguenza, nulla di più opportuno si presta per il miglior profilo da assegnare ad una diga marina, esposta all'assalto dei marosi a cui si deve far fronte.

Anche recenti lavori insistono sul muro verticale, che contrastando frontalmente, non può, a lungo andare, se non raccomandarsi alla resistenza del proprio materiale, senza alcun ripiego strategico, contro un nemico tanto formidabile.

Si vede infatti dalla pratica, per dighe esposte a rombi d'alto regime, la necessità di difendere la diga verticale con un'altra diga di scogli artificiali! Il che prova la inanità ed irrazionalità della prima.

Si deve però citare una buona eccezione, nell'opera del signor A. K. EMY (*Mouvements des ondes et des Travaux hydrauliques Maritimes*), un vero osservatore e studioso del mare, e del suo moto ondosio, nei primi dell'ottocento.

Egli si rifà alla teoria del BROMONTIER che riponeva il moto ondosio in un puro movimento oscillatorio verticale delle particelle, e quindi con relativa disastrosa persuasione che bastasse la parete verticale. Trattò non solo delle onde, correnti, superficiali e visibili, ma anche dei « flots de fond » a cui attribuisce tutta la rovina delle fondamenta nelle opere marittime. Quanto però al profilo da dare alla diga, lo deduce da considerazioni meccanico-geometriche di genere puramente intuitivo; per cui ritiene che il profilo non deve essere nè puramente verticale e piano o soltanto inclinato, ma curvo con la

concavità verso il mare. Però, non essendo analista, non attribuisce un gran valore al genere di profilo, purchè sia curvo. Infatti al capo VIII dell'opera citata, a pag. 117, dice:

« Sans m'arreter a la recherche de la courbe qui satisferait le mieux aux conditions dont on pourrait compliquer le problème, recherche a peu près sans utilité, j'ai employé pour profil un arc de cercle. Une courbe qui aurait un très gran rayon de courbure a son point de tangence avec le fond de la mer, comme serait un arc d'ellipse, de cycloïde ou de spirale, satisferait d'autant mieux que la deviation de la route des flots de fond serait d'abord peu sensible, e quelle s'acroitrait ensuit de plus en plus ».

Dopo di che avendo di sopra dimostrato, in base al principio finalistico emesso ed al calcolo, che appunto la miglior curvatura della diga sia una cicloide, potrà prendere un suo particolare interesse questa Nota. Non posso quindi convenire con l'EMY che la forma speciale del profilo sia addirittura una questione inutile; per quanto infatti può es-

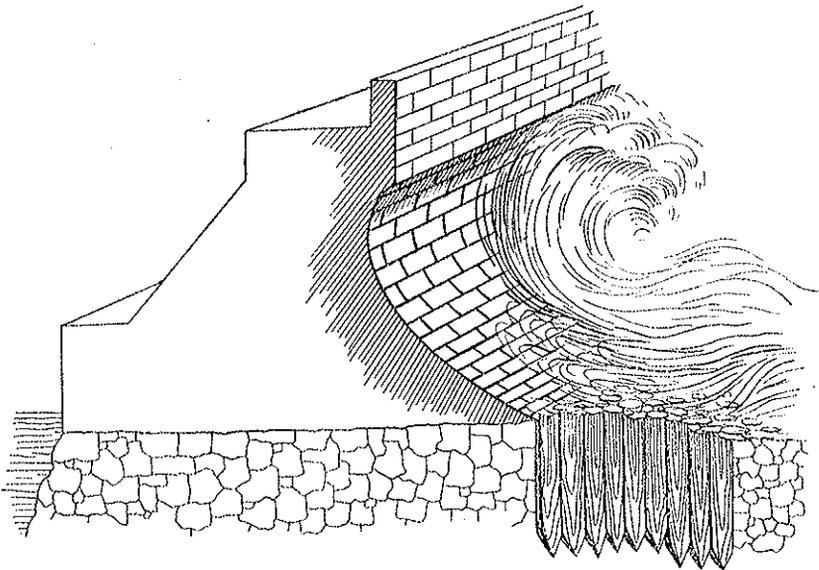


FIG. 2.

sere più o meno nocivo il colpo di un'onda, contro una diga, moltiplicato per miliardi! Qualora si diminuisca anche di poco quell'urto, ciò significherà prolungare proporzionalmente la durata della costruzione.

Credo quindi che se le dighe del genere si foggiasse secondo il nostro profilo cicloidico, si otterrebbe un riparo che, oltre ad avere dell'indistruttibile rispetto ai conati del mare, porge il vantaggio economico di compiere l'intera costruzione con la metà del materiale e minore ingombro anche per gli approdi. Potrà bastare l'interposto disegno schematico a persuadercene. L'onda viene ad infrangersi contro il suo stesso peso, e respinta dalla medesima forza con cui si era avventata. Va da sè, che il detto profilo si deve calcolare in base al massimo regime locale.

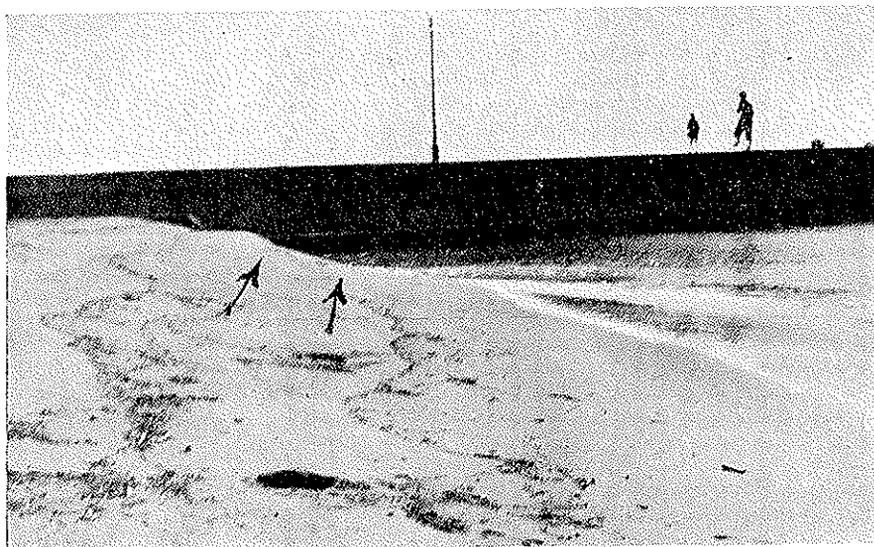


FIG. 1.

Le due frecce indicano un primo accenno di modellatura del profilo a regime normale.

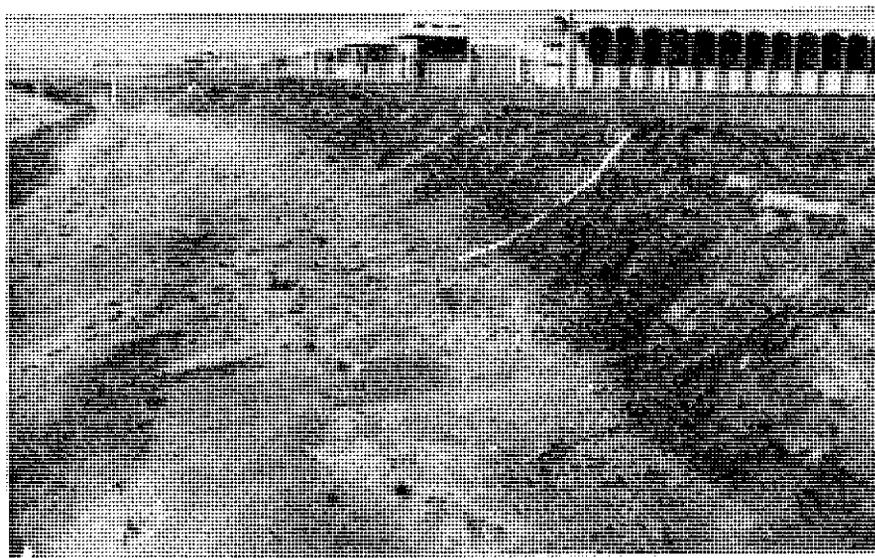


FIG. 2.

La linea a polvere di gesso lungo il profilo rende perspicua la curvatura cicloidica della lunga spalliera di alto regime.

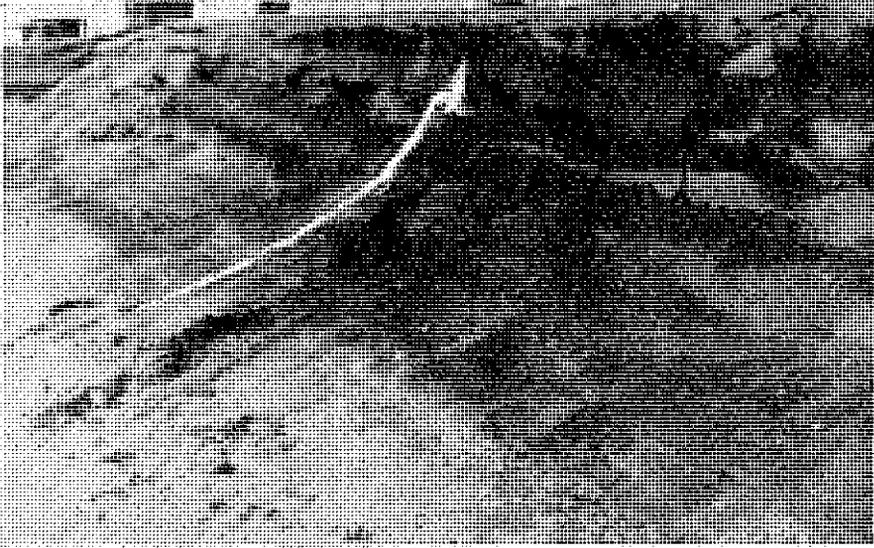


FIG. 3.

Altra linea indicante il tipo cicloidico della spiaggia. Le tre frecce indicano l'evidente striscia di crollo, ove cominciava il ramo simmetrico.

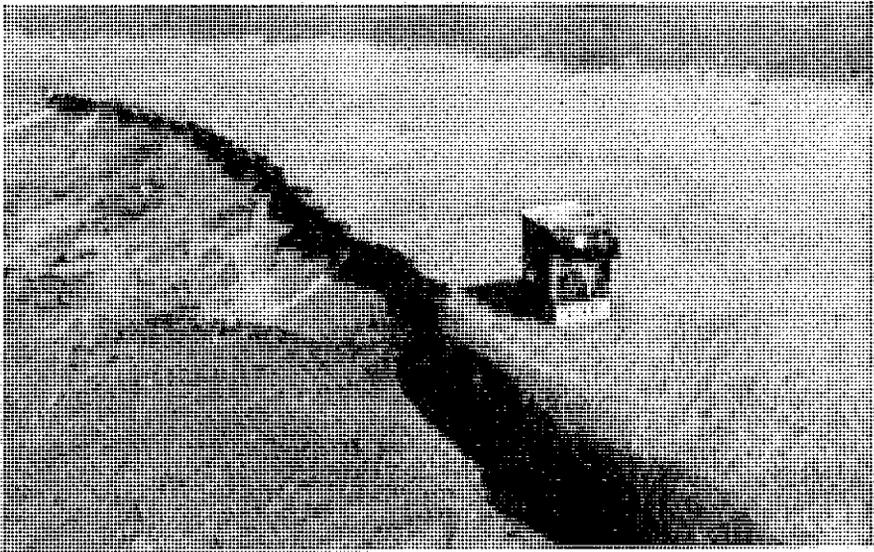


FIG. 4.

Su questa preziosa falda sabbiosa si scorge bene la curvatura di ritorno. L'ombra accusa quanta parte ancora ne resti campata in aria, a dimostrazione del tipo cicloidico.

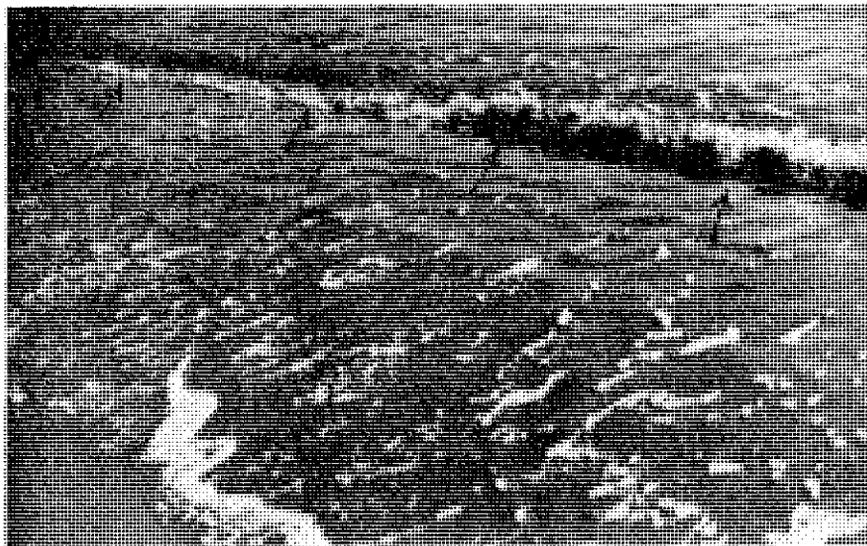


FIG. 5.

Le frecce indicano la linea netta dello *scalino di sponda*. I frangenti rigidamente lineari lo confermano.

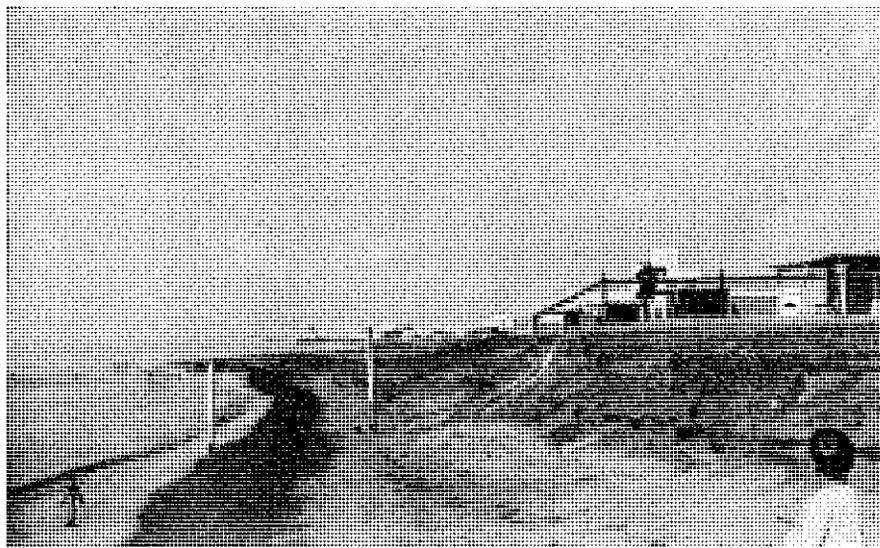


FIG. 6.

Questa veduta è come un riepilogo. Chiaro il profilo d'alto regime con linee superiori di crollo. La freccia a destra indica un secondo profilo a medio regime. Quella a sinistra fissa la linea ove si snoda contro luce il lungo scalino di sponda.

LE GRANDEZZE FISICHE DI UN MAGNETE SECONDO LA NUOVA METROLOGIA (*)

(Con una figura)

DARWIN VITALE

SUMMARIVM. — Postquam auctor determinaverit quasdam magnitudines proprias magnetis permanentis, indicat qua ratione, ex experientia, fundamentales magnetum relationes definiri possint; praeterea explanat curvam campi vectorum B et H aliter se habeant.

Nello svolgimento della magnetostatica secondo il nuovo indirizzo a cui conduce la metrologia razionalizzata del sistema GIORGI si presentano alcune questioni d'impostazione dovute al fatto che si devia dalla trama antica, non prendendo più come punti di partenza il concetto di massa magnetica e la legge delle azioni a distanza.

A me sembra che le difficoltà siano dovute, oltre che all'abitudine agli antichi schemi, anche a certi inutili coefficienti che comparivano in certe formule e mascheravano, diciamo così, la perspicua interpretazione di quelle relazioni.

Seguendo la via magistralmente indicata dall'Accademico GIOVANNI GIORGI nelle sue numerose memorie⁽¹⁾, vogliamo qui precisare com'è possibile pervenire alle relazioni fondamentali della magnetostatica.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi, il 26 marzo 1940.

(1) Citiamo fra l'altro: *Grandezze e unità elettriche* (Memorie della Classe di Scienze Fisiche della R. Accademia d'Italia, vol. VIII, 1937); *Le grandezze fisiche del magnetismo permanente* (« L'Energia elettrica », vol. XV, fasc. 4, aprile 1938, pag. 245-251).

Premesse le seguenti definizioni:

a) vettore *magnetizzazione* \mathbf{J} di una calamita è l'induzione magnetica ⁽¹⁾ che si mantiene in circuito magnetico chiuso in assenza di forza magnetizzante (si noti che avendo così definito, la magnetizzazione è quella di magnetismo « vero », non di magnetismo « libero »);

b) magnete veramente *permanente* quello che conserva la sua \mathbf{J} anche se staccato dal circuito magnetico di cui faceva parte;

c) *momento magnetico* di un solenoide cilindrico o di un magnete allungato è il coefficiente di \mathbf{H} che figura nell'espressione del momento meccanico della coppia agente sul magnete o sul solenoide immersi in un campo esterno uniforme di forza magnetica \mathbf{H} .

Si può constatare *sperimentalmente*:

a) che un magnete cilindrico uniformemente magnetizzato e un solenoide di eguale forma e lunghezza ⁽²⁾ hanno eguali momenti magnetici se:

$$[1] \quad \mathbf{J} = \mu_0 \frac{NI}{l}$$

(si noti che \mathbf{J} e $\mu_0 \frac{NI}{l}$ esprimono rispettivamente i momenti magnetici dell'unità di volume per il magnete e per il solenoide.

b) che in tal caso i rispettivi campi magnetici (intesi come campi del vettore \mathbf{B}) sono identici sia all'esterno che all'interno. La [1] esprime dunque la condizione di equivalenza fra magneti e solenoidi;

c) che in un magnete indefinito (cioè tale che le dimensioni trasversali siano trascurabili rispetto alla lunghezza) l'induzione magnetica interna \mathbf{B} ⁽¹⁾ è costante nei vari punti e coincide con la magnetizzazione \mathbf{J} , ossia:

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}$$

⁽¹⁾ L'induzione magnetica s'intende misurata in ogni caso col metodo indicato dal GORGI, cioè mediante una bobina esploratrice collegata ad un galvanometro balistico.

⁽²⁾ In cui lo spessore delle spire sia trascurabile.

d) che in un magnete di lunghezza finita l'induzione \mathbf{B} non è costante nei vari punti interni e risulta sempre minore di \mathbf{J} , cioè:

$$\mathbf{B} = \mathbf{J} + \mathbf{Y}$$

dove \mathbf{Y} rappresenta un vettore di senso contrario ad \mathbf{J} , funzione di \mathbf{J} e del punto considerato. Il vettore \mathbf{Y} misura la decurtazione che subisce l'induzione magnetica quando il magnete non si trova più in circuito chiuso, e si potrebbe chiamarlo vettore *smagnetizzazione*.

Se consideriamo l'induzione magnetica in ogni caso come effetto di una forza magnetica di campo (causa) agente nello *spazio libero* ⁽¹⁾ possiamo dire che come la \mathbf{J} è da attribuire a una *forza magnetica impressa* (causa impressa) data da:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{J}}{\mu_0}$$

così la decurtazione $\mathbf{Y} = \mathbf{B} - \mathbf{J}$ è da attribuire a una *forza magnetica smagnetizzante* (causa smagnetizzante) espressa da:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}}{\mu_0}$$

Quindi risulta valida nell'interno dei magneti la relazione:

$$[2] \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}$$

All'esterno, invece, la forza magnetica che produce il campo di \mathbf{B} è semplicemente:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

(1) Per la magnetizzazione permanente ciò è giustificato dalla verosimile ipotesi delle correnti amperiane.

ciò risulta

$$[3] \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

Dalle [2] e [3] si deducono poi tutte le conseguenze: continuità del vettore \mathbf{B} , discontinuità del vettore \mathbf{H} nell'attraversare una faccia terminale del magnete, ecc., e soprattutto il fatto che l'equivalenza fra un solenoide e un magnete è limitata ai soli punti esterni quando si considera il campo di \mathbf{H} invece del campo di \mathbf{B} .

Come esempio di quanto abbiamo esposto consideriamo un solenoide cilindrico di spessore trascurabile e il magnete permanente ad esso equivalente.

Nei punti (interni o esterni) dell'asse del solenoide si ha con le solite notazioni ⁽¹⁾:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \frac{NI}{l} \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2}$$

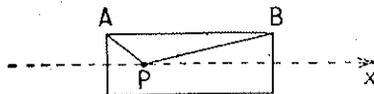
$$\mathbf{H} = \frac{NI}{l} \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2}$$

Nei punti dell'asse del magnete equivalente (cioè tale che $\mathbf{J} = \mu_0 \frac{NI}{l}$) si avrà all'esterno:

$$[4] \quad \mathbf{B} = \mathbf{J} \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{J}}{\mu_0} \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2}$$

⁽¹⁾ α e β sono rispettivamente gli angoli formati da PA e PB con l'asse x orientato secondo il senso di avanzamento di una vite destorsa che gira come la corrente



nell'interno :

$$\mathbf{B} = \mathbf{J} \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}}{\mu_0} = \frac{\mathbf{J}}{\mu_0} \left(\frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2} - 1 \right)$$

Notiamo che :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{J} \left(\frac{\cos \beta - \cos \alpha}{2} - 1 \right)$$

risulta sempre contrario ad \mathbf{J} e funzione del punto P e di \mathbf{J} .

Se il magnete è indefinito risulta ovunque nell'interno :

$$\mathbf{B} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{H} = 0$$

cioè non vi è forza smagnetizzante.

Osservazione finale. - Sorge spontanea una domanda: come s'interpreta il fatto che mentre per il campo del vettore \mathbf{B} l'equivalenza riesce ovunque all'interno e all'esterno, per il campo del vettore \mathbf{H} l'equivalenza è possibile solo all'esterno?

La cosa appare chiara se s'immagina il magnete come costituito da un fascio di solenoidini di sezione piccolissima affiancati fra loro con spazi interposti. Allora la fessura normale all'asse, che occorre effettuare per valutare \mathbf{B} nei punti interni al magnete, renderebbe efficaci tutte le ampere-spire dei corrispondenti solenoidini e sarebbe quindi possibile l'equivalenza col campo d'induzione interno a un solenoide; invece il tunnel parallelo all'asse, che occorre effettuare per misurare direttamente \mathbf{H} ⁽¹⁾, rimarrebbe sempre *esterno* ai solenoidini e pertanto

(1) Con uno qualunque dei metodi indicati nella memoria del GIORGI: *Le grandezze fisiche del magnetismo permanente*, op. cit.

sarebbe impossibile l'equivalenza col campo di forza magnetica interno a un solenoide.

In altre parole, non essendo possibile scavare un tunnel *interno* alle ipotetiche spire dei solenoidini elementari, corrispondenti alle verosimili correnti amperiane, non potremo giammai misurare la forza magnetica veramente *interna* ai solenoidini, ma solo quella all'esterno di essi, cioè nelle regioni comprese fra due solenoidini successivi: ivi, com'è facile rendersi conto, il vettore \mathbf{H} ha senso contrario a \mathbf{B} .

Quando il magnete è lungo e sottile i solenoidini si possono immaginare indefiniti, allora la forza magnetica all'esterno di essi è nulla, così pure la \mathbf{H} interna al magnete risulta nulla.

Dalle considerazioni esposte appare ancora una volta che la definizione di forza magnetica interna a un magnete mediante il tunnel longitudinale è fino ad un certo punto artificiale.

LOI DES FORCES
DANS UN SYSTÈME GRAVITATIONNEL
DU TYPE SOLEIL-PLANÈTE (*)

SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO

SYMMARIUM. — Nova doctrina a prof. Garcia proposita utens, auctor probat praecedentiam perihelii Mercurii posse explicari, si vis attrahendi serie quadam exprimatur, cuius primus terminus ad Newtonianam legem congruat, ceteri vero sint additicii termini, qui tamquam vires perturbantes habeantur.

INTRODUCTION. — Il est connu que la loi de NEWTON est seulement approchée et que pour l'explication de certains phénomènes, tel que celui de la précession du périhélie de Mercure, elle se trouve en défaut et qu'il a fallu de la théorie de la Relativité Générale d'EINSTEIN pour trouver un résultat d'accord avec l'expérience.

Quelques mathématiciens avaient cherché jades l'explication de tel phénomène, dans le cadre de la Mécanique Classique, en supposant l'existence des forces perturbatrices qui varieraient en raison inverse de la troisième, quatrième et enième puissance de la distance. Mais c'est notre compatriote, le mathématicien pérouvien Prof. GODOFREDO GARCIA, qui a réussi à résoudre par ces considerations, le problème de la précession du périhélie, dans un travail remarquable⁽¹⁾, en retrouvant la formule bien connue d'EINSTEIN, de même que les autres résultats que l'on déduit par la théorie de la Relativité Générale

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi il 26 marzo 1940.

(1) GODOFREDO GARCIA, *La Mecánica Clásica y la explicación del Corrimiento del perihelio de los planetas, de la deflexión de la luz y del Corrimiento de las rayas espectrales al rojo*, Rev. de Ciencias, Enero a Setiembre, 1932, Lima.

concernant le phénomène de la déflexion de la lumière et le déplacement des raies spectrales vers le rouge.

Nous avons suivi la méthode du Prof. GARCIA que consiste dans le développement en série du potentiel en fonction des puissances croissantes de l'inverse $1/\rho$ de la distance, pour arriver à une équation différentielle générale. La difficulté de cette méthode réside dans la détermination précise des différentes constantes, ou plus exactement paramètres, qu'apparaissent quand on fait le développement en série. Le Prof. GARCIA était réussi à fixer la structure des paramètres du second et troisième terme de tel développement et alors nous nous sommes aperçus que les paramètres varient selon une loi, formule [6], ce qui nous a permis de déduire une loi générale des forces centrales qui fixe les valeurs précises des différentes forces qu'interviennent dans un système gravitationnel du type Soleil-Planète. La loi en question est la suivante :

$$[1] \quad F_n = - \frac{nGMm}{\rho^{n+1}} \left(\frac{S}{c} \right)^{n-1}$$

Dans cette formule n est le nombre d'ordre de la force que l'on considère, ρ la distance, G la constante de la gravitation, M la masse du corps central supposé fixe, m la masse de la planète, S la constante des aires et c la vitesse de la lumière.

En première approximation pour $n = 1$ on a la loi de NEWTON :

$$[2] \quad F_1 = - \frac{GMm}{\rho^2} \left(\frac{S}{c} \right)^0 = - \frac{GMm}{\rho^2}$$

Pour $n = 3$ on obtient la force perturbatrice :

$$[3] \quad F_3 = - \frac{3GMm}{\rho^4} \left(\frac{S}{c} \right)^2$$

qui est la cause de l'avance du périhélie de la planète.

DEMONSTRATION. — Supposons une masse centrale M , telle celle du Soleil, et développons le potentiel dû à cette masse en fonction des puissances croissantes 1, 2, 3, ..., n de l'inverse $1/\rho$ de la distance :

$$[4] \quad V = \frac{\mu_1}{\rho} + \frac{2\mu_2}{\rho^2} + \frac{3\mu_3}{\rho^3} + \dots + \frac{n\mu_n}{\rho^n}$$

Ici $\mu_1 = GM$ est le produit de la constante G de la gravitation par la masse centrale M , et $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots, \mu_n$ sont des paramètres inconnus à déterminer.

Quand il y a un second corps de masse m , telle celle d'une planète qui tourne autour du corps central, à chacun des termes du développement en série ci-dessus, correspondent les forces :

$$[5] \quad F_1 = -\frac{\mu_1 m}{\rho^2}; \quad F_2 = -\frac{2\mu_2 m}{\rho^3}; \quad F_3 = -\frac{3\mu_3 m}{\rho^4}$$

Nous avons trouvé que les paramètres à déterminer varient selon une loi très simple qui est la suivante :

$$[6] \quad \mu_n = \mu_1 \left(\frac{S}{c}\right)^{n-1} = GM \left(\frac{S}{c}\right)^{n-1}$$

formule qui donne, faisant $n=1, n=2, n=3, \dots$ les valeurs $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ et alors les forces de la formule [5] deviennent comme il suit :

$$F_1 = -\frac{GMm}{\rho^2} \left(\frac{S}{c}\right)^0; \quad F_2 = -\frac{2GMm}{\rho^3} \left(\frac{S}{c}\right), \quad F_3 = -\frac{3GMm}{\rho^4} \left(\frac{S}{c}\right)^2; \quad \dots$$

Toutes ces forces s'expriment par la formule générale suivante :

$$[1] \quad F_n = -\frac{nGMm}{\rho^{n+1}} \left(\frac{S}{c}\right)^{n-1}$$

qui est la loi de forces centrales propres du système gravitationnel considéré (1).

Comme la constante des aires a pour valeur $S = v\rho/2$ où v est la vitesse, la formule ci-dessus peut être mise sous la forme de la loi de NEWTON précédée d'un coefficient A numérique :

$$[7] \quad F_n = -A_n \cdot \frac{GMm}{\rho^2}$$

où A_n a pour valeur :

$$[8] \quad A_n = n \left(\frac{v}{2c} \right)^{n-1}$$

On voit que A est un pure coefficient numérique qui a pour valeur 1 quand $n=1$ (loi de NEWTON) et de valeurs chaque fois plus petites quand plus grand est le nombre $n-1$ de la puissance pour être la vitesse v de la planète toujours très petite en comparaison de la vitesse c de la lumière. Conséquemment quand n augmente, les forces perturbatrices sont en intensité de plus en plus petites que la force principale ou newtonienne, mais logiquement ces forces perturbatrices de structure différentes les unes des autres, doivent produire aussi des effets différents dans le système gravitationnel, et de ce fait la gravitation résulte être un phénomène très complexe même dans le modèle simple que nous étudions.

Il nous suffit, à présent, de vérifier que parmi les forces perturbatrices la F pour $n=3$ est bien celle qui produit l'avance du périhélie.

L'équation différentielle de BINET est, comme l'on sait :

$$[9] \quad \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{\mu_1}{S^2}$$

(1) SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO, *Las Energías Primarias que componen el Electrón y sus interpretaciones*, Actas y Trabajos del Primer Congreso Peruano de Química, Julio 1938, Lima.

où toujours $\mu_1 = GM$ et θ est l'anomalie. Cette équation différentielle devient pour le cas du développement en série du potentiel :

$$[10] \quad \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{S^2} \left[\mu_1 + \frac{2\mu_2}{\rho} + \frac{3\mu_3}{\rho^2} + \dots + \frac{n\mu_n}{\rho^{n-1}} \right]$$

Et puisque nous connaissons, formule [6], la structure des différents paramètres, nous pouvons écrire :

$$[11] \quad \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{S^2} \left[GM + \frac{2GM}{\rho} \left(\frac{S}{c} \right) + \frac{3GM}{\rho^2} \left(\frac{S}{c} \right)^2 + \dots + \frac{nGM}{\rho^{n-1}} \left(\frac{S}{c} \right)^{n-1} \right]$$

qui est l'équation différentielle complète, sans coefficients indéterminés, qui permet de résoudre dans le cadre de la Mécanique Classique, les problèmes complexes créés par les forces perturbatrices, qui peuvent se présenter dans le système Soleil-Planète.

En effet supposons le cas très particulier de considérer seulement le premier et le troisième terme du second membre de l'équation [11], c'est à dire les termes correspondants à $n=1$ (loi de NEWTON) et $n=3$ pour la force perturbatrice F_3 . On a alors :

$$[12] \quad \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{GM}{S^2} + \frac{3GM}{c^2 \rho^2}$$

qui est l'équation différentielle bien connue qui donne compte de l'avance du périhélie, phénomène qui dépend du terme $3GM/c^2 \rho^2$ correspondant à la force perturbatrice F_3 . On ferait de même pour étudier les effets des autres forces perturbatrices en prenant séparément le terme correspondant à celle qu'on étudie avec le premier terme qui correspond à la loi de NEWTON.

L'intégration de l'équation différentielle, formule [12], conduit à :

$$[13] \quad \delta = \frac{3GM}{c^2 p} \theta$$

où p est le paramètre de la section conique et θ l'anomalie.

Pour un tour complet, soit $\theta = 2\pi$ on a :

$$[14] \quad \Delta = \frac{6\pi GM}{c^2 p}$$

Le Prof. GARCIA transforme cette équation dans celle d'EINSTEIN en substituant le paramètre p de la section conique par :

$$[15] \quad p = a(1 - e^2)$$

où a est le demi-axe majeur et e l'excentricité. Puis au moyen de la troisième loi de KEPLER :

$$[16] \quad GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

où T est le temps de révolution de la planète. Alors la formule [14] devient :

$$[17] \quad \Delta = \frac{24\pi^3 a^3}{c^2 T^2 (1 - e^2)}$$

qui est la formule d'EINSTEIN.

Ainsi on voit que c'est bien la force perturbatrice F_3 , formule [3], qui est la cause de l'avance du périhélie. On voit aussi que l'équation différentielle [12] qui permet de trouver cet avance n'est qu'une approximation de l'équation générale [11], sans coefficients indéterminés, qui tient compte de toutes les forces perturbatrices. Donc si nous devons conserver la notion de force pour l'explication des phénomènes du monde physique, notre formule [1] est bien la loi générale des forces propres du système Soleil-Planète considéré.

NUOVA ORBITA DEL PIANETA 747 WINCHESTER E PERTURBAZIONI SPECIALI DI GIOVE DAL 1929 AL 1940 (*)

MASSIMO CIMINO

SUMMARY. — Planetæ 747 Winchester novus cursus computatur, ex huius planetæ septem oppositionibus inter annos 1929 et 1939 observatis, ratione habita specialium Jovis perturbationum, quæ ratione proxime ad verum accedenti supputatæ sunt. Cursus medius, ita determinatus, sufficit ut exprimentur observationes planetæ per 10-20 annos proxime obventuros.

1. — Il calcolo di una nuova orbita del Pianeta 747 *Winchester*, assieme a quello delle perturbazioni speciali approssimate di Giove dal 1929 al 1940, mi è stato cortesemente proposto dal prof. G. STRACKE⁽¹⁾ dell'Astronomisches Rechen-Institut di Berlino; egli stesso mi ha fornito le seguenti osservazioni sul Pianeta in sette diverse opposizioni tra il 1929 e il 1940, da servire come base per la ricerca.

TABELLA I.

| N. | Luogo | Data (T. U.) | α | δ | Equinozio |
|----|-----------|--------------------|------------------------------------|-----------|-----------|
| 1 | Bergedorf | 1929 Aprile 18.0 | 13 ^h 1 ^m .2 | + 16° 38' | 1929.0 |
| 2 | Simeis | 1931 Luglio 16.0 | 18 ^h 56 ^m .6 | - 11° 18' | 1925.0 |
| 3 | Algeri | 1932 Dicembre 30.0 | 5 ^h 26 ^m .1 | + 0° 41' | 1932.0 |
| 4 | Barcelona | 1934 Marzo 20.0 | 12 ^h 35 ^m .1 | + 17° 0' | 1934.0 |
| 5 | Budapest | 1935 Aprile 30.0 | 15 ^h 28 ^m .9 | + 5° 34' | 1935.0 |
| 6 | Madrid | 1936 Giugno 11.0 | 18 ^h 24 ^m .2 | - 7° 4' | 1936.0 |
| 7 | Simeis | 1939 Marzo 27.0 | 11 ^h 31 ^m .8 | + 21° 11' | 1950.0 |

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini il 18 febbraio 1940.

Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, a cura del R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario.

(¹) Mi è grato porgere al prof. G. STRACKE i miei più vivi ringraziamenti per l'interessamento dimostrato al mio lavoro.

L'ultima orbita conosciuta del Pianeta è quella che il GEBERT ⁽¹⁾ ha calcolato basandosi su osservazioni eseguite tra gli anni 1913-1928, e tenendo conto delle perturbazioni approssimate di Giove; il massimo scarto ($o - c =$ posizione osservata meno posizione calcolata) in ascensione retta risultò di $\pm 0^m.7$. Gli elementi ottenuti dal GEBERT, *osculatori al 1929 Aprile 22.0*, sono i seguenti:

$$\begin{array}{l}
 \text{Epoca ed osculazione: } 1929 \text{ Aprile } 22.0 \text{ T. U.} \\
 [1] \quad \left. \begin{array}{ll} M_0 = 125^\circ.322 & \omega = 272^\circ.626 \\ \varphi = 20^\circ.029 & \Omega = 131^\circ.994 \\ \mu = 682''.931 & i = 18^\circ.112 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Eclittica} \\ 1950.0 \end{array} \\
 a = 2.9998
 \end{array}$$

Con questi elementi, e senza tener conto delle perturbazioni, le osservazioni della tabella I sono così rappresentate:

TABELLA II.

| N. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\cos \delta \cdot \Delta \alpha$ | - 0°.09 | + 0°.10 | - 0°.70 | - 0°.32 | - 0°.21 | - 0°.58 | - 1°.35 |
| $\Delta \delta$ | + 0°.03 | - 0°.01 | - 0°.15 | + 0°.08 | - 0°.04 | - 0°.24 | + 0°.67 |

L'entità degli scarti ($o - c$) rendeva quindi necessario procedere in primo luogo al calcolo delle perturbazioni di Giove assumendo gli elementi [1] come osculatori iniziali, e quindi, eventualmente, procedere al calcolo di un'orbita migliorata del Pianeta; ottenuti i nuovi elementi, appariva infine opportuno spingere il calcolo delle perturbazioni fino all'epoca della nuova opposizione del 1940.

2. *Perturbazioni approssimate di Giove dal 1929 Aprile 22.0 al 1939 Marzo 27.0.* - Il problema numerico che suole porsi in casi del genere di quello trattato si può così brevemente enunciare: determinare un'orbita del Pianeta che, tenendo conto delle perturbazioni pla-

(1) Cfr. *Kleine Planeten*, Jahrgang 1929, Berlin, pag. 97.

netarie, rappresenti le osservazioni di 10-20 anni a meno di $0^{\circ}.03$ in α e in δ . In generale, sarà sufficiente allo scopo calcolare le perturbazioni del solo Giove, e queste in modo approssimato, a partire da una buona orbita iniziale, e migliorare quindi l'orbita stessa con buone osservazioni scelte una in ciascuna delle opposizioni che si hanno a disposizione nel periodo considerato. Il problema numerico così precisato sarà risolto per il Pianeta 747 Winchester nel periodo che va dal 1929 al 1939.

Per il calcolo delle perturbazioni ho adottato il metodo classico della variazione degli elementi ellittici, valendomi però di tabelle numeriche ausiliarie pubblicate dallo STRACKE ⁽¹⁾, assai utili in calcoli del genere. La dichiarata approssimazione da raggiungere nella rappresentazione delle osservazioni, impone che le perturbazioni degli elementi i , Ω , ω , M_0 , φ siano calcolate in modo da *assicurare* la cifra dei centesimi di grado, mentre per il modo medio μ occorre assicurare quella dei centesimi di secondo d'arco. Perciò il calcolo dei termini δi , $\text{sen } i \cdot \delta \Omega$, $\text{sen } \varphi \cdot \delta \pi$, δL_0 , $\delta \varphi$ da introdurre nelle tabelle di integrazione dovrebbe essere eseguito in unità di $0^{\circ}.001$, mentre per $w \delta \mu$ occorrerebbe giungere a $0^{\circ}.0001$, dovendosi anche eseguire una integrazione *doppia* per ottenere il ΔL_{μ} ⁽²⁾. Nella pratica del calcolo però, *ho trovato assai opportuno tenere un decimale di più*, perchè oltre a diminuire con ciò gli errori di arrotondamento, si ha una maggiore tranquillità nelle prove per differenza, indispensabili in tale genere di calcoli. Ecco perchè nella tabella IV di integrazione che sarà data, *le unità sono di $0^{\circ}.0001$ per tutti gli argomenti, meno che per $w \delta \mu$ (e relative somme a sinistra) per cui l'unità è di $0^{\circ}.00001$* . Durante il calcolo ho poi eseguito due correzioni degli elementi osculatori iniziali, e precisamente in prossimità dell'entrata e dell'uscita del Pianeta dalla così detta « zona di vicinanza a Giove ». Il Pianeta rimase in questa zona dal Febbraio del 1933 al Luglio del 1937,

(1) G. STRACKE, *Tafeln zur genährten speziellen Störungsrechnung*, Astronomisches Rechen-Institut, Berlin, 1930. Di queste tabelle ho utilizzato soltanto la 7^a (Koeffizienten), mentre per le posizioni di Giove (riferite all'equinozio del 1950.0) ho trovato più pratiche le tabelle pubblicate a cura del Nautical Almanac Office: *Planetary co-ordinates for the years 1800-1940*, London, 1933. Per tutti gli altri calcoli ho trovato più conveniente eseguirli direttamente con la macchina, senza valermi delle tabelle ausiliarie richiedenti interpolazioni, e così ho potuto anche tenere una approssimazione un po' maggiore dell'usuale.

(2) Ricordo che w è l'intervallo temporale in giorni, mentre è: $\Delta M = \Delta L_0 + \Delta L_{\mu} - \Delta \pi$ ed $\Delta \omega = \Delta \pi - \Delta \Omega$, gli altri simboli essendo ben noti.

e pertanto le perturbazioni furono calcolate per intervalli doppi ed interpolazione nel mezzo fino al principio del 1933, e per intervalli semplici dall'inizio del 1933 fino alla fine del calcolo. La seconda delle dette correzioni degli elementi osculatori si è dimostrata necessaria per conservare nel calcolo il dichiarato ordine di approssimazione. Ne è risultato però il lieve inconveniente che gli intervalli temporali w non si conservano gli stessi per tutta l'estensione della tabella di integrazione (¹); in questa si avrà perciò:

$$\begin{aligned} w &= 63^d,25675 && \text{dal } 12^\circ \text{ al } 20^\circ \text{ intervallo inclusi.} \\ w &= 64^d,48129 && \text{per il } 21^\circ \text{ intervallo.} \\ w &= 63^d,26741 && \text{dal } 22^\circ \text{ al } 40^\circ \text{ intervallo inclusi.} \\ w &= 71^d,92334 && \text{per il } 41^\circ \text{ intervallo.} \\ w &= 63^d,42308 && \text{dal } 42^\circ \text{ al } 61^\circ \text{ intervallo inclusi.} \end{aligned}$$

Nell'utilizzare le tabelle di integrazione bisogna dunque avere l'avvertenza, una volta calcolato l'ammontare delle perturbazioni con le note regole del calcolo numerico, di *aggiungere* alle quantità ottenute le correzioni a norma della seguente tabella:

TABELLA III.

| | Δi | $\text{sen } i \Delta \Omega$ | $\text{sen } \varphi \Delta \pi$ | ΔL_0 | $\Delta \varphi$ | $w \Delta \mu$ | ΔL_μ |
|--|----------------------|-------------------------------|----------------------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------------------|
| | 0 ^o .0001 | 0 ^o .0001 | 0 ^o .0001 | 0 ^o .0001 | 0 ^o .0001 | 0 ^o .00001 | 0 ^o .00001 |
| Per una data compresa ne- gli intervalli | 1-20 | — | — | — | — | — | — |
| | 22-40 | — | — | — | — | + 2 | - 7+2.36 Δ_1 |
| | 42-61 | + 17 | - 26 | + 23 | + 44 | + 52 | -292+2.36 Δ_1 +50 Δ_2 |

Δ_1 = numero degli intervalli *dopo* il 20°;
 Δ_2 = numero degli intervalli *dopo* il 40°.

Ed ecco in fine le tabelle di integrazione, che, con l'avvertenza dianzi dichiarata, danno l'ammontare delle perturbazioni Δi , $\text{sen } i \Delta \Omega$, $\text{sen } \varphi \Delta \pi$, ΔL_0 , $\Delta \varphi$, $w \Delta \mu$, e, con integrazione doppia, ΔL_μ , a partire dal 1929 Aprile 22.0.

(¹) L'intervallo *semplice* w corrisponde ad un incremento dell'anomalia media del Pianeta pari a 12°; cambia quindi col cambiare di μ . Vi sarà inoltre un « salto » nel raccordo delle tabelle.

TABELLA IV.

| Intervallo | Data (T. U.) | Δi 0 ^o .0001 Σ | $\text{sen } i \cdot \Delta i$ 0 ^o .0001 Σ | $\text{sen } \varphi \cdot \Delta \varphi$ 0 ^o .0001 Σ | ΔL_0 0 ^o .0001 Σ | $\Delta \psi$ 0 ^o .0001 Σ | ΔL_μ 0 ^o .00001 Σ | f |
|------------|-----------------|--|--|--|--|---|---|-----|
| 1 | 1929 Gen. 20.7 | + 6 | +10 | - 38 | + 34 | + 19 | - 106 | -15 |
| 2 | Mar. 24.9 | \pm 0 | -1 | + 2 | - 2 | - 1 | + 1 | 20 |
| 3 | Mag. 27.2 | - 5 | 13 | 36 | 43 | 26 | - 5 | 24 |
| 4 | Lug. 29.5 | 9 | 25 | 66 | 87 | 52 | 116 | 27 |
| 5 | Set. 30.7 | 11 | 37 | 92 | 133 | 82 | 323 | 30 |
| 6 | Dic. 3.0 | 12 | 49 | 114 | 181 | 115 | 618 | 33 |
| 7 | 1930 Feb. 4.2 | 12 | 60 | 132 | 230 | 150 | 995 | 35 |
| 8 | Apr. 8.5 | 11 | 70 | 146 | 280 | 186 | 1448 | 36 |
| 9 | Giù. 10.7 | 9 | 79 | 156 | 331 | 222 | 1971 | 36 |
| 10 | Ago. 10.0 | 6 | 87 | 162 | 382 | 257 | 586 | 35 |
| 11 | Ott. 15.3 | - 3 | 93 | 164 | 433 | 291 | 642 | 34 |
| 12 | Dic. 17.5 | F 0 | 97 | 163 | 483 | 323 | 3890 | 32 |
| | | | | | | | 731 | 40 |

Segue Tabella IV.

| Intervallo | Data (T. U.) | Δi 0°.0001 Σ | $\text{sen } i \cdot \Delta \Omega$ 0°.0001 Σ | $\text{sen } \varphi \cdot \Delta \pi$ 0°.0001 Σ | ΔL_0 0°.0001 Σ | $\Delta \varphi$ 0°.0001 Σ | ΔL_1 0°.00001 $\Sigma \Sigma$ | f |
|------------|-----------------|-----------------------------------|--|---|-------------------------------------|---|---|------|
| 13 | 1931 Feb. 13.8 | 3 | 100 | 160 | 532 | 353 | 4621 | 30 |
| 14 | Apr. 23.0 | 2 | 102 | 156 | 580 | 380 | 5382 | 19 |
| 15 | Giu. 25.3 | 2 | 103 | 151 | 627 | 404 | 6162 | - 6 |
| 16 | Ago. 27.5 | 2 | 104 | 147 | 671 | 426 | 6948 | + 10 |
| 17 | Ott. 29.8 | 1 | 104 | 145 | 710 | 446 | 7724 | 30 |
| 18 | 1932 Gen. 1.0 | 1 | 104 | 147 | 743 | 463 | 8470 | 56 |
| 19 | Mar. 4.3 | 1 | 104 | 152 | 769 | 459 | 9160 | 86 |
| 20 | Mag. 6.6 | 0 | 104 | 157 | 786 | 516 | 9764 | 114 |
| 21 | Lag. 8.8 | 0 | 105 | 162 | 793 | 545 | 10254 | 129 |
| 22 | Set. 11.3 | 0 | 106 | 165 | 788 | 570 | 10615 | 114 |
| 23 | Nov. 13.6 | +0 | 106 | 171 | 772 | 585 | 10862 | + 59 |

Segue Tabella IV.

| Intervallo | Data (T. U.) | Δi 0 ^e .0001 Σ f | sen $i \cdot \Delta \Omega$ 0 ^e .0001 Σ f | sen $\varphi \cdot \Delta \pi$ 0 ^e .0001 Σ f | ΔL_0 0 ^e .0001 Σ f | $\Delta \varphi$ 0 ^e .0001 Σ f | ΔL_{12} 0 ^e .00001 $\Sigma \Sigma$ Σ f |
|------------|-----------------|--|---|--|--|--|--|
| 24 | 1983 Gen. 15.8 | 11 - 1 | 106 + 0 | 188 17 | 748 24 | 587 - 2 | 11050 215 - 27 |
| 25 | Mar. 20.1 | + 8 3 | 105 1 | 225 37 | 723 25 | 578 + 9 | 11265 340 125 |
| 26 | Mag. 22.4 | - 1 9 | 105 + 0 | 291 66 | 706 17 | 564 14 | 11605 576 286 |
| 27 | Lug. 24.6 | 19 18 | 109 - 4 | 385 94 | 706 + 0 | 555 + 9 | 12181 901 325 |
| 28 | Set. 25.9 | 49 30 | 123 14 | 508 123 | 734 - 28 | 556 - 1 | 13082 1309 408 |
| 29 | Nov. 28.2 | 95 46 | 155 32 | 656 148 | 803 69 | 572 16 | 14391 1786 477 |
| 30 | 1984 Gen. 30.4 | 156 61 | 213 58 | 820 164 | 916 113 | 607 35 | 16177 2293 507 |
| 31 | Apr. 2.7 | 229 73 | 307 94 | 990 170 | 1073 157 | 659 52 | 18470 2799 506 |
| 32 | Giu. 5.0 | 309 80 | 443 136 | 1158 168 | 1274 201 | 727 68 | 21269 3284 485 |
| 33 | Ago. 7.3 | 386 77 | 622 179 | 1315 157 | 1507 233 | 802 75 | 24553 3710 426 |
| 34 | Ott. 9.5 | 451 65 | 844 222 | 1460 145 | 1770 263 | 879 77 | 28263 4074 364 |
| 35 | Dic. 11.8 | 495 44 | 1101 257 | 1591 131 | 2050 280 | 954 75 | 32337 4361 287 |

Segue *Tabella IV.*

| Intervallo | Data (T. U.) | Δz 0 ^o .0001 Σ | sen $i \cdot \Delta \Omega$ 0 ^o .0001 Σ | sen $\varphi \cdot \Delta \pi$ 0 ^o .0001 Σ | ΔL_0 0 ^o .0001 Σ | $\Delta \varphi$ 0 ^o .0001 Σ | ΔL_0^{μ} 0 ^o .00001 Σ |
|------------|-----------------|--|---|--|--|--|---|
| 36 | 1985 Feb. 13.1 | 513 - 18 | 1383 282 | 1712 121 | 2347 297 | 1019 65 | 36698 4566 205 |
| 37 | Apr. 17.3 | 499 + 14 | 1677 294 | 1827 115 | 2655 308 | 1078 59 | 41264 4696 130 |
| 38 | Giu. 19.6 | 452 47 | 1970 293 | 1942 115 | 2976 321 | 1121 43 | 45960 4728 - 32 |
| 39 | Ago. 21.9 | 375 77 | 2253 283 | 2064 122 | 3307 331 | 1150 29 | 50688 4682 + 66 |
| 40 | Ott. 24.1 | 273 102 | 2508 255 | 2199 135 | 3642 335 | 1166 16 | 55350 4485 177 |
| 41 | Dic. 26.4 | 153 120 | 2727 219 | 2353 154 | 3975 333 | 1170 - 4 | 59395 4187 298 |
| 42 | 1986 Mar. 8.3 | - 24 129 | 2895 168 | 2533 180 | 4296 321 | 1162 + 8 | 64022 3746 441 |
| 43 | Mag. 10.7 | + 95 119 | 3013 118 | 2730 197 | 4576 280 | 1155 7 | 67768 3197 549 |
| 44 | Lug. 13.2 | 193 98 | 3086 73 | 2981 201 | 4799 223 | 1154 + 1 | 70965 2583 614 |
| 45 | Set. 14.6 | 264 71 | 3123 37 | 3122 191 | 4954 155 | 1165 - 11 | 73548 1957 626 |
| 46 | Nov. 17.0 | 309 45 | 3137 14 | 3290 168 | 5042 88 | 1189 24 | 75505 1372 585 |

Segue Tabella IV.

| Intervallo | Data (T. U.) | Δi 0 ^o .0001 Σ | Δi 0 ^o .0001 f | sen $i \cdot \Delta \Omega$ 0 ^o .0001 Σ | sen $i \cdot \Delta \Omega$ 0 ^o .0001 f | sen $\varphi \cdot \Delta \pi$ 0 ^o .0001 Σ | sen $\varphi \cdot \Delta \pi$ 0 ^o .0001 f | ΔL_0 0 ^o .0001 Σ | ΔL_0 0 ^o .0001 f | $\Delta \psi$ 0 ^o .0001 Σ | $\Delta \psi$ 0 ^o .0001 f | ΔL_μ 0 ^o .00001 Σ | ΔL_μ 0 ^o .00001 f |
|------------|-----------------|--|---|---|--|--|---|--|---|---|--|---|--|
| 47 | 1987 Gen. 19.4 | 334 | 25 | 3189 | -2 | 3423 | 133 | 5077 | -35 | 1221 | 32 | 76377 | 494 |
| 48 | Mar. 23.8 | 346 | 12 | 3137 | +2 | 3518 | 95 | 5075 | +2 | 1255 | 34 | 77755 | 373 |
| 49 | Mag. 26.3 | 350 | 4 | 3135 | 2 | 3577 | 59 | 5049 | 26 | 1279 | 24 | 78260 | 229 |
| 50 | Lug. 28.7 | 351 | 1 | 3134 | +1 | 3607 | 30 | 5021 | 28 | 1290 | -11 | 78336 | +101 |
| 51 | Set. 30.1 | 351 | 0 | 3134 | -0 | 3619 | 12 | 4998 | 23 | 1230 | +10 | 78711 | -30 |
| 52 | Dic. 2.5 | 351 | 0 | 3134 | 0 | 3627 | 8 | 4986 | +12 | 1255 | 25 | 78916 | 114 |
| 53 | 1988 Feb. 4.0 | 351 | +0 | 3134 | -0 | 3638 | 11 | 4986 | ± 0 | 1224 | 31 | 79235 | 146 |
| 54 | Apr. 7.4 | 351 | -0 | 3134 | +0 | 3652 | 14 | 5000 | -14 | 1192 | 32 | 79700 | 150 |
| 55 | Giu. 9.8 | 350 | 1 | 3134 | 0 | 3666 | 14 | 5026 | 26 | 1163 | 29 | 80315 | 130 |
| 56 | Ago. 12.2 | 348 | 2 | 3134 | ± 0 | 3679 | 13 | 5062 | 36 | 1137 | 26 | 81060 | 103 |
| 57 | Ott. 14.7 | 345 | 3 | 3135 | -1 | 3690 | 11 | 5104 | 42 | 1114 | 23 | 81908 | 75 |
| 58 | Dic. 17.1 | 341 | 4 | 3137 | 2 | 3699 | 9 | 5153 | 49 | 1091 | 23 | 82331 | 55 |

Segue Tabella IV.

| Intervallo | Data (T. U.) | Δi 0 ^e .0001 Σ | sen $i \cdot \Delta \Omega$ 0 ^e .0001 Σ | sen $\varphi \cdot \Delta \pi$ 0 ^e .0001 Σ | ΔL_0 0 ^e .0001 Σ | $\Delta \varphi$ 0 ^e .0001 Σ | ΔL_μ 0 ^e .00001 $\Sigma \Sigma$ | f |
|------------|-----------------|--|---|--|--|--|--|-----|
| 59 | 1989 Feb. 18.5 | 5 336 | 3 3140 | 9 3708 | 54 5207 | 24 1067 | 83809 1015 | 37 |
| 60 | Apr. 22.9 | 5 331 | 5 3145 | 9 3717 | 58 5265 | 24 1043 | 84824 1037 | 22 |
| 61 | Giu. 25.4 | 5 326 | 7 3152 | 10 3727 | 61 5326 | 25 1018 | 85861 1047 | -10 |
| | Ago. 27.8 | -5 +321 | -8 -3160 | +12 +3739 | -64 -5390 | +25 -993 | -86908 -1046 | +1 |

3. *Confronto dell'orbita perturbata con le osservazioni.* - L'ammontare delle perturbazioni fino alle varie epoche delle osservazioni della tabella I, e gli elementi ellittici *osculatori alle stesse epoche* sono dati dalla tabella V (ove il decimale di più è stato soppresso).

TABELLA V.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| ΔM | +0°.001 | -0°.170 | -0°.238 | -0°.531 | -1°.206 | -1°.965 | -2°.458 |
| $\Delta \varphi$ | 0°.000 | -0°.040 | -0°.059 | -0°.062 | -0°.106 | -0°.116 | -0°.107 |
| $\Delta \mu$ | +0".004 | -0".446 | -0".112 | -1".385 | -2".646 | -1".786 | -0".548 |
| $\Delta \omega$ | -0°.001 | +0°.078 | +0°.085 | +0°.332 | +1°.036 | +1°.785 | +2°.115 |
| $\Delta \Omega$ | 0°.000 | -0°.033 | -0°.034 | -0°.078 | -0°.512 | -0°.976 | -1°.018 |
| Δi | 0°.000 | +0°.001 | +0°.001 | -0°.018 | -0°.050 | +0°.011 | +0°.035 |
| $\Delta \log_{10} a$ | 0.00000 | +0.00019 | +0.00005 | +0.00059 | +0.00113 | +0.00076 | +0.00023 |
| M_0 | 124°.564 | 279°.760 | 20°.804 | 104°.929 | 181°.273 | 257°.913 | 90°.727 |
| φ | 20°.029 | 19°.989 | 19°.970 | 19°.967 | 19°.923 | 19°.913 | 19°.922 |
| μ | 682".935 | 682".485 | 682".819 | 681".546 | 680".285 | 681".145 | 682".383 |
| ω | 272°.626 | 272°.704 | 272°.711 | 272°.958 | 273°.665 | 274°.411 | 274°.741 |
| Ω | 131°.994 | 131°.961 | 131°.960 | 131°.916 | 131°.482 | 131°.018 | 130°.976 |
| i | 18°.112 | 18°.113 | 18°.113 | 18°.094 | 18°.062 | 18°.123 | 18°.147 |
| $\log_{10} a$ | 0.47709 | 0.47728 | 0.47714 | 0.47768 | 0.47822 | 0.47785 | 0.47732 |

Tutti gli elementi sono eclitticali, riferiti all'equinozio 1950.0.

Con questi *elementi perturbati* le osservazioni della tabella I risultano così rappresentate:

TABELLA VI.

| N. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\cos \delta \cdot \Delta z$ | -0°.09 | +0°.14 | +0°.14 | -0°.09 | -0°.08 | +0°.01 | -0°.18 |
| $\Delta \delta$ | +0°.03 | +0°.00 | +0°.04 | +0°.01 | +0°.01 | +0°.00 | +0°.03 |

L'andamento di questi scarti ($o - c$), mostra chiaramente che le perturbazioni sono state calcolate con approssimazione più che sufficiente, ed anche che l'orbita osculatrice di partenza è una buona orbita; non però sufficiente per rappresentare, nei limiti prestabiliti, le osservazioni *anche* per il periodo 1929-1939. Un miglioramento dell'orbita si rendeva perciò necessario.

4. *Miglioramento dell'orbita; nuovi elementi orbitali.* - Per il miglioramento dell'orbita ho seguito il *metodo di Tietjen*, col quale vengono corretti in un primo momento, ed indipendentemente, i quattro elementi orbitali $\mu, \varphi, \omega, M_0$, e in un secondo tempo Ω ed i ⁽¹⁾. È stato sufficiente seguire il procedimento « approssimato », mentre per Ω ed i non è stato necessario apportare correzione alcuna. Dò qui le sette *equazioni di condizione* ottenute, nelle quattro correzioni incognite $d\mu, d\varphi, d\omega$ e dM_0 , avvertendo che nei coefficienti e termini noti ho conservato un decimale di arrotondamento di più di quelli che l'approssimazione del calcolo richiedeva.

$$\begin{array}{r}
 [2] \\
 - 0.001 d\mu \quad + 1.206 d\varphi \quad + 1.319 d\omega \quad + 0.789 dM_0 \quad = - 0.092 \\
 + 0.278 \text{ »} \quad - 2.497 \text{ »} \quad + 1.457 \text{ »} \quad + 1.226 \text{ »} \quad = + 0.132 \\
 + 1.243 \text{ »} \quad + 2.878 \text{ »} \quad + 1.764 \text{ »} \quad + 3.319 \text{ »} \quad = + 0.147 \\
 + 0.461 \text{ »} \quad + 1.731 \text{ »} \quad + 1.370 \text{ »} \quad + 0.926 \text{ »} \quad = - 0.088 \\
 + 0.416 \text{ »} \quad - 0.027 \text{ »} \quad + 1.301 \text{ »} \quad + 0.680 \text{ »} \quad = - 0.075 \\
 + 0.690 \text{ »} \quad - 1.813 \text{ »} \quad + 1.376 \text{ »} \quad + 0.952 \text{ »} \quad = + 0.011 \\
 + 1.060 \text{ »} \quad + 2.109 \text{ »} \quad + 1.383 \text{ »} \quad + 1.052 \text{ »} \quad = - 0.179
 \end{array}$$

(1) Cfr. ad esempio G. STRÄCKE, *Bahnbestimmung* ecc., pag. 304 ss.

Credo inutile riportare le *equazioni normali* che si ottengono da questo sistema, e mi limito a dare le trovate correzioni per gli elementi iniziali [1]:

$$\begin{aligned}
 [3] \quad d\mu &= -0''.102 \\
 d\varphi &= -0^\circ.046 \\
 d\omega &= -0^\circ.122 \\
 dM_0 &= +0^\circ.184
 \end{aligned}$$

ed infine i *nuovi elementi ellittici perturbati* osculatori alle epoche delle osservazioni della tabella I:

TABELLA VII.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| to | 1929 Apr. 18.0 | 1931 Lug. 16.0 | 1932 Dic. 30.0 | 1934 Mar. 20.0 | 1935 Apr. 30.0 | 1936 Giu. 11.0 | 1939 Mar. 27.0 |
| Mo | 124°.748 | 279°.921 | 20°.950 | 105°.062 | 181°.395 | 258°.023 | 90°.808 |
| φ | 19°.963 | 19°.943 | 19°.924 | 19°.921 | 19°.887 | 19°.867 | 19°.876 |
| μ | 682'.833 | 682''.383 | 682'.717 | 681''.444 | 680''.183 | 681''.043 | 682''.281 |
| ω | 272°.503 | 272°.582 | 272°.589 | 272°.836 | 273°.543 | 274°.289 | 274°.619 |
| Ω | 131°.991 | 131°.961 | 631°.960 | 131°.916 | 181°.432 | 131°.018 | 130°.976 |
| i | 18°.112 | 18°.113 | 18°.113 | 18°.094 | 18°.062 | 18°.123 | 18°.147 |

Tutti gli elementi sono eclitticali, riferiti all'equinozio 1950.0. Va da sè che, per la piccola entità delle correzioni [3], le perturbazioni già calcolate possono ritenersi valide, nella approssimazione dichiarata, anche per i nuovi elementi.

5. *Confronto dell'orbita migliorata e perturbata con le osservazioni.* - Per un confronto dei nuovi elementi ellittici perturbati con le osservazioni, un calcolo a 4 decimali è sufficiente; dò però, con 5 decimali, le costanti per il calcolo delle effemeridi nelle varie opposizioni considerate (equinozio 1950.0).

TABELLA VIII.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| e | 0.341 74 | 0.341 09 | 0.340 77 | 0.340 72 | 0.340 17 | 0.339 84 | 0.339 99 |
| $\cos \varphi$ | 0.939 79 | 0.940 03 | 0.940 15 | 0.940 16 | 0.940 37 | 0.940 48 | 0.940 43 |
| a | 3. 00 00 | 3. 00 13 | 3. 00 03 | 3. 00 41 | 3. 00 78 | 3. 00 53 | 3. 00 16 |
| P'_x | + 0.676 49 | + 0.675 91 | + 0.675 84 | + 0.673 41 | + 0.669 95 | + 0.665 98 | + 0.662 29 |
| P'_y | + 0.736 18 | + 0.736 73 | + 0.736 80 | + 0.733 06 | + 0.742 23 | + 0.745 82 | + 0.749 10 |
| P'_z | - 0.019 25 | - 0.019 01 | - 0.018 97 | - 0.017 59 | - 0.015 40 | - 0.014 65 | - 0.013 50 |
| Q'_x | - 0.699 26 | - 0.699 78 | - 0.699 86 | - 0.702 22 | - 0.705 13 | - 0.708 08 | - 0.711 86 |
| Q'_y | + 0.650 31 | + 0.649 67 | + 0.649 60 | + 0.646 90 | + 0.642 66 | + 0.638 21 | + 0.634 37 |
| Q'_z | + 0.296 83 | + 0.297 02 | + 0.297 03 | + 0.297 30 | + 0.299 60 | + 0.302 14 | + 0.302 46 |

Ed ecco infine la rappresentazione delle osservazioni:

TABELLA IX.

| N. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $\cos \delta \cdot \Delta \alpha$ | - 0°.02 | + 0°.02 | - 0°.01 | + 0°.03 | - 0°.01 | - 0°.01 | - 0°.00 |
| $\Delta \delta$ | + 0°.01 | + 0°.02 | - 0°.00 | - 0°.02 | - 0°.02 | + 0°.00 | - 0°.00 |

Nessuno degli scarti ($o - c$), supera il limite di $0°.03$ prestabilito in linea di massima; l'orbita perturbata della tabella VII risolve perfettamente il problema numerico che mi sono proposto all'inizio del paragrafo 2 ⁽¹⁾.

6. *Perturbazioni approssimate di Giove dal 1939 Marzo 27.0 al principio del Novembre 1940.* - L'opportunità di avere un'orbita che fosse osculatrice per l'epoca della prossima opposizione del Pianeta, mi ha indotto a proseguire il calcolo delle perturbazioni approssimate di Giove fino a quasi tutto l'anno 1940. I criteri seguiti per questa parte del calcolo sono gli stessi di quelli dichiarati nel paragrafo 2; si intende che come elementi osculatori iniziali sono stati assunti quelli migliorati osculatori per il 1939 Marzo 27.0, dati nell'ultima colonna della tabella VII.

Ecco ora la tabella di integrazione (tabella X) per le nuove perturbazioni, l'intervallo w essendo:

$$w = 63^d,31696$$

(1) Il prof. G. STRACKE, al quale ha comunicato i risultati di questa ricerca, ha ben voluto confermarmi la buona riuscita del mio lavoro.

TABELLA X.

| Intervallo | Data (T. U.) | Δz 0°.0001 Σ | $\text{sen } z \cdot \Delta z$ 0°.0001 Σ | $\text{sen } \delta \cdot \Delta z$ 0°.0001 Σ | $\text{sen } \varphi \cdot \Delta \pi$ 0°.0001 Σ | ΔL_0 0°.0001 Σ | $\Delta \varphi$ 0°.0001 Σ | ΔL_4 0°.00001 Σ | f | |
|------------|-----------------|-----------------------------------|---|--|---|-------------------------------------|---|--------------------------------------|------|------|
| 1 | 1988 Dic. 17.8 | + 4 | + 3 | - 2 | - 9 | + 59 | - 26 | - 39 | + 28 | - 54 |
| 2 | 1989 Feb. 19.1 | ± 0 | ± 0 | 3 | 8 | + 4 | - 2 | 1 | 24 | 37 |
| 3 | Apr. 23.4 | - 5 | - 5 | 5 | 9 | - 54 | + 22 | 0 | 24 | 21 |
| 4 | Giù. 25.7 | 10 | 12 | 7 | 10 | 115 | 47 | 20 | 25 | - 9 |
| 5 | Ago. 27.0 | 15 | 20 | 8 | 12 | 178 | 72 | 49 | 25 | + 1 |
| 6 | Ott. 30.4 | 19 | 30 | 10 | 14 | 242 | 97 | 77 | 25 | 11 |
| 7 | 1940 Gen. 1.7 | 22 | 42 | 12 | 17 | 306 | 121 | 94 | 24 | 19 |
| 8 | Mar. 5.0 | 24 | 55 | 13 | 19 | 371 | 143 | 92 | 22 | 26 |
| 9 | Mag. 7.3 | 24 | 68 | 13 | 22 | 435 | 163 | 64 | 20 | 33 |
| 10 | Lug. 9.6 | 23 | 82 | 14 | 24 | 499 | 181 | - 3 | 18 | 40 |
| 11 | Set. 10.9 | 20 | 96 | 14 | 25 | 561 | 196 | + 98 | 15 | 46 |
| | Nov. 13.2 | - 16 | - 109 | - 13 | + 27 | - 622 | + 208 | + 245 | + 12 | + 53 |
| | | | | | + 178 | | | + 200 | | |

L'ammontare delle perturbazioni a partire dal 1939 Marzo 27.0 fino al 1940 Giugno 8.0 (data questa scelta per comodità cadendo quasi nel mezzo di un intervallo, e non troppo posteriore all'epoca dell'opposizione) è il seguente:

$$\begin{aligned}
 [4] \quad \Delta M &= -0^{\circ}.074 & \Delta \omega &= +0^{\circ}.052 \\
 \Delta \varphi &= +0^{\circ}.016 & \Delta \Omega &= -0^{\circ}.022 \\
 \Delta \mu'' &= +0''.035 & \Delta i &= -0.002 \\
 \Delta \log_{10} a &= -0.00001
 \end{aligned}$$

Aggiungendo queste perturbazioni agli elementi ellittici osculatori per il 1939 Marzo 27.0, ho ottenuto gli elementi che seguono, utili per la ricerca del Pianeta nel 1940 e negli anni immediatamente successivi:

Epoca ed osculazione: 1940 Giugno 8.0

$$\begin{aligned}
 [5] \quad \left. \begin{aligned}
 M &= 173^{\circ}.935 & \omega &= 274^{\circ}.671 \\
 \varphi &= 19^{\circ}.892 & \Omega &= 130^{\circ}.954 \\
 \mu &= 682'.316 & i &= 18^{\circ}.145
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Eclittica} \\ 1950.0 \end{array} \\
 \log a = 0.47734; \quad a = 3.0015
 \end{aligned}$$

ENERGIA NEI FENOMENI ELASTICI EREDITARIII (*)

VITO VOLTERRA

Accademico Pontificio

SUMMARY. — Auctor extendit ad elastica corpora quasdam proportiones quae attinent ad systemata finitum numerum graduum libertatis habentia cum hereditariorum phaenomenorum ratio habetur. Ita generalis conclusione deducitur labor quem externum robur explet, partim in cyneticam vim, partim in elasticam vim mutari, partim vero disperdi. Potest etiam supputari quantum roboris disperdatur propter hereditaria phaenomona.

I. — Una delle principali applicazioni della teoria dei funzionali è stata da me rivolta allo studio dei fenomeni naturali che io chiamai *ereditarii*, cioè di quelli nei quali un sistema risente attualmente l'azione di cause che si sono esercitate nel passato. La denominazione di ereditario ha incontrato però qualche difficoltà da parte di alcuni naturalisti per i quali il concetto di ereditario implica un passaggio da uno ad altro soggetto.

Potrebbe sembrare quindi più appropriato di sostituire la denominazione di *storico* a quella di *ereditario*, in quanto si può ritenere storico ogni avvenimento del passato. Però in questa nota ho continuato a servirmi della parola fenomeni ereditarii in quanto essa si ricollega direttamente ad altre memorie nelle quali avevo già fatto uso del vocabolo ereditario. Mutandolo poteva nascere qualche confusione e lo ho pertanto conservato.

I sistemi materiali in cui si verificano fenomeni ereditarii possono dipendere da un numero finito di parametri o possono essere dei sistemi continui. Ai primi ho consacrato vari scritti ed anche ai secondi

(*) Nota presentata il 19 maggio 1940.

ho rivolto la mia attenzione quando ho studiato la ereditarietà nei corpi elastici.

Però è solo in lavori più recenti che ho esaminato la questione energetica nei casi ereditarii. In una memoria pubblicata nel « Journal des mathématiques » ho ampiamente trattato la questione energetica nei sistemi ereditarii aventi un grado finito di libertà. Nella presente nota studio un caso ereditario di sistemi continui: quello dei solidi elastici dal punto di vista energetico.

In ambedue i casi si giunge ad analoghe conclusioni.

Ora siccome il procedimento usato per i corpi elastici si basa sopra postulati e impiega metodi ed artifici che sono una estensione di quelli adoperati per i sistemi aventi un numero finito di gradi di libertà, per maggiore chiarezza comincerò dal ripetere brevemente la teoria energetica per il caso di un sistema avente un solo grado di libertà e solo in ultimo tratterò la energetica per i corpi elastici nel caso ereditario.

Chiamiamo q il parametro da cui dipende un certo fenomeno e denotiamo con t il tempo.

Se noi scriviamo

$$F(q(t))$$

avremo una quantità che dipende dal valore del parametro nell'istante t (istante attuale). Ora

$$q(t - \tau)$$

è il valore del parametro stesso in un istante $t - \tau$ cioè in un istante che ha preceduto di τ l'istante attuale, quindi

$$[1] \quad \int_0^{T_0} \Phi(\tau) q(t - \tau) d\tau$$

è una quantità che dipende da tutti i valori del parametro q in un periodo di tempo di ampiezza T_0 che precede l'istante attuale. Essa è una particolare espressione propria delle quantità che risentono la eredità del parametro q durante l'intervallo di tempo

$$(t - T_0, t).$$

Analogamente

$$aq(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau$$

ove a denota una costante, dipenderà dal valore attuale di $q(t)$ e dall'eredità lasciata da questo parametro durante l'intervallo di tempo $(t - T_0, t)$.

Esso sarà un'espressione lineare e perciò la corrispondente eredità si dirà lineare.

Riprendiamo l'espressione [1]; allorchè essa denota un'azione (forza) questa sarà acceleratrice se $\Phi(\tau)$ sarà positivo, mentre se $\Phi(\tau)$ sarà negativo l'azione sarà ritardatrice. Inoltre ogni elemento dell'integrale

$$\Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau$$

può assumersi come una componente dell'azione totale e precisamente può ritenersi esser quella componente che dipende dall'eredità del parametro q nell'intervallo di tempo $(t - \tau - d\tau, t - \tau)$. Vedremo tra poco come può modificarsi questo concetto dell'azione ereditaria elementare.

Nelle formule precedenti noi abbiamo tenuto conto dell'eredità limitatamente all'intervallo di tempo T_0 anteriore all'istante attuale; noi abbiamo cioè supposto che l'eredità vada dissipandosi col tempo, tanto da poter ammettere che sia

$$\Phi(t) = 0 \quad \text{per } t \geq T_0$$

In tal caso T_0 si chiama la *durata dell'eredità*.

II. - In questo paragrafo, come ho annunciato precedentemente, riprenderò brevemente la teoria energetica nel caso di un sistema avente un sol grado di libertà.

Immaginiamo un sistema meccanico avente un sol grado di libertà, la cui configurazione sia quindi individuata da un solo parametro q .

I piccoli movimenti spontanei nel noto schema vibratorio di un tale sistema dipenderanno dall'equazione differenziale ben nota

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) = 0$$

Se noi supponiamo che la forza viva o energia cinetica del sistema sia

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dq(t)}{dt} \right)^2 = T$$

e il potenziale delle forze interne sia

$$P = -E = -\frac{1}{2} a^2 q^2,$$

L'equazione delle forze vive avrà la forma

$$d(T + E) = 0$$

ossia

$$T + E = \text{cost}.$$

$E = \frac{1}{2} a^2 q^2$ esprimerà l'energia potenziale interna del sistema.

Se il moto anzichè libero sarà forzato, l'equazione fondamentale si scriverà

$$[2] \quad \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) = Q(t)$$

denotando $Q(t)$ la forza esterna ed in questo caso avremo

$$d(T + E) = Q dt$$

Questa equazione dice che il lavoro delle forze esterne va impiegato ad aumentare l'energia totale del sistema, cioè la somma della forza viva (energia cinetica) e dell'energia interna (energia potenziale). Supponiamo ora che il sistema sia soggetto ad azioni interne ereditarie, e per considerare il caso più semplice supponiamo ch'esse siano azioni ereditarie lineari. Dovremo allora aggiungere l'azione ereditaria al termine a^2q che figura nel primo membro. Come abbiamo detto precedentemente questa azione ereditaria potrà scriversi

$$\int_0^{T_0} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau$$

supponendo l'eredità di natura invariabile col tempo e supponendo che T_0 sia la sua durata.

Dovremo ora ammettere quest'azione ereditaria acceleratrice o ritardatrice? È facile persuadersi che essa opera in senso opposto dell'azione interna $a^2q(t)$ in modo che, come equazione generale da sostituirsi alla [2], dovremo assumere

$$[3] \quad \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau) q(t-\tau) d\tau = Q(t)$$

ove $\Phi(t)$ è una quantità essenzialmente negativa. Si ponga ora

$$a^2 + \int_0^{T_0} \Phi(\tau) d\tau = m$$

e l'equazione precedente diverrà

$$[3'] \quad \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + m q(t) - \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t-\tau)] d\tau = Q(t)$$

Un semplice ragionamento ci porta a concludere che m è positivo altrimenti q non cambierebbe o crescerebbe.

Consideriamo il funzionale

$$E_p = \frac{1}{2} m q^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t-\tau)]^2 d\tau ;$$

il suo differenziale potrà scriversi

$$mq(t) \delta q(t) - \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)] d\tau \delta q(t) \\ + \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)] \delta q(t - \tau) d\tau$$

Il primo termine è il prodotto della forza totale interna attuale cambiata di segno per il differenziale $\delta q(t)$ dello spostamento attuale. Potremo dunque chiamare $-E_p$ il *potenziale dell'insieme di tutte le azioni interne*.

E_p è un funzionale il quale dipende dallo stato attuale del sistema e da tutti gli stati che ha attraversato il sistema nell'intervallo di tempo T_0 che ha preceduto l'istante attuale. Ora dal punto di vista ereditario il sistema si trova nelle stesse condizioni in due istanti diversi quando, non solo i parametri che definiscono lo stato del sistema hanno gli stessi valori nei due istanti, ma sono rispettivamente uguali tra loro anche i valori dei parametri stessi nei due intervalli di tempo d'ampiezza T_0 che precedono i due detti istanti.

E_p è dunque un funzionale che riprende il valore iniziale allorchè il sistema ritorna, dal punto di vista ereditario, nelle stesse condizioni iniziali. Nella equazione [3] la forza interna attuale è scritta sotto forma

$$-mq(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)] d\tau$$

ora quest'espressione può interpretarsi dicendo che il contributo di forza interna attuale proveniente dal tempuscolo $(\tau, \tau + d\tau)$ è dato da $\Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)] d\tau$ ossia è proporzionale alla differenza tra il valore attuale del parametro q ed il suo valore nell'istante $t - \tau$. Ciò modifica il concetto di azione elementare ereditaria che avevamo precedentemente esposto. Fu appunto questa modificazione del concetto primitivo di contributo elementare ereditario, al quale abbiamo già alluso precedentemente, che diede luogo alle più feconde conseguenze.

Noi abbiamo detto che $\Phi(\tau)$ deve assumersi negativo, ma vi è da ricordare un'altra ipotesi sopra questa quantità. Siccome l'azione ere-

ditaria tende ad estinguersi col tempo, così il valore assoluto di $\Phi(\tau)$ deve andare continuamente decrescendo col crescere di τ quindi potremo scrivere

$$\Phi(\tau) < 0, \quad (0 \leq \tau < T_0), \quad \Phi(T_0) = 0 : \Phi'(\tau) > 0, \quad (0 < \tau < \tau_0)$$

Riprendiamo l'equazione [3']. Se noi vogliamo ottenere il lavoro della forza esterna Q durante il tempuscolo dt dovremo calcolare

$$Q(t) q'(t) dt$$

e questo si esprimerà sotto la forma

$$q''(t) q'(t) dt + m q(t) q'(t) dt - q'(t) \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)] d\tau$$

I primi due termini, come risulta ovviamente dall'analisi che conduce al principio delle forze vive, sono due differenziali esatti e cioè insieme formano

$$d \frac{1}{2} [q'^2(t) + m q^2(t)]$$

Il terzo termine non è un differenziale esatto ma differisce da

$$d \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau \right\}$$

per la quantità

$$dt \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)] \frac{dq(t - \tau)}{dt} d\tau$$

Ora quest'espressione può scriversi

$$dt \cdot \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi(\tau) \frac{d[q(t) - q(t - \tau)]^2}{d\tau} d\tau$$

e, con un'integrazione per parti, osservando che,

$$\Phi(T_0) = 0, \quad [q(t) - q(t - \tau)]_{\tau=0} = 0$$

si trasforma in

$$- dt \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi'(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau$$

onde otterremo finalmente

$$d \left\{ \frac{1}{2} q'^2(t) + \frac{1}{2} m q^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau + \right. \\ \left. + \frac{dt}{2} \int_0^{T_0} \Phi'(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau \right\} = Q(t) dq(t)$$

E siccome (vedi [1])

$$\frac{1}{2} q'^2(t) = T, \quad \frac{1}{2} m q^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau = E_p$$

e possiamo porre

$$E_s = \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi'(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau,$$

avremo

$$d(T + E_p) + E_s dt = Q(t) dq(t)$$

Ora E_s è una quantità positiva, dunque il lavoro delle forze esterne supera sempre l'incremento della quantità

$$T + E_p.$$

Se noi scriviamo $T + E_p = E_m$ ed integriamo tra due tempi t_0 e t_1 , dall'equazione precedente risulterà

$$E_m - E_m^0 + \int_{t_0}^{t_1} E_s dt = L$$

ove E_m e E_m^0 sono i valori di E_m ai tempi t_1 e t_0 , e il lavoro delle forze esterne è L .

È questa la equazione fondamentale energetica che volevamo stabilire.

Chiamiamo per definizione E_p l'energia potenziale interna ed E_m l'energia meccanica. Si avrà allora il principio energetico.

Il lavoro delle forze esterne oltrepassa sempre la variazione dell'energia meccanica di una quantità positiva. Se L è positivo questa legge può enunciarsi:

Il lavoro delle forze esterne non si trasforma completamente in energia meccanica ma resta sempre una parte residua positiva del lavoro stesso che non si trasforma in energia meccanica. Se mancano forze esterne (e quindi $L=0$) l'energia meccanica diminuisce costantemente, e, se il lavoro delle forze esterne è negativo, l'energia meccanica si trasforma solo in parte in lavoro esterno.

III. - Passiamo adesso al caso della elasticità e annunziamo subito che alle ipotesi precedenti $\Phi(\tau) < 0$, $\Phi'(\tau) > 0$ (vedi paragrafo 2) noi sostitueremo le ipotesi che la forma

$$\sum_{1,r}^6 \sum_{1,s}^6 \varphi_{rs} \xi_r \xi_s$$

sia negativa e la forma

$$\sum_{1,r}^6 \sum_{1,s}^6 \varphi'_{rs} \xi_r \xi_s$$

sia positiva.

Chiamiamo u_1, u_2, u_3 le componenti degli spostamenti dei punti d'un corpo elastico secondo gli assi x_1, x_2, x_3 e chiamiamo

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \gamma_2 = \gamma_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \gamma_3 = \gamma_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\ \gamma_4 = \gamma_{23} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, & \gamma_5 = \gamma_{31} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, & \gamma_6 = \gamma_{12} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{aligned}$$

le caratteristiche delle deformazioni (strain), mentre rappresentiamo colla forma

$$F = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^6 \sum_{s=1}^6 a_{rs} \gamma_r \gamma_s$$

il potenziale elastico quando manchino forze ereditarie.

Se queste invece sussistono assumeremo come potenziale elastico al tempo t

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^6 \sum_{s=1}^6 a_{rs} \gamma_r(t) \gamma_s(t) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \sum_{r=1}^6 \sum_{s=1}^6 \varphi_{rs}(\tau) [\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau)] [\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau)] d\tau \\ &= F + \Psi \end{aligned}$$

ove T_0 è la durata della eredità e la forma

$$\sum_{r=1}^6 \sum_{s=1}^6 \varphi_{rs} \xi_r \xi_s$$

è una forma definita negativa che si annulla per $\tau = T_0$

Denotando con

$$t_1 = t_{11}, \quad t_2 = t_{22}, \quad t_3 = t_{33}, \quad t_4 = t_{23} = t_{32}, \quad t_5 = t_{31} = t_{13}, \quad t_6 = t_{12} = t_{21}$$

le caratteristiche delle tensioni avremo nel caso ereditario

$$t_i(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_i(t)}$$

e le equazioni delle vibrazioni elastiche saranno

$$[4] \quad \rho \left(\frac{d^2 u_i}{dt^2} - \chi_i \right) + \frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} = 0$$

$$\chi_i^{(\sigma)} = t_{i1} \cos n x_1 + t_{i2} \cos n x_2 + t_{i3} \cos n x_3$$

ove le χ_i sono le componenti delle forze di massa ρ la densità del corpo $\chi_i^{(\sigma)}$ le componenti delle tensioni superficiali n la normale esterna al contorno, σ dello spazio S occupato dal corpo elastico.

Dalle [4] si ricava

$$[5] \quad \int_S \sum_1^3 \rho \left(\frac{d^2 u_i}{dt^2} \frac{du_i}{dt} - \chi_i \frac{du_i}{dt} \right) dS - \int_{\sigma} \sum_1^3 \chi_i^{(\sigma)} \frac{du_i}{dt} d\sigma \\ = \int_S \sum_1^6 t_i \frac{d\gamma_i}{dt} dS$$

Ora poniamo

$$\lambda = \frac{1}{2} \sum_1^6 \sum_1^6 \varphi_{rs} (\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau)) (\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau))$$

con che

$$\Psi = \int_0^{T_0} \lambda d\tau$$

si avrà

$$\begin{aligned}
 \sum_1^6 t_i \frac{d\gamma_i}{dt} &= \sum_1^6 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_i(t)} \frac{d\gamma_i}{dt} = \sum_1^6 \left(\frac{\partial F}{\partial \gamma_i(t)} \frac{d\gamma_i}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_i(t)} \frac{d\gamma_i}{dt} \right) \\
 &= \frac{dF}{dt} + \int_0^{T_0} \sum_1^6 \frac{\partial \lambda}{\partial (\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))} \left\{ \frac{d(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))}{dt} + \frac{d\gamma_i(t-\tau)}{dt} \right\} d\tau \\
 &= \frac{dF}{dt} + \frac{d\Psi}{dt} - \int_0^{T_0} \sum_1^6 \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial (\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))} \frac{d\gamma_i(t-\tau)}{d\tau} \right\} d\tau \\
 &= \frac{d\Phi}{dt} + \int_0^{T_0} \sum_1^6 \frac{\partial \lambda}{\partial (\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))} \frac{d(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau))}{d\tau} d\tau \\
 &= \frac{d\Phi}{dt} + \int_0^{T_0} \left\{ \frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{1}{2} \sum_1^6 \sum_1^6 \varphi'_{rs}(\tau) (\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau)) (\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau)) \right\} d\tau
 \end{aligned}$$

Poniamo

$$X = \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \sum_1^6 \sum_1^6 (\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau)) (\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau)) \varphi'_{rs}(\tau) d\tau$$

e teniamo conto che la forma

$$\sum_1^6 \sum_1^6 \varphi'_{rs}(\tau) \xi_r \xi_s$$

si è supposta definita positiva. Inoltre siccome

$$\varphi_{rs}(T_0) = 0$$

Risulterà

$$\int_0^{T_0} \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} d\tau = 0$$

e quindi

$$\sum_1^6 t_i \frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} - X$$

onde ponendo

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^3 \int_S \rho \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 dS$$

la equazione [5] si scriverà

$$\frac{d}{dt} (T - \Phi) + X = \int_S \sum_1^3 \rho \chi_i \frac{du_i}{dt} dS + \int_S \sum_1^3 \chi_i^{(\sigma)} \frac{du_i}{dt} d\sigma$$

Moltiplicando per dt avremo

$$[6] \quad d(T - \Phi) + X dt = \mathcal{L}$$

essendo

$$\mathcal{L} = \int_S \sum_1^3 \rho \chi_i \frac{du_i}{dt} dS + \int_\sigma \sum_1^3 \chi_i^{(\sigma)} \frac{du_i}{dt} d\sigma$$

il lavoro eseguito dalle forze esterne nel tempo dt . Chiamiamo per *definizione* $-\Phi$ la *energia elastica del corpo*. Avremo dunque che il lavoro eseguito dalle forze elastiche si trasforma in parte in forza viva dT in parte in energia elastica $-d\Phi$ ed in parte (χdt) si dissipa.

Se mancano le forze esterne la [6] ci dà

$$\frac{d}{dt} (T - \Phi) < 0$$

e quindi

$$T - \Phi$$

ossia la energia del sistema andrà continuamente diminuendo. Il moto non potrà cessare ad un dato istante. Infatti se il primo istante nel quale tutte le velocità fossero nulle incominciasse al tempo t non potrebbero essere tutte nulle le $\gamma_i(t) - \gamma_i(t - \tau)$ ($0 < \tau < T$) quindi

$$\frac{d(T - \Phi)}{dt} < 0$$

il che prova che tutte le $\frac{du_i}{dt}$ non potrebbero essere nulle nell'istante t .

SUL CALCOLO DEGLI STATI DI REGIME
IN CIRCUITI SOTTOPOSTI A F. E. M. PERIODICHE
DI FORMA QUALUNQUE (*)

(Con una figura)

GIUSEPPE APRILE

SUMMARIVM. — Describitur quaedam ratio qua supputari potest regimen periodicum in circuitibus electro-motrici vi periodica cuiuslibet formae obnoxiiis, dummodo sciatur transiens insertionis phaenomenon, supputationibus ad primam insertionis periodum coaretatis. Auctor ostendit exemplum de casu simplici typico.

1. — Consideriamo un generico circuito elettrico non puramente reattivo (e cioè a dissipazione non nulla) sul quale agisca, a partire da un certo istante t_0 una f. e. m. *periodica* di forma qualunque. In seguito all'attacco della f. e. m. ha luogo allora nel circuito un *fenomeno transitorio* di inserzione, attraverso il quale si passa asintoticamente, col trascorrere del tempo, ad uno stato limite di regime, o di oscillazione permanente.

Questo regime limite qualche volta è direttamente ricavabile in modo elementare (per esempio: caso di una f. e. m. sinusoidale): nel caso generale, in cui la forma della f. e. m. sia qualunque, esso può essere ottenuto calcolando (per esempio col calcolo operatorio) l'andamento del fenomeno transitorio di inserzione, e passando al limite per $t = +\infty$, cioè in pratica spingendo la calcolazione fino alla sensibile scomparsa della *parte evanescente* (« flüchtiger Anteil ») del transitorio medesimo.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi, il 19 maggio 1940.

Mi propongo di mostrare, in quanto segue, come possa però ricavarsi lo stato di regime cercato, limitando i calcoli a quando avviene durante il solo *primo periodo* a partire dall'istante di inserzione della f. e. m. periodica. L'interesse di ciò sta nel fatto che da un canto il transitorio di inserzione è spesso più agevole da calcolare se ci si limita al primo periodo, e d'altro lato viene resa superflua la successiva considerazione di vari periodi, realizzandosi una semplificazione non di raro sensibile.

2. - Osservo che in un intervallo temporale qualunque, da t_1 a t_2 , l'evoluzione del circuito è condizionata dalle *forze elettromotrici* seguenti ⁽¹⁾:

a) forze *imprese* esterne, nel nostro caso la f. e. m. periodica alimentante il circuito;

b) forze elettromotrici di carattere *reattivo*, dipendenti dai valori delle variazioni di flusso nelle bobine, e dalla carica nei condensatori (f. e. m. di induzione, e f. e. m. di reazione dielettrica); flusso e carica vengono ad avere l'ufficio di coordinate lagrangiane, che determinano l'energia contenuta nel sistema;

c) forze *assorbite*, derivanti da resistenze ohmiche o da perdite equiparabili di energia.

Se il sistema è retto da leggi lineari, come vogliamo supporre, tutte queste forze producono i loro effetti, ciascuna indipendentemente dalle altre. L'effetto delle sole *forze esterne*, cioè della sola f. e. m., nel primo periodo a partire dall'inserzione, è dato dal *transitorio di inserzione*. L'effetto delle altre forze è invece una *variazione libera* generica, che pel *principio di estinzione* è un processo tendente asintoticamente al riposo.

Qualunque evoluzione che si svolga durante un periodo della f. e. m. può dunque considerarsi come somma del transitorio di inserzione e di *una certa variazione libera*. Ciò deve valere anche per un periodo dello stato di regime; il quale intanto è caratterizzato dal fatto che in esso l'evoluzione totale, trascorso il periodo, riproduce la configu-

⁽¹⁾ Nel senso usato dal GIORGI; v. *Che cos'è la forza elettromotrice?* Boll. Tecn. dell'Istit. Mil. della Trasmissione, n. 5 e 6, 1939.

razione all'inizio del periodo stesso. Pertanto, per trovare lo stato di periodica oscillazione, sotto l'azione della f. e. m. periodica, basta sommare al fenomeno transitorio, tracciato per il *primo periodo*, una variazione libera particolare: precisamente quella capace di *compensare* la differenza fra l'ordinata finale e l'ordinata iniziale dell'accennato transitorio, calcolato per il detto primo periodo dell'azione della f. e. m.

Con ciò lo scopo è raggiunto, poichè tale condizione è sufficiente a determinare in modo univoco la particolare variazione libera di cui si tratta.

La trattazione svolta si applica anche ovviamente, con le opportune varianti, a sistemi lineari non elettrici, come sistemi meccanici vibranti, sistemi termici con accumulazione e trasmissione di calore, ecc.

3. - Per maggiore chiarezza, mostrerò il seguente esempio numerico, in applicazione di quanto esposto.

Sia un circuito costituito da una resistenza $R=10^6$ ohm, in serie con un condensatore di capacità $C=0,5 \times 10^{-6}$ farad. Su detto circuito agisca, a partire da un dato istante ($t=0$) una f. e. m. $E_s(t)$ periodica a «denti di sega» di periodo $T=0,1$ sec e di ampiezza 100 volt, vedi figura 1 (f. e. m. di questo tipo si incontrano in pratica in certi dispositivi di registrazione oscillografica). Si desidera trovare il regime di periodica oscillazione, per la tensione V al condensatore.

In base alla trattazione che precede, occorre anzitutto tracciare il *transitorio di inserzione* entro il *primo periodo*, cioè da $t=0$ fino a $t=T$.

Per trovare detto transitorio, può considerarsi, anzichè la $E_s(t)$, una f. e. m. $E_L(t)$ che coincida con essa nel primo periodo, e prosegua oltre con lo stesso andamento linearmente crescente (vedi figura 1): per questa $E_L(t)$ il calcolo del transitorio è più agevole, e per esempio col calcolo operatorio si trova, per il transitorio in questione $V_L(t)$:

$$V_L(t) = 500(e^{-2t} + 2t - 1) \text{ volt,}$$

essendo la costante di tempo uguale a 0,5 secondi.

La curva relativa è la c della figura 1. L'ordinata per $t=T$ vale 9,35 volt. Bisogna adesso trovare quale variazione libera realizzi, in una durata $T=0,1$ sec, un abbassamento di tensione eguale appunto a 9,35 volt, tale cioè da compensare esattamente l'aumento da 0 a 9,35 volt.

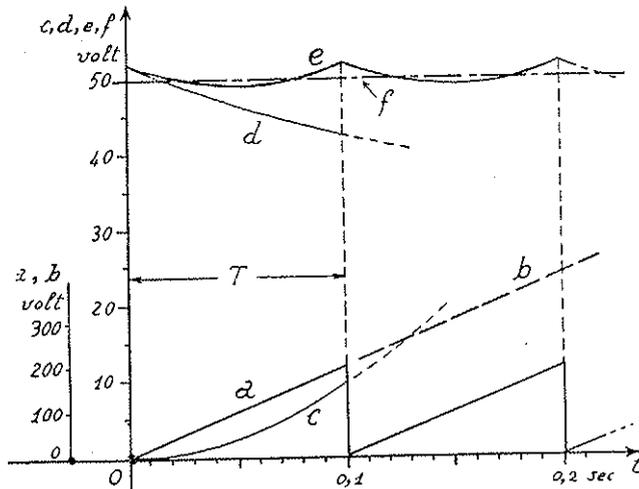


FIG. 1.

- a = F. e. m. periodica a «denti di sega» $E_s(t)$
 b = F. e. m. crescente linearmente in modo indefinito, $E_L(t)$
 c = Andamento di $V(t)$ nel transitorio d'inserzione della $E_L(t)$
 d = Variazione libera $V_v(t)$
 e = Regime periodico, sotto la f. e. m. $E_s(t)$
 f = Valore medio della f. e. m. $E_s(t)$

La variazione libera generica $V_v(t)$, che parte da $V=V_0$, avviene secondo la legge

$$V_v(t) = V_0 e^{-2t}$$

Pertanto l'abbassamento di tensione vale

$$V_0 - V_0 e^{-2t} = V_0 (1 - e^{-2t})$$

Possiamo dunque scrivere, per $t = T = 0,1$ sec:

$$9,35 = V_0 (1 - e^{-2 \times 0,1})$$

da cui si ricava

$$V_0 = 52 \text{ volt}$$

La variazione libera che parte da tal valore di V è espressa dalla curva d della figura 1.

Sommando le ordinate due curve c e d si ottiene immediatamente il diagramma e dello stato di regime periodico. Risulta una curva che oscilla attorno al *valore medio* della f. e. m. agente (50 volt) come del resto era da aspettarsi.

NOTA. - L'argomento del presente lavoro è stato anche trattato, precedentemente, da G. QUILICO, in un articolo *Sul calcolo dei regimi periodici non sinusoidali* (« L'Elettrotecnica », 25 marzo 1939). Ivi l'Autore si limita però al caso di circuiti caratterizzati da operatori funzionali del tipo $\frac{M(\Delta)}{N(\Delta)}$ con M ed N polinomi; e cioè circuiti contenenti un numero finito di elementi. I circuiti con numero infinito di elementi, e più ancora quelli con parametri distribuiti in modo continuo sono invece, come è noto, caratterizzati da operatori aventi in genere forma di funzione non razionali dell'operatore $\Delta = \frac{d}{dt}$.

La dimostrazione data sopra è per contro di applicabilità generale (purchè sussistano le due condizioni, di *linearità* e di *dissipazione non nulla*) e potrebbe pertanto servire di premessa ad una trattazione concernente i regimi periodici in sistemi continui. Solo che nel caso di tali sistemi va tenuto il debito conto, nelle calcolazioni, della eventuale esistenza di *propagazioni* e dei conseguenti « ritardi » di certi *effetti* rispetto alle *cause*.

IN MARGINE D'UNA NOTA DEL COLONNETTI(*)

(Con 3 figure)

GIUSEPPE ALBENGA

SYMMARIUM. — Perpenditur tensionis status, quatenus ad spatium attinet, qui efficitur ex coactionibus hominis arte productis.

In una Nota dal titolo *Contributo alla teoria delle travi inflesse in stato di coazione*, pubblicata nel volume III degli « Acta » dell'Accademia Pontificia delle Scienze, GUSTAVO COLONNETTI ha studiato lo stato di tensione che, l'aggiunta di compressioni laterali provoca in una trave soggetta a flessione retta composta. Egli ha trattato il caso piano: qualche utile considerazione può trarsi dall'esame dello stato spaziale di tensione in una tal trave, ed è appunto quanto mi propongo di fare, servendomi della classica e suggestiva rappresentazione di МОНР, ed astraendo dai procedimenti e dai dispositivi che si possono adottare per realizzare lo stato di coazione previsto e per mantenerlo.

Consideriamo al solito una trave prismatica con la fibra media coincidente con l'asse coordinato z : poniamo l'origine O nel baricentro della sezione trasversale iniziale: gli assi x ed y siano quelli principali di inerzia della sezione, yz il piano di simmetria del carico. Nelle ordinarie ipotesi della Resistenza dei Materiali sul cubetto elementare di lati paralleli agli assi coordinati agiranno allora le tensioni rappresentate nella figura 1 *a*. Assumeremo come positive le tensioni nor-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti, il 15 aprile 1940.

mali (σ) di trazione, e le tensioni tangenziali (τ) che, rispetto al centro dell'elemento di volume, danno un momento di senso orario. Scelti gli assi σ e τ della rappresentazione di MOHR come mostra la figura 1b, il circolo delle tensioni giacenti nel piano yz , (come è principale) o in un qualunque piano ad esso parallelo, è definito dai punti

P, di coordinato 0, $-\tau_{zy}$, che dà la tensione sull'elemento $dz dy$

Q di coordinate σ_z e τ_{zy} , che dà la tensione sull'elemento $dy dx$.

Il punto Q' simmetrico di Q rispetto all'asse è il *polo* della rappresentazione, cioè quel punto che col raggio vettore proiettante il generico punto ($\sigma\tau$) del circolo di MOHR, dà la traccia della giacitura dell'elemento sul quale essa tensione agisce.

A completare la rappresentazione di MOHR osserviamo che la tensione σ_z , nulla, è tensione principale e che quindi i circoli relativi ai due piani principali rimanenti sono quelli di diametro $O\sigma_1$ e $O\sigma_2$ rappresentati nella figura 1c.

Nella flessione composta (esclusi i lembi) uno di questi circoli è tutto contenuto nel campo delle σ positive, un altro in quello delle σ negative, il terzo, al quale sono interni i due precedenti, taglia l'asse delle τ . Seguendo il criterio di sicurezza del MOHR, quest'ultimo circolo è il solo che importa considerare. OTTO MOHR ha infatti postulato che gli stati di tensioni ammissibili siano quelli per cui tutti i punti rappresentativi delle tensioni sono contenuti in una certa regione del piano $\sigma\tau$, simmetrica rispetto a σ , che è possibile determinare sperimentalmente. La figura 2 dà ad esempio, la forma della curva di separazione della zona sicura dall'altra per un conglomerato cementizio, quale venne ricavato da precise esperienze svizzere. La curva ha in A un punto angoloso e la regione delle σ positive ammissibili è assai piccola rispetto a quelle delle σ negative sicure, che va molto estendendosi nella parte non disegnata.

Come si modifica lo stato di tensione provocando opportune tensioni normali aggiuntive sulle faccie del cubetto?

Facciamo variare dapprima la sola σ_z comprimendo il cubetto parallelamente all'asse z . In questa ipotesi:

τ_{zy} rimane costante

$$\sigma_z = \sigma_y = 0,$$

il punto P non modifica la sua posizione,

il punto Q descrive una retta parallela all'asse σ .

Poichè il punto P permane sull'asse delle τ per quanto grande sia la compressione σ_z , agendo su questa sola non si riuscirà mai ad eliminare le tensioni positive: solo per σ_z tendente a $-\infty$ la σ_1 tenderà al valore 0. E poichè coll'aumentare della compressione $-\sigma_z$ il circolo delle tensioni di centro O_x diviene molto grande, esso uscirà parzialmente fuori della zona sicura (fig. 2) assai prima che la grandezza di σ_1 sia divenute trascurabile.

Il risultato di eliminare del tutto le tensioni positive si ottiene subito, come è noto, applicando sulla faccia $dx dz$ una opportuna tensione normale σ_y .

Nella figura 3 sono raccolti alcuni casi caratteristici di sollecitazione. Partendo da quello stato di tensione che si rappresentò nelle figure 1a e 1c e che è ora riprodotto nella figura 3a, e aggiungendo alla σ_z una tensione normale eguale e contraria, si passa allo stadio della figura 3b: il corrispondente circolo α è il minimo compatibile con la presenza della tensione tangenziale τ_{xy} : i circoli 1 e 2, relativi ai piani principali normali a quello yz sono eguali, e l'uno contenuto ancora tutto nella zona negativa, l'altro in quella positiva. Se la σ_z continua a decrescere algebricamente il circolo α (fig. 3c) si fa sempre maggiore: quando σ_z tende a $-\infty$, come già si osservò il circolo α tende a confondersi con l'asse τ e solo al limite scompariranno le tensioni positive.

Ma se aggiungiamo ancora una tensione σ_z negativa ci sarà facile evitare la presenza di tensioni positive. La figura 3d rappresenta il caso

$$-\sigma_z = -\sigma_y = -\tau_{xy}$$

al quale corrisponde di nuovo il minimo raggio del cerchio α . In questa ipotesi i due circoli α ed 1 vengono a sovrapporsi: il raggio del circolo 2 si annulla. In casi meno particolari sempre imponendo al circolo α di esser tangente all'asse τ , ovvie proprietà della media geometrica mostrano che τ_{xy} si mantiene media proporzionale fra σ_y e σ_z , in accordo con le formule della citata nota del COLONNETTI.

La condizione di cose rappresentata dalla figura 3d, quando si accetti il criterio di MOHR, è la più favorevole che si può ottenere agendo sulle due compressioni addizionali σ_y e σ_z . È opportuno av-

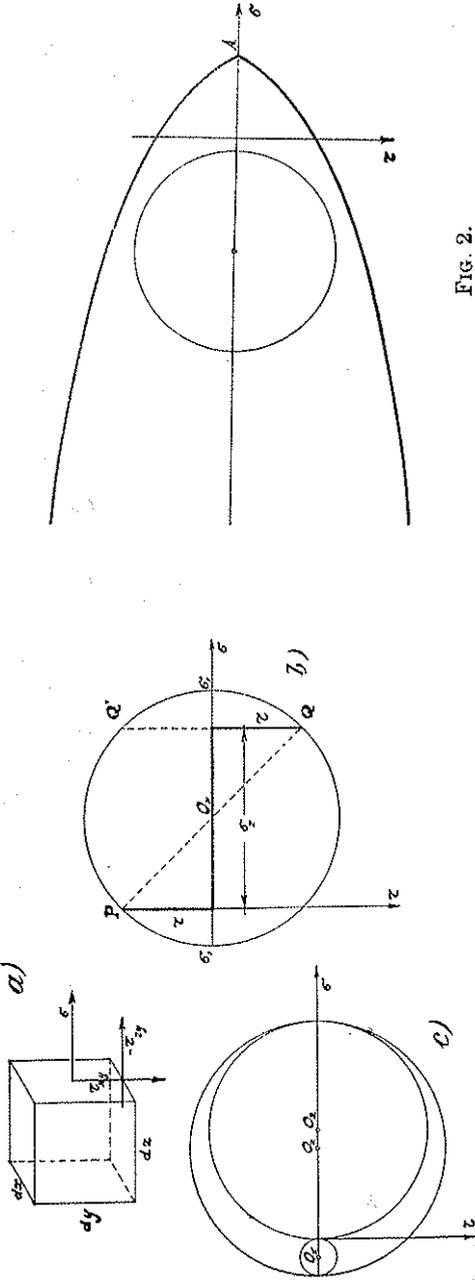


FIG. 1.

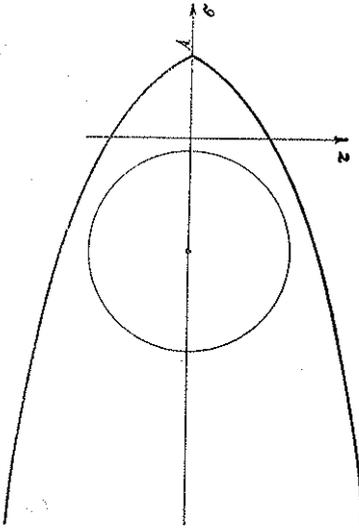


FIG. 2.

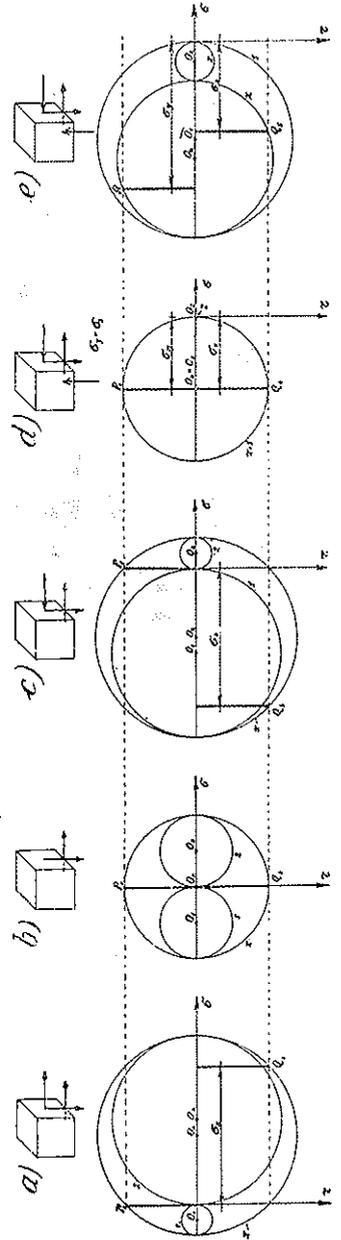


FIG. 3.

vertirlo esplicitamente perchè alcune parole di E. FREYSSINET nel suo volume *Une révolution dans la technique du Béton* possono far credere che aumentando oltre i limiti della citata figura, le tensioni σ_y e σ_x (naturalmente nel loro valore assoluto) e quindi spostando il circolo x verso destra, e perciò (fig. 2) verso una zona sempre più sicura, si possa realizzare un ulteriore vantaggio. Osserviamo però che così facendo, noi allontaniamo sempre più il circolo x dalla curva limitatrice della zona di sicurezza, ma lo stato di tensione diviene quello che è rappresentato nella figura 3e e perciò nell'applicazione del criterio di MOHR non ci si deve più riferire al circolo x , ma a quello 1, che, per esser $\sigma_x = 0$, si mantiene tangente all'asse τ e contiene ora quel circolo x , nel quale prima era contenuto. Solo l'aggiunta di una opportuna σ_x permette di riportare il circolo 1 a coincidere con quello x o a cadere nell'interno di questo.

Si noti ancora che, per la legge di HOOKE generalizzata, la tensione σ_x è pure necessaria quando si intenda annullare le dilatazioni positive parallele all'asse x , che si avranno sempre finchè σ_x rimane nulla.

TEORIA E CALCOLO DELLE TRAVI
CON ARMATURE PREVENTIVAMENTE TESE (*)

(IL PROBLEMA DELLA SEZIONE PARZIALIZZATA)

(Con una tavola)

GUSTAVO COLONNETTI
Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Auctor indicat quomodo supputari debeat trabs, si, propter laesiones, sectio partim tantum obnitatur.

Nella mia prima Nota sull'argomento ⁽¹⁾ ho supposta la sezione della trave *intieramente reagente*, quale essa effettivamente si mantiene fino a che non intervengonò sforzi di trazione nel calcestruzzo.

Qui intendo invece considerare il caso in cui, crescendo l'intensità della sollecitazione, tali sforzi di trazione effettivamente si determinino, e raggiungano il limite di resistenza del calcestruzzo.

Si producono allora delle lesioni; e, a partire da quel momento, la sezione reagente viene ad essere limitata, per quel che si riferisce al calcestruzzo, alla sola porzione soggetta a sforzi di compressione.

Per quanto un tale stato di cose, nella nuova tecnica del cemento armato, sia da considerarsi come non tollerabile in condizioni normali di esercizio, il calcolo delle tensioni interne a cui esso dà luogo ha interesse ai fini della determinazione dei margini di sicurezza.

(*) Nota presentata il 19 maggio 1940.

(1) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il caso della presso-flessione)*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », IV, 2 (15 settembre 1939).

Perciò non è inutile mostrare come tale calcolo si possa fare scomponendo idealmente la sollecitazione in due componenti. Se una di queste viene scelta per modo da annullare le deformazioni impresse alle armature, e quindi anche tutte le tensioni nel calcestruzzo, l'altra si può considerare come operante sulla trave nel suo stato naturale non deformato. Ad essa si potranno pertanto applicare i procedimenti di calcolo abituali.

* * *

Mi riferirò, per maggior semplicità e chiarezza, all'esempio stesso che ho già trattato nella Nota precedente.

Avevo allora esplicitamente supposto che le armature fossero state incorporate nel calcestruzzo mentre erano sottoposte ad una tensione unitaria di 2000 kg/cm².

È dunque precisamente questo lo sforzo che si deve assumere come prima componente della sollecitazione. Nel caso concreto si tratta di uno sforzo normale di trazione

$$T = 16.770 \text{ kg.}$$

applicato in un ben determinato punto C dell'asse y .

Se pertanto vogliamo (come nella Nota citata) limitarci a studiare il caso della sollecitazione a flessione semplice - e più precisamente il caso in cui sulla sezione agisce un momento flettente \mathcal{M}_x - la seconda componente della sollecitazione altro non sarà che uno sforzo normale di compressione

$$P = 16.700 \text{ kg.}$$

applicato in un altro punto dell'asse y tale che il suo momento rispetto a C riesca precisamente eguale ad \mathcal{M}_x .

Per questo sforzo P si determinerà dunque, coi procedimenti di calcolo abituali, la posizione dell'eventuale *asse di separazione* della sezione reagente, nonchè i valori delle tensioni così nel calcestruzzo come nelle armature; coll'intesa che queste ultime dovranno poi sempre venire algebricamente sommate con le tensioni inizialmente impresse.

Nella tavola che accompagna questa Nota, il calcolo è stato eseguito per via grafica ⁽¹⁾:

1) per quel valore del momento flettente

$$\mathcal{M}'_x = 172.500 \text{ kg. cm.}$$

che noi già sappiamo capace di determinare tensioni unitarie nulle nel calcestruzzo, in corrispondenza al bordo inferiore della sezione;

2) per un valore doppio del precedente

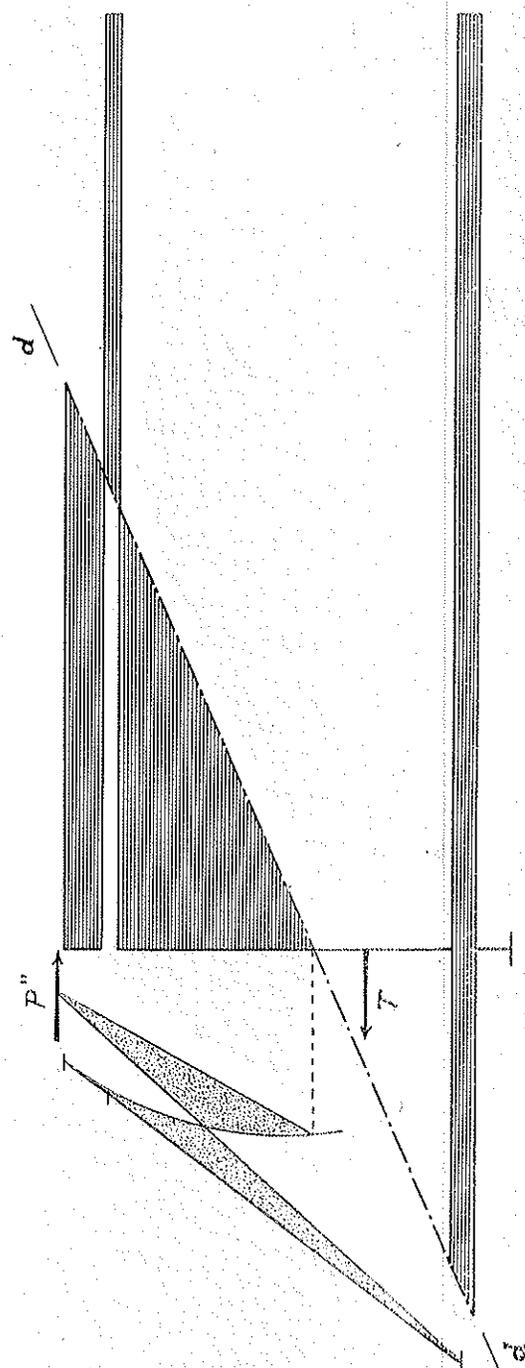
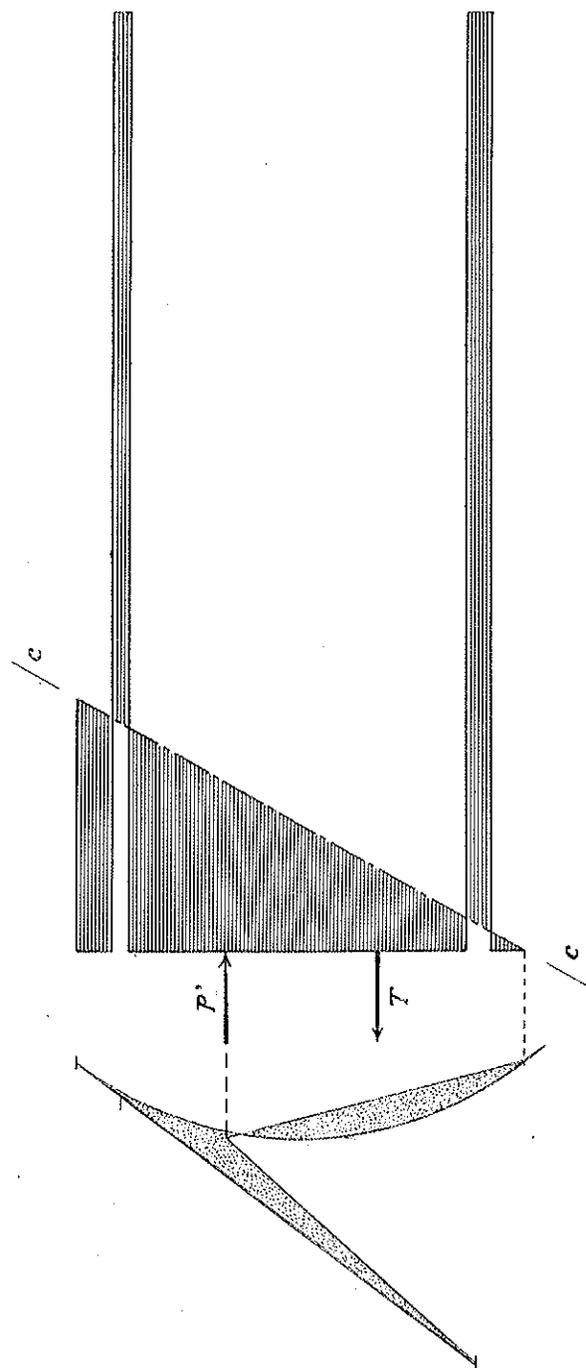
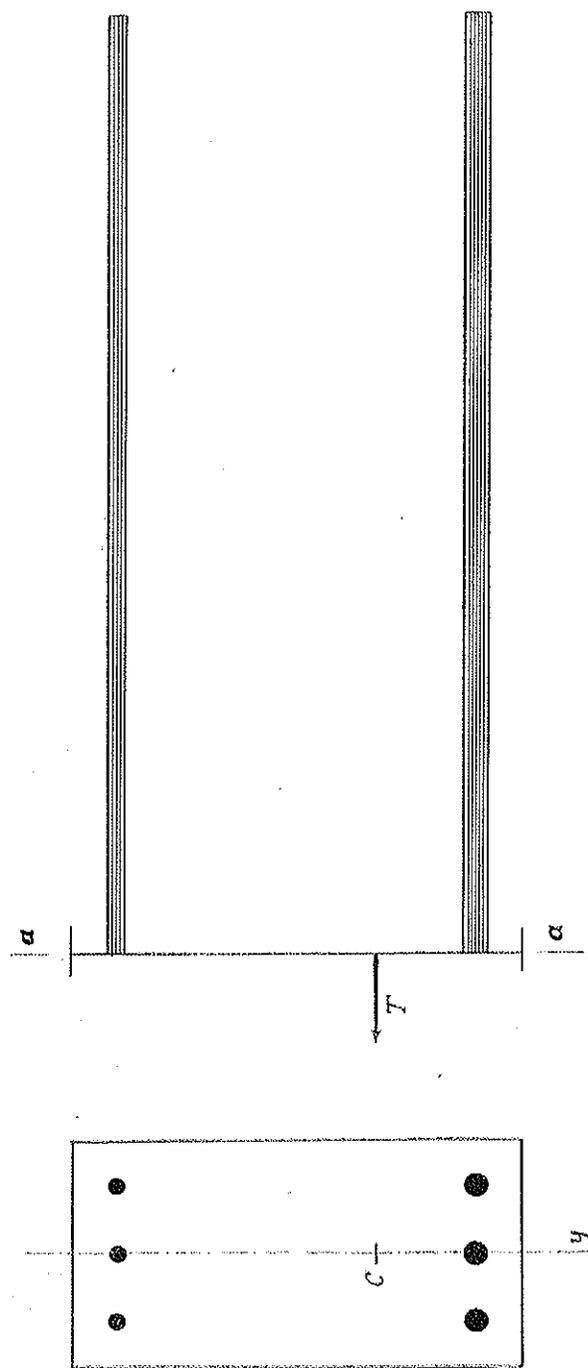
$$\mathcal{M}''_x = 345.000 \text{ kg. cm.}$$

La fondamentale del diagramma delle tensioni passa dalla posizione *cc* (già da noi trovata per tutt'altra via, e già indicata nella figura della Nota precedente) alla posizione *dd*.

Si constata che, al crescere del momento flettente, gli incrementi delle tensioni sono, *in valore relativo*, assai più rapidi nel calcestruzzo che nelle armature. La sproporzione è poi tanto più accentuata quanto più sono elevate le tensioni unitarie iniziali.

Così si legittima l'adozione di un margine di sicurezza per le armature (rapporto tra il loro carico di snervamento ed il carico di esercizio) meno elevato dell'analogo margine pel calcestruzzo (rapporto tra il carico di rottura di questo ed il suo carico di esercizio); tanto meno elevato quanto più sono elevate le caratteristiche del materiale che si impiega.

⁽¹⁾ C. GUIDI, *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*; appendice su le costruzioni in cemento armato, 5^a ediz., Torino, 1920, pag. 97.



REDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PENDULARES
À LA ECUACIÓN DE V. VOLTERRA
DE SEGUNDA ESPECIE (*)

GODOFREDO GARCÍA

SYMMARIVM. — De motu pendulari alicuius puncti super genericam lineam curvam non planam agens, Auctor, sumptis aequationibus iuxta suetam in dynamica formam, demonstrat harum resolutionem reduci ad solutionem aequationis integralis typi Volterra secundae speciei; quam resolutionem revera obtinet.

El señor KYRILLE POPOFF ha verificado la reducción de las ecuaciones pendulares à la ecuación integral de segunda especie del señor VITO VOLTERRA considerando la trayectoria plana, obteniendo así una elegante solución del problema. El objeto de la presente Nota es obtener la solución, siendo la trayectoria una curva gausa a la cual corresponden las ecuaciones pendulares siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \theta_1 y - \theta_2 z \\ [1] \quad \frac{dy}{d\theta} &= \theta_1 x + z \\ \frac{dz}{d\theta} &= \theta_2 x - y \end{aligned}$$

siendo θ el ángulo de nutación, complemento del ángulo de inclinación mientras θ_1 y θ_2 son funciones de θ .

$$[2] \quad \theta_1 = \frac{R - aR^*}{P} \quad \theta_2 = \frac{Q}{P}$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi il 29 maggio 1940.

Además la relación entre la nueva variable θ y el tiempo t está dada por $d\theta = P dt$.

La tercera ecuación de las [1] da

$$[3] \quad z = c + \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_2 x d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} y d\theta .$$

La segunda de las [1] da

$$[4] \quad y = b - \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1 x d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} z d\theta .$$

Sustituyendo en la [3] la y por su valor [4], y verificando despues sustituciones successivas de z , y aplicando la formula de DIRICHLET, y teniendo en cuenta que

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1 d\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1 d\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1 d\theta \quad \dots \quad \int_{\theta_0}^{\theta} x \theta_1 d\theta \rightarrow 0$$

cuando n tiende al infinito, haciendo las posiciones

$$\psi(\theta) = c \cos(\theta - \theta_0) - b \operatorname{sen}(\theta - \theta_0)$$

$$\varphi(\theta) = b \cos(\theta - \theta_0) + c \operatorname{sen}(\theta - \theta_0)$$

[5]

$$f(\theta) = a + b \int_{\theta_0}^{\theta} [\theta_1 \cos(\theta - \theta_0) + \theta_2 \operatorname{sen}(\theta - \theta_0)] d\theta + \\ + c \int_{\theta_0}^{\theta} [\theta_1 \operatorname{sen}(\theta - \theta_0) - \theta_2 \cos(\theta - \theta_0)] d\theta$$

[6]

$$N(\theta, s) = -\theta_1(s) \int_{\theta_0}^{\theta} [\theta_1 \cos(\theta - s) - \theta_2 \operatorname{sen}(\theta - s)] d\theta + \\ + \theta_2(s) \int_{\theta_0}^{\theta} [\theta_1 \operatorname{sen}(\theta - s) + \theta_2 \cos(\theta - s)] d\theta$$

Determinando $x(\theta)$ por las formulas segunda y tercera de las [7], se determinarán $y(\theta)$; $z(\theta)$.

Las ecuaciones [1] prestan ventajas siempre que el valor absoluto de θ_1 sea pequeño, no así quando este sea grande, como se puede probar por la rapidez de convergencia de las series.

2. - Ahora procederemos á la solución en el caso que dicho valor absoluto $|\theta_1|$ sea grande. Las ecuaciones que resuelven la cuestión seran las siguientes

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{d\lambda} &= y - \frac{\theta_2^*}{\theta_1^*} z \\
 [11] \quad \frac{dy}{d\lambda} &= -x + \frac{z}{\theta_1^*} \\
 \frac{dz}{d\lambda} &= \frac{\theta_2^*}{\theta_1^*} x - \frac{y}{\theta_1^*}
 \end{aligned}$$

siendo θ_1^* y θ_2^* funciones de la variable λ definidas por la ecuación:

$$\lambda = \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1(\theta) d\theta = s(\theta), \text{ luego } \theta = \theta(\lambda) \text{ y } \theta_1(\theta) = \theta_1^*(\lambda).$$

Integrando la primera de las [11] se tiene

$$[12] \quad x(\lambda) = a + \int_0^{\lambda} y d\lambda - \int_0^{\lambda} \frac{\theta_2^*}{\theta_1^*} z d\lambda ;$$

se remplazará successivamente $x(\lambda)$ por su valor dado por la misma fórmula y se repetirá esta operación al infinito, teniendo en cuenta que

$$\int_0^{\lambda} d\lambda \int_0^{\lambda} d\lambda \int_0^{\lambda} d\lambda \quad \dots \quad \int_0^{\lambda} x d\lambda \rightarrow 0$$

quando n tiende hacia el infinito.

Valiéndonos de la fórmula de DIRICHLET y haciendo para abreviar

$$f(\lambda) = a \cos \lambda + b \operatorname{sen} \lambda$$

$$\varphi(\lambda) = -a \operatorname{sen} \lambda + b \cos \lambda$$

[13]

$$\psi(\lambda) = c + a \int_0^\lambda \frac{\operatorname{sen} \lambda + \theta_2^* \cos \lambda}{\theta_1^*} d\lambda = b \int_0^\lambda \frac{\cos \lambda - \theta_2^* \operatorname{sen} \lambda}{\theta_1^*} d\lambda,$$

se tienen las ecuaciones

$$x(\lambda) = f(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{z(s) [\operatorname{sen}(\lambda - s) - \theta_2^*(s) \cos(\lambda - s)]}{\theta_1^*(s)} ds$$

$$[14] \quad y(\lambda) = \varphi(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{z(s) [\cos(\lambda - s) + \theta_2^*(s) \operatorname{sen}(\lambda - s)]}{\theta_1^*(s)} ds + \frac{\theta_2^*}{\theta_1^*} z$$

$$z(\lambda) = \psi(\lambda) + \int_0^\lambda z(s) N(\lambda, s) ds$$

Esta última es una ecuación de segunda especie de VOLTERRA, siendo el núcleo de estructura

$$[15] \quad N(\lambda, s) = -\frac{1}{\theta_1^*(s)} \left\{ \int_s^\lambda \frac{\cos(\lambda - s) - \theta_2^* \operatorname{sen}(\lambda - s)}{\theta_1^*} d\lambda + \right. \\ \left. + \theta_2^*(s) \int_s^\lambda \frac{\operatorname{sen}(\lambda - s) + \theta_2^* \cos(\lambda - s)}{\theta_1^*} d\lambda + \frac{\theta_2^*(s)}{\theta_1^*(s)} \right\}$$

La solución de la tercera de las ecuaciones [14] está dada por la fórmula

$$[16] \quad z(\lambda) = \psi(\lambda) + \int_0^\lambda f(s) \Gamma(\lambda, s, 1) ds$$

siendo $\Gamma(\lambda, s, 1)$ el núcleo resolvente.

El caso del Sr. K. POPOFF corresponde á cuando las funciones $\theta_2(s)=0$, $\theta_2=0$, $\theta_2^*(s)=0$, $\theta_2=0$; entónces el núcleo se reduce á

$$[17] \quad N(\theta, s) = -\theta_1(s) \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1 \cos(\theta - s) d\theta$$

en el caso que $|\theta_1|$ sea pequeño, y á

$$[18] \quad N(\lambda, s) = -\frac{1}{\theta_1^*(s)} \int_s^{\theta} \frac{\cos(\lambda - s)}{\theta_1^*} d\lambda$$

en el caso que $|\theta_1^*|$ sea grande.

ELASTICITÀ E RESISTENZA DI TRAVI CON ARMATURE PREVENTIVAMENTE TESE (*)

NOTA PRIMA

(Con quattro figure ed una tavola)

GUSTAVO COLONNETTI
Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Hac nota Auctor exponit primas conclusiones quas eruit ex experimentis quibus trabes adhibuit fulturas antea tensas habentes; quas conclusiones confert cum doctrina antecedentibus Notis exposita.

Nello studio della flessione semplice delle travi con armature preventivamente tese, giova distinguere l'*asse neutro propriamente detto* — ossia il luogo dei punti di una sezione retta generica in cui le tensioni sono effettivamente nulle — da quello che si potrebbe chiamare l'*asse neutro apparente*: luogo dei punti in cui sono nulle le variazioni delle tensioni determinate dalla sollecitazione esterna.

Si può infatti facilmente dimostrare⁽¹⁾:

- 1) che, a sezione intieramente reagente, la posizione dell'asse neutro apparente non dipende dal valore del momento flettente;
- 2) che, a sezione parzializzata, la posizione dell'asse neutro apparente varia invece col variare del valore del momento flettente.

(*) Nota presentata il 19 maggio 1940.

(¹) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (il caso della presso flessione)*, Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», IV, 2, 1940; *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (il problema della sezione parzializzata)*, Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», IV, 17, 1940.

Ora la prima ipotesi — che cioè la sezione sia intieramente reagente — deve ovviamente verificarsi, durante la prima applicazione della sollecitazione, fino a che questa non ha raggiunto un valore tale da determinare tensioni positive capaci di vincere la resistenza del calcestruzzo alla trazione.

Quando poi ciò avviene, il calcestruzzo perde ogni attitudine a sopportare tensioni positive. A partire da quel momento la sezione si comporterà come intieramente reagente o come parzializzata a seconda che il momento flettente sarà minore o maggiore di quel valore limite per cui l'asse neutro propriamente detto riesce tangente al contorno della sezione.

* * *

Un tale complesso di risultati è evidentemente suscettibile di verifica sperimentale.

Basta pensare ad una trave, nella quale sia stato creato un ben determinato stato di coazione mediante il procedimento di messa in tensione delle armature che io ho descritto in una mia Nota precedente⁽¹⁾; e supporre che, mentre tale trave viene sollecitata a flessione, vengano su di essa eseguite misure di deformazioni che permettano di riconoscere l'invarianza o meno della posizione dell'asse neutro apparente.

Consideriamo per esempio una trave sperimentale rispondente alle seguenti caratteristiche:

Caratteristiche geometriche della trave:

| | |
|---|------------------------|
| Area della sezione retta (cm. 9,75 × cm. 19,75) | cm ² 192,00 |
| Area della sezione dell'armatura (ø mm. 12,5) | » 1,23 |
| Rapporto della sezione metallica alla sezione della trave | 0,64 % |

(1) G. COLONNETTI, *Di un nuovo procedimento per la messa in tensione delle armature nelle strutture in cemento armato*, Pontificia Academia Scientiarum, IV, 8, 1940.

Caratteristiche meccaniche dei materiali:

| | | |
|--|--------------------|-----------|
| Modulo di elasticità normale del calcestruzzo . . . | kg/cm ² | 240.000 |
| Modulo di elasticità normale dell'armatura . . . | » | 2.040.000 |
| Rapporto del modulo dell'armatura al modulo del calcestruzzo | | 8,5 |

Caratteristiche dello stato di coazione (a trave scarica):

| | | |
|--|--------------------|--------|
| Tensione unitaria nel calcestruzzo: | | |
| sulla faccia superiore della trave | kg/cm ² | 0 |
| sulla faccia inferiore della trave | » | - 70 |
| Tensione unitaria nell'armatura | » | + 5500 |

Dal punto di vista della teoria il comportamento di una tale trave si può caratterizzare con una serie di diagrammi come quelli riprodotti nella tavola allegata.

Il primo diagramma, in alto, rappresenta lo stato di coazione (a trave scarica).

Nei diagrammi sottostanti sono rappresentati gli stati di tensione a cui dà luogo l'applicazione di un momento flettente.

Più precisamente si è supposto:

in A, $\mathcal{M} = 250$ kg. m.

in B, $\mathcal{M} = 500$ kg. m. } nell'ipotesi che il calcestruzzo sia capace
 in C, $\mathcal{M} = 750$ kg. m. } di resistere a sforzi di entrambi i segni;

in B', $\mathcal{M} = 500$ kg. m. } nell'ipotesi che il calcestruzzo possa
 in C', $\mathcal{M} = 750$ kg. m. } resistere solo a sforzi di compressione.

Per differenza tra questi diversi stati di tensione sotto carico e lo stato di coazione iniziale si sono ottenuti i diagrammi disegnati a sinistra, i quali rappresentano le variazioni dello stato di tensione determinate dalla sollecitazione.

* * *

La verifica sperimentale è documentata nei diagrammi di deformazione riprodotti nelle figure 1 e 2, in ciascuna delle quali sono

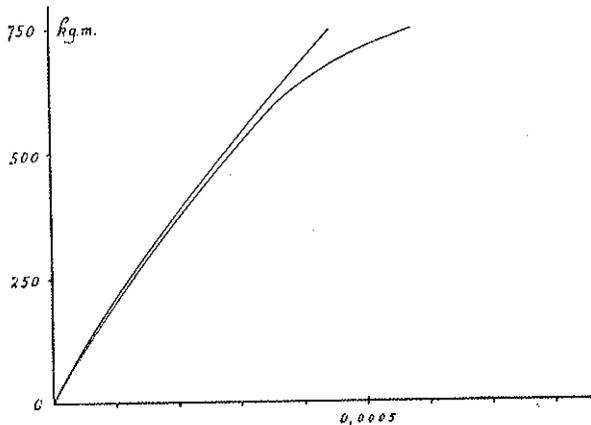


FIG. 1.

tracciate due curve: l'una si riferisce alla faccia superiore, l'altra alla faccia inferiore della trave. Le deformazioni vi sono riportate in valore

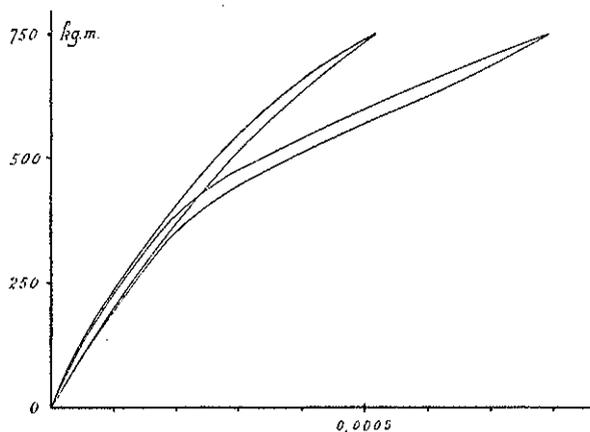


FIG. 2.

assoluto sull'asse delle ascisse, in corrispondenza ai valori del momento flettente riportati sull'asse delle ordinate.

La figura 1 si riferisce alla prima applicazione della sollecitazione; in essa la divergenza tra le due curve — che è indizio di spostamento dell'asse neutro apparente e quindi di parzializzazione della sezione — si manifesta per un valore del momento flettente prossimo a 630 kg. m. a cui corrispondono, nel calcestruzzo, le seguenti tensioni unitarie massime:

sulla faccia superiore della trave kg/cm² — 100
 sulla faccia inferiore della trave kg/cm² + 30

In figura 2 si vedono invece disegnati i cicli stabilizzati dopo un piccolo numero di ripetizioni della sollecitazione. Qui la divergenza si manifesta per un momento flettente pari a 450 kg. m. a cui corrispondono, nel calcestruzzo, le tensioni unitarie massime seguenti:

sulla faccia superiore della trave kg/cm² — 70
 sulla faccia inferiore della trave kg/cm² 0

Particolarmente degna di nota è la forma del ciclo che si riferisce alla faccia inferiore della trave. Nettamente piegato in due, in corrispondenza del sopra indicato valore del momento flettente, questo ciclo accusa nel modo più evidente l'esistenza delle due ben distinte fasi del fenomeno; e dimostra come lo stato di coazione assicurati, anche nella trave già lesionata, il funzionamento a sezione interamente reagente, ogniqualevolta il momento flettente non superi un valore limite in relazione con lo stato di coazione adottato.

In realtà al di sotto di questo valore limite del momento, le lesioni si chiudono così perfettamente da diventare invisibili anche per un occhio armato delle migliori lenti di ingrandimento.

* * *

A questo punto non è superfluo ricordare che le cose vanno ben diversamente nelle travi ad armature non preventivamente tese.

Per mettere in chiaro questa sostanziale differenza di comportamento — e per documentare la superiorità della nuova tecnica — si

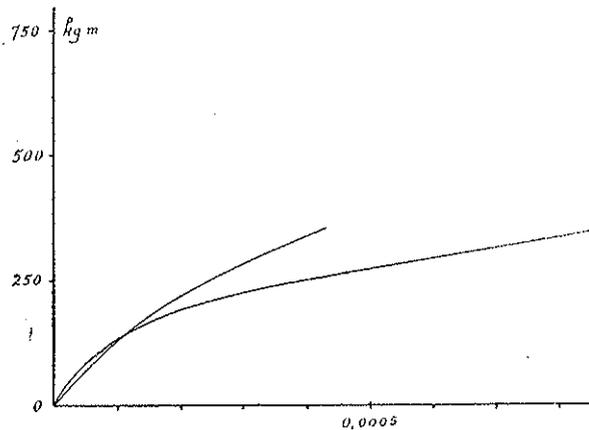


FIG. 3.

sono confezionate alcune travi, del tutto identiche alle precedenti ma armate nel modo solito con un tondo da 14 mm. di diametro disposto in adiacenza della faccia inferiore.

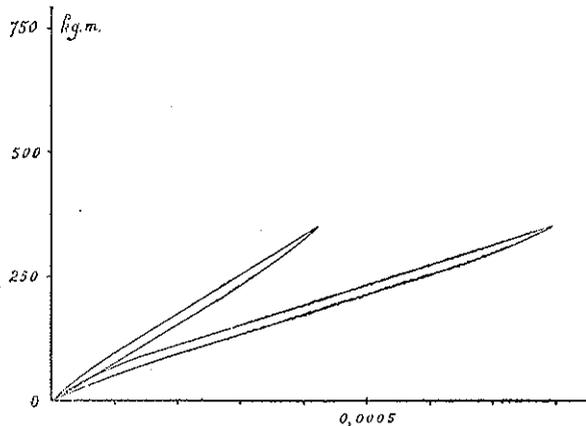


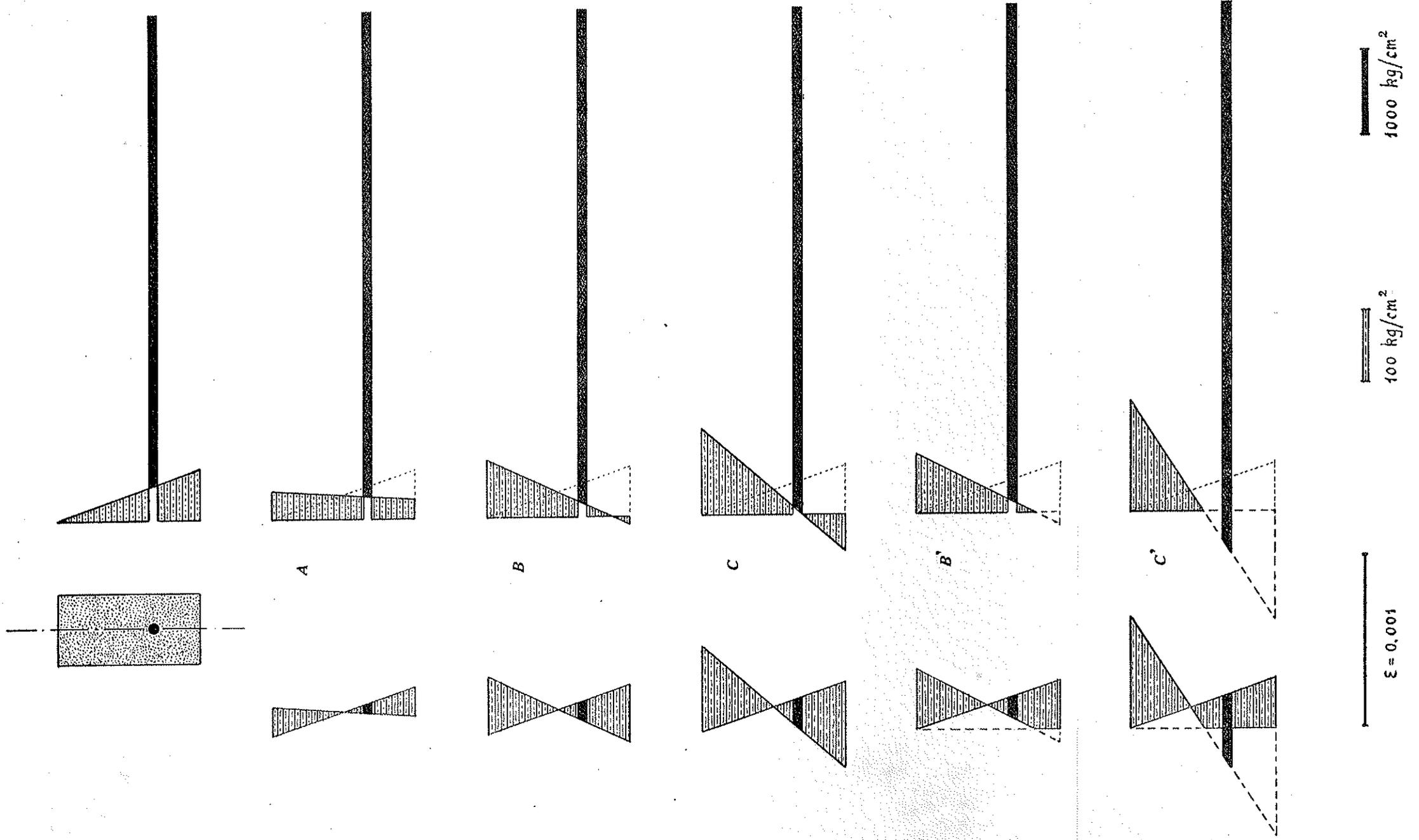
FIG. 4.

Ripetendo su queste travi le misure già eseguite sulle precedenti, si sono ottenuti i diagrammi riprodotti nelle figure 3 e 4.

Dall'esame di questi diagrammi si deduce:

1) che all'atto della prima applicazione della sollecitazione, la divergenza delle due curve — e pertanto la parzializzazione della sezione — ha inizio sotto l'azione di un momento flettente prossimo a 200 kg.m., pari cioè alla terza parte soltanto di quello che era occorso per determinare lo stesso fatto nella trave con armature preventivamente tese.

2) che la trave, una volta lesionata, non è più suscettibile di funzionare a sezione intieramente reagente neppure per valori piccolissimi del momento flettente, ma assume stabilmente e definitivamente il comportamento a sezione parzializzata.



LA DISTRIBUZIONE
DELLE AREE DI BASSA PRESSIONE
SULL'ATLANTICO SETTENTRIONALE
E SULL'EUROPA NEL DECENNIO 1930-39 (*)

(Con dodici figure)

A. MELICCHIA

SUMMARIVM. — Expositis principiis methodi statico-geographicae a Fabris ad studium distributionis arearum cyclonicarum et anticyclonicarum inventae, A. exhibet huius methodi applicationes quas ipse expertus est.

Praevia quaedam insuper animadvertit de coeli variationibus quae fieri posse videntur si perspiciatur distributio pressionis in Atlantico Septentrionali et in Europa Centrali.

Ex quibus praeviis animadversionibus, quae antevertunt certas conclusiones ex ulterioribus investigationibus eruendas, perspicitur deminutus vernus cyclonicus status in Atlantico Septentrionali, translata ad septentrionem area maximae cyclonicae frequentiae in ipso Atlantico, maior denique anticyclonis russo-syberiani influxus in meridionales plagas.

PRESENTAZIONE

Succeduto al mio compianto Maestro, LUIGI DE MARCHI, nella direzione delle « Ricerche sulle variazioni storiche del clima Italiano », mi sono preoccupato di seguire il programma che Egli aveva tracciato, coll'approvazione della Commission Internationale pour l'étude des variations historiques des climats presieduta da HENRY ARCTOWSKI.

Tale programma comprendeva: indagini storiche su documenti, tradizioni e notizie relative a notevoli particolari manifestazioni o riflessi del clima; ricerche naturalistiche su modificazioni della glaciazione attuale,

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Antonio Renato Toniolo il 19 maggio 1940.

sul limite delle nevi, su quelli altimetrici della vegetazione ecc., studi, infine, di carattere più strettamente geofisico, sulla variazione nel tempo degli elementi meteorologici di particolari località, in vista di eventuali cicli meteorologici.

In tutti questi campi furono pubblicati ormai dal Comitato Nazionale per la Geografia del C. N. R. ben 7 lavori, che hanno avuto favorevole eco in Italia ed all'Estero.

Per quanto riguarda quest'ultimo indirizzo, gli studi, col consiglio del Professor CARLO BONACINI della R. Università di Modena, erano appoggiati al Professor CESARE FABRIS del Magistrato alle Acque di Venezia, che vi aveva dato il suo sicuro appoggio colla fervida collaborazione del suo assistente Dr. MELICCHIA, applicando i diversi metodi di analisi periodale alle ricerche dei dati meteorologici dell'ultimo cinquantennio.

Sempre in questo campo, per aderire ad un mio desiderio di tentare anche il metodo geografico nello studio delle manifestazioni di alcuni elementi meteorologici, il Prof. FABRIS aveva ultimamente proposto un suo particolare metodo geografico-statistico per osservare se vi fossero variazioni cicliche nello spostamento delle aree cicloniche. Con tale metodo egli preparò una breve nota sulle modificazioni delle situazioni isobariche delle zone cicloniche con particolare riguardo al Mediterraneo negli anni dal 1882 al 1930, che pur considerando un solo elemento, quello cioè della frequenza e non della intensità della pressione, portava a segnalazioni interessanti sulle variazioni della frequenza ciclonica nel Mediterraneo per il 50.ennio considerato; nota che presentata alla Riunione della Commission Internationale pour l'étude des variations historiques des climats nel 1938, in occasione del Congresso di Geografia ad Amsterdam, suscitò molto interesse e notevoli consensi.

Riprendendo questo metodo geografico-statistico, ideato dal FABRIS, il Dott. MELICCHIA, con entusiasmo giovanile e con pazienza da certosino, ha esteso lo studio del FABRIS alla distribuzione delle aree di ciclonicità sull'Oceano Atlantico Settentrionale, giungendo a risultati che qui io presento in una breve nota, che vuole esser almeno una esposizione di quanto fu tentato, lasciando una eventuale conclusione definitiva di collaudo del metodo e dei risultati ottenuti ad un esame più approfondito e ad ulteriori lavori che il MELICCHIA ha in corso.

ANTONIO RENATO TONIOLO

Nello studio *Le forme isobariche in Europa nel 50.ennio 1881-1930*, incluso nella pubblicazione del Comitato Italiano per la Geografia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, *Contributi allo studio delle variazioni della pressione atmosferica* (1) il FABRIS ha introdotto un nuovo e geniale metodo per lo studio della distribuzione delle aree cicloniche ed anticicloniche.

Il metodo proposto dal FABRIS consiste nel suddividere una più o meno estesa superficie del globo in parecchie piccole zone e, attraverso lo spoglio delle carte isobariche giornaliere, attribuire a ciascuna di queste piccole zone uno stato che si può chiamare di « ciclonicità » o di « anticiclonicità » a secondo che esse sono occupate da aree cicloniche od anticicloniche, tenuto conto della configurazione dei sistemi isobarici che giornalmente si presentano.

Attraverso una statistica estesa a periodi di varia lunghezza: 15 giorni, mesi, trimestri, semestri ed anni e con un raggruppamento di questi stessi periodi in quinquenni, decenni, venticinquenni, cinquantenni, il FABRIS ha dato, nello studio citato, le situazioni caratteristiche mensili, riferite ad un 50.ennio, della distribuzione della ciclonicità su una vasta zona del globo, che grosso modo si può ritenere estesa dalle coste dell'Atlantico alla Russia Europea e dalle coste dell'Artico all'Africa Settentrionale.

Le linee che sono tracciate su queste cartine tipiche sono linee che si possono chiamare di isociclonicità od « isocicloniche » e passano per tutte quelle località che, nei singoli mesi presi in esame, sono state occupate per un egual numero di giorni da forme corrispondenti ad aree cicloniche o di bassa pressione.

Le linee isocicloniche si distinguono dalle linee isobariche o isobare, generalmente tracciate sulle carte che rappresentano la distribu-

(1) *Ricerche sulle variazioni storiche del clima italiano* (Istituto di Geografia della R. Università di Bologna, diretto dal Prof. A. R. Toniolo), Comitato Nazionale per la Geografia del C. N. R., Bologna, Zanichelli, ed. 1938-xvi.

zione di pressione (quotidiana, mensile od annua), per il fatto, che mentre quest'ultime sono indici puramente ed assolutamente quantitativi, le prime stanno ad indicare, in via assoluta, la frequenza ossia la persistenza del fenomeno per un determinato periodo in una certa zona, ed in modo relativo si può ammettere che esse ci diano anche un indizio quantitativo attraverso la configurazione del tracciato delle linee isocicloniche. Ciò può essere dimostrato dal confronto della configurazione del tracciato delle linee isocicloniche con quella delle linee isobariche, in quanto esse contemporaneamente localizzano le aree di alta e di bassa pressione.

È intuitivo come il lavoro di spoglio e di statistica, secondo il metodo proposto dal FABRIS sia, per quanto lungo, senza confronto più semplice di quello della calcolazione necessaria alla costruzione di carte mediante linee isobariche rappresentanti le situazioni medie relative a determinati periodi (mesi, trimestri, semestri, anni, ecc.). Nella figura 1 si riportano a mo' di esempio dallo SHAW, la situazione media della intensità barica relativa al mese di ottobre. Il confronto colla rispettiva carta sulla quale sono tracciate le linee isocicloniche, ci dimostra la perfetta analogia delle configurazioni che si ottengono coi due metodi di analisi della distribuzione dell'elemento meteorologico « pressione », preso nel suo duplice aspetto della intensità e della frequenza (fig. 2).

Come il più diretto collaboratore del FABRIS e quindi il più convinto dell'applicabilità del metodo da lui proposto, ho già avuto occasione di utilizzare il materiale del suddetto lavoro per studiare le situazioni meteorologiche determinanti le piene del Po⁽¹⁾.

Considerando le condizioni di ciclonicità relative all'Europa ed al Mediterraneo, per tutti quei periodi in cui nel 50.ennio 1881-1930 il Po risultò in « piena », si tracciarono delle cartine riproducenti delle situazioni medie caratteristiche di piena che furono classificate a seconda della posizione dell'area ciclonica rilevata sulle cartine giornaliere delle isobare, pubblicate nell'intervallo di anni suddetto, dall'Ufficio Centrale di Meteorologia di Roma e dall'Ufficio Idrografico del Magistrato alle

(1) A. MELICCHIA, *Variazioni climatiche nella Pianura Padana e loro rapporti col regime del Po*. Ricerche sulle Variaz. Stor. Clim. Ital., Comit. Geogr. C. N. R. Edit. Zanichelli, Bologna, 1939.

Acque di Venezia. Esse risultarono per configurazione assai simili a quelle che si sarebbero ottenute tracciando — con un lavoro di calcolazione senza confronto più lungo e faticoso — le cartine colle linee isobariche dei valori medi di pressione, relativi a ciascun periodo ed a ciascuna situazione, come si trovò appunto costruendone qualcuna e confrontandola colla corrispondente cartina delle isocicloniche. Si ebbe così anche modo di rilevare delle variazioni nei tipi che si presentarono nei venticinquenni 1881-1905 e 1906-1930, sia per quanto riguarda la configurazione che la frequenza.

Continuando nello studio dell'applicazione e dell'applicabilità del metodo, il Professor TONIOLO, presentando al Congresso di Geografia di Amsterdam lo studio del FABRIS, illustrò mediante una tavola da me tracciata — contenente i diagrammi che riproducevano l'andamento della ciclonicità per tutto il 50.ennio sulle 25 zone esaminate dal FABRIS — le variazioni che nel corso del periodo suddetto si potevano dedurre nella distribuzione generale delle aree di alta e di bassa pressione.

Tali variazioni possono esser brevemente riassunte come segue:

a) aumento della frequenza ciclonica sul Bacino del Mediterraneo ed a nord della Scandinavia e delle isole Britanniche, particolarmente accentuato nell'ultimo decennio, in special modo sul Mediterraneo Orientale;

b) l'andamento del fenomeno « ciclonicità » dimostra la stessa periodicità della pressione, cioè è evidente la esistenza di un periodo che può ritenersi di lunghezza fra 33-35 anni o di lunghezza doppia. Ulteriori studi da me compiuti su altri fenomeni meteorologici ed idrologici sulla Pianura Padana fanno propendere più per il periodo di lunghezza doppia e cioè fra 66 e 70 anni (1).

Logicamente queste conclusioni fecero sorgere il desiderio di estendere collo stesso metodo lo studio della distribuzione delle aree di alta e di bassa pressione ad altre zone del Globo.

Dal 1930, a cura del « Meteorological Office » di Londra, sul Bollettino da esso giornalmente pubblicato si trovano le situazioni isobariche di tutto l'emisfero settentrionale. Su queste si concentrò la nostra

(1) A. MELICCHIA, *Variazioni climatiche e variazioni interdiurne della pressione (1881-1930)*. Comunicazione al Congresso della S. I. P. S. a Pisa (Ottobre 1933), Atti relativi.

osservazione ed il nostro studio e si venne alla decisione di limitare l'analisi e lo spoglio alla parte inferiore di queste carte giornalieri, come appare nella figura 3.

Si è limitato pertanto lo studio a quella fascia di Globo che, meteorologicamente e climatologicamente, interessa in modo diretto l'Europa (ed in particolare il Mediterraneo e l'Italia), cioè a quella fascia che comprende i « centri d'azione dell'atmosfera » dell'Atlantico e dell'Artide e la corrente del Golfo.

Ad una tale limitazione del nostro campo di studio si addivenne anche per la ragione che la distribuzione dei centri di osservazione nel campo prescelto risulta assai più fitta che nella restante parte dell'emisfero esclusa, occupata per la maggior parte da regioni deserte di vita.

Si è tentato per tal modo di inquadrare nettamente, nel giuoco di questi centri di azione principali, il centro di azione secondario del Mediterraneo la cui attività era stata resa già così evidente nel primo lavoro del FABRIS. E credo che, fin d'ora, si possa concludere di esser riusciti nell'intento.

La fascia di Globo che si è presa in esame risultante dalla figura 3, è stata suddivisa in 200 piccoli riquadri ciascuno dei quali è contraddistinto da un numero. I cento quadri risultanti a destra e contrassegnati in rosso corrispondono all'incirca al complesso di regioni europee prese in istudio dal FABRIS nella citata memoria.

Collo stesso metodo dunque si è eseguito lo spoglio delle carte isobariche del « Meteorological Office » del decennio 1930-1939 e si sono tracciate le carte che danno la situazione isociclonica di ogni mese, trimestre, semestre (freddo e caldo) ed anno, nel decennio considerato, nonchè le carte che per lo stesso periodo ce ne forniscono invece la situazione media.

Mentre lascio ad uno studio più approfondito l'esame particolareggiato delle prime, cercherò di porre in evidenza, in questa nota preliminare, i caratteri essenziali delle seconde, ed in particolare delle situazioni isocicloniche medie mensili.

Il FABRIS, traendo le conclusioni suggerite dalle cartine tracciate pel 50.ennio, metteva in evidenza che la situazione isobarica fondamentale europea è determinata da due strisce orientate secondo due assi: l'uno *anticiclonico* che si estende dalla Russia all'Atlantico passando

sull'Europa Centrale, l'*altro ciclonico* che si estende dal Circolo polare, tra l'Islanda ed il Mare di Norvegia, al Mediterraneo passando anch'esso sull'Europa Centrale. I due assi congiungono rispettivamente, il primo nuclei anticiclonici, il secondo nuclei ciclonici.

Lo spostamento dei due assi e dei sistemi ad essi collegati nei vari periodi dell'anno danno luogo a trasformazioni non sostanziali ma di configurazione, che determinano tutte le altre forme isobariche che si ritrovano sull'Europa e altresì le condizioni climatiche locali delle varie regioni interessate.

L'analogia tra le cartine relative al 50.ennio presentate dal FABRIS e quelle da me trovate relative al decennio, è spiccata ed evidente.

Tutt'al più, se differenze ci sono, esse si riferiscono al tracciato delle « isocicloniche » e non alle caratteristiche essenziali. E tali differenze sono dovute evidentemente alla maggiore estensione e completezza delle zone considerate, ed alla molto maggior suddivisione delle stesse (100 riquadri anzichè 25), che ha condotto naturalmente ad una più dettagliata disamina.

Mi pare possa così tornare di notevole interesse l'esposizione di alcune considerazioni di carattere generale riguardanti tutta la fascia di Globo considerata e di talune altre di carattere particolare riguardanti il Mediterraneo, che suggerisce l'esame delle configurazioni isocicloniche medie del decennio.

Durante i mesi di novembre, dicembre, gennaio, febbraio, marzo, quindi durante circa tutto il semestre freddo, e nel mese di aprile, si ha il predominio della striscia di bassa pressione da NO a SE, che si estende come si è detto dall'Atlantico nord-occidentale all'Asia Minore.

Durante i mesi di maggio, agosto, settembre ed ottobre tiene il predominio invece la striscia di alta pressione da SO a NE, dall'Atlantico alla Russia.

Durante il predominio della striscia di bassa pressione, sul Mediterraneo Centrale si stabilisce sovente la depressione secondaria, particolarmente nei mesi di novembre e dicembre.

Lo stabilirsi della striscia di alta pressione sul Mediterraneo, durante i mesi da giugno ad ottobre, è contemporaneo allo spostamento verso levante della striscia di bassa pressione.

La scissione della striscia di bassa pressione che si estende dall'Atlantico nord-occidentale all'Asia Minore, in due nuclei, uno oceanico

e l'altro mediterraneo, avviene durante il mese di maggio (fig. 4) ed in corrispondenza di essa si ha uno spostamento della depressione secondaria dal Mediterraneo Centrale al Mediterraneo Orientale, dove si fonde col vasto ciclone Asiatico, il quale durante i mesi di giugno e luglio invade tutta la Pianura Sarmatica.

È evidente poi, che mentre l'anello di bassa pressione, che si presenta alle latitudini temperate artiche (fig. 1), è connesso col fronte polare, ossia col fronte principale che separa l'aria artica dall'aria subtropicale più o meno temperata, la striscia di bassa pressione da NO, a SE interessante l'Europa Centrale ed il Mediterraneo, è in relazione con un fronte di natura prevalentemente stagionale, che separa l'aria continentale fredda russo-siberiana dall'aria temperata dell'Atlantico. In questo fronte stagionale convergono sul Mediterraneo tre altri fronti delimitanti altrettanti settori, i quali comprendono rispettivamente aria artica continentale, aria subtropicale africana ed aria temperata atlantica.

Il predominio della striscia di alta pressione, che si verifica all'incirca durante tutto il semestre caldo, è dovuto all'invasione di aria oceanica da occidente.

Rispetto alle carte presentate dal FABRIS, le nostre carte decennali presentano differenze nelle posizioni occupate dalle linee « isocicloniche » di valore corrispondente; queste differenze possono attribuirsi a variazioni di posizione dei sistemi isobarici e, se prolungate nel tempo, possono essere indici di variazione climatica.

È specialmente su questo punto che credo necessaria una più profonda e prolungata indagine, prima di ricavare conclusioni tali da potersi considerare definitive.

Tuttavia mi pare opportuno presentare, anche per giustificare quanto ho sopra detto, un grafico (fig. 5) il quale riproduce l'andamento della ciclonicità riferita ai mesi di luglio nel decennio, per un gruppo di riquadri compresi tra l'Europa Centrale ed il Mediterraneo, secondo i numeri rossi sulla cartina della figura 3.

Da questo grafico risulta evidente in generale la diminuzione della ciclonicità per tutto il complesso delle regioni considerate durante il decennio.

Esaminando ora i diagrammi della figura 6, che ci danno l'andamento annuo della ciclonicità sul bacino del Mediterraneo per tutto il periodo di anni considerato 1882-1939, si vede che la ciclonicità, dopo

aver raggiunto un massimo intorno al 1925, tende a diminuire, in accordo appunto coi diagrammi della figura 5.

Il confronto dell'andamento della ciclonicità con quello della pressione e di altri elementi meteorologici ed idrologici da me considerati nello studio sulle « Variazioni climatiche nella Pianura Padana » già citato, per i quali si rese evidente un periodo di circa 70 anni, ci fa attribuire lo stesso periodo anche alla ciclonicità. Questo periodo risulta a sua volta di due periodi della lunghezza di circa 35 anni, l'ultimo dei quali è appunto evidente nella figura 5, sui cui diagrammi si rilevano due massimi intorno al 1890 e al 1925 ed un minimo intorno al 1905.

L'andamento della ciclonicità corrisponde anche all'andamento della frequenza delle precipitazioni, che ad esempio per l'Italia nord-orientale, la cui ciclonicità è rappresentata, nella figura 6, dal diagramma contrassegnato dai riquadri 18-79, presenta, in corrispondenza, una diminuzione a partire dal 1928 circa.

È necessario però estendere l'indagine (che è in corso) a tutti gli altri mesi e all'anno, per tutti i riquadri considerati nel grafico della figura 5, perchè solo allora si potranno ritenere giustificate quelle conclusioni che si possono considerare legate a variazioni climatiche (sia pure di breve periodo) e che già sarebbero suggerite dalle carte costruite sulle frequenze dei quinquenni successivi. Si riportano ad esempio quelle delle situazioni isocloniche medie del mese di aprile, relative ai quinquenni successivi: 1930-1934, 1931-1935, 1932-1936, 1933-1937, 1934-1938, 1935-1939 (fig. 7, 8, 9, 10, 11, 12).

Da esse risulta una diminuzione di ciclonicità sull'Atlantico Settentrionale, uno spostamento dell'area di maggior frequenza ciclonica verso nord, un assottigliamento della stessa, un movimento di rotazione, che ha il suo centro fra l'Europa Centrale e le Isole Britanniche, nonchè una tendenza ad una maggiore e più estesa influenza dell'anticiclone russo-siberiano verso sud.

10 Maggio 1940.

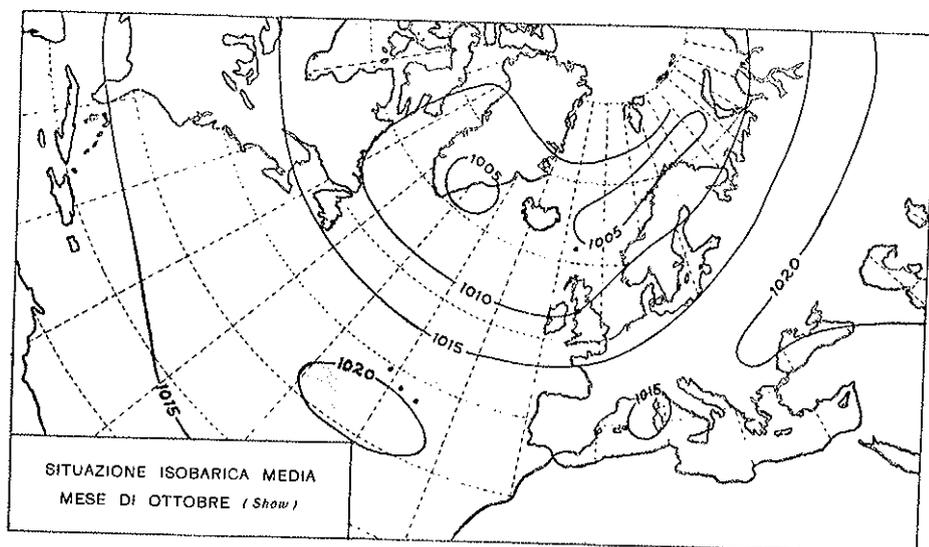


FIG. 1.

La situazione della intensità isobarica media del mese di ottobre nell'Atlantico Settentrionale, secondo lo Show.

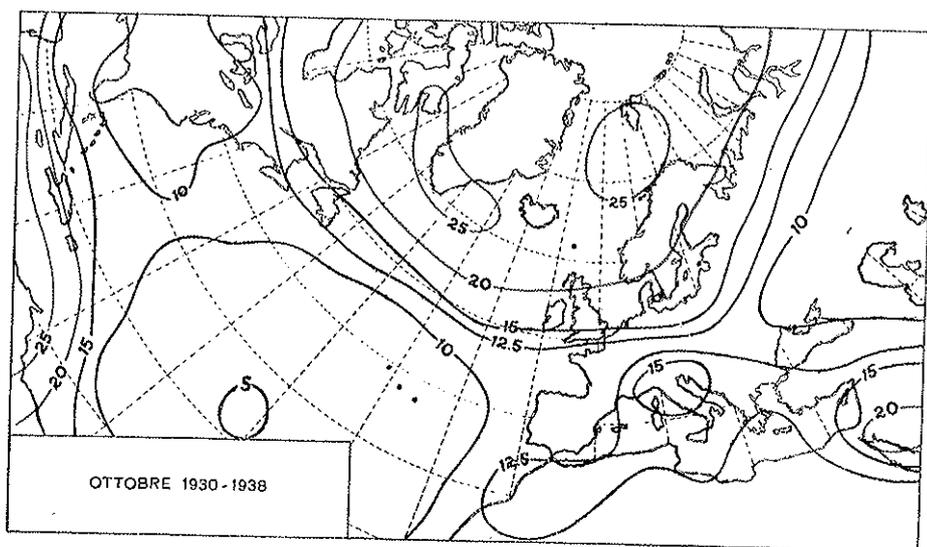


FIG. 2.

La situazione isociclonica della frequenza isobarica del mese di ottobre nell'Atlantico Settentrionale.

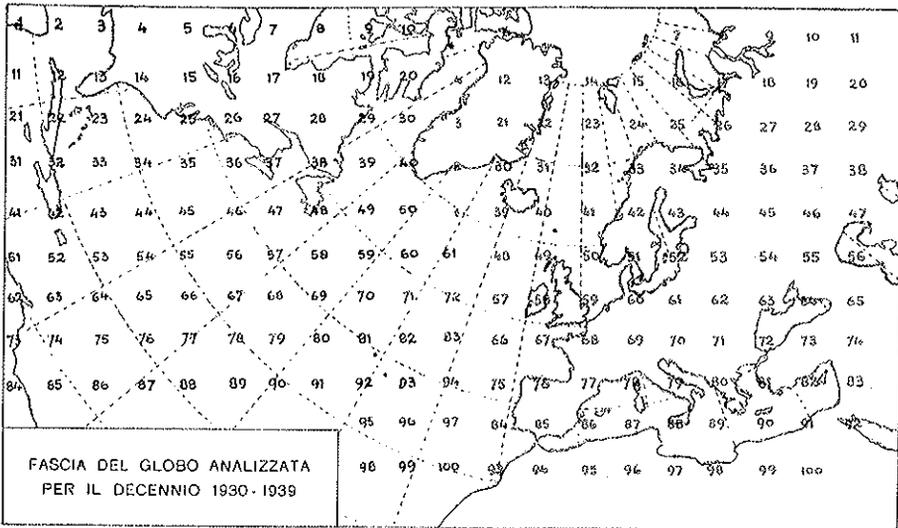


FIG. 3.

Spoglio dei dati giornalieri di pressione analizzati, col metodo FABRIS, nel decennio 1930-39. (I numeri rossi corrispondono ai dati isobarici dell'Europa, i numeri neri a quelli dell'Atlantico Settentrionale).

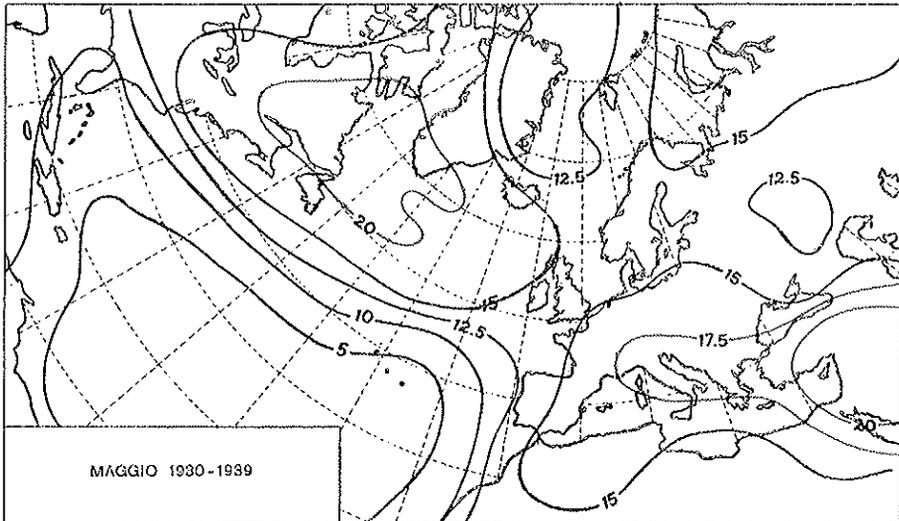


FIG. 4.

Sciissione della zona di bassa pressione (linee rosse) in due nuclei, atlantico e mediterraneo, durante il mese di maggio.

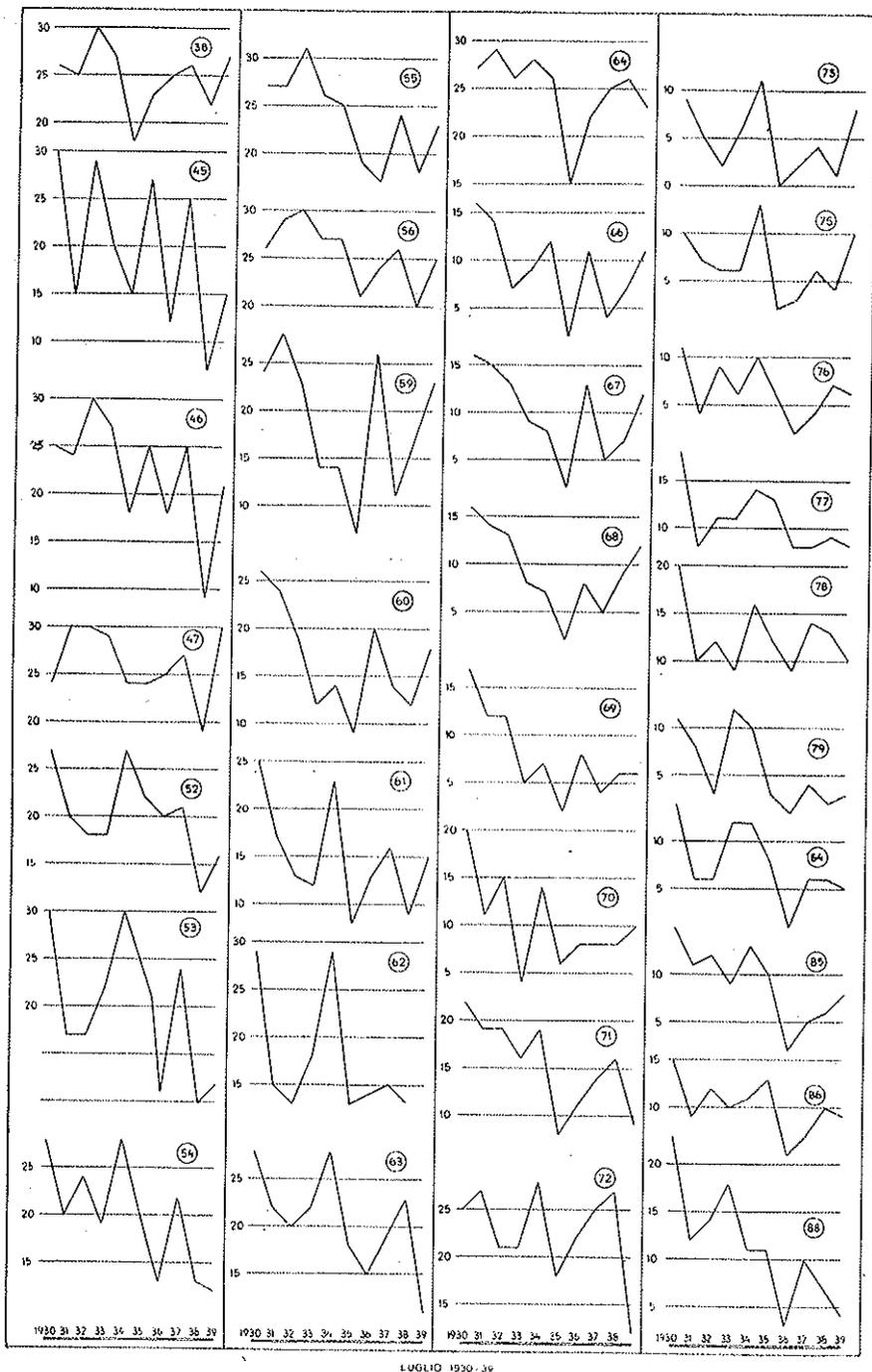


FIG. 5.

Andamento della ciclonicità dei mesi di luglio, nel decennio 1930-39, in alcuni riquadri (indicati per ogni singolo diagramma) sull'Europa Centrale e il Mediterraneo, segnati in rosso nella fig. 3.

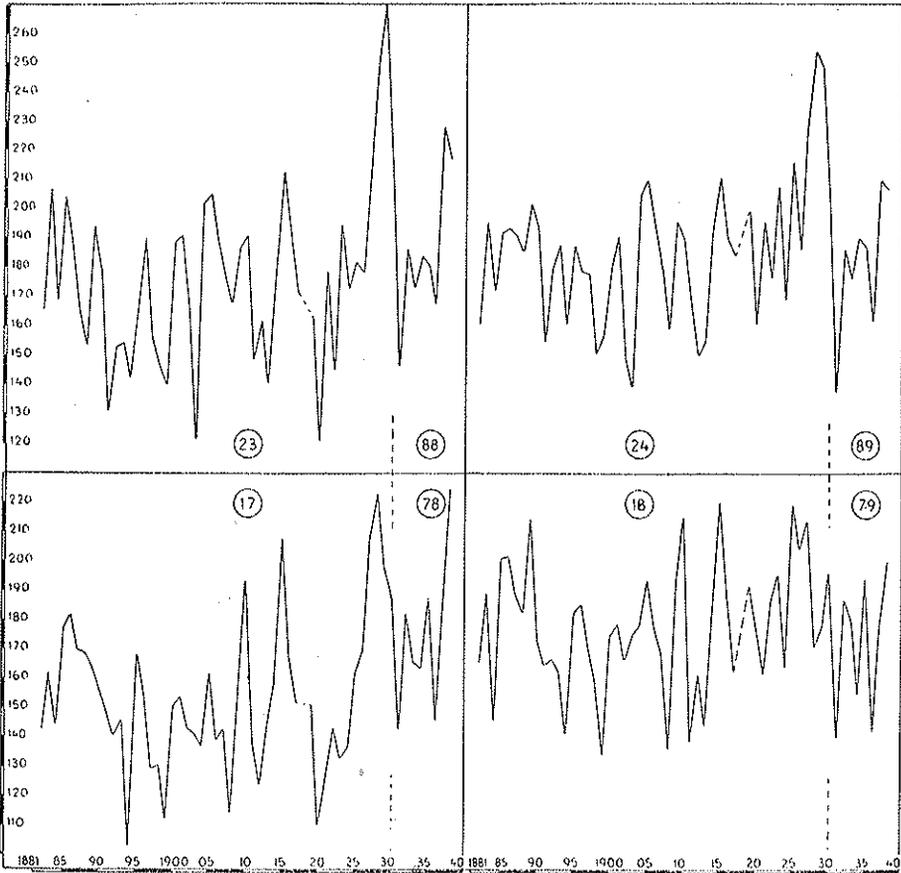


FIG. 6.

Andamento annuo della ciclonicità sul Mediterraneo dal 1882 al 1939.

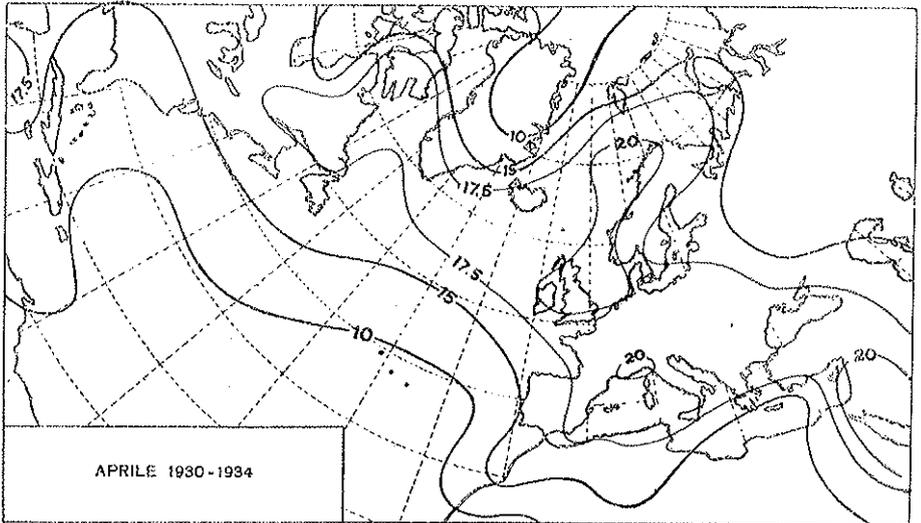


FIG. 7.

Situazione isociclonica media sull'Atlantico Settentrionale e sull'Europa nel mese di aprile del quinquennio 1930-34.

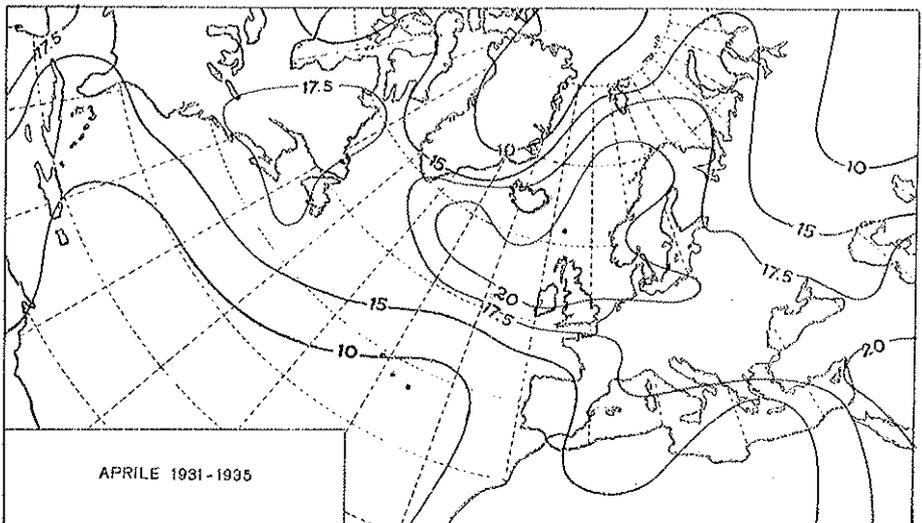


FIG. 8.

Situazione isociclonica media sull'Atlantico Settentrionale e sull'Europa nel mese di aprile del quinquennio 1931-35

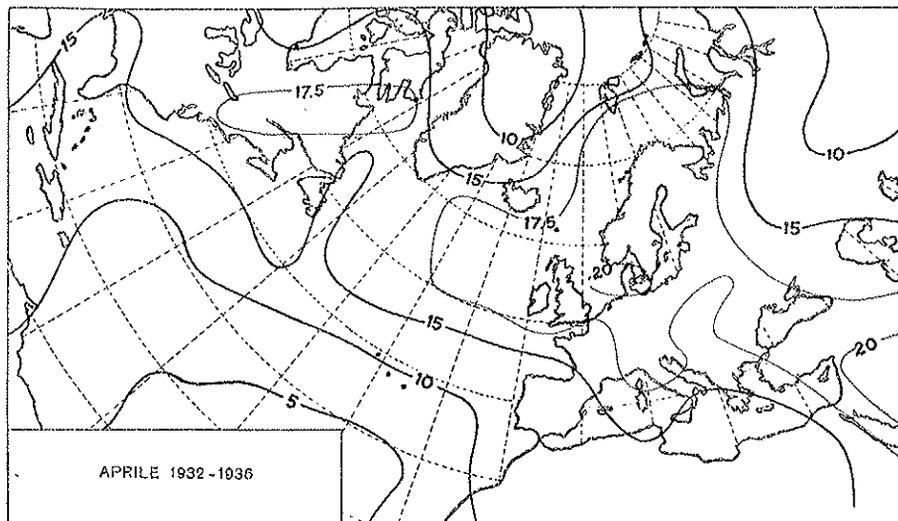


FIG. 9.

Situazione isociclonica media sull'Atlantico Settentrionale e sull'Europa nel mese di aprile del quinquennio 1932-36.

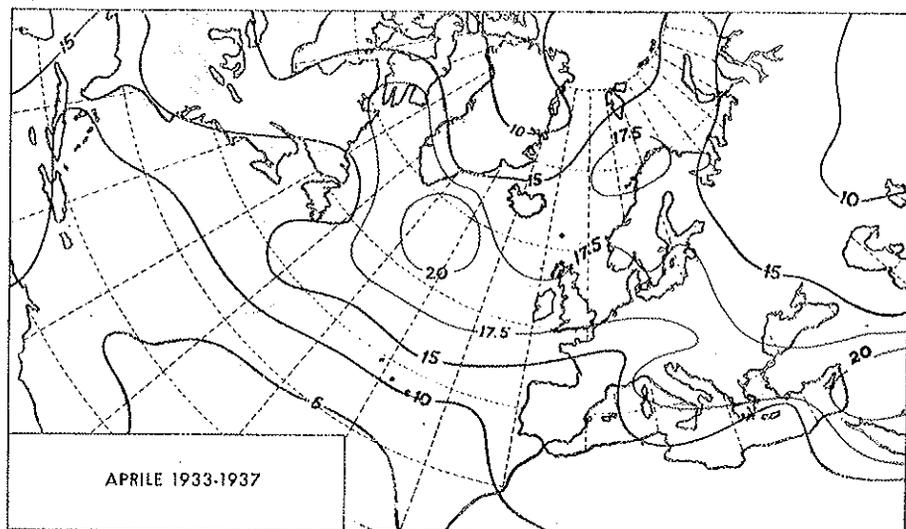


FIG. 10.

Situazione isociclonica media sull'Atlantico Settentrionale e sull'Europa nel mese di aprile 1933-37.

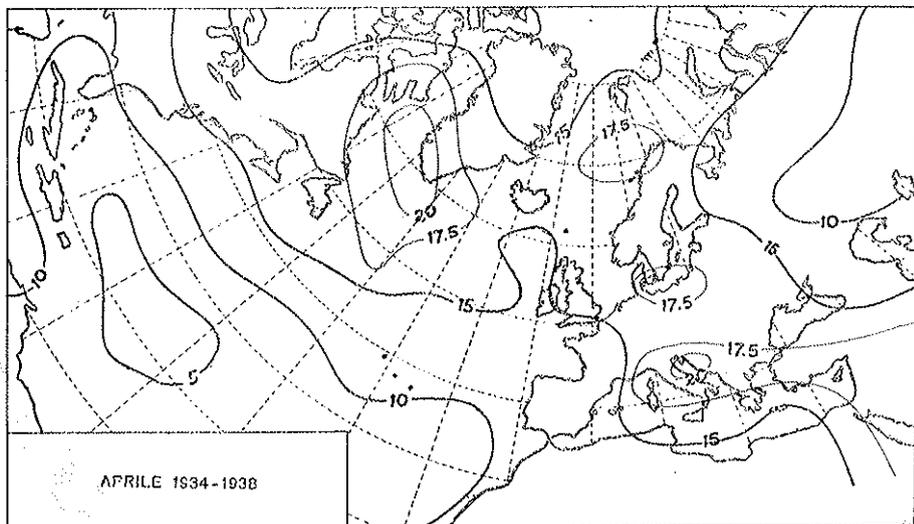


FIG. 11.

Situazione isociclonica media sull'Atlantico Settentrionale e sull'Europa nel mese di aprile 1934-38.

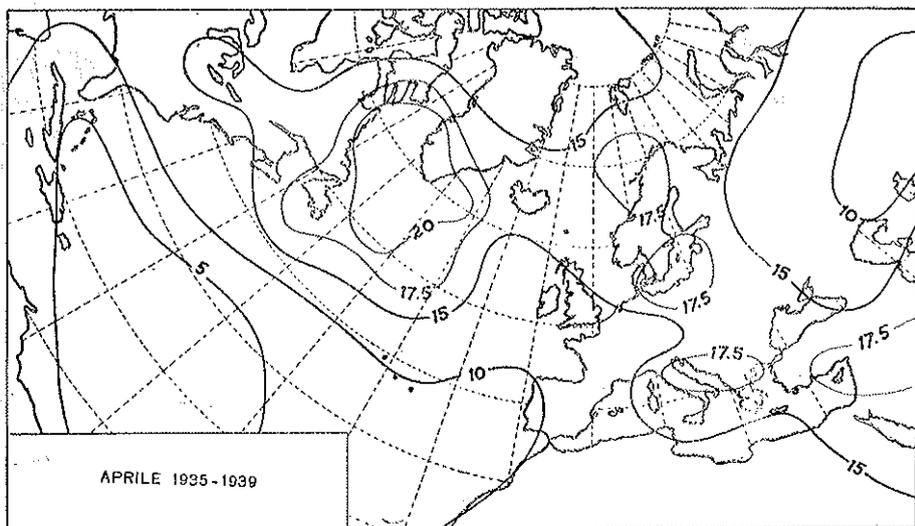


FIG. 12.

Situazione isociclonica media sull'Atlantico Settentrionale e sull'Europa nel mese di aprile del quinquennio 1935-39.

TEORIA E CALCOLO DELLE TRAVI CON ARMATURE PREVENTIVAMENTE TESE

(IL PROPORZIONAMENTO DELL'ARMATURA) (*)

(Con una figura)

GUSTAVO COLONNETTI

Accademico Pontificio

SUMMARY. — Quaerens auctor quam proportionem debeat futura extrui, determinat quomodo se habere debeat ut quam minimum materiae adhiberi possit.

Poniamo il problema:

Data la sezione retta di una trave in cemento armato, semplicemente inflessa, nonchè il valore del momento flettente massimo che essa è destinata a sopportare, determinare le condizioni a cui deve soddisfare la messa in tensione preventiva delle armature perchè sia in ogni caso evitata ogni sollecitazione a trazione nel calcestruzzo.

Adottiamo al solito come assi coordinati di riferimento l'asse neutro (x) e l'asse di sollecitazione (y) che, per semplicità, supporremo fra loro ortogonali.

E denotiamo:

con y' e $-y''$ le ordinate delle due tangenti t' e t'' al contorno della sezione, condotte parallelamente all'asse neutro;

con $-d'$ e d'' le ordinate degli antipoli C' e C'' di dette tangenti rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione (punti di nocciolo);

(*) Nota presentata il 26 giugno 1940.

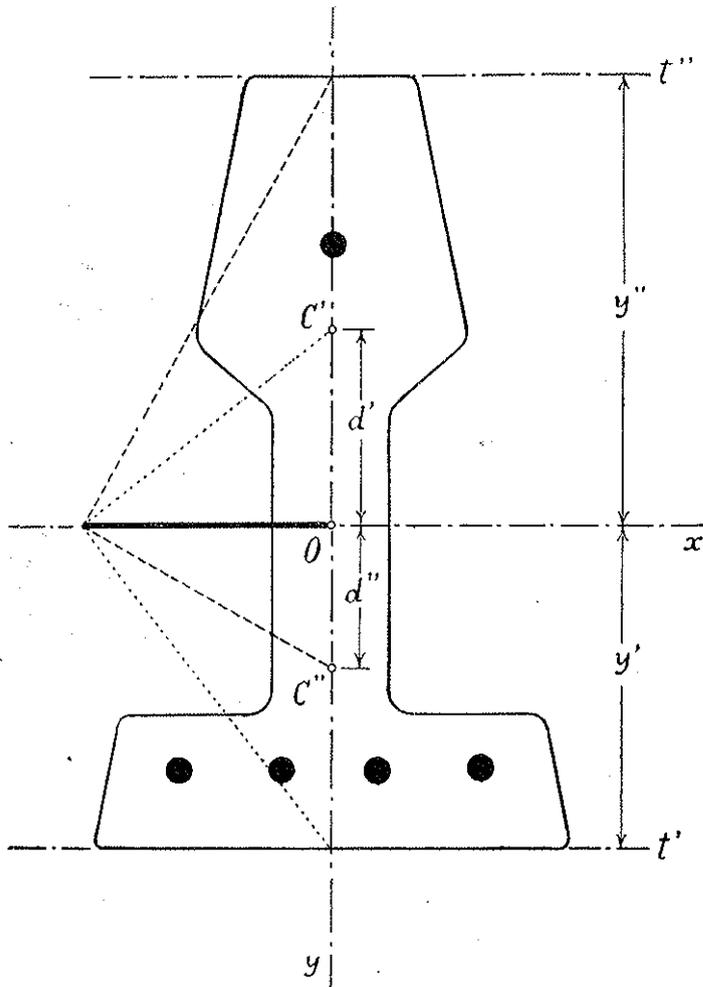


FIG. 1.

con σ' e $-\sigma''$ le tensioni unitarie nei punti di tangenza, dovute all'azione del momento flettente massimo (positivo) M , epperò suscettibili di essere espresse sotto la forma

$$\sigma' = \frac{My'}{J} \quad \sigma'' = \frac{My''}{J}$$

dove J è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro.

È noto che la voluta eliminazione di ogni sollecitazione a trazione nel calcestruzzo si ottiene quando la messa in tensione preventiva delle armature è tale che le tensioni unitarie a trave scarica, nei già ricordati punti di tangenza, risultano rispettivamente eguali a $-\sigma'$ ed a 0.

In tal caso infatti le corrispondenti tensioni risultanti sotto carico riescono rispettivamente eguali a 0 ed a $-\sigma''$.

Ora è facile constatare che, perchè ciò avvenga, occorre e basta che la risultante delle tensioni *applicate alle armature al momento del getto* abbia per punto di applicazione l'antipolo C'' e per grandezza

$$\frac{M}{d' + d''}$$

Se ne deduce che, a parità di momento flettente massimo, questa risultante sarà tanto più piccola quanto più grande sarà la distanza $d' + d''$ dei due antipoli.

Il problema dell'economia del materiale di cui son costituite le armature è dunque in primo luogo un problema di massimo della distanza $d' + d''$.

Sezioni cui compete lo stesso valore della distanza $d' + d''$ sono pertanto, sotto questo punto di vista, da considerarsi come equivalenti.

Resta il problema della più razionale disposizione delle armature entro la sezione della trave, e della loro messa in tensione.

Una soluzione praticamente soddisfacente di questo problema si ottiene se il baricentro della sezione metallica coincide coll'antipolo C'' ; in tal caso infatti le tensioni da applicare alle armature verranno uniformemente ripartite sulle armature stesse *se la messa in tensione si effettua, come d'uso, prima del getto*.

Se invece la messa in tensione viene eseguita *dopo la presa del calcestruzzo* ⁽¹⁾ in modo da realizzare direttamente lo stato di coazione a trave scarica, le tensioni da applicare alle armature dovranno esser

(1) G. COLONNETTI, *Di un nuovo procedimento per la messa in tensione delle armature nelle strutture in cemento armato*, Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. IV, 8, 1940. Cfr. anche: *Teoria e calcolo delle travi con armature*

tali da determinare sulla sezione di calcestruzzo (vale a dire: sulla sezione depurata dalle armature) quella certa distribuzione di tensioni i cui valori estremi sono precisamente $-\sigma'$ e 0.

Ora la seconda di queste due condizioni definisce la posizione della risultante delle tensioni — il cui punto di applicazione dovrà coincidere coll'antipolo della tangente t'' rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione depurata, come si è detto, dalle armature — mentre la prima ne definisce senz'altro la grandezza.

Per quel che si riferisce alla resistenza del calcestruzzo, giova osservare che le tensioni unitarie massime $-\sigma'$ (a trave scarica) e $-\sigma''$ (sotto carico) saranno tanto minori quanto maggiori sono i valori dei moduli di resistenza

$$\frac{J}{y'} \quad \text{e} \quad \frac{J}{y''}$$

Di qui la opportunità che *entrambi* questi valori siano i più grandi possibili.

A parità di momento d'inerzia e di altezza della sezione, le condizioni più favorevoli si realizzano quando y' ed y'' sono eguali.

Non è poi senza interesse avvertire che quel che si è detto qui a proposito della flessione semplice può facilmente estendersi al caso della presso flessione, quando si abbia l'avvertenza di prendere in considerazione i momenti di nocciolo.

È noto infatti che, nel caso della presso flessione, la tensione unitaria massima positiva — che si tratta di annullare per sovrapposizione, mediante la messa in tensione preventiva delle armature, di una tensione eguale e di segno contrario — può continuare ad esprimersi nel

preventivamente tese (il caso della presso-flessione), Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 2, 1940; *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (il problema della sezione parzializzata)*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 17, 1940.

modo dianzi indicato quando per M si assuma il minore dei due momenti di nocciolo.

L'altro momento di nocciolo si dovrà invece introdurre nella espressione della tensione unitaria massima negativa.

Resta così confermato che, a parità di valore del primo di quei momenti, il proporzionamento dell'armatura riuscirà tanto più economico quanto più grande sarà la solita distanza $d' + d''$ dei due antipoli.

Resta, in secondo luogo, confermato che, a parità di valore dei momenti di nocciolo, le tensioni unitarie massime nel calcestruzzo saranno tanto minori quanto maggiori sono i valori dei due moduli di resistenza.

Le condizioni più favorevoli si realizzano quando momenti di nocciolo e moduli di resistenza sono fra loro ordinatamente proporzionali; o, ciò che fa lo stesso, quando le distanze y' ed y'' sono inversamente proporzionali alle distanze del centro di sollecitazione dai due antipoli C' e C'' .

NOTE MALACOLOGICHE

(Con tre tavole fuori testo)

G. S. COEN

SUMMARIVM. — Descriptio nonnullarum varietatum novarum *Anomia ephippium* Linn. ac novae speciei subgeneris *Isomonina*. Descriptio novae speciei *Fissurellae*, adhuc errore cum *Diodora* confusae.

SU ALCUNE FORME DI ANOMIA.

ANOMIA EPHIPIUM Linneo

Questa specie, così straordinariamente polimorfa, presenta numerose varietà, ben note, e quasi tutte descritte come specie da Autori classici, ma talune delle quali hanno origine dall'habitat del mollusco, attaccato a conchiglie od altri corpi sommersi le cui asperità o scultura sono riprodotte dalle valve dell'*Anomia* in modo spesso sorprendente.

Così parecchie di tali forme andrebbero — a rigore — considerate zoologicamente come individuali od ambientali e non avrebbero vero valore di varietà propriamente dette: comunque, esse sono riconosciute e consacrate dall'uso e nei testi, e perciò non è inutile completarne la serie con la descrizione di altre non peranco descritte e che sembrano degne di nota⁽¹⁾.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi il 2 luglio 1940.

(1) BUCQUOY, DAUTZENBERG e DOLLFUS, nella loro classica opera sui *Mollusques marins du Roussillon*, (vol. II, pag. 31-41) non descrivono meno di nove varietà vere e proprie, elencandone altre sette, forme cui non riconoscono valore di varietà.

ANOMIA EPHIPIUM PLACUNOIDES NOV. VAR.

(Tav. I, fig. 1, 2)

Valva dextra non reperta.

Valva laeva plana circularis apice centrali submarginali acuto, tenuis sed solida, hyalina vitrea micans, extus plicis concentricis undulatis et undis radialibus tenuibus ornata, intus laevis lucens margaritacea, fossula ligamenti submarginali brevi, impressionibus muscutorum 4, generis ac speciei typicis.

La valva destra manca. La sinistra è piana, sottile ma solida, circolare, con apice acuto mediano submarginale, trasparente, vitrea, lucente. La scultura esterna consiste in strie di accrescimento plici-formi concentriche ondulate e leggerissime onde radiali; la faccia interna è liscia lucidissima di splendore submadreperlaceo: le 4 impressioni degli adduttori di valve e bisso sono tipiche, le tre inferiori bene incise in un'area opaca allungata scendente dall'umbone al centro.

Diametro: umbo-ventrale mm. 35; antero-posteriore mm. 40.

N. B. - Questa varietà è prossima alla *A. membranacea* di LAMARCK dei cui caratteri rappresenta, per così dire, l'esagerazione. L'aspetto della valva si avvicina tanto, a prima vista, a quello di una *Placenta* (= *Placuna*, olim) da meritarse il nome. L'esemplare proviene da Cuma, di dove mi fu favorito dal Prof. O. DE FIORE.

ANOMIA EPHIPIUM INVOLVENS NOV. VAR.

(Tav. I, fig. 3, 4, 5, 6)

Valva dextra non reperta.

Valva laeva incurva imbriciformis tenuis solida, extus asperrima costis radialibus conspicuis valde rugosis ac squamiferis, intus laevis margaritacea lucens.

Valva destra mancante.

Valva sinistra curva semicilindrica in forma di tegola, sottile ma solida; esternamente ruvida, ornata di coste radiali rugosissime e squa-

mose, come, ma assai più che la *A. aspera* Philippi; queste coste sono proprie dalla *Anomia* in sè e non hanno origine da scultura od asperità di un substrato, come dimostra la loro disposizione nettamente radiale e l'interno della valva, liscio, lucente e non solcato.

Figuro due esemplari di aspetto diversissimo: l'uno, di Palermo, è cresciuto in lunghezza con l'umbone quasi terminale, perchè l'asse umbo-ventrale dell'embrione coincideva più o meno con una generatrice del corpo cilindrico cui si era attaccato; l'altro, di Napoli, fissatosi ad un corpo pure cilindrico ma con l'asse umbo-ventrale ad un forte angolo con la generatrice del cilindro, crebbe con la curvatura della conchiglia parallela ad una linea pseudo-cardinale, cagionata a sua volta da un ostacolo lungo il cilindro. Ponendo mente a ciò non parrà strana la grande diversità dei due esemplari, appartenenti allo stesso fenomeno ed alla stessa varietà, malgrado l'aspetto pseudo-alato dell'esemplare di Napoli.

BUCQUOY, DAUTZENBERG e DOLLFUS ⁽¹⁾ citano la *A. cylindrica* Gmelin (= *cymbiformis* Maton-Rackett) come piccola forma crescente su gambi di *Fucus*, compresa da Linneo nella sua *A. squamula*, e perciò piccola e liscia, ben diversa dalla forma ora descritta.

ANOMIA EPHIPIUM PARTIM-RADIATA NOV. VAR.

(Tav. I, fig. 7, 8)

Valvae usque ad medium radiatae sicut *A. radiata* Brocchi, post sine radiis.

La conchiglia sulla quale l'*Anomia* si era fissata in gioventù era evidentemente un piccolo *Cerastoderma*, la cui scultura è riprodotta con precisione mirabile nella prima metà di ambe le valve: però l'*Anomia*, superando nel suo sviluppo le dimensioni del suo supporto, continuò a crescere libera, così che la parte seguente delle due valve, spessa e rugosa, non offre più alcuna traccia di scultura radiale, ma piuttosto un aspetto rozzamente lamellare.

(1) *Op. cit.*, vol. II, pag. 39.

L'individuo figurato, assai caratteristico e forse unico, è certamente mediterraneo, probabilmente napoletano; porta un numero di qualche vecchia raccolta di cui faceva parte.

ANOMIA EPHIPIUM DANILIAE NOV. VAR.

(Tav. I e II, fig. 9, 10)

Anomia ad testam *Daniliae Tinei* Calcara adhaerens, sculpturam ipsae conspicue ferens.

Come DANILO e SANDRI ⁽¹⁾ descrivono la rarissima *Anomia Trochi*, attaccata alla spira di un *Jujubinus striatus* di Zara, credo meriti menzione questa forma ben diversa ma di analoga origine, rarissima ed anzi, credo, rappresentata da un esemplare unico (mia collezione) che ho staccato da un individuo di *Danilia Tinei* Calcara di Lipari (Monterosato). Meglio di ogni descrizione vale la riproduzione fotografica.

ANOMIA EPHIPIUM FLORIDANA CARDII NOV. VAR.

(Tav. II, fig. 11, 12)

Ho ricevuto da Sarasota Bay, Florida, un'*Anomia* col nome di *A. ephippium*.

Sono assai dubbioso nell'attribuire veramente alla nostra specie questa forma di habitat tanto lontano e tanto diverso: BUCQUOY, DAUTZENBERG e DOLLFUS ⁽²⁾ ripetono quanto scrive SMITH sul rinvenimento di esemplari «semblant appartenir à l'*A. ephippium*» dal Brasile fino alle Isole Nightingale e Tristan da Cunha, a un centinaio di metri di profondità: comunque, in America così li chiamano, perciò colgo l'occasione di figurarne uno, indicandolo come varietà *floridana*, perchè è anche notevole, mentre, fissato ad un grosso *Cardium*, ne riproduce

⁽¹⁾ DANILO e SANDRI, *Elenco nominale dei molluschi lamellibranchi marittimi dei dintorni di Zara*, litogr., 1856, n. 2, pag. 2. Vedi anche B. D. D., *op. cit.*, vol. II, pag. 40.

⁽²⁾ *Op. cit.*, vol. II, pag. 40.

la scultura su ambe le valve, che sono candide e jaline, e, l'apice coincidendo con quello del *Cardium*, danno all'esemplare un aspetto curiosissimo.

SUB-GENUS ISOMONIA, Dautzenberg e Henri Fischer, 1897.

ISOMONIA CONCAVA nov. spec.

(Tav. II, fig. 13-14, 15-16)

Valva dextra adhaerens convexa, tenuis ac fragillima, translucens, foramine amplo rotundato, condylo cardinali anterior solido bene evoluto; extus sublaevis, irregulariter concentricè undulata ac striata; intus sublucens, macula magna centrali rudi opaca.

Valva laeva concava solida marginibus incrassatis, extus rudissima, intus sublaevis, submargaritacea; apex indistinctus; intus fossula cardinalis subcentralis in margine cardinali subrecto antice et postice obtuse angulato, area interna centralis rudis, impressionibus musculorum adductorium byssi ac valvae unicis confluentibus signum 8 facientibus.

Valva dextra aderente convessa sottile e fragile, con forame ampio e condilo cardinale solido bene sviluppato; esternamente abbastanza liscia ondulata e striata concentricamente irregolarmente. L'interno è sublucido con una larga macchia centrale opaca dove si distingue l'impressione dell'adduttore.

Valva sinistra concava solida e spessa con orlo ingrossato, a contorno esattamente coincidente con quello della sinistra: esternamente ruvida; dentro lucida con stretto orlo madreperlaceo, presenta la fossula ligamentare sottoapicale situata nel mezzo di un margine cardinale subretto terminato da due angoli ottusi, ed una vasta macchia opaca ruvida non nettamente delimitata ne occupa il centro. In tale macchia od area centrale si notano solo le impressioni muscolari degli adduttori delle valve e del bisso, unite in una sola, della forma di un 8.

Le due impressioni confluenti e la posizione dell'apice nel mezzo di un orlo cardinale retto sono i caratteri del sottogenere *Isomonía*, fondato da DAUTZENBERG e FISCHER sopra una sola valva sinistra trovata dal Principe Alberto di Monaco alle Azzorre e nuovo per il Mediterraneo come lo è la specie qui descritta.

Rappresento due diversi esemplari, tolti da me dall'interno di valve morte di *Isocardia cor* di Tripoli; un terzo ne ho di Napoli, pure certo staccato dalla superficie interna di una valva morta.

Fig. 13-14: diametro, umbo-ventrale mm. 27; antero posteriore mm. 33. Fig. 15-16: diametro umbo-ventrale, mm. 38; antero-posteriore mm. 36.

ISOMONIA (?) SIMPLEX d'Orbigny

(Tav. III, fig. 17, 18, 19, 20)

Riproduco qui un esemplare di *I. simplex* Orb. ricevuto da Gulfport, Florida. In esso le impressioni muscolari sono meno riconoscibili, perchè poco impresse su un'area spessa e callosa; ma l'habitus generale e l'orlo cardinale retto fanno ritenere che la specie appartenga al sottogenere.

L'individuo rappresentato era evidentemente fissato entro una conchiglia morta, come quelli della *I. concava*; il solco trasversale, al disopra del quale la valva destra è esternamente liscia mentre è lamellarmente rugosa al disotto, e la presenza di una *Serpula*, attaccata a questa parte inferiore, dimostrano che il mollusco, cresciuto dapprima entro una conchiglia, si è poi sviluppato libero oltre il labbro o margine di questa, che ha impresso il solco sopra accennato.

Diametro: umbo-ventrale mm. 34; antero posteriore mm. 35.

UNA FORMA DI *FISSURELLA* NUOVA O MISCONOSCIUTA.

FISSURELLA (CREMIDES) *DIODOROPSIS* nov. spec.

(Tav. III, fig. 21, 22, 23)

Testa conica convexa postice gibbosa, apice medio-antico, foramine oblongo lateribus parallelis; extus costibus radialibus conspicuis majoribus ac minoribus alternatis et funiculis concentricis rudibus cancellata; intus laevis, circine periforaminali conspicuo impressionibus radialibus brevibus profunde delimitato.

Apertura antice attenuata, postice amplior, labio arcuato, costulis externis profunde denticulato ac breviter sulcato.

Colore extus albicans, intus candida.

Conchiglia conica convessa, posteriormente un poco gibbosa, con apice medio-anteriore e forame oblungo a lati paralleli raccordati con semicerchi; scultura esterna consistente in costule radiali maggiori e minori alternate e fuiculi concentrici che rendono la superficie cancellata. Interno liscio, con forte cercine attorno al forame, circondato da brevi profonde impressioni radiali. Apertura anteriormente attenuata, posteriormente arrotondata, con peristoma arcuato, profondamente denticolato e brevemente solcato in corrispondenza delle costule radiali esterne.

Questa specie assomiglia moltissimo, a prima vista, alla *Diodora gibberula* Lamarck (= *Fissurella gibba* Philippi) con la quale è stata spesso confusa, tanto che posseggo tubetti di varie provenienze, alcuni di MONTEROSATO, che contengono le due forme frammischiate: ciò spiega come naturalisti attenti come MONTEROSATO e gli stessi BUCQUOY, DAUTZENBERG e DOLLFUS non abbiano posto mente alla callosità o cercine interno circondante il forame: infatti quello della *Diodora gibberula* è triangolare, ed anteriormente troncato e « appliqué » come B. D. D. descrivono essere nella *D. Italica* ⁽¹⁾, carattere questo tipico del genere *Diodora* Gray 1821 (sottofamiglia Emarginulinae), mentre nella nostra specie circonda egualmente da ogni lato il forame, come è in caso nelle *Fissurella* Bruguières 1789 (sottofamiglia Fissurellinae); ed è curioso che nessuno lo abbia osservato nella forma qui descritta.

Ne ho esemplari di Linosa e Pantelleria, uno dei quali riproduco, oltre quelli confusi coll'altra specie, ed uno fossile, del quaternario di Nizeti, ded. DE FIORE.

Dimensioni: $L = \text{mm. } 15$, $l = 10$, $h = \text{mm. } 7$.

(¹) *Op. cit.*, I, pag. 448.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE.

| | | | |
|---------|---------------------------------|-------------------------|---|
| Fig. 1. | <i>A. ephippium placunoides</i> | | - Valva sinistra, Napoli, esterno 1,5 × 1. |
| » 2. | » | » | - Valva sinistra, Napoli, interno 1,5 × 1. |
| » 3. | » | <i>invovens</i> | - Valva sinistra, Palermo, esterno 1 × 1. |
| » 4. | » | » | - Valva sinistra, Palermo, interno 1 × 1. |
| » 5. | » | » | - Valva sinistra, Napoli, esterno 1 × 1. |
| » 6. | » | » | - Valva sinistra, Napoli, interno 1 × 1. |
| » 7. | » | <i>partim-radiata</i> | - Esterno, dalla valva sinistra, 8 × 1. |
| » 8. | » | » | - Esterno, dalla valva destra, 8 × 1. |
| » 9. | » | <i>Dariliae</i> | - Esterno, dalla valva sinistra, 8 × 1. |
| » 10. | » | » | - Esterno, dalla valva destra, 8 × 1. |
| » 11. | » | <i>floridana Cardii</i> | - Esterno, dalla valva sinistra, 1,5 × 1. |
| » 12. | » | » | - Esterno, dalla valva destra, 1,5 × 1. |
| » 13. | <i>Isomonina concava</i> | es. I | - Valva sinistra, Tripoli, interno, 4,5 × 1. |
| » 14. | » | » I | - Valva destra, Tripoli, interno, 1,5 × 1. |
| » 15. | » | » II | - Esterno dalla valva sin., Tripoli, 1,5 × 1. |
| » 16. | » | » II | - Esterno dalla valva destra, Tripoli, 1,5 × 1. |
| » 17. | » | <i>simplex</i> | - Valva sinistra, esterno, 1,5 × 1. |
| » 18. | » | » | - Valva sinistra, interno, 1,5 × 1. |
| » 19. | » | » | - Valva destra, esterno, 1,5 × 1. |
| » 20. | » | » | - Valva destra, interno, 1,5 × 1. |
| » 21. | <i>Fissurella diodoropsis</i> | | - Esterno, 2 × 1. |
| » 22. | » | » | - Interno, 2 × 1. |
| » 23. | » | » | - Lato destro, 2 × 1. |

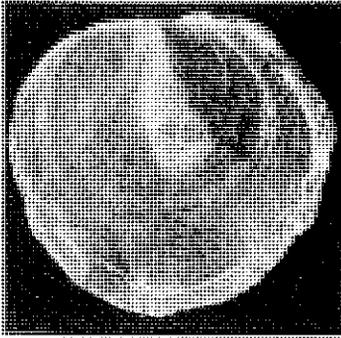


FIG. 1.

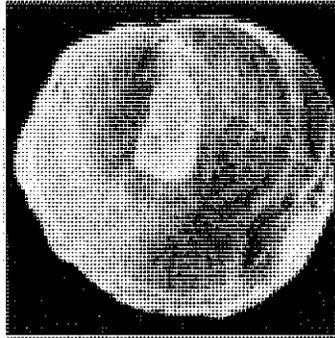


FIG. 2.

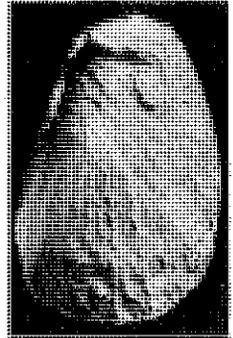


FIG. 3.

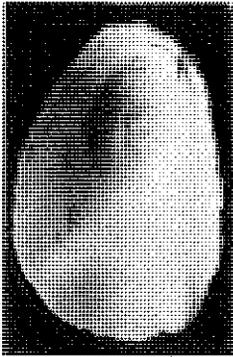


FIG. 4.



FIG. 5.

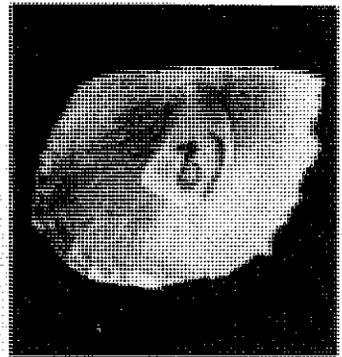


FIG. 6.

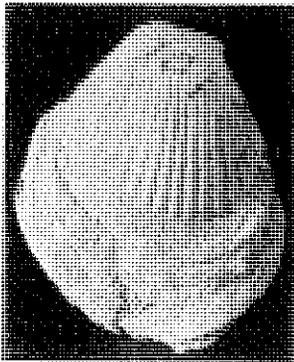


FIG. 7.

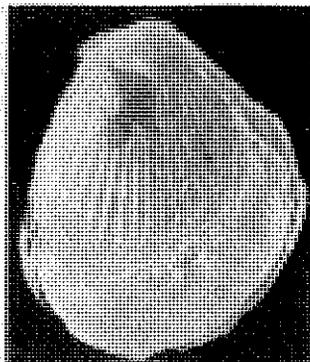


FIG. 8.

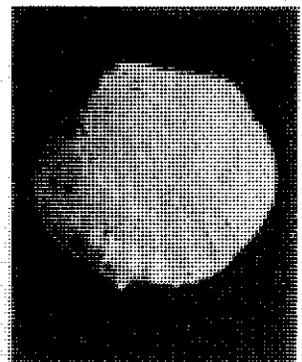


FIG. 9.

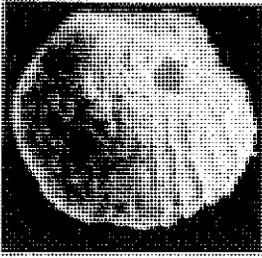


FIG. 10.

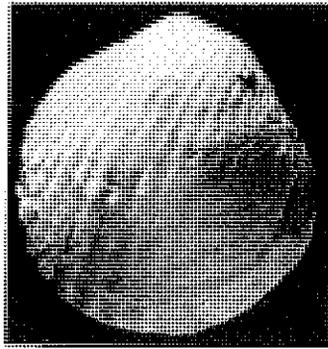


FIG. 11.

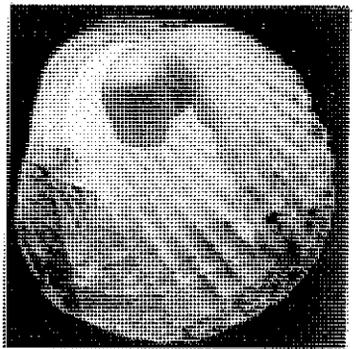


FIG. 12.



FIG. 13.

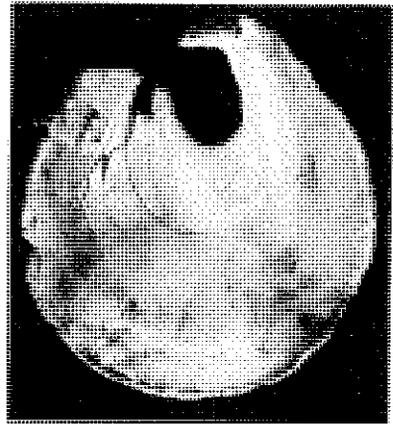


FIG. 14.

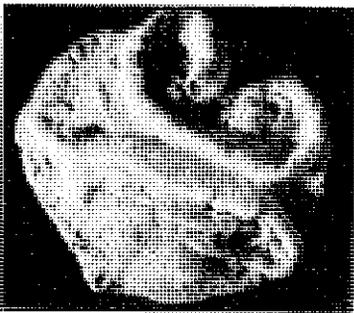


FIG. 15.

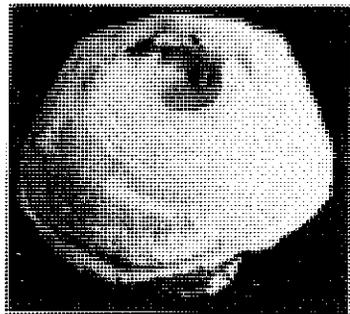


FIG. 16.

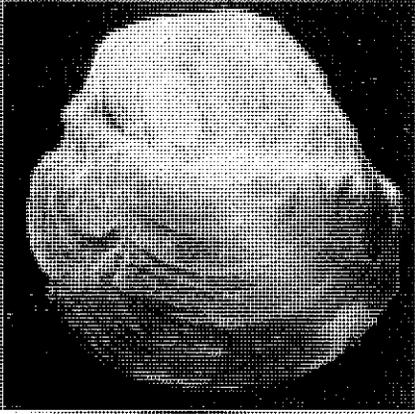


FIG. 17.

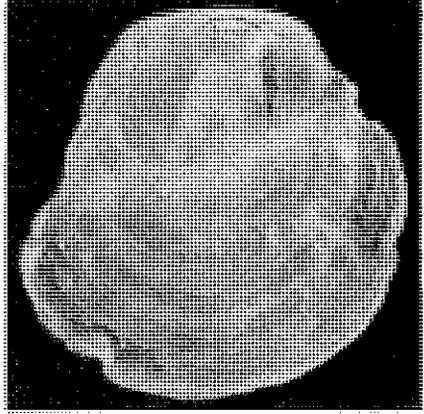


FIG. 18.

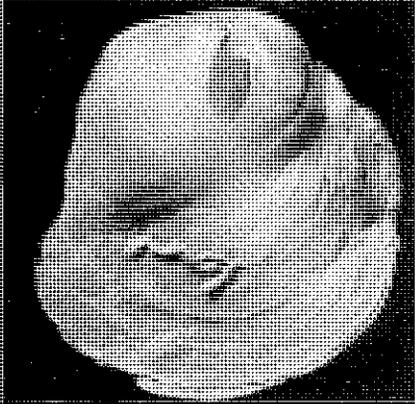


FIG. 19.

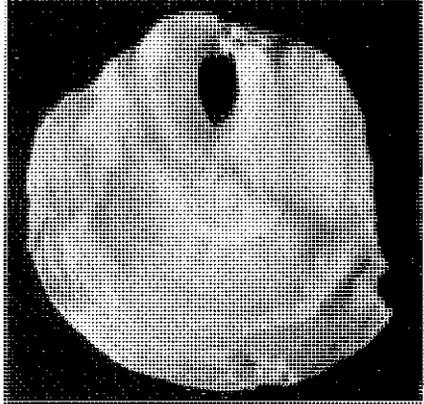


FIG. 20.



FIG. 21.



FIG. 22.



FIG. 23.

SUL CALCOLO DEL REGIME PERIODICO NEI SISTEMI ELETTRICI CONTINUI SOTTOPOSTI A F.E.M. PERIODICHE DI FORMA QUALUNQUE (*)

(Con una figura)

GIUSEPPE APRILE

SUMMARIVM. — Auctor ostendit quomodo methodus, qua peculiaris « variatio libera » addenda « phaenomeno insertionis » perquiritur, extendi possit etiam ad systemata electrica continua, ut periodica regimina computentur.

1. — In un precedente studio ⁽¹⁾ mi sono occupato della ricerca dello stato di regime in circuiti sottoposti a f. e. m. periodiche di forma qualunque, con una trattazione di sufficiente generalità da essere applicabile, sostanzialmente, anche ai sistemi continui. Per questi, tuttavia, intervengono tali circostanze, da rendere opportune alcune particolari considerazioni, circa l'impiego del metodo ivi esposto.

Che anche in un sistema elettrico *continuo*, cioè a parametri fisici distribuiti, limitato od illimitato, caratterizzato da linearità e da dissipazione non nulla, una f. e. m. periodica debba dare effettivamente luogo ad uno stato di regime periodico, può venire dimostrato diret-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi il 30 luglio 1940.

(¹) Nota precedentemente presentata all'Accademia Pontificia, dall'Accademico G. Giorgi (*Sul calcolo degli stati di regime in circuiti sottoposti a f. e. m. periodiche di forma qualunque* (« Acta », Anno IV, Vol. IV, n. 15).

tamente, nei singoli casi particolari. Volendo dare una dimostrazione generale, sintetica, può osservarsi che i singoli « periodi » della f. e. m. sono tutti uguali: questo fatto dà luogo ad una vera e propria *simmetria temporale* (indifferenza rispetto al trascorrere di un numero intero di periodi); e non potendo l'*effetto* esser meno simmetrico della *causa*, ne consegue che l'evoluzione del sistema, prodotta dalla f. e. m., deve essere anch'essa periodica. Questa dimostrazione vale evidentemente anche per sistemi non lineari, purchè però *normali*, cioè aventi proprietà non variabili col tempo.

Volutamente ho escluso i sistemi non dissipativi (che d'altronde hanno solo importanza teorica) perchè in essi può talvolta non sussistere un vero regime periodico di ampiezza finita. Non vi è però ragione di escludere quei sistemi di composizione puramente reattiva che tuttavia si comportano come dissipativi, perchè suscettibili di convogliare energia all'infinito (come per esempio una linea elettrica semi-infinita senza perdite, oppure lo spazio fisico vuoto).

2. - Il metodo esposto nello studio sopra citato si fonda sul fatto che il « regime periodico » differisce dal « fenomeno di inserzione » per una « variazione libera » particolare. Supposto pertanto noto il fenomeno di inserzione, per ottenere il regime desiderato basta sommarvi algebricamente la detta variazione libera, talchè il problema è ridotto alla ricerca di questa.

I sistemi continui sono affetti da un numero infinito (infinità *continua*) di *gradi di libertà*, e pertanto lo « stato iniziale », che produce una variazione libera generica, è dato (per ognuna delle grandezze fisiche distribuite caratterizzanti l'attitudine del sistema a contenere energia) non da un *valore* ma da una *funzione* delle coordinate geometriche. L'energia posseduta dal sistema viene ad assumere pertanto la forma di un *funzionale* dipendente da tale funzione.

In pratica questa generalità viene limitata dal fatto che si considerano fenomeni relativi ad un modo ben determinato di impiego del sistema fisico in esame. Gli stati iniziali che entrano in gioco appartengono allora ad un campo funzionale ristretto: possono per esempio avere un dato andamento definito a meno di un certo parametro numerico. Il funzionale di cui sopra diviene allora un *funzionale misto*,

che, riguardato come dipendente solo dal detto parametro, può identificarsi con una funzione ordinaria.

Supponiamo che in un certo sistema continuo, uno stato iniziale $A(x)$ dia luogo ad una determinata variazione libera \mathcal{L} comunque complicata, anche con onde di propagazione, ecc. Per la linearità del sistema, uno stato iniziale $kA(x)$ darà luogo ad una variazione libera $k\mathcal{L}$ che, a parte il moltiplicatore k , ha uguale andamento della precedente. La ricerca di una particolare variazione, nella classe delle $k\mathcal{L}$ viene pertanto ricondotta alla ricerca del numero k . Ciò è suscettibile di applicazioni pratiche, per le calcolazioni.

La variazione libera generica \mathcal{L} rappresenta il successivo passaggio, nel tempo, attraverso una infinità continua di *stati* S del sistema, funzione ciascuno delle coordinate geometriche. La \mathcal{L} è rappresentabile pertanto da una successione di infinite trasformazioni infinitesime, trasformanti ogni *stato* in quello relativo all'istante successivo, oppure da una molteplicità continua di funzioni.

Nei casi in cui i singoli *stati* S della molteplicità possano individuarsi mediante i valori di un parametro numerico k , questo viene a determinare il contenuto energetico, con un ruolo analogo a quello di coordinata lagrangiana. Allora, e specie se il parametro numerico agisce da semplice moltiplicatore di una funzione fissa, la trattazione pratica diviene simile a quella concernente i sistemi a parametri fisici concentrati, ciò che rende adoperabile con vantaggio il metodo di cui si è discusso in principio di questo paragrafo, come si scorderà nell'esempio numerico che segue.

3. *Esempio numerico.* - Consideriamo un cavo elettrico semi-illimitato affetto *solo* da resistenza distribuita R e da capacità distribuita C , alimentato all'origine da una f. e. m. pulsante rettangolare E attraverso una resistenza concentrata r .

Siano: $R = 0,01$ ohm/m; $C = 10^{-12}$ farad/m; $r = 10$ ohm. La f. e. m. abbia il periodo $T = 2,65 \times 10^{-8}$ sec, e in ogni periodo sia $E = E_a = 10$ volt per i primi 2×10^{-8} sec ed $E = 0$ per il resto. Si tratta di trovare il regime periodico, per la corrente I di alimentazione.

(N. B. L'andamento della f. e. m. è stato scelto in modo da avere diagrammi espressivi, senza speciale riferimento a casi pratici possibili).

Per calcolare il fenomeno d'inserzione dovuto alla f. e. m. pulsante E conviene tener presente che questa nel primo periodo può rappresentarsi come somma delle due f. e. m. E_1 ed E_2 :

$$E_1 = E_a \times 1(t) \text{ volt}$$

$$E_2 = - E_a \times 1(t - 2 \times 10^{-8} \text{ sec}) \text{ volt}$$

ove la notazione $1(t)$ (GIORGI) indica la « funzione telegrafica unitaria ». Il problema è così ricondotto alla determinazione dell'effetto di una f. e. m. eguale a

$$E_a \times 1(t) = 10 \times 1(t) \text{ volt}$$

Con il calcolo operatorio, o altrimenti, si trova che tale effetto I_a è dato dalla formola

$$I_a = \frac{E_a}{r} e^{\omega} \left[1 - \Phi \left(\frac{1}{\omega^{\frac{1}{2}}} \right) \right]$$

ove è $\omega = \frac{Rt}{r^2 C}$; e Φ è la nota funzione di GAUSS, integrale della « erroris functio » (Fehlerintegral).

È possibile così tracciare (fig. 1) la curva a che dà l'effetto di E_1 e la curva b , sovrapponibile alla precedente che dà l'effetto di E_2 . Sommando le ordinate si ottiene la c_1, d_1 , che rappresenta il fenomeno d'inserzione dovuto alla E nel primo periodo. La d_1 è evidentemente una variazione libera, che possiamo prolungare con d nel secondo periodo, e che sommata con il fenomeno d'inserzione trovato ci permette di avere la continuazione di questo (c_2, d_2) nel secondo periodo.

La variazione libera che bisogna sommare algebricamente al fenomeno di inserzione, per avere il regime periodico, è del tipo della d da cui differisce per un fattore numerico k che si tratta di trovare.

Per la periodicità dev'essere (v. figura):

$$km = m + kn$$

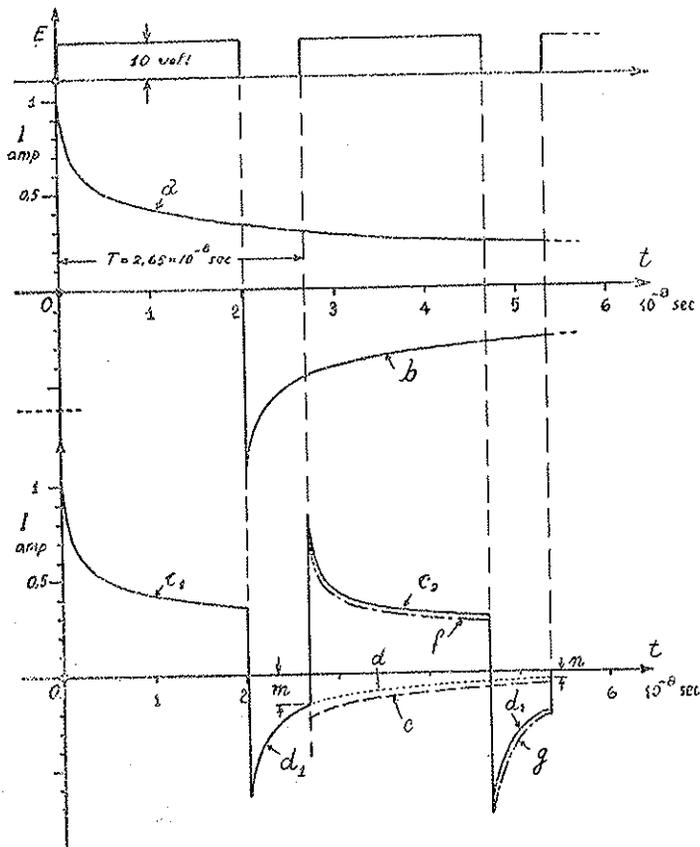


FIG. 1.

da cui si ricava k essendo m ed n quantità misurabili sui diagrammi, o calcolabili.

Il fattore k funge da parametro numerico determinante lo stato iniziale, che condiziona la variazione libera generica.

Trovato k si può dunque tracciare la variazione libera cercata (curva e). Le ordinate di e sommate con quelle del fenomeno di inserzione c_1, d_1 , forniscono la curva f, g , cioè il regime periodico.

SUL GENERE *ASTARTE*

J. Sowerby 1811 (*)

(Con due tavole fuori testo)

S. G. COEN

SUMMARIVM. — Ex accurato concharum speciei *ASTARTE* examine patet in earum valvis non semper interiorem ventralem marginem denticulatum esse; quod infirmit distinctionem inter varias generis *ASTARTE* sectiones, qua in sectionem *ASTARTE* (sensu stricto) colligebantur conchae marginem denticulatum habentes.

Lo SCHUMACHER fondò (1817) la sezione *TRIDONTA*, specie tipo *A. borealis* (Ch.) Schum., per forme ad orlo ventrale liscio, non denticolato (1), ed il LEACH (1919) la sezione *NICANIA*, specie tipo *A. Banksi* Leach, che differisce dalla precedente per la statura minore e forse per i denti cardinali più forti; rimanevano nelle *ASTARTE* sensu stricto le specie a margine denticolato ovvero crenulato.

Il carattere della denticolazione del margine ventrale interno delle valve, sebbene puramente conchigliologico, ha la sua importanza, sempre però quando sia tipico e costante: basta ricordare come esso sia uno dei distintivi fra le *VENUS* e le *MERETRIX*.

Ma uno studio attento delle nostre *ASTARTE* mediterranee non conferma la costanza del carattere nelle specie, e perciò nel genere, ponendone così in dubbio la tipicità ed il valore per la separazione delle sezioni.

La specie genotipo, *A. sulcata* Da Costa (Pectunculus), di habitat europeo settentrionale e nordamericano, è citata dal MONTEROSATO (2)

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi, il 31 agosto 1940.

(1) THIELE, *Handbuch del Syst. Weichtierkunde*, 1935, III, pag. 845; FISCHER, *Manuel de Conchytiologie*, 1887, pag. 1017.

(2) MONTEROSATO, *Enumerazione e sinonimia*, 1878, pag. 11.

di varie provenienze mediterranee, non però dell'Adriatico, di dove non se ne trova menzione in alcuna fauna nota, e perciò nemmeno nella mia « Sylloge » (1) pubblicata prima che me ne pervenissero esemplari di provenienza certa: essi furono infatti dragati, per 113 m. di fondo, a ponente dell'Isola di Cazza in Dalmazia, dal Dott. VATOVA di Rovigno.

La vicinissima specie *A. fusca* Poli (Tellina) è elencata dell'Adriatico da DANILO e SANDRI (2), sebbene come grande rarità; dal BROCCHI in STALIO (3), e nella citata « Sylloge » specie 690, pag. 106.

Si tratta, in tutti gli individui adriatici da me veduti, della var. *rugata* (Sow.) MONTEROSATO.

L'*A. sulcata* e la *A. fusca*, e specialmente la var. *rugata* di questa, sono tanto vicine fra loro, che non saprei fare una descrizione specifica diversa per le due: in ciascuna vi sono varianti di forma più o meno trasversa, ellittica o trigono-arrotondata, come ben dice per la *A. sulcata* il BINNEY in GOULD, « Invertebrata of Massachusetts », « in some specimens approaching to ovate, in others to triangular »; ma la differenza fra le due consiste nel numero dei « solchi », o « rughe », nella *sulcata* assai meno numerosi e più profondi: ma a mio sommosso parere, si tratterebbe di una specie sola.

Della *A. fusca* vorrei considerare tipica la var. *rugata*; allora la diversità fra questa e la *sulcata* sarebbe tanto tenue da giustificare l'assegnazione della *rugata* alla *sulcata* come varietà: la *fusca* tipica ne sarebbe a sua volta una var. *sublaevigata*, tanto più che le due specie attuali formano ambedue parte delle medesime colonie, come si vede più sotto (Cazza).

Comunque, la questione specifica non ha molto a vedere con la presente nota, nella quale continuo anzi a designare le due specie coi loro nomi attuali. La questione specifica potrà essere, se mai, risolta in presenza di serie numerose di esemplari di varie provenienze.

Torniamo quindi all'argomento.

(1) COEN, *Nuovo saggio di una Sylloge molluscorum adriaticorum*. R. Com. talass. italiano, Memoria CCXI, 1937, pag. 106.

(2) DANILO e SANDRI, *Elenco nominale moll. lamellibr. di Zara*, litogr., 1856, sp. 3, pag. 3.

(3) STALIO, *Notizie storiche moll. adr. Venezia*, 1874, prospetto XII, pag. 106, specie IV.

La figura 1 rappresenta l'interno della valva sinistra di *A. sulcata* d'Inghilterra (MONTEROSATO), la fig. 2 quello di una *A. fusca* di Napoli (MONTEROSATO) e la fig. 3 di una *fusca rugata* pure di Napoli (TIBERI).

Tutte hanno l'orlo ventrale regolarmente denticolato al margine.

In una delle valve di *A. sulcata* di Cazza la denticolazione non è affatto marginale, ed è sostituita da una serie irregolare di tubercoli conici disuguali, disposti a rosario internamente e parallelamente all'orlo vero e proprio, che appare a sua volta liscio ed ingrossato: l'interno di questa valva è riprodotto a fig. 4.

Analogamente abbiamo esemplari di *A. fusca* con denticolazione imperfetta: ne è esempio la valva figurata al N. 5, proveniente da Bastia in Corsica (Caziot).

Ma non basta. Un esemplare del Quarnero di *A. fusca rugata* (Vátova) ha il margine ventrale completamente liscio e privo di denticolazione, salvo una lieve traccia che una ricerca molto diligente può rivelare all'estremità anteriore (fig. 6); ed un altro individuo di *A. sulcata*, dragato sempre a Cazza dal Vátova, figura 7, ha il margine ventrale completamente liscio e tagliente, ciò che si osserva in due individui di *A. fusca rugata*, pure di Cazza, rappresentati dalle figure 8 e 9.

Da quanto precede si rileva che, almeno nelle nostre *Astarte*, il carattere della denticolazione del margine ventrale non ha alcuna costanza e perciò alcun valore: e che perciò cadrebbero le sezioni *TRIDENTATA* ed anche *NICANIA*, ove non valesse per questa la maggior robustezza dei denti cardinali.

Come ultima osservazione ricordo che il MONTEROSATO (*op. cit.*) ammette per l'*A. (Goodallia) triangularis* Martyn (Mactra) una varietà *margine integro*. Non ho potuto esaminare il tipo, ma appar chiaro trattarsi anche qui di una forma non denticolata, mentre il FISCHER (*op. cit.*) pone fra i caratteri di *Goodallia* il « bord des valves crénelé »; anche qui il carattere sarebbe evanescente.

Riunendo all'*A. sulcata* la *fusca rugata*, si avrebbero *A. incrassata* Brocchi, *A. affinis* Cantraine come nomi, meglio che di varietà, sinonimi della specie: piuttosto, sempre data la detta riunione, due varietà importanti sarebbero:

A. sulcata irregularis nov. var., per le forme delle figure 4 e 5;

A. sulcata laevimarginata nov. var., per quelle a figure 6, 7, 8, 9.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

- Fig. 1. *Astarte sulcata* tipica di Inghilterra (Monterosato) 3 × 1.
- » 2. » *fusca* » di Napoli (Monterosato) 4 × 1.
- » 3. » » *rugata* di Napoli (Tiberi) 4 × 1.
- » 4. » *sulcata irregularis* di Cazza (Vàtova) 4 × 1.
- » 5. » *fusca irregularis* di Bastia (Caziot) 4 × 1.
- » 6. » *sulcata laevimarginata* di Cazza (Vàtova) 4 × 1.
- » 7. » *fusca laevimarginata* del Quarnero (Vàtova) 4 × 1.
- » 8. » » » di Cazza (Vàtova) 4 × 1.
- » 9. » » » » » 4 × 1.

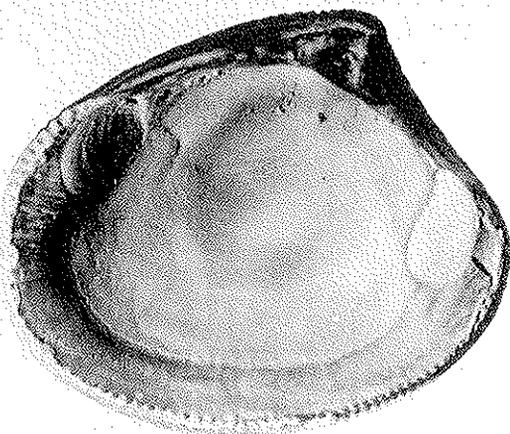


FIG. 1.

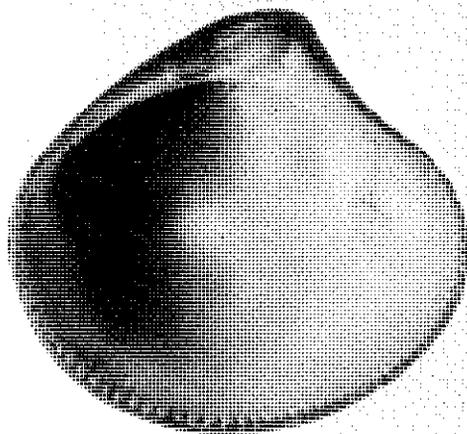


FIG. 2.

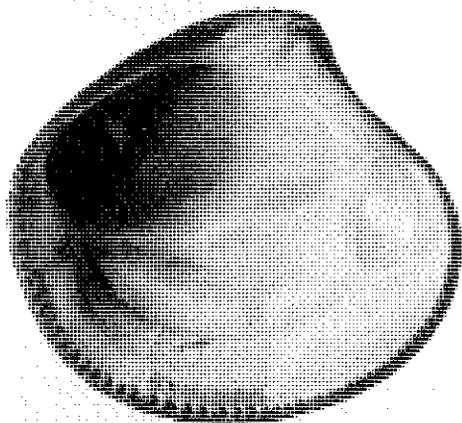


FIG. 3.

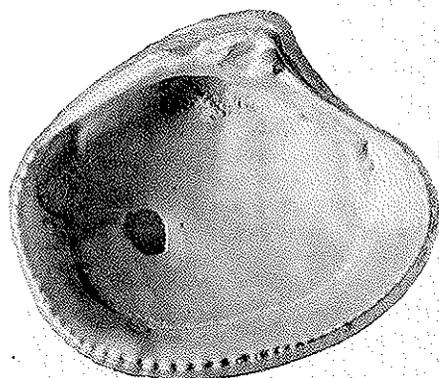


FIG. 4.

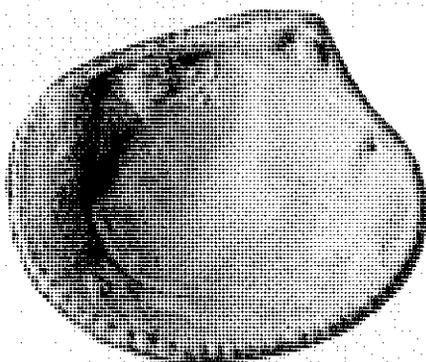


FIG. 5.

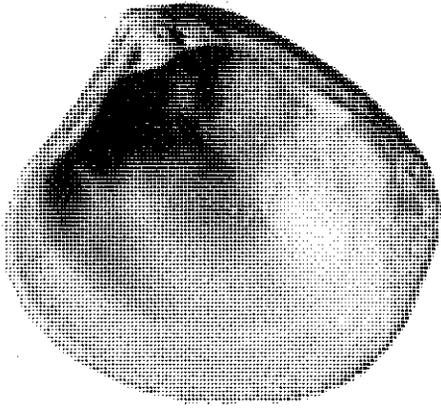


FIG. 6.

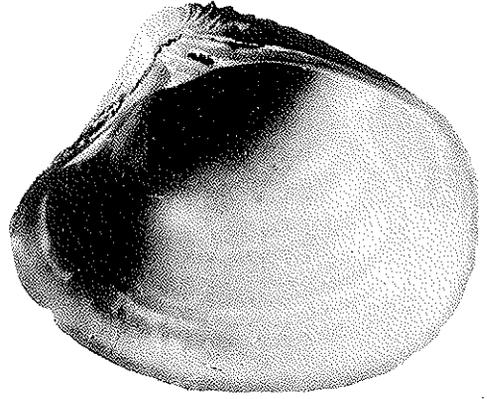


FIG. 7.

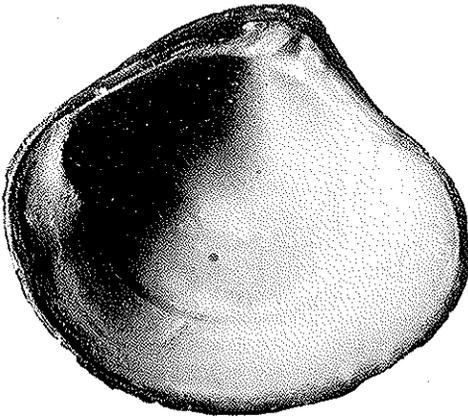


FIG. 8.

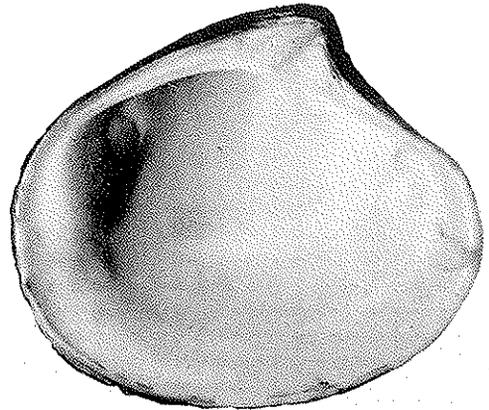


FIG. 9.

SUR L'OPÉRATION $\overline{\lim}_{y=+\infty} \Phi(x, y)$ (*)

W. SIERPIŃSKI

SUMMARY. — A. quaerit rationem L metiendi functiones, quae, ex functione BAIRE plurium variabilium, per supputationem \lim uni ex variabilibus applicatam obtinentur.

En rapport avec un résultat de M. N. LUSIN qui a construit une fonction de classe 2 de BAIRE de deux variables réelles, $\Phi(x, y)$, telle que la fonction (d'une variable réelle x)

$$[1] \quad f(x) = \overline{\lim}_{y=+\infty} \Phi(x, y)$$

(où $\overline{\lim} \Phi$ désigne l'opération qui consiste à prendre la plus grande limite d'une fonction) est non mesurable B⁽¹⁾, je démontre les théorèmes suivants:

1) Si $\Phi(x, y)$ est une fonction de classe ≤ 1 , la fonction [1] est de classe ≤ 3 .

2) Si $\Phi(x, y)$ est une fonction de Baire (de deux variables réelles), la fonction [1] est mesurable L.

Le théorème 2 n'est qu'un cas particulier du théorème suivant:

3) Les fonctions qu'on obtient en partant de fonctions de Baire d'un nombre fini quelconque de variables réelles et en appliquant un

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini il 5 maggio 1940.

(1) *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris, 1930, pag. 318-319.

nombre fini de fois (dans un ordre quelconque) les opérations \lim_k (limite ordinaire d'une suite infinie) et $\overline{\lim}_{y=+\infty}$ sont mesurables L.

On peut remplacer dans le théorème 3 $\overline{\lim}_{y=+\infty}$ par $\underline{\lim}_{y=+\infty}$. Or, on ne sait pas si l'on peut dans le théorème 3 adjoindre aux opérations \lim_k et $\overline{\lim}_{y=+\infty}$ l'opération $\underline{\lim}_{y=+\infty}$. En effet, moyennant un résultat de M. C. KURATOWSKI présenté au Congrès des Math. à Zürich en 1932 on peut nommer une fonction $\Phi(x, y, z)$ de classe 2 de trois variables réelles, telle qu'il manque complètement de méthode pour décider si la fonction

$$f(x) = \underline{\lim}_{z=+\infty} \overline{\lim}_{y=+\infty} \Phi(x, y, z)$$

est mesurable L ou non.

Les démonstrations de ces théorèmes paraîtront dans le journal *Fundamenta Mathematicae*.

SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ENSEMBLES ORDONNÉS (*)

W. STERPIŃSKI

SUMMARY. — A. investigat in quo ordinati statutae potentiae complexus cum transfinitis successionebus conveniant.

M. F. HAUSDORFF a démontré que tout ensemble ordonné peut être représenté comme une puissance à base 3. Je dis qu'on peut y remplacer le nombre 3 par le nombre 2, notamment *tout ensemble ordonné est semblable à un ensemble de suites transfinies formées de nombres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe de premières différences*. Plus précisément, on a ces théorèmes :

1) *ν étant un nombre ordinal quelconque, tout ensemble ordonné de puissance \aleph_ν est semblable à un ensemble de suites transfinies de type ω_ν formées de nombres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe de premières différences.*

2) *Dans le théorème 1 le nombre ω_ν ne peut pas être remplacé par un nombre ordinal (transfini) plus petit.*

La démonstration de ces théorèmes est basée sur deux lemmes concernant les suites transfinies dyadiques qui par eux-mêmes présentent quelque intérêt.

Soit \mathfrak{S} un nombre ordinal transfini quelconque, et soit $U_{\mathfrak{S}}$ l'ensemble de toutes les suites transfinies de type \mathfrak{S} formées de nombres 0 et 1 et ordonnées d'après le principe de premières différences.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini il 5 maggio 1940.

Lemme 1. — L'ensemble U_q est dépourvu de lacunes.

Lemme 2. — L'ensemble U_q ne contient aucun sous-ensemble bien ordonné (dans U_q) de puissance $> \bar{\aleph}$.

Les démonstrations de ces théorèmes (et quelques autres encore) paraîtront dans mon mémoire sous le même titre dans le journal *Fundamenta Mathematicae*.

SUR LES BASES DÉNOMBRABLES DES FAMILLES DE FONCTIONS (*)

W. SIERPIŃSKI

SUMMARIVM. — A. determinat novas proprietates classium functionum unius realis variabilis, quarum infinita sit talis functionum consecutio ut unaquaqueque functio sit limes alienius consecutionis ex illa consecutione extractae.

F étant une famille quelconque de fonctions d'une variable réelle, nous dirons qu'elle admet une *base dénombrable*, et nous écrirons $F \varepsilon B$, s'il existe une suite infinie $f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) de fonctions d'une variable réelle (pas nécessairement appartenant à F), telle que toute fonction de la famille F est limite d'une suite extraite de la suite f_1, f_2, \dots .

Or, désignons par F_g, F_h, F_u respectivement les familles de toutes les fonctions qui sont limites de suites infinies non décroissantes, resp. non croissantes, resp. uniformément convergentes de fonction de la famille F. On a les théorèmes suivants:

- 1) Si $F \varepsilon B$, on a $F_g F_h \varepsilon B$.
- 2) Si $F \varepsilon B$, on a $F_u \varepsilon B$.

On ne sait pas s'il existe une base dénombrable pour la famille de toutes les fonctions *ul* (de W. H. YOUNG) d'une variable réelle (c. à d. pour la famille de toutes les fonctions qui sont limites de suites non décroissantes de fonctions semi-continues supérieurement). En généralisant un théorème de M. C. BURSTIN je démontre qu'il n'existe

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini il 5 maggio 1940.

aucune base dénombrable pour cette famille qui soit formée de fonctions mesurables.

Je démontre ensuite ce théorèmes:

3) *S'il existe une base dénombrable pour la famille de toutes les fonctions ul d'une variable réelle, il existe aussi une base dénombrable pour la famille de toutes les fonctions d'une variable réelle d'une classe α de Baire donnée quelconque ($\alpha < \Omega$).*

4) *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille F de fonctions d'une variable réelle admette une base denombrable est qu'il existe une fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle, telle que toute fonction de la famille F soit de la forme $g(\varphi(x))$, où g est une fonction qui est sur l'ensemble E de toutes les valeurs de $\varphi(x)$ pour x réels limite d'une suite infinie de polynômes.*

5) *Si une famille F de fonctions d'une variable réelle admet une base dénombrable, il existe une fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle, telle que la famille de toutes les fonctions $p(\varphi(x))$, où p sont des polynômes aux coefficients rationnels, est une base dénombrable pour la famille F .*

Les démonstrations de ces théorèmes paraîtront dans le journal *Fundamenta Mathematicae*.