PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

# ACTA

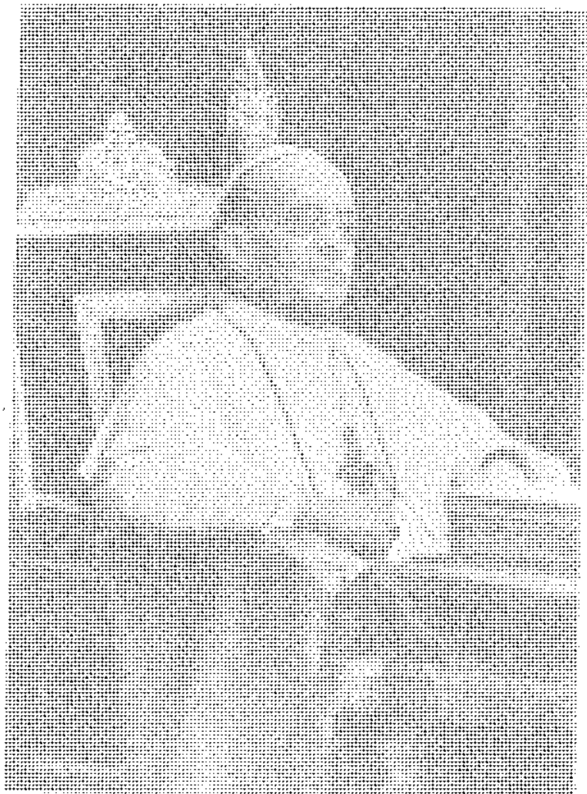
ANNVS III

VOLVMEN III

EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCCXXXIX

# INDEX



18. XII. 38

Pius PP. XI

*ACTA*
*Vol. III - N. 1*
Fol. I-XLII

# RESOCONTO
## DELLA SOLENNE TORNATA INAUGURALE DEL III ANNO ACCADEMICO ALL'AUGUSTA PRESENZA DI S. S. PIO XI

*(18 dicembre 1938)*

Domenica, 18 dicembre 1938, all'Augusta presenza del Santo Padre, si è tenuta la solenne Tornata Inaugurale del secondo Anno Accademico della Pontificia Accademia delle Scienze.

La cerimonia si è svolta alla Casina di Pio IV, nei Giardini Vaticani, nella nuova aula delle sedute, aggiunta alla preesistente costruzione dal munifico mecenatismo del Sommo Pontefice gloriosamente regnante.

Alla solenne Tornata hanno assistito le Loro Eminenze Reverendissime i Signori Cardinali: Eugenio Pacelli, Accademico Pontificio Onorario; Pietro Fumasoni-Biondi, Carlo Salotti, Eugenio Tisserant, Ermenegildo Pellegrinetti, Giuseppe Pizzardo, Nicola Canali e Federico Cattani.

Erano presenti altresì S. Emza il Principe Ludovico Chigi Albani della Rovere, Gran Maestro del Sovrano Militare Ordine di Malta, Accademico Pontificio Onorario; S. E. il Marchese Camillo Serafini, Governatore dello Stato della Città del Vaticano, le LL. EE. Reverendissime i Monsignori: Tardini, Segretario della Sacra Congregazione degli Affari Ecclesiastici Straordinari; Montini, Sostituto della Segreteria di Stato di Sua Santità; Ruffini, Malchiodi, De Romanis, Rossino, Giannattasio e Castelli; una larga rappresentanza dell'Eccellentissimo Corpo Diplomatico accreditato presso la Santa Sede, accolto dal Comm. Belardo, della Segreteria di Stato; il Revmo P. Cordovani O. P., Maestro del Sacro Palazzo Apostolico; numerosi Prelati; Generali di Ordini Religiosi, tra cui il

Revmo P. Schurmans S. J. Vicario del Preposito Generale, il Revmo P. Leonardo M. Bello O. F. M., il Revmo P. da Welle O. M. Cap.; rappresentanze degli Atenei e Accademie Ecclesiastiche di Roma, il Gr. Uff. Prof. Pietro De Sanctis, Accademico Pontificio Onorario, ed altre molte personalità ecclesiastiche e laiche della Città del Vaticano.

Presenti inoltre rappresentanze della Reale Accademia d'Italia, del Consiglio Nazionale delle Ricerche, della R. Accademia dei Lincei, della R. Università e di altri Enti culturali e scientifici di Roma, oltre a numerose personalità del mondo scientifico e diplomatico italiano ed estero.

Della Pontificia Accademia delle Scienze hanno partecipato alla solenne Tornata, oltre al Presidente Revmo P. Agostino Gemelli O. F. M., gli Accademici: Amaldi, Armellini, Boldrini, Bottazzi, Colonnetti, Crocco, Ghigi, Giordani, Giorgi, Gola, Guidi, Lemaître, Lepri, Levi-Civita, Lombardi, Michotte van den Berck, Nobile, Noyons, Panetti, Pensa, Pistolesi, Rasetti, Rondoni, Silvestri, Toniolo, Vallauri, Volterra; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: Dom Albareda O. S. B., P. Gatterer S. J., P. Schmidt S. V. D., P. Stein S. J., ed il Cancelliere dell'Accademia Dott. Pietro Salviucci.

L'Augusto Pontefice, è arrivato alla Sede dell'Accademia alle ore 12,30, ed è sceso al Suo ingresso privato, devotamente ossequiato dal Presidente Revmo P. Agostino Gemelli O. F. M.

Il Santo Padre accompagnato dalla Sua Nobile Corte e scortato dalla Sua Guardia Nobile è subito entrato nell'Aula e, ricevuto l'omaggio degli Eminentissimi Cardinali intervenuti e dei componenti il distinto consesso Si è assiso alla presidenza dell'eletta assemblea, avendo ai lati S. E. Revma Mons. Arborio Mella di Sant'Elia, Maestro di Camera e i Camerieri Segreti Partecipanti Illmi e Revmi Monsignori Confalonieri, Venini e Nasalli Rocca di Corneliano.

## L'INDIRIZZO DEL PRESIDENTE

Il Presidente della Pontificia Accademia delle Scienze Revmo P. Agostino Gemelli, ottenuto l'Augusto assenso del Santo Padre, ha letto la seguente relazione del secondo anno di vita dell'Accademia.

*

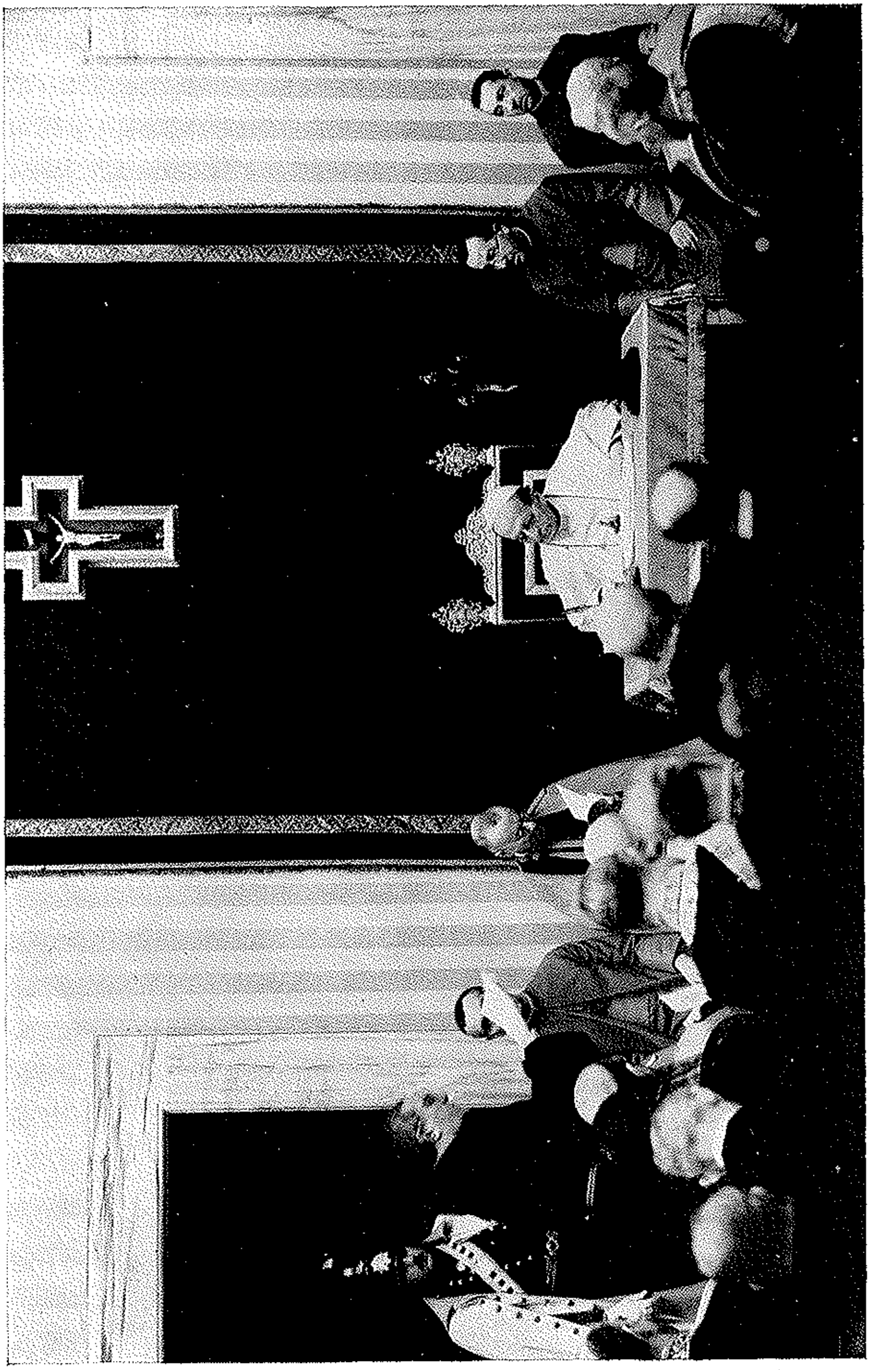
*Beatissimo Padre,*

Con gioia grande dell'animo, dopo di avere, secondo quanto stabilisce lo Statuto dell'Accademia, assistito e partecipato alla funzione religiosa che l'Accademico onorario, l'Eminentissimo Cardinale Eugenio Pacelli, si è degnato testè di celebrare nella Cappella Paolina, sono gli Accademici Pontifici raccolti intorno a Vostra Santità, per inaugurare il terzo anno della vita dell'Accademia da Voi rinnovata, ricostituita e chiamata a nuova funzione. Non posso non sottolineare che questa giornata inaugurale, nella quale uomini insigni nelle varie discipline scientifiche e appartenenti a Paesi diversi si radunano per ascoltare da Voi, Beatissimo Padre, una parola di esortazione e di conforto, non è solo una cerimonia accademica, ma acquista, e per quelli che hanno il privilegio di partecipare e di assistere ad essa, ed anche per quelli che lontani, ne avranno fra breve notizia, altissimo significato: non è la solennità dell'atto che celebriamo che conferisce importanza ad esso, ma il fatto di vedere riuniti intorno alla Cattedra di Verità, dall'alto della quale parla il Vicario di Cristo, uomini che al servizio del Vero hanno dedicato la propria vita e che ritraggono da questo fatto di servire la verità in una scienza particolare l'unico ambito compenso alle loro nobili fatiche e ai loro diuturni sacrifici. Ciascuno di noi tornerà domani al proprio Laboratorio o al proprio Istituto animato a riprendere con rinnovata lena il consueto lavoro, sapendo che dalla fatica comune ne verrà un bene che non può perire: il lavoro del cultore di scienza prepara, in un'epoca in cui i valori spirituali sembrano sommersi o trascurati di fronte al soddisfacimento dei bisogni immediati e materiali, l'aurora di un tempo in cui questi valori spirituali ancora guideranno la vita degli uomini e delle Nazioni. Di questo avvenire Voi, Beatissimo Padre, siete l'Artefice benedetto e per ciò le generazioni future conserveranno il Vostro nome in gratitudine.

La cronaca della vita nella nostra Accademia non registra grandi cose: chi vuol costrurre saldamente e per l'avvenire deve procedere circospetto e prudente: si tratta di dare il primo indirizzo all'attività di questa Istituzione, che, sola fra le varie Accademie, comprende, come membri attivi, uomini di ogni Paese. Di qui la difficoltà del compito che le è affidato; di qui anche le grandi speranze che si concepiscono per i frutti della sua attività. Per determinare questa, dopo di aver interrogato i vari accademici (e questa consulta richiese più di un anno di tempo per riuscire esauriente), è stata costituita una Commissione — della quale fanno parte, oltre il Presidente, gli Accademici: Bottazzi, Carrel, Colonnetti, Michotte van den Berck — Commissione che ha per compito di determinare la linea secondo la quale si deve svolgere l'attività accademica. A suo tempo saranno fatte conoscere le conclusioni.

Presento alla Santità Vostra il volume delle *Commentationes* e il volume degli *Acta*. Nel primo sono incluse quattordici Memorie, nel secondo sette Note, talune — mi sembra — di non piccola importanza.

Per la prima volta si conferisce quest'anno il « Premio Pio XI », che venne costituito con il Vostro nome per rendere omaggio di gratitudine a Voi, e che dev'essere assegnato dall'Accademia ad un insigne studioso di una disciplina, volta per volta indicata dall'Accademia stessa. Per l'anno 1938 il « Premio Pio XI » venne riservato a cultori di scienze biologiche. La Commissione giudicatrice, composta dagli Accademici Bottazzi, Godlewski, Lepri e Noyons e presieduta da me, ha dovuto esaminare i lavori di undici studiosi di discipline biologiche appartenenti a varie Nazioni; taluni di questi studiosi vennero indicati da Accademici, altri presentarono essi stessi la propria candidatura. La Commissione, dopo avere diligentemente esaminato e comparativamente vagliati i titoli scientifici presentati dai concorrenti, ha concluso i suoi lavori giudicando, unanime, di gran lunga più degli altri concorrenti



degno di premio il Dott. Cornelio Heymans, Professore di Farmacologia nella Facoltà di Medicina dell'Università di Gand, per le seguenti ragioni.

C. Heymans eccelle sopra tutti i concorrenti per una infaticabile attività svolta nei campi diversi della Biologia, non solo in quello della Farmacologia, ma anche e con maggiore successo in quello della Fisiologia, sempre alla luce d'una assai ampia visione dottrinale e col sussidio d'una tecnica sperimentale ingegnosa e perfetta. Fra i molti lavori, che hanno reso noto e stimato il nome di C. Heymans in Europa e nelle due Americhe, giova rammentare particolarmente quelli coi quali egli ha dimostrato la squisita sensibilità di alcune zone dell'aorta e dei seni carotidei, così alla pressione del sangue (barosensibilità), come alla costituzione chimica del sangue o di altro liquido di perfusione (chemosensibilità); per questa via C. Heymans ha messo in evidenza molteplici reazioni riflesse provocate in vari apparati organici e quindi gli effetti regolatori che quei riflessi producono così sul ritmo del cuore e sul tono delle arterie, come sulla secrezione dell'adrenalina e sulla frequenza degli atti respiratori. Altri oggetti della sua indagine sono stati la fisiologia del sistema nervoso simpatico, l'ipertermia causata da varie sostanze chimiche, l'origine bulbare delle fibre acceleratrici dei nervi vaghi, l'influenza della rachianestesia sui nervi vasomotori, ecc. Concepiti secondo un piano ben definito, condotti con rara abilità e con padronanza dei metodi, esposti in note singole e poi in pubblicazioni sintetiche di largo respiro, con chiarezza, precisione e completa conoscenza della letteratura, i lavori di C. Heymans hanno messo in evidenza una copiosa messe di fatti nuovi, per la massima parte confermati da altri sperimentatori, e hanno già assunto il posto che meritano nella letteratura biologica mondiale.

Per queste considerazioni la Commissione giudicatrice del «Premio Pio XI» per il 1938 ha chiesto a Vostra Santità di degnarsi di conferirlo al chmo Prof. Cornelio Heymans.

A questo punto il Santo Padre stesso si è degnato di rimettere il Premio al dott. C. Heymans pronunziando benevole parole di congratulazione.

Il Presidente quindi riprende:

Per l'anno accademico 1940 il «Premio Pio XI» sarà di Lire 50.000 e verrà conferito ad un cultore di discipline astronomiche; abbiamo voluto in tal modo fare omaggio a Vostra Santità scegliendo una disciplina della quale Vostra Santità è stato munifico mecenate con la istituzione della specola di Castel Gandolfo, istituzione, alla quale sappiamo fu già pensato di dare ulteriore sviluppo e complemento.

L'Accademia ha partecipato, con l'uno o l'altro dei suoi membri, a numerosi Congressi e a Riunioni internazionali; mi piace ricordare la partecipazione alla celebrazione del Franklin Institut di Filadelfia (U. S. A), al primo cinquantenario della Società botanica italiana e al secondo centenario della morte di Pier Antonio Micheli; alla celebrazione della scoperta dei raggi X e al 40° anniversario della scoperta del Radium.

Nuovi vuoti si sono fatti nelle nostre file; l'Accademico Nicola Parravano e l'Accademico Filippo De Filippi, lutti dolorosi. Con il consenso di Vostra Santità, dei meriti del primo dirà brevemente l'Accademico Francesco Giordani, dell'altro l'Accademico Renato Toniolo.

Con queste due dolorose perdite, e con le altre avvenute nell'anno precedente, i seggi attualmente vacanti sono ben sei. È infatti da aggiungersi quella del Rev. Prof. Victor Grégoire, illustre botanico e professore dell'Università di Lovanio, la notizia della morte del quale ci è giunta ieri; la commemorazione del nostro illustre collega verrà fatta prossimamente. Per coprire i posti vacanti sono in corso le votazioni prescritte dallo Statuto, così che dall'esito di esse sarà possibile, tra non molto, a Vostra Santità procedere alla nomina dei nuovi Accademici.

Non posso chiudere senza ricordare a Voi, illustri Colleghi, che tra due giorni avrà inizio il sessantesimo anno di sacerdozio di Sua Santità Pio XI; data che offre a tutti noi l'occasione di porgere a Sua Santità i nostri voti ed i filiali auguri. Per breve ora abbiamo temuto per la Vostra preziosa salute, Beatissimo Padre; ma Iddio ha concesso a tutti noi che la Vostra Vita sia conservata a bene di tutti coloro ai quali Voi fate dono dei frutti del Vostro ingegno, del Vostro cuore e della Vostra Santità. Iddio conceda a noi di goderne a lungo. Il ricordo dell'inizio della lunga Vostra vita sacerdotale ci dice come la Provvidenza Vi ha preparato da lunga mano ad essere il Vicario del Redentore degli uomini; onde in questa occasione è doveroso per noi elevare a Dio la nostra voce riconoscente per ringraziarLo di così grande beneficio.

Mi permetto ora chiedere a Vostra Santità di dichiarare aperto nel Vostro Nome Augusto il III Anno Accademico; Vi chiedo di concedere la parola agli Accademici Giordani e Toniolo; sopratutto Vi chiedo, a nome dei miei Colleghi, di dire la Vostra attesa parola paterna, che custodiremo come dono prezioso. Vi chiedo anche di benedire noi, onde da Dio, per mano e intercessione Vostra, sia dato a noi il beneficio di essere degni dell'alto onore che ci avete fatto, creandoci Accademici Pontifici.

Terminata la relazione lo stesso Presidente, annuendo benevolmente Sua Santità, ha dichiarato, nel Nome Augusto di Sua Santità Pio XI aperto il III Anno Accademico.

*Nell'accogliere ed approvare la relazione del Revmo Padre Gemelli il Santo Padre diceva che ben volentieri avrebbe dato tutto quello che Gli veniva chiesto: ma, subito, senza voler intralciare il succedersi delle cose, teneva ad esprimere la Sua viva riconoscenza per essere stato chiamato a partecipare ad una così bella adunanza: e si affrettava a ripetere le più cordiali congratulazioni al dott. Heymans, il vincitore dell'attuale premio, dopo avergli già manifestato il Suo compiacimento rimettendo a lui il premio stesso. Desiderava poi Sua Santità rivelare quanto Egli fosse sensibile alla filiale attenzione nel decidere di favorire, col prossimo premio, quegli studi astronomici ai quali Egli ha dedicato e sta dedicando delle cure tutte speciali; anche perchè* coeli enarrant gloriam Dei. *Pare, infatti, veramente che tra le scienze l'astronomia sia non ultima* *a meritare tutte le attenzioni del Papa, e proprio nell'interesse — se si può adoperare questa espressione corrente — della gloria di Dio.*

*Infine il Santo Padre voleva aggiungere a quanto era stato già detto una nota non toccata dal Suo caro Padre Gemelli: e cioè il grande contributo che questi ha dato e dà agli studi di biologia: un contributo fatto di studi e di fatiche degne di ogni rilievo, anche per i sensibili successi da lui ottenuti in tale campo di studi.*

## LA COMMEMORAZIONE DI NICOLA PARRAVANO

### IL DISCORSO GIORDANI

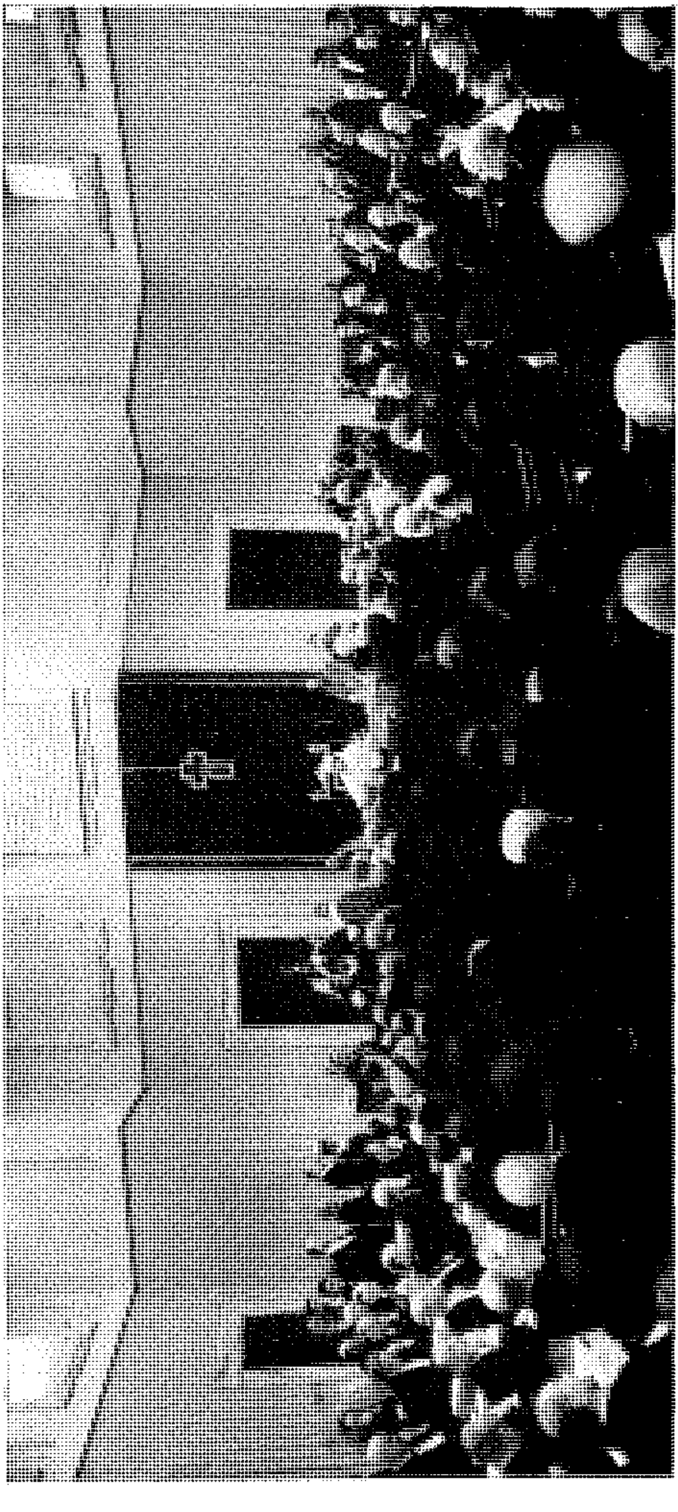
Si è proceduto quindi alla commemorazione del defunto Accademico Pontificio, Nicola PARRAVANO.

L'Accademico Pontificio Francesco GIORDANI, professore di Chimica Generale nell'Università di Napoli, ha pronunciato il seguente discorso.

*Beatissimo Padre,*

Nel mese di maggio scorso Nicola Parravano, nostro amato collega, aveva chiesto ed ottenuto l'alto onore di accompagnare i chimici di ogni parte del mondo, riuniti sotto la sua presidenza per il loro X Congresso Internazionale, esaudendo così il vivissimo desiderio che essi avevano dimostrato di raccogliersi in devoto atto di omaggio attorno al trono del Capo della cristianità. Giunto all'apice della sua carriera terrena, circondato dalla generale estimazione, egli si era dipartito contento della benedizione ottenuta dalla Santità Vostra ben sapendo, nel suo spirito forte, ch'essa non è tanto viatico di umane fortune, quanto compagna di più duratura letizia.

Nessuno di noi pensava allora ch'egli non sarebbe più tornato alla presenza del Padre e che non gli sarebbe concesso di assistere alla ripresa dei nostri lavori in questa Sede accademica, dove aveva



portato il contributo del suo alto sapere e del suo sano equilibrio. Ben egli era presago però di una fine immatura per alcuni indizi che aveva accolto con cristiana rassegnazione e che, con una straordinaria forza d'animo, aveva celato a tutti continuando a prodigarsi in un lavoro incessante. Nel pieno sviluppo di questo lavoro la morte lo ha colto dolcemente nel sonno, quasi a confermare che non si addicessero alla sua forte tempra di realizzatore gli aspetti della malattia e della debolezza.

Più duro però è il rimpianto dei superstiti che non sanno rassegnarsi e che ogni giorno risentono l'improvvisa mancanza del suo consiglio sagace e della sua collaborazione feconda.

Riportati a considerare comprensivamente la massa di lavoro da lui compiuto nei soli cinquantacinque anni di vita, noi constatiamo con ammirata meraviglia che essa avrebbe potuto riempire più di una lunga esistenza. Nella pura ricerca scientifica, nell'organizzazione dell'insegnamento, nell'industria e nella pubblica amministrazione l'opera sua lascia tracce durature, senza che ciò abbia diminuito la sua azione di padre esemplare e di amico impareggiabile.

Nato ad Isola del Liri il 21 luglio 1883, aveva conseguito la laurea in chimica a Roma nel 1904, aveva poi insegnato chimica applicata a Padova, chimica fisica a Firenze e chimica inorganica a Roma. Era stato uno dei più strenui promotori di una stretta collaborazione tra la scienza e l'industria: aveva fondato e diretto l'Istituto Scientifico-Tecnico Breda per l'industria metallurgica e meccanica, aveva collaborato con Guglielmo Marconi nel direttorio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, era stato uno dei più apprezzati collaboratori dell'Istituto per la Ricostruzione Industriale.

Troppo lungo sarebbe elencare tutte le cariche che egli ricoprì e cui attese con esemplare solerzia. Basti ricordare che raggiunse le più alte posizioni accademiche in Italia ed all'estero e che fu presidente dell'Unione Internazionale di Chimica; che tenne fino agli ultimi suoi giorni la presidenza della Federazione Nazionale Fascista tra gli industriali dei prodotti chimici, egualmente apprezzato dagli uomini di scienza e dagli uomini di azione.

Al disopra di tutto curò la formazione dei giovani, raccogliendo fondi per il loro perfezionamento, prodigandosi per fornir loro i mezzi di lavoro ed incoraggiandoli generosamente, pur senza blandizie, nel loro cammino.

L'opera sua di ricercatore non ha subito mai una sosta fino all'ultimo giorno. Restano insuperate le sue ricerche sugli equilibri nei sistemi eterogenei con particolare riguardo alle leghe metalliche: i capitoli relativi alle leghe ternarie e quaternarie gli debbono contributi sostanziali. Si occupò della tensione di decomposizione e degli equilibri di riduzione di alcuni composti ed in particolare dei solfuri giungendo ad una suggestiva analisi teorica intesa a dimostrare per quali ragioni la metallurgia si è prevalentemente sviluppata procedendo alla riduzione degli ossidi per mezzo del carbone e tralasciando l'analoga reazione sui solfuri. Negli ultimi tempi perseguiva lo studio delle relazioni fra genesi e proprietà degli ossidi metallici.

In tutte queste ricerche la vivacità dell'ingegno e la originalità delle vedute non si scompagnano mai dalla laboriosità e precisione d'indagine, l'erudizione si completa sempre con la modernità e con la varietà della tecnica sperimentale.

La mente lucida e lo spirito sintetico di Nicola Parravano fecero di lui uno dei più brillanti espositori non solo nella scuola, ma anche in tutti i convegni culturali dove svolse opera pregevolissima di volgarizzazione e di sintesi scientifica.

Egli fu un costruttore nel più ampio significato della parola: padre esemplare per la tenerezza che nutrì verso i figli, maestro inuguagliato per la forza di propulsione che seppe imprimere agli studi chimici, amico insuperabile per generosità di giudizio e per luminosità di sorriso.

Tra gli immancabili dolori della vita egli è stato per certo l'uomo beato, di vera spirituale beatitudine, com'è descritto nel libro dei Salmi *tanquam lignum, quod plantatum est secundum decursus aquarum, quod fructum suum dabit in tempore suo.* E nessuna foglia di lui cadrà e tutte le sue opere prospereranno.

## LA COMMEMORAZIONE DI FILIPPO DE FILIPPI

### IL DISCORSO TONIOLO

Subito dopo prendeva la parola l'Accademico Pontificio Antonio Renato Toniolo, professore di Geografia Generale nell'Università di Bologna.

*Beatissimo Padre,*

L'amore per la montagna, il desiderio di vedere e di conoscere la resistenza ai disagi e il disprezzo pei pericoli, la volontà di superare difficoltà ed ostacoli, fecero di Filippo De Filippi uno dei migliori viaggiatori ed esploratori del secolo XIX.

Virtù d'animo e d'intelletto, equilibrio di facoltà fisiche e morali, mente direttiva ed organizzatrice, amore alla cultura con particolare tendenza alla sintesi, perfezionarono in lui la naturale attitudine alla osservazione in una solida ed organica comprensione scientifica dei molti fatti e fenomeni, appresi nei lunghi viaggi e nei più svariati e compiuti studi naturalistici.

Nato a Torino il 6 aprile 1869, Filippo De Filippi, dallo zio paterno, che aveva a lungo viaggiato in Persia assieme a Giacomo Doria, ereditò col nome di battesimo la passione dei viaggi, che fin da giovane si esplicò nell'alpinismo sulle sue montagne piemontesi, che gli furono palestra per temperare mente e corpo ad ardue imprese.

Le sue prime pubblicazioni risalgono al 1887, con brevi relazioni, nella Rivista del Club Alpino Italiano, delle più notevoli ascensioni da lui compiute nelle Alpi Piemontesi e del Delfinato e nell'Oberland Bernese, fra cui quelle di Punta Ghifetti e della Punta Zumstein sul Monte Rosa (1889), del Cervino e del Monte Bianco (1900).

Egli aveva intanto compiuto gli studi medici nell'Università di Torino e iniziato ricerche di chimica fisiologica nell'Università di Bologna e di Genova, dove fu assistente e Libero Docente di medicina operatoria; studi che perfezionò più tardi in alcuni Istituti scientifici di Germania ed Austria.

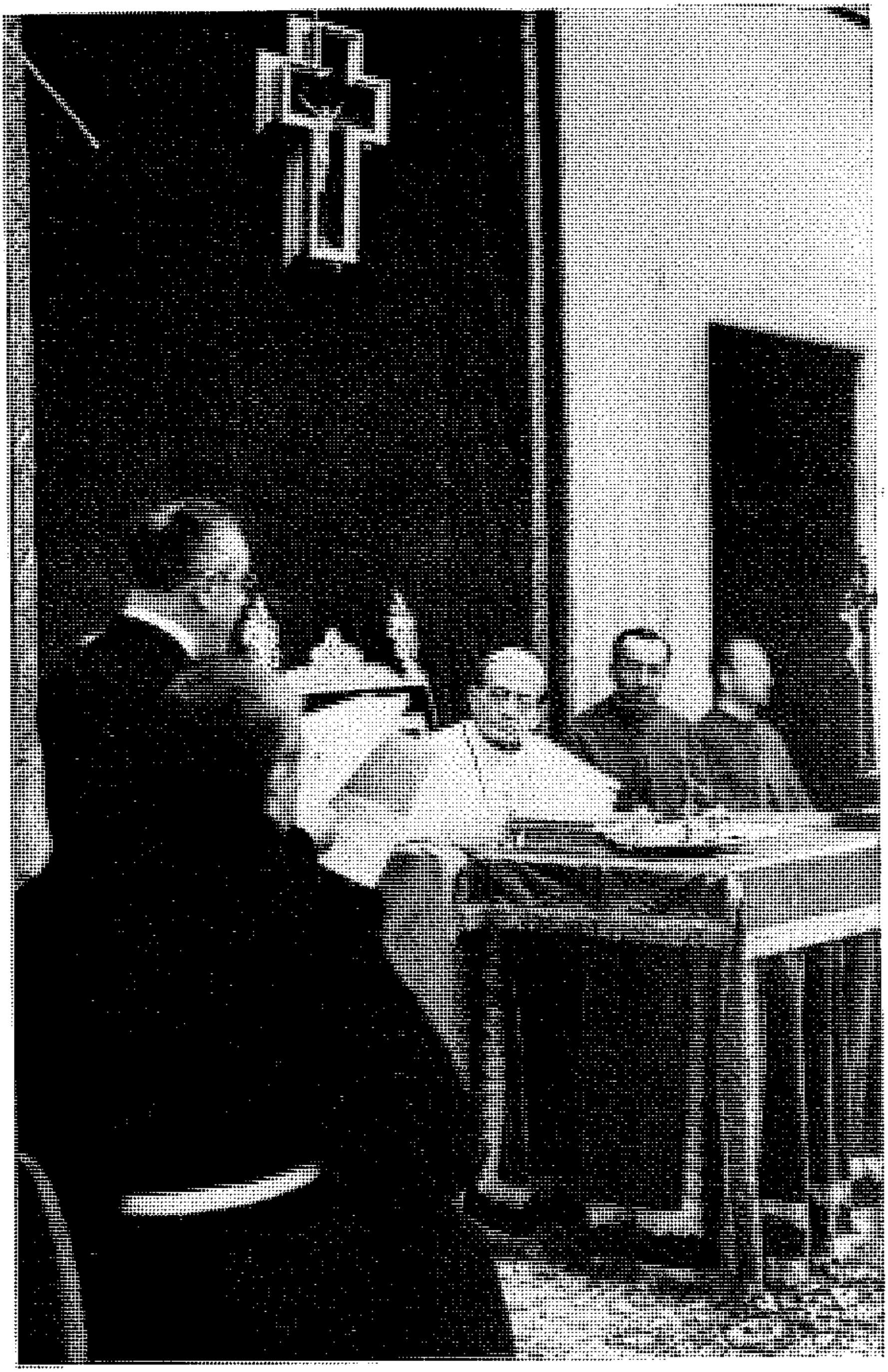
Con questa sicura preparazione, fin dal 1887, egli potè stendere, con piena competenza, nel volume del Mosso, sulla fisiologia dell'uomo sulle Alpi, un accurato studio degli effetti del mal di montagna, descrivendo ed analizzando le cause della disgrazia di cui furono vittime, nel 1886, i fratelli Zoia sulle rocce del Gridone in Val Vigezzo, durante un'escursione a cui egli stesso aveva preso parte.

La sua perizia medica e chirurgica fu poi da lui posta a servizio della Patria durante la grande guerra, quale tenente colonnello della Croce Rossa italiana; ispettore delle unità sanitarie mobilitate al fronte.

Ma il suo nome di provetto alpinista e di viaggiatore attento e organizzatore valente, gli valsero l'onore e la responsabilità di essere invitato da S. A. R. il Duca degli Abruzzi nel 1897, a prendere parte alla spedizione esploratrice al Monte S. Elia nell'Alaska, insieme, fra gli altri, ad Umberto Cagni, illustratosi, tre anni dopo, per la sua marcia verso il Polo, e a Vittorio Sella, fotografo insuperabile delle grandi esplorazioni italiane. Con tutta la carovana, egli riuscì a raggiungere la vetta del monte, a m. 5514 (31 agosto 1897), che nessuno prima di allora aveva calcato. Benchè l'esplorazione avesse carattere quasi esclusivamente alpinistico, per suo merito fu raccolta una copiosa serie di dati meteorologici e di osservazioni bio-geografiche, sui grandi ghiacciai alaskiani, cosicchè fu incaricato di stendere la relazione, la quale ebbe carattere non soltanto narrativo, ma anche critico sui precedenti falliti tentativi di salirne la vetta, ed illustrativo dei problemi generali relativi all'alta montagna (1900).

Ma nel 1903 egli compì, per suo conto, un altro viaggio di studio attraverso alla Russia Europea, al Caucaso e al Mar Caspio, spingendosi a visitare il Turchestan russo e Bucara e facendo ritorno in Europa per la via del Mar Nero e della Crimea.

La sua fama ormai consolidata di studioso dei problemi della montagna e di scrittore facile ed attraente, gli valsero ancora l'incarico di stendere, sul materiale raccolto e sui dati del giornale di viaggio, la narrazione dell'esplorazione del Ruwenzori, compiuta nel 1906 dal Duca degli Abruzzi, alla quale non aveva potuto prender parte, ma che tuttavia è risultata una delle più affascinanti relazioni di viaggio della



nostra letteratura geografica (1908) e che allargò ancor più le sue profonde cognizioni sui tre continenti extraeuropei.

Così il Principe Sabaudo, non volle rinunziare alla diretta collaborazione del De Filippi, quando, nel 1909, allestì la nuova spedizione nel grande complesso montuoso del centro dell'Asia, anche allo scopo, fra gli altri, di studiare il problema della maggiore altezza raggiungibile dall'uomo con lo sforzo alpinistico. Ed anche questa volta è al De Filippi che viene affidata la difficile ma perfetta organizzazione logistica della spedizione, in vaste regioni disabitate e con portatori venuti di lontano e non abituati a marciare fra i ghiacci. A lui, insieme al Comandante Negrotto di Cambiaso e Vittorio Sella spetta il merito di avere esplorato il Ghiacciaio del Bàltoro e compiuta l'ascensione di una delle vette del Karakorum fra l'Himàlaja e i rilievi dell'Asia Centrale.

E ancora a lui è dato l'incarico di stendere la relazione del viaggio, dove viene illustrato per la prima volta il Ghiacciaio del Bàltoro, uno dei maggiori della Terra, sul quale la spedizione si attardò per ben 67 giorni, rilevandone i caratteri topografici e fisici.

Con quanta vivezza viene quivi descritto il tentativo per due volte vano di salire la cima $K^2$ per due versanti diversi, pur raggiungendo la quota di 6666 metri! E mentre il Principe riuscirà poi a portarsi a m. 7498, presso la vetta del Bride Peak, quota mai fino allora raggiunta con le sole forze muscolari, dal campo base, a m. 5033, egli compirà il rilievo del Ghiacciaio occidentale dal $K^2$.

Modestamente il De Filippi attribuisce agli altri i meriti maggiori, ma a lui si devono la raccolta e conservazione dei molti elementi topografici, meteorologici e geologici, illustrati poi dall'Omodei e dal Novarese, e per i quali la scienza geografica potè avere il rilievo fotogrammetrico e fisico del bacino superiore del Ghiacciaio del Bàltoro, e le scienze fisiologiche le prove scientifiche delle possibilità umane in alta montagna.

L'esperienza acquistata in questo viaggio e gli studi coscienziosi compiuti nei vari campi delle scienze naturali e geografiche, per poterne stendere la relazione, indussero il De Filippi a concepire ed organizzare, per il 1913, una propria spedizione nell'Himàlaja occidentale, nel Karakorum e nel Turchestan orientale con caratteri questa volta strettamente scientifici nei vari campi della Geografia. Dopo consultazioni numerose e ponderato studio, fu scelto come campo di esplorazione il bacino superiore dell'Indo, fra l'Himàlaja e il Karakorum del quale avrebbesi dovuto rilevare topograficamente lo spartiacque orientale fra i fiumi Jarkand del Turchestan Cinese e lo Sciaiok affluente dell'Alto Indo; si dovevano inoltre studiare le anomalie di gravità, di magnetismo e di radiazione solare in quella regione di vasti altipiani e di massime catene del Mondo, e ricercare la natura geologica e la glaciologia di quelle estese regioni della Terra, nonchè rilevare i caratteri, i tipi e la vita di razze e di genti mai studiate, fino allora, per poter avere una illustrazione geografica completa di tutta la regione da percorrere.

Il De Filippi, che assunse questa volta in pieno la direzione della spedizione, chiamò attorno a sè geografi e scienziati di fama assai grande, quali il Dainelli per le ricerche sulla geologia, sul glaciale e l'antropogeografia; l'Abetti per la geodesia e la topografia; l'Alessio per la geofisica e il magnetismo, e più tardi Olinto Marinelli per lo studio morfologico della regione. Con volontà e tenacia sotto gli auspici dei governi d'Italia e dell'India, affrontò le molte difficoltà di organizzazione, cominciando da quella finanziaria, che superò col generoso contributo di Istituti scientifici e di cittadini italiani e stranieri. Sua fu tutta la cura della preparazione e direzione della carovana, che doveva portare oltre 6200 kg. di materiale scientifico e di viveri in regioni disabitate e di altissima montagna, dove enormi divengono le difficoltà del trasporto. Questa grandiosa spedizione, nel 1913 e 1914, con due campagne estive e lo sverno intermedio, potè raccogliere un enorme materiale, il cui esame ed illustrazione, dopo la grossa relazione della spedizione da lui stesa, importò la pubblicazione, fra il 1922 e il 1935, di ben 16 volumi in 4° da parte degli specialisti.

Riassumere solo brevemente i risultati di questa, che è stata una delle più grandiose spedizioni scientifiche nel cuore dell'Asia, sarebbe qui assai difficile, ma non è da tacere l'importanza geografica dell'esplorazione del grande Ghiacciaio del Rimu, la determinazione delle sorgenti dell'Jarcand e delle maggiori serie di catene Tibetane.

Il mondo scientifico internazionale riconobbe ben presto tutta l'importanza dell'esplorazione e i grandi meriti del De Filippi, ad onta che egli, per la sua innata modestia abbia sempre taciuto o posto in secondo piano la sua opera scientifica ed organizzativa, cosicchè fu insignito dal Governo delle Indie di un'alta onorificenza nobiliare, le principali società geografiche mondiali, quali la R. Società Geografica Italiana, la Royal Geographical Society di Londra, la Société de Géographie di Parigi, la Società Geografica Americana, si onorarono di premiarlo con medaglia d'oro, mentre l'Accademia delle Scienze di Parigi, quella di Torino e la R. Accademia d'Italia gli attribuirono premi, che egli generosamente cedette ad istituzioni scientifiche.

Frattanto veniva nominato Membro onorario anche delle Società Geografiche di Berlino, di Romania, di Francia, degli Stati Uniti, della R. Accademia dei Lincei, delle quali onorificenze tutte egli sapeva tacere, schivo come era di ogni esibizionismo, sempre pronto a lavorare per gli altri, se riconosceva il valore dell'opera compiuta.

Ritiratosi nel 1921 ad abitare con la famiglia dell'eroico fratello Lodovico, Capitano di Vascello, morto in guerra, alla « Capponcina » di Firenze, continuò, anche qui, con la sua indomita energia ad occuparsi di studi geografici, e nel 1928-1929 assunse ancora la redazione editoriale delle ulteriori imprese di S. A. R. il Duca degli Abruzzi per l'esplorazione del corso dell'Uabi e l'Uebi-Scebeli in Etiopia (1928-1929) e quindi preparò e pubblicò, in lingua inglese, l'edizione integrale della relazione sul Tibet del P. Ippolito Desideri S. J. da Pistoia, dei primi del XVIII secolo oltre ad altre note d'indole critica e storica.

Ma la sua vita fiorentina non fu solo di raccoglimento e di studio, chè quando nel 1928, il Generale Vacchelli, Direttore dell'Istituto Geografico Militare Italiano, assunse la presidenza dell'Union Géographique Internationale, il De Filippi gli fu a fianco quale Segretario Generale e molto a lui si deve della perfetta organizzazione del Congresso Internazionale di Geografia di Parigi (1931) sicchè la sua fama si accrebbe ancora più largamente anche nel campo degli studiosi di Geografia, per cui ben si comprende come nel 1936, quando il S. Padre volle benignamente istituire la Pontificia Accademia delle Scienze, pensasse al De Filippi, quale onore e decoro del nostro Consesso.

La sua dipartita, avvenuta improvvisamente il 23 settembre 1938 lascia nel campo degli esploratori e dei geografi del mondo intero, un grande rimpianto e nella nostra Accademia un vuoto difficilmente colmabile perchè abbiamo perduto con lui un collega carissimo che alle tante benemerenze nel campo dell'esplorazione geografica, alla elevatezza della mente e alla larghezza della cultura univa quella squisita bontà dell'animo e quella modestia del sentire, tutta propria di chi sa comprendere ed amare la natura che fra le cime nevose ed i picchi arditi lascia vedere più direttamente Dio al quale Egli sinceramente ed umilmente credeva.

Gli illustri Accademici oratori hanno ricevuto benevole ed affettuose congratulazioni dal Sommo Pontefice, che si è a lungo felicitato con loro.

*Il Santo Padre teneva a porre in rilievo le belle, alte commemorazioni fatte, le quali per Lui, sia per il presente come per l'ormai lontano passato, rappresentano un valore speciale, e lo rappresentano poi in questo scorcio della Sua vecchia vita, giacchè segnatamente l'opera del grande scomparso amico della montagna e della scienza, Gli ricorda come realmente la montagna deve essere vista con tale occhio e visione così come il De Filippi la vedeva; e cioè come grande opera del creato, del Creatore, come una delle più grandi rivelazioni del creato e della sapienza del Creatore. Proprio in tal modo l'Augusto Pontefice voleva ricordare quella grande e bella figura, rievocandone altresì quegli scritti che formarono anche per il Papa dei veri godimenti spirituali e furono anche, in qualche parte, scuola non inutile di quell'alpinismo che non volle essere solamente un alpinismo di scavezzacolli, bensì uno studio speciale in così speciale opera della Mano divina. Rinnovava pertanto Sua Santità le Sue felicitazioni per quanto era stato detto ripetendole sia al prof. Giordani nel quale il compianto prof. Parravano aveva trovato un commemoratore amorevole ed illustre, sia a chi era andato a Lui col grande e venerato nome del proprio padre: Giuseppe Toniolo.*

## L'AUGUSTA PAROLA DEL SANTO PADRE

Il Santo Padre Si è quindi compiaciuto di rivolgere agli intervenuti la Sua parola.

*Il Santo Padre iniziava il Suo discorso dicendo che Egli si proponeva non soltanto di dire agli intervenuti una parola di benedizione, ma anche di esprimere un affettuoso saluto, quale era da attendersi dal Padre, Che aveva intorno a Sè così grandi ed eletti Suoi figli, non solo in quegli onori del Sacro Collegio, nella delegazione di Eminentissimi Cardinali, ma anche in tutti gli altri che, per diversi titoli, ma, per la più gran parte, per un titolo a Lui particolarmente caro e pregevole, erano tanto raccomandati: il titolo della scienza, la quale tanto deve ai loro lavori, ed a cui — non esitava a dirlo — essi pure tanto debbono, non fosse per quelle gioie, pure, degne, veramente elevate, che solo la scienza, cioè lo studio della verità può dare. E appunto questo pensiero aveva indotto Sua Santità a rivolgere una speciale parola a cultori di scienza, a scienziati di quella forza e distinzione.*

*Siamo in un'epoca, proseguiva il Santo Padre, nella quale è difficile sottrarsi all'influsso del tempo e —* dies mali sunt *— non quindi tanto propizi alle serene cose. Si doveva però essere tutti grati alla grande Madre e Maestra, la Chiesa, la quale suggeriva e presentava alcunchè di particolare per quella adunanza, fatta, si direbbe, per rischiarare e soavizzare il nostro orizzonte spirituale; e l'aveva anzi quasi preparata, per felice combinazione di tempo e di luogo: e noi sappiamo Chi è che prepara queste coincidenze. Si doveva essere grati alla Chiesa che la riunione avvenisse alla fine quasi del sacro Avvento, il che vuol dire alla vigilia del Santo Natale: la grande e cara solennità, per tutti fonte di dolcezza, di gaudio, di insegnamento. Lo è anche per gli scienziati. Il Santo Natale che si sta per celebrare è anzi la loro grande festività; è la particolare solennità dei cultori della scienza; ha ragione di esserlo e come tale il Santo Padre desiderava raccomandarla perchè aveva intorno a Sè appunto degli illustri dotti.*

*Che cosa è infatti questa scienza, quale l'oggetto di questa scienza a cui essi si dedicano con tanto loro successo? L'oggetto complessivo della scienza, di tutte le scienze, è la realtà del creato, dell'universo: sia che si tratti delle profondità del cielo, degli abissi del mare, delle gigantesche montagne; sia che si tratti dei pulviscoli invisibili, e degli organismi più minuscoli ed impalpabili, siamo sempre nell'ambito del creato, nell'ambito dell'universo. Ora il Natale di Gesù Cristo, così come lo ricorda con continuo rito ed affetto la Chiesa, è il Natale del Verbo Divino fattosi uomo e apparso tra noi:* Verbum caro factum est, et habitavit in nobis. *Allora, dunque, ecco come quei dilettissimi figli venivano a trovarsi in faccia al Creatore di quello che è l'oggetto dei loro studi e delle loro scienze: è Lui che ha preparato a tutti ed a ciascuno di essi l'oggetto dei loro studi, in tutte le svariate e minuziose caratteristiche dei vari rami, delle diverse discipline. Di qua può scorgersi quanto opportunamente la Chiesa richiami, in questo tempo in modo particolare, così del resto come vi richiama ogni giorno nella Sacra Liturgia in tutto il mondo, la fondamentale e grandiosa verità; questa grande verità che ritorna in tutta la sua immensa ricchezza in occasione del grande mistero natalizio. Il Natale è proprio infatti il Natale del Verbo Incarnato: il Verbo Divino, di cui l'Apostolo Evangelista, quello che così bene fu veduto da Dante* e diretro da tutti un vecchio solo - venir, dormendo, con la faccia arguta, *ha parlato tanto efficacemente; poichè veramente mai occhio umano vide così lontano, pur chiuso alla luce naturale, ma aperto come era alla luce soprannaturale e divina. L'Apostolo Giovanni ha scritto le stupende parole:* In principio erat Verbum, et Verbum erat apud Deum, et Deus erat Verbum. In ipso vita erat. *Sicuramente giammai mente umana si levò tanto in alto col pensiero; mai parola umana espresse dei concetti cotanto eccelsi, perchè, veramente, dinnanzi a tale espressione, pare, per così dire, che il più vasto lembo possibile venga sollevato sul mistero della divinità, sul mistero dell'essenza stessa intima della divinità.*

In principio erat Verbum: *parola che esprime subito il pensiero — e che sarebbe la parola senza pensiero? e noi distinguiamo il verbo mentale, il verbo orale, il verbo verbale —* in principio erat Verbum. *Il Verbo era nel seno della divinità, era Egli stesso la divinità, godeva tutta la divinità. La divinità, direbbe il nostro piccolo e povero modo di* *parlare, la divinità pensante, la divinità pensata. Il verbo che dice a Dio la sua essenza, il suo essere.* In ipso vita erat: *ed ecco la processione della vita, del pensiero, dell'affetto; ecco lo Spirito Santo: quello Spirito nel quale, per il quale Iddio, come disse il nostro grande Poeta, « si ama e arride »:* O luce eterna che sola in te sidi - sola t'intendi, e da te intelletta - e intendente, te ami e arridi!

*Iddio conceda a tutti noi di veder qualche cosa di così sublimi splendori:* O luce eterna che sola in te sidi! *Il mistero scompare forse davanti a questa inondazione di luce? No, il mistero resta: ma quanta bellezza di cose e quante cose vanno al loro posto, quante nozioni errate vengono confutate: quella di coloro, ad esempio, i quali hanno detto aver avuto Iddio bisogno di creare il mondo per togliersi dalla tremenda solitudine della sua eternità. Si tratta invece di una bellissima eternità: il Padre, il Verbo e lo Spirito Santo: una divina infinità di vita in una triplice infinità di realtà, di personalità.*

*Poteva ciò sembrare una digressione: si era invece nel pieno del tema inizialmente proposto: ed il Santo Padre si compiaceva spiegarlo con amabile accento.* Et Deus erat Verbum — *proseguiva* — omnia per ipsum facta sunt. *Tutto questo universo è stato fatto da Lui, per Lui: dunque tutto è stato fatto per questo Verbo, espressione di una parola e parola mentale, di un pensiero, quale giammai è stato pensato cotanto luminoso, profondo, estensivo. È un pensiero divino: è Dio che pensa Se stesso:* O luce eterna che sola in te sidi - sola t'intendi, e da te intelletta - e intendente, te ami e arridi.

*Tutto è fatto per il Verbo, per il grande Operaio dell'universo: nulla può aggiungersi in bellezza e potenza a questa espressione, ma nessuna meraviglia che la stessa divina parola, spiegando l'immensa bellezza di tale opera, dica altrove di Dio:* Omnia fecit in pondere, numero et mensura. *Parrebbe di entrare in un immenso laboratorio di chimica, di fisica e di astronomia: e ben pochi possono ammirare tutta la profonda bellezza di queste parole come coloro che fanno professione di scienza.* In pondere: *voi che pesate le stelle — spiegava Sua Santità — e fate calcoli sul peso specifico dei corpi e perfino sugli atomi;* in numero, *voi che numerate le piccolezze microscopiche e contate gli anni di luce;* in mensura, *voi che, come pesate le stelle, così misurate le distanze astronomiche, le distanze oceaniche. Nessuno più di voi può dunque meglio* *comprendere l'esattezza di quelle parole: che tutto è fatto da Dio* in pondere, numero et mensura.

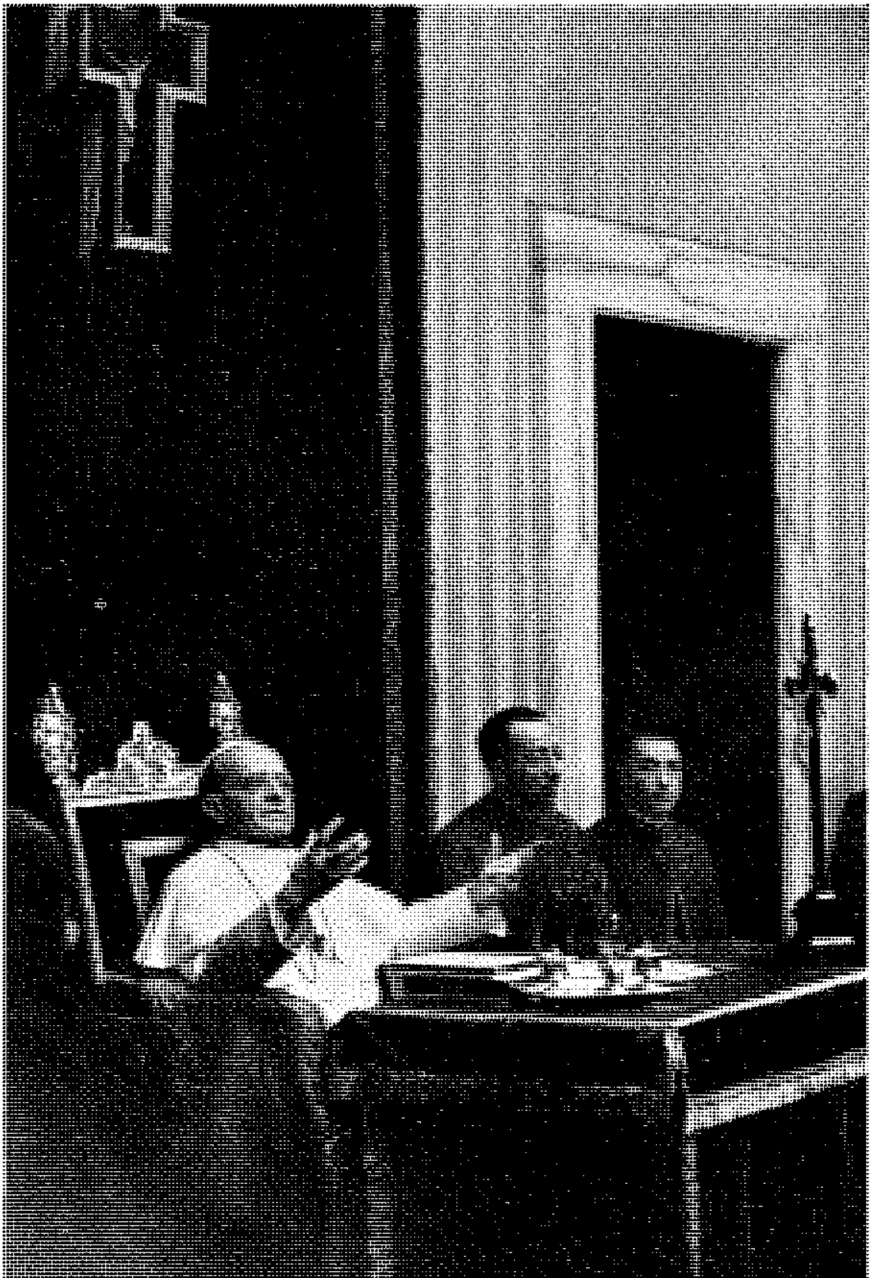
*Poichè adunque l'origine del mondo è questo Verbo divino, e per Lui ogni cosa è stata fatta:* per quem omnia facta sunt, *il riflettere su tale sublime verità non è forse degno di tutta la particolarissima, non solo attenzione, ma vera, propria devozione dei cultori della scienza? Non soltanto qui è infatti la pietà comune di ciascun cristiano: no. Basta essere scienziati, coloro cioè che vedono oltre la materiale scorza delle cose, basta questo per elevarsi ad altezze incomparabili, ed accostarsi a tanta magnificenza.*

Omnia per ipsum facta sunt... in ipso vita erat. *Ecco qualche cosa che l'Augusto Pontefice aveva ritenuto essere per quei cari figli non superfluo ascoltare: e l'aveva ricordata, pur senza aspirare all'inedito, ritenendo così di rispondere in qualche modo alle gradite cose da loro espresse, e che fosse accetto ed adeguato alle loro intelligenze e trovasse il proprio posto nelle loro quotidiane occupazioni di studio, nelle quali* l'universo si squaderna, *accennando a questo Verbo* per quem omnia facta sunt.

*Aveva poi ricordato anche l'altra parola della Sacra Scrittura che concerne l'opera del Verbo di Dio per tutto ciò che è stato creato: tutto è stato fatto* in pondere, numero et mensura. *Tutto il mondo creato si fa, nelle mani di Dio, in peso, numero e misura. Tutto si riduce a questo, tanto per i massimi come per i minimi: ma, inoltre, la Sacra Scrittura ha anche avuto cura di descriverci tutto ciò nel modo più consolante e più delizioso. Nel libro della Sapienza si parla ancora del Verbo di Dio che prende il nome stesso della Sapienza divina e che ci viene descritto, quale* Verbum mentis, *Verbo pensato, immedesimato nell'opera onnipotente della Creazione, di cui la Sapienza stessa si compiace esaltare le impareggiabili armonie.*

*È una pagina deliziosa.*

Ab aeterno ordinata sum: *da tutta l'eternità sono stata costituita: ecco il primo riscontro con l'espressione di Giovanni:* In principio erat Verbum. *E quindi:* Nondum erant abyssi, et ego jam concepta eram: *io già ero generata e gli abissi non esistevano. La Divinità pensava se stessa e la Divina Sapienza era intelletta e generata.* Necdum fontes aquarum eruperant: *e le fonti delle acque non scaturivano ancora;*



necdum montes gravi mole constiterant: *nè i monti ancora sorgevano colla loro grave mole;* adhuc terram non fecerat, et flumina, et cardines orbis terrae: *non aveva ancor fatta la terra, nè i fiumi, nè i cardini del mondo: prima di tutti e di tutto io esistevo.*

*Dopo queste premesse, prosegue il Libro Santo con movenza che è insieme portentosa descrizione e mirabile poesia. Quando la mano di Dio preparava tutto il creato, io, Sapienza sua, ero presente.* Quando praeparabat coelos aderam: quando certa lege, et gyro vallabat abyssos: *quando disponeva i cieli io era presente, quando accerchiava gli abissi nel giro regolare dei loro confini;* quando aethera firmabat sursum, et librabat fontes aquarum: *quando fissava le atmosfere di sopra e sospendeva le fonti delle acque;* quando circumdabat mari terminum suum, et legem ponebat aquis, ne transirent fines suos; quando appendebat fundamenta terrae: *quando segnava in giro al mare il suo confine e poneva un limite alle acque, affinchè non oltrepassassero le sponde; quando gettava i fondamenti della terra;* cum eo eram cuncta componens: *con Lui ero disponendo tutte le cose.*

*A ciò sicuramente pensava il Poeta allorchè, paragonando la terra a una nave, sicura delle sue àncore, esclamava:* ...dei cieli - nei lucidi porti - la terra si celi - attenda sull'àncora - il cenno divino - per novo cammino.

*Ecco quanto il Libro Santo ci dice in rapporto a questa divina Sapienza increata del Verbo* per quem omnia facta sunt: *come non accostarsi a tale pagina ispirata senza un profondo sentimento di ammirazione? E qui, si noti, non si accenna che all'universo visibile: v'è inoltre l'universo soprannaturale, che non si vede, ma che esiste con tutte le sue sublimi realtà: tuttavia già alla semplice considerazione del primo, si è portati spontaneamente a celebrare, in questa vece alterna di morte e di vita, le glorie del suo Autore e Creatore per giungere a quella mèta radiosa così giustamente accennata dallo stesso Poeta:* Veggenti e non veggenti - unica notte involve; e d'altri firmamenti - esce l'alba, che solve - del creato il mistero - e ci posa nel vero.

*Realtà consolantissima — spiegava il Santo Padre — e che fa sgorgare nel nostro animo un inno alla Divina Sapienza, al Verbo Divino, per queste intime relazioni dell'essere divino con l'opera divina.* In principio erat Verbum... et Deus erat Verbum: ...omnia per ipsum facta sunt: ...in ipso vita erat. *Quanta luce nel porre mente a siffatti concetti, quanti splendori che, dal creato, fanno assurgere l'anima a più alti, vasti, incommensurabili firmamenti!*

*Del resto il Santo Padre stesso, rievocando qualche episodio della Sua giovinezza, si compiaceva di ricordare, Egli vecchio sacerdote e vecchio alpinista, che proprio sulle più alte vette dei monti da Lui raggiunte, Egli ha compreso appieno il senso di taluni testi della Sacra Scrittura. È precisamente allorchè una volta si trovava a 4630 metri, in mezzo ad altre cime di quasi consimile altezza, che gli apparve in tutto il suo fulgore l'immagine ispirata del Profeta Habacuc: giacchè quelle grandi altezze parevano alzare, siccome giganti, le braccia al cielo per sembrare ancora più grandi, ancora più alte:* Dedit abyssus vocem suam: altitudo manus suas levavit. *Mai il Santo Padre aveva visto avverarsi quanto dice il Profeta, e in un modo così reale: altezze tra le più grandi altezze, che si slanciano come mosse da vita, quasi con impeto sempre rinnovantesi, verso nuove più ardite sommità, verso gli abissi dei cieli.*

*A queste elevate considerazioni l'Augusto Pontefice si compiaceva accennare, pensando come i dilettissimi figli che Gli erano presenti avrebbero condiviso con Lui la grande delizia spirituale che ne scaturiva, augurando a tutti e singoli che alla loro vita interiore e di studio il Signore faccia godere qualche raggio abbondante di quella* luce intellettual piena d'amore; - amor di vero ben, pien di letizia; - letizia che trascende ogni dolzore. *È vero — riprendeva il Santo Padre — che qui si parla di amore e di luce soprannaturale, ma è anche vero che ad essa si arriva pur soffermandosi al meraviglioso concetto dell'universo visibile. Ce ne dà invito proprio la Chiesa santa, maestra di fede e di verità; ma è appunto con quella fede, con quella verità che ci si può avvicinare alla infinita luce di Dio:* O luce eterna, che sola in te sidi, - sola t'intendi, e da te intelletta - ed intendente, te ami e arridi!

*Con questi pensieri Sua Santità rinnovava ai convenuti l'augurio di un Santo Natale, così come essi possono gustarlo e come lo meritano; congiunto a tutti gli altri paterni voti che Egli voleva ridire per tutti e ciascuno, alla presenza ineffabile del grande Mistero dell'Incarnazione del Verbo di Dio, auspicando che da esso si sprigioni e diffonda intensa* *e benefica luce in tutte le direzioni dai presenti desiderate, e con molteplici doni di bene per quanti e tutto quello che essi portavano, in quel momento, nel pensiero e nel cuore.*

Impartita la Benedizione Apostolica, il Santo Padre si intratteneva alquanto con gli Emi Cardinali. Di poi, ricevuto l'omaggio della eletta assemblea lasciava la Sede dell'Accademia e faceva ritorno al Palazzo Apostolico del Vaticano.

In tutti vivissimo era il sentimento di filiale e fervida riconoscenza verso l'Augusto Pontefice, Che si era degnato non solo di onorare con la Sua presenza l'inaugurazione del nuovo anno accademico, ma aveva altresì voluto renderla memoranda con tante elette, elevatissime parole.

# RESOCONTO

## DELLA PRIMA TORNATA ORDINARIA DEL III ANNO ACCADEMICO

*(Domenica 18 dicembre 1938)*

Presiede il Revmo Prof. P. A. GEMELLI O. F. M., Presidente.

Sono presenti gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, BOLDRINI, BOTTAZZI, COLONNETTI, CROCCO, GEMELLI, GHIGI, GIORDANI, GIORGI, GOLA, GUIDI, LEMAÎTRE, LEPRI, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, MICHOTTE VAN DER BERCK, NOBILE, NOYONS, PANETTI, PENSA, PISTOLESI, RASETTI, RONDONI, SILVESTRI, TONIOLO, VALLAURI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, SCHMIDT, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

*Ordine del giorno:* 1) Approvazione del Verbale della precedente Tornata. 2) Comunicazioni del Presidente. 3) Relazione della Commissione aggiudicatrice del « Premio Pio XI » per la Biologia (1938). 4) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 5) Varia.

Il Presidente GEMELLI dichiara aperta la seduta alle 16,45.

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione, e poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI comunica al Corpo Accademico l'Augusta sodisfazione del Santo Padre per la riuscita cerimonia della mattina e riferisce le espressioni di sovrano gradimento che Egli a questo scopo Si era benignato rivolgergli.

Tutti i presenti ascoltano in piedi le parole del Presidente il quale termina il suo dire proponendo l'invio di un telegramma di riconoscenza al Santo Padre.

Il Corpo Accademico plaude alla proposta e viene immediatamente spedito il seguente dispaccio telegrafico:

*Santo Padre — Città Vaticano — Accademici Pontifici riuniti per Tornata scientifica ricordando preziosi insegnamenti impartiti da Vostra Santità questa mattina rivelando una volta di più con quale paterno cuore Vostra Santità ama questa Pontificia Accademia mi incaricano porgere Vostra Santità loro devoto filiale ringraziamento promettendo cooperare con loro lavoro difesa pensiero cristiano per restaurazione società in Cristo Signore* stop *Voglia degnarsi Vostra Santità rinnovare a tutti noi Sua Apostolica Benedizione* stop *Con particolare filiale amore esprimo i devoti miei sensi gratitudine — Padre Gemelli, Presidente.*

Il Presidente GEMELLI comunica quindi che il Consiglio Accademico nella sua 10ª seduta del 27 ottobre 1938 ha stabilito di proporre al Corpo Accademico di modificare il «Premio Pio XI» da annuale in biennale per una somma complessiva di lire 50.000.

Dopo breve discussione la proposta è approvata all'unanimità.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI dà la parola al Relatore Accademico BOTTAZZI.

L'Accademico BOTTAZZI fa la Relazione seguente (¹):

Al concorso per il «Premio Pio XI», bandito dalla «Pontificia Academia Scientiarum» per l'anno 1938 su tema concernente le «discipline biologiche», e per giudicare il quale fu nominata una Commissione composta, a norma dell'art. 6 del Regolamento, degli Accademici GE-

(¹) La Commission pour le «Prix Pie XI» de la Pontificia Academia Scientiarum, composée, en vertu de l'art. 6 du Règlement, par les Académiciens GEMELLI, Président; BOTTAZZI, GODLEWSKI, LEPRI et NOYONS, a examiné les travaux présentés par onze concurrents qui ont participé au con-

MELLI, Presidente; BOTTAZZI, GODLEWSKI, LEPRI e NOYONS, hanno preso parte undici concorrenti, alcuni con autoproposta, e sono:

1) DE SEIXAS-PALMA JOSÈ (Lisbona, Portogallo), che ha inviato una Memoria dal titolo: *Il cuore non funzionerà come una pompa aspirante-premente?*

2) DE TALHOUET J. (Rennes, Francia), che ha inviato una Memoria dal titolo: *La vrai nature du devenir.*

3) DUROUX E. (Lyon, Francia), che ha inviato due opere dal titolo: 1° *Le cancer*; 2° *Hérédité du cancer.*

4) GALARDI DINO (Firenze, Italia), che ha inviato documenti riguardanti una sua scoperta nel campo della Bio-fisiologia.

5) LAKHOWSKI GEORGES (Parigi, Francia), che ha inviato varie opere riguardanti una sua nuova concezione dell'Universo in relazione alla Biologia.

6) LECLERC F. (Villemomble, Francia), che ha inviato una Nota dal titolo: *Nouvelle méthode d'examen des caractères fluctuants en Biologie végétale et ses résultats.*

7) MORISSE P. L. (Parigi, Francia), che ha inviato una Nota dal titolo: *Étude d'une technique nouvelle et réalisation d'un appareil de métabolisme basal, utilisant un procédé de barbotage en solution alcaline faible.*

8) PICCININI ELIO D'IGEA (Dosso di Ferrara, Italia), che ha inviato un lavoro manoscritto sulla simpatia e vari altri appunti su particolari sue ricerche.

---

cours, lequel, pour l'année 1938, était réservé aux «sciences biologiques». Onze concurrents ont participés au concours. Huit se présentèrent personnellement.

1) DE SEIXAS-PALMA JOSÉ (Lisbonne, Portugal), qui a envoyé un Mémoire intitulé: *Le cœur fonctionne-t-il comme une pompe aspirante-foulante?*

2) DE TALHOUET J. (Rennes, France), qui a envoyé un Mémoire intitulé: *La vraie nature du devenir.*

3) DUROUX E. (Lyon, France), qui a envoyé deux œuvres intitulées: 1. *Le cancer*; 2. *Hérédité du cancer.*

4) GALARDI DINO (Florence, Italie), qui a envoyé des documents concernant une découverte faite par lui dans le domaine de la Bio-physiologie.

5) LAKHOWSKI GEORGES (Paris, France), qui a envoyé plusieurs œuvres concernant une nouvelle conception de l'Univers en rélation avec la Biologie.

6) LECLERC F. (Villemomble, France), qui a envoyé une Note intitulé: *Nouvelle méthode d'examen des caractères fluctuantes en biologie végétale et ses résultats.*

7) MORISSE P. L. (Paris, France), qui a envoyé une Note intitulée: *Etude d'une tecnique nouvelle et réalisation d'un appareil de métabolisme basal, utilisant un procédé de barbotage en solution alcaline faible.*

8) PICCININI ELIO D'IGEA (Dosso di Ferrara, Italia), qui a envoyé un travail manuscrit sur la sympathie et d'autres remarques sur des récherches particulières par lui faites.

Altri, invece, in seguito a proposta di Accademici, e sono:

9) Heymans Corneille (Gand, Belgio)
proposto da Bottazzi, Gemelli, Lepri, Houssay e Rondoni;

10) Hjost Johan (Oslo, Norvegia)
proposto da Gilson;

11) Lefèvre Jules (Paris, Francia)
proposto da Picard.

La Commissione ha preso in esame, a norma dell'art. 8 del Regolamento, le opere dei vari concorrenti, ne ha valutato comparativamente il valore, e ha incaricato unanimemente l'Accademico Bottazzi di stendere la presente relazione da presentare all'approvazione del Consiglio Accademico.

Sebbene tutti i concorrenti si siano occupati, come dimostrano le opere presentate, di problemi biologici, è sembrato alla Commissione che l'attività di parecchi di loro si sia svolta troppo poco con investigazioni personali su campi concernenti le scienze biologiche, e che essi piuttosto si siano lasciati andare troppo a speculazioni d'ordine filosofico. Altri sono rimasti bensì entro i confini della biologia sperimentale, ma la loro attività si è ristretta all'indagine di un solo problema, che per giunta non hanno nemmeno molto approfondita.

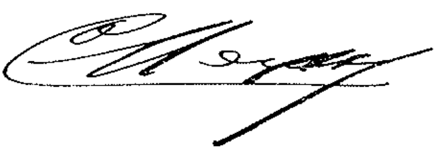
---

Trois candidats furent présentés par des Académiciens:

1) Heymans Corneille (Gand, Belgique), proposé par M. M. Bottazzi, Gemelli, Lepri, Houssay et Rondoni.
2) Hjost Joan (Oslo, Norvège), proposé par M. Gilson.
3) Lefèvre Jules (Paris, France), proposé par M. Picard.

La Commission a examiné conformément à l'art. 8 du Règlement, les travaux présentés, elle a comparé leur valeur, et a chargé, à l'unanimité, l'Académicien Bottazzi de rédiger le présent rapport pour le présenter à l'approbation du Conseil Académique.

Tous les concurrents ont traité, comme il résulte des travaux présentés, des problèmes biologiques. Toutefois la Commission estime que beaucoup d'entre eux ont moins développé des recherches personnelles sur des questions se rattachant aux sciences biologiques, qu'ils ne se sont livrés à des considérations d'ordre philosophiques. D'autres, tout en demeurant dans les limites de la Biologie expérimentale, ont examiné uniquement une question, dont ils n'ont, d'ailleurs, pas très approfondi l'étude.



Fra tutti, uno è parso alla Commissione che emerga, costituendo una veramente felice eccezione: egli è il Dott. Cornelio Heymans, professore di Farmacologia nella Facoltà di Medicina dell'Università di Gand, dottore *honoris causa* dell'Università di Utrecht, Membro di molte Accademie e Società biologiche, laureato di varie Accademie belghe e francesi, direttore delle « Archives Internationales de Pharmacodynamie et de Thérapie », periodico conosciuto e apprezzato in tutto il mondo scientifico.

Heymans eccelle per una infaticabile attività che si è venuta svolgendo in campi diversi della fisiologia, e sempre alla luce d'una assai ampia visione dottrinale, e col sussidio d'una tecnica sperimentale ingegnosa e perfetta.

Con rara abilità, egli ha saputo felicemente sfruttare il metodo della « circolazione incrociata », per cui un organo può essere, per usare le sue stesse espressioni, *circolatoriamente isolato ma nervosamente intatto*, e che permette di misurare le reazioni di quell'organo ai mutamenti del suo regime circolatorio o della quantità di sangue ond'è irrigato, applicandolo, prima, in ricerche eseguite in collaborazione con suo padre, alla testa isolata, al cuore e ai polmoni isolati, e poi estendendolo da solo al seno carotideo e ad altri organi, quali la milza isolata, la testa eccetto i seni carotidei, la rete venosa addominale isolata ecc. L'applicazione metodica del metodo fatta con vari e ingegnosi adattamenti, e l'utilizzazione giudiziosa dei risultati otte-

---

Il paraît à la Commission qu'entre tous, il en est un qui doit être signalé comme faisant une heureuse exception; il s'agit de Monsieur le Docteur Corneille Heymans, Professeur de Pharmacologie à la Faculté de Médecine de l'Université de Gand, Docteur *honoris causa* de l'Université d'Utrecht, membre de plusieurs Académies et Sociétés biologiques, lauréat de plusieurs Académies Belges et Françaises, Rédacteur des « Archives Internationales de Pharmacodynamie et de Thérapie », revue bien connue et appréciée dans le monde savant.

Monsieur Heymans se signale par son activité, qui s'est exercée dans différents domaines de la Physiologie, toujours à la lumière d'une très large vision doctrinale et avec l'aide d'une technique expérimentale ingénieuse et parfaite.

Avec une rare habileté, il a su faire usage de la méthode dite de la « circulation croisée », de sorte que, d'après sa définition, un organe peut être « isolé circulatoirement, mais rester nerveusement intact », ce qui permet d'enregistrer les réactions de l'organe comme suite aux modifications, soit intrinsèques, soit extrinsèques de la circulation sanguine. Il appliqua cette méthode d'abord en collaboration avec son père, à la tête, au cœur et aux poumons isolés, et ensuite, il l'étendit personnellement au sinus carotidien et à d'autres organes, tels que la rate isolée, la tête isolée privée de ses sinus carotidiens, le réseau des veines abdominales isolées, etc.

L'application systématique de cette méthode, avec des adaptations variées et ingénieuses ainsi que l'utilisation judicieuse des résultats obtenus, ont permis à Heymans de découvrir de nuti, hanno permesso ad Heymans di scoprire molti fatti nuovi e interessanti, di pervenire alla soluzione di problemi controversi, in fine di contribuire largamente all'avanzamento delle nostre conoscenze nel campo della fisiologia.

Giova rammentare alcuni — che a tutti sarebbe impossibile sia pure solo accennare brevemente — dei risultati che hanno messo meritamente in prima linea Heymans fra i cultori della fisiologia e della farmacologia sperimentali.

Il problema dell'influenza della pressione arteriosa cefalica sul ritmo del cuore e sul tono delle arterie, per il quale erano state formulate soluzioni differenti, da Hering, in un senso, e in senso affatto diverso da Anrep e Starling, è stato risolto definitivamente da Heymans nel senso del primo sperimentatore, cioè che l'influenza si esercita per la via d'un riflesso iniziantesi nel seno carotideo.

Estendendo il campo delle sue investigazioni, Heymans ha mostrato come la pressione intravascolare, agendo a livello delle zone vasosensibili dell'aorta e dei seni carotidei, regola per via riflessa, non solamente il tono delle arterie splancniche e delle periferiche, ma anche il tono venomotorio, la pressione intravenosa e il volume sistolico del cuore.

Una serie di lavori molto interessanti ha per oggetto lo studio dell'ipertensione arteriosa permanente che segue, nel cane, alla sezione dei quattro nervi frenatori. Con queste ricerche Heymans ha dimostrato,

---

nombreux faits nouveaux et intéressants, de résoudre des problèmes encore controversés et enfin de contribuer très largement au progrès de nos connaissances dans le domain de la physiologie.

Il est utile de rappeler quelques-uns des résultats qui ont mis Heymans au premier rang des physiologistes et pharmacologues expérimentaux: il serait, en effet, impossible de les rappeler tous ici.

Le problème de l'influence de la pression artérielle céphalique sur le rythme du cœur et sur le tonus des artères, problème résolu de façon toute différente par Hering d'une part par Anrep e Starling d'autre part, a été résolu définitivement par Heymans qui démontra, en accord avec Hering, que l'influence de la pression artérielle céphalique s'exèrce, sur le rythme cardiaque par l'intermédiaire d'un réflexe qui prende son origine au niveau du sinus carotidien.

En étendant le champ de ses recherches, Heymans a démontré que la pression endovasculaire au niveau des zones vasosensibles de l'aorte et des sinus carotidiens, règle, par voie réflexe, non seulement le tonus des artères splanchniques et périphériques, mais aussi le tonus vénomoteur, la pression veineuse et le volume systolique du cœur.

Toute une série de travaux très intéressants a eu pour objet l'étude de l'hypertension artérielle permanente qui se produit, chez le chien, après la section des quatre nerfs frénateurs. Par in collaborazione con J. J. Bouckaert, che l'ipertensione sparisce dopo l'estirpazione dei cordoni simpatici.

Altro oggetto d'indagine è stato quello dei fattori che regolano l'irrigazione sanguigna del cervello. Le sue ricerche hanno messo in chiaro l'ufficio essenziale che esercitano, a questo riguardo, i riflessi senocarotidei, i quali, mantenendo invariabile la pressione nella carotide, e regolando la distribuzione del sangue fra le diverse aree vascolari della circolazione generale, assicurano un afflusso costante di sangue verso il cervello, senza che le sue arterie vi intervengano, per sè stesse, attivamente.

Oltre alla fisiologia della circolazione, anche quella della respirazione ha attratto l'attenzione dell'autore. Con ricerche bene ideate e abilmente condotte, Heymans ha dimostrato che l'iperpnea causata dall'ipotensione arteriosa e l'apnea che segue all'ipertensione sono manifestazioni di riflessi basosensibili originantisi nella parete cardioaortica e nel seno carotideo. Sono dunque gli stessi influssi nervosi centripeti che regolano, non solo il ritmo del cuore, il tono delle arterie e la secrezione dell'adrenalina, ma anche la frequenza degli atti respiratori; ed è per il tramite dei detti influssi che una iniezione intravenosa di adrenalina produce l'apnea. Heymans ha stabilito pertanto, con nuovi e ingegnosi esperimenti, una molto interessante unità di reazioni vascolari e respiratorie.

---

ces recherches, Heymans a démontré, en collaboration avec J. J. Bouckaert, que l'hypertension disparait après l'extirpation des chaînes sympathiques.

Heymans a étudié également les mécanismes qui règlent l'irrigation sanguine du cerveau. Ses recherches ont démontré que les réflexes sino-carotidiens jouent un rôle essentiel. En effet, ces réflexes maintiennent à un niveau constant la pression dans la carotide, ils règlent la distribution du sang entre les différents territoires vasculaires de la circulation générale et assurent de la sorte un apport constant de sang vers le cerveau, même sans que les artères cérébrales n'interviennent d'une manière active.

Non seulement la physiologie de la circulation, mais aussi celle de la respiration a fixé l'attention de l'auteur.

Par des recherches bien conçues et conduites avec habileté, Heymans a démontré que l'hyperpnée provoquée par l'hypotension artérielle et l'apnée consécutive à l'hypertension sont des manifestations de réflexes pressesensibles, qui ont leur origine dans la paroi cardio-aortique et dans le sinus carotidien. Ce sont donc les mêmes influx nerveux centripètes qui règlent non seulement le rythme du cœur, le tonus des artères et la sécrétion de l'adrénaline, mais aussi la fréquence des mouvements respiratoires. Ce sont ces mêmes réflexes qui lors d'une injection intraveineuse d'adrénaline produisent l'apnée. Heymans a ainsi établi, avec des nouvelles et ingénieuses expériences, une très intéressante unité dans les réactions vasculaires et respiratoires.

Elegante è stata, inoltre, la dimostrazione da lui data, che le fibre afferenti dei nervi di Cyon e di Hering propagano impulsi, da recettori periferici situati nei seni carotidei, i quali sono sensibili, non solamente alle variazioni di pressione nelle arterie (*baro-sensibilità*), ma anche a cangiamenti della composizione chimica (*chimo-sensibilità*) del liquido di perfusione, per esempio a un pH acido di questo, o a un liquido ricco di $CO_2$ ecc., e che i detti impulsi sono atti a provocare apnea e le modificazioni cardiovascolari corrispondenti. Senza bisogno d'indugiare su altre ricerche analoghe, si può con sicurezza affermare senza timore di esagerare, che più di qualunque altro fisiologo Heymans ha approfondito lo studio ed esteso la conoscenza della funzione dei nervi pressoregolatori, e che il suo nome rimarrà definitivamente legato a questo fondamentale capitolo della fisiologia.

Altri problemi hanno ancora fissato l'attenzione dell'autore, ma di questi sia consentito fare solamente un cenno. Essi sono: le funzioni del sistema nervoso simpatico, scoprendo fatti inattesi che hanno modificato in parte le analoghe vedute di Cannon; l'ipertermia prodotta mediante il blu di metilene, il dinitrofenolo e altri composti stimolanti direttamente il metabolismo; i riflessi vasomotori midollari determinati dalla stimolazione pressoria delle pareti vascolari; l'origine bulbare delle fibre acceleratrici dei nervi vaghi; l'influenza della rachianestesia sui nervi vasomotori ecc.

---

D'une manière élégante il a aussi démontré que les fibres afférents des nerfs de Cyon et de Hering déclenchent des réflexes par l'intermédiaire de récepteurs périphériques, situés dans les sinus carotidiens, qui sont sensibles non seulement aux variations de la pression dans les artères (pressosensibilité) mais aussi à des variations dans la composition chimique (chemosensibilité) du liquide de perfusion, par exemple à un pH acide de ce liquide, ou à un liquide riche en $CO_2$ etc. Heymans a démontré que ces réflexes peuvent produire de l'apnée et des modifications cardiovasculaires.

Il n'est pas necessaire d'examiner davantage d'autres recherches analogues pour affirmer, avec certitude et sans crainte d'exagérer que Heymans a, plus que tout autre physiologiste, approfondi l'étude et élargi nos connaissances sur la fonction des nerfs presso-régulateurs et que son nom sera toujours lié à ce chapitre fondamental de la physiologie.

D'autres questions ont également fixé l'attention de l'auteur, questions auxquelles nous ferons uniquement allusion. Ce sont: les fonctions du système nerveux sympathique, domaine ou l'auteur a découvert des faits inattendus qui ont modifié, en partie, les conclusions d'expériences analogues effectuées par Cannon; l'hyperthermie produite par le bleu de méthylène, le dinitrophénol et d'autres composés stimulant directs du métabolisme; les réflexes vasomoteurs d'origine médullaires et provoqués par les variations de la pression endo-vasculaires; l'origine bulbaire des fibres cardio-accéleratrices des nerfs vagues; l'influence de la rachianesthésie sur les nerfs vasomoteurs, etc.

Instituiti secondo un piano ben definito, condotti con logica rigorosa, eseguiti con rara abilità e completa padronanza dei metodi, esposti in singole note e in pubblicazioni sintetiche di più largo respiro, con chiarezza, precisione e vasta conoscenza della letteratura, i lavori rammentati di C. Heymans, ed altri che per brevità si tralasciano, hanno prodotto una copiosa messe di fatti nuovi, per la massima parte confermati da altri sperimentatori, e che già hanno preso il posto che meritano fra le conoscenze scientifiche meglio stabilite.

In conclusione, avendo diligentemente esaminato i lavori di sopra rammentati e valutata l'importanza di essi, la Commissione unanimamente si onora di proporre che il « Premio Pio XI » per l'anno 1938 sia conferito al Prof. Cornelio Heymans. E nel fare la proposta, che con tale ambito Premio siano coronati i lavori eseguiti da C. Heymans nei vari campi della fisiologia e della farmacologia sperimentali sui quali si è esercitata la sua attività di ricercatore, e particolarmente quelli che hanno contribuito ad approfondire la nostra conoscenza della vasosensibilità e dei riflessi che essa può provocare, noi non facciamo se non consacrare il giudizio favorevolissimo che sulla vasta e sempre importante opera di C. Heymans hanno formulato i biologi più autorevoli di vari paesi così d'Europa come d'America, dove egli è anche andato, per invito ricevuto, ad esporre i risultati dei suoi studi in dottissime conferenze.

---

Les travaux de C. Heymans, effectués selon un plan bien défini, conduits avec une logique rigoureuse et exécutés avec une rare habileté et une absolue maîtrise de méthode, sont exposés dans des publications séparées et dans des publications synthétiques d'une large envergure, avec clarté, précision et une connaissance étendu de la bibliographie. Ces travaux ont produit une riche moisson de faits nouveaux, presque tous confirmés par d'autres expérimentateurs, et qui ont déjà obtenu la place qui leur revient parmi les connaissances scientifiques les mieux établies.

Pour ces motifs, la Commission, après avoir examiné avec soin les travaux susmentionnés et en avoir établi l'importance, propose, à l'unanimité, que le « Prix Pie XI » pour l'année 1938 soit attribué à M. le Professeur Corneille Heymans. Ce Prix très honorifique couronnera les travaux effectués par M. C. Heymans dans les différents domaines de la Physiologie et de la Pharmacologie expérimentales où il a exercé son activité de chercheur, ce Prix couronnera en particulier ses travaux qui ont contribué à enrichir nos connaissances sur la vasosensibilité et sur les réflexes que cette vasosensibilité peut déclencher,

En faisant cette proposition, nous ne faisons que consacrer le jugements très favorable que l'œuvre, vaste et très importante, de M. C. Heymans, à déjà reçu de la part des biologistes les plus autorisés de nombreux pays non seulement d'Europe mais aussi d'Amérique, où il fut invité à exposer, en des conférences, les résultats de ses travaux.

Terminata la Relazione tra gli applausi del Corpo Accademico si passa al quarto punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico COLONNETTI presenta la seguente Nota:

G. COLONNETTI - *Risoluzione grafica generale del problema della flessione in regime elasto-plastico.*

L'Accademico LOMBARDI presenta la seguente Nota:

G. SACERDOTE - *La densità di energia in alcuni problemi di acustica.*

Presenta inoltre in omaggio all'Accademia il *Vocabolario Elettrotecnico Internazionale* compilato sotto la sua direzione dalla Commissione Elettrotecnica Internazionale.

Esso è redatto in sei lingue, in due delle quali, che la Commissione ha adottato come sue lingue ufficiali, la francese e la inglese, sono state elaborate le definizioni di circa duemila termini relativi ai capitoli più importanti della materia, distribuendoli in ordine logico in quattordici gruppi, e per ognuno di questi in un certo numero di sezioni. Ogni termine è affetto da un numero di sette cifre, due delle quali ne caratterizzano il gruppo, due la sezione e tre il posto assegnato in quest'ultima; le cifre si succedono in questa redazione preliminare secondo una progressione di cinque in cinque unità, la quale permetterà la successiva intercalazione di nuovi termini, sezioni e gruppi, a misura che li potranno richiedere gli sviluppi successivi della disciplina.

Un gruppo di quattro altre lingue fu poi ammesso per la sola traduzione dei termini, allo scopo di facilitare i rapporti intellettuali e le transazioni commerciali fra le diverse Nazioni. A tal uopo vennero prescelte anzitutto quelle lingue moderne che hanno maggiore diffusione nella letteratura tecnica e scientifica, e cioè ordinatamente la tedesca, l'italiana e la spagnuola. Per aderire al desiderio di alcuni Comitati nazionali, i quali auspicavano l'impiego di una lingua ausiliaria per facilitare anche fra le Nazioni minori gli scambi di coltura e di commercio, alle tre lingue predette venne aggiunto l'esperanto, di cui è molto facile lo studio e relativamente largo l'impiego in varî Paesi. Tale aggiunta venne peraltro sancita in via esclusivamente provvisoria, a titolo d'esperimento, e probabilmente non avrà seguito nelle edizioni ulteriori, rivendicandosi da varie parti di preferenza l'introduzione di qualche lingua caratteristica del gruppo slavo, o addirittura quella di un numero illimitato di altre lingue moderne, laddove altri propongono di limitare il Vocabolario internazionale alle sole lingue ufficiali della Commissione, lasciando ai singoli Comitati nazionali la cura e responsabilità dei vocabolari rispettivi.

Il Comitato Elettrotecnico Italiano ha effettuato una larga distribuzione di questo Vocabolario fra i Circoli nazionali di Coltura, le Accademie, le Università e le Scuole superiori, col prezioso intento di ottenerne una disamina accurata, e possibilmente una critica sottile che fornisca gli elementi per una sistematica revisione che prelude alle ulteriori edizioni.

In tal senso l'Accademico Lombardi, che oggi ha l'onore di presiedere la Commissione Elettrotecnica, ardisce rivolgere la stessa preghiera ai singoli Colleghi dell'Accademia che hanno interesse o competenza nei problemi della terminologia scientifica, e potranno fornire alla Commissione internazionale una preziosa collaborazione.

L'Accademico Nobile presenta in omaggio la recentissima edizione italiana del libro su *La preparazione ed i risultati scientifici della spedizione polare dell'«Italia»*.

Il libro contiene i rapporti documentati dei tre scienziati che presero parte ai voli dell'«Italia» sulla regione polare, Aldo Pontremoli di Milano, Finn Malmgren di Upsala, Franz Behounek di Praga, ed inoltre le relazioni dei professori Luigi Palazzo, Oddo Casagrandi, Pugno Vanoni, ing. De Mottoni, dott. Amedeo Nobile, che parteciparono alla preparazione scientifica della spedizione, nonchè un rapporto di D. Vito Zanon sulle diatomee della Baia del Re.

Alle relazioni dei vari collaboratori è premessa una relazione generale di Nobile stesso, capo della spedizione, nella quale sono esposti il programma che la spedizione si era proposto, la preparazione fatta per metterlo in esecuzione ed i risultati conseguiti durante le 161 ore di volo compiute nelle regioni polari.

L'edizione italiana esce a distanza di alcuni anni da quella tedesca pubblicata nel 1930 dall'editore Justus Perthes di Gotha, della quale viene riportata, nel testo italiano, la prefazione dettata dai professori Berson e Breitfuss; ma in confronto della tedesca l'edizione italiana è più completa di documenti e relazioni. In appendice sono stati ricordati alcuni notevoli giudizi di scienziati stranieri sull'opera scientifica compiuta dalla spedizione polare italiana, che dopo undici anni è ancora insorpassata per la durata dei voli compiuti sulla calotta artica.

L'Accademico PANETTI presenta la seguente Nota:

M. PANETTI - *La geometria delle ruote dentate fra assi sghembi.*

Premesso lo studio delle proprietà geometriche delle dentature oggi realizzate per il caso degli assi sghembi (dentature elicoidali ordinarie e dentature ipoidali) e dedotti i modi di essere dei loro contatti, si dà notizia delle ricerche fatte nel campo della geometria sul problema generale, e delle soluzioni che tali ricerche suggeriscono, discutendole dal punto di vista delle possibilità della loro esecuzione e delle caratteristiche del loro modo di operare.

L'Accademico PENSA presenta in omaggio a nome della Società Medica di Pavia il volume testè pubblicato a cura della Società stessa, dal titolo: *Epistolario di Antonio Scarpa.*

Questo volume di lettere di Antonio Scarpa, la Società medica di Pavia ha voluto pubblicare nel celebrare il 50º anniversario di sua fondazione, intendendo con ciò di onorare la memoria dell'insigne anatomico e chirurgo.

Le lettere si riferiscono al periodo più attivo della vita di Antonio Scarpa che intercorse dall'anno 1772 al 1832, periodo aureo per la scienza italiana nel quale si ergevano contemporaneamente nell'Ateneo lombardo le grandi figure di Scarpa, di Volta, di Spallanzani.

Sono in numero di 669. Di esse gran parte sono inedite; le altre che furono raccolte da pubblicazioni sparse e per lo più difficilmente reperibili furono collazionate sui rispettivi originali e depurate dai molti errori di trascrizione e di stampa. Il lavoro lungo, faticoso, delicatissimo di raccolta del materiale, di ordinamento, di correzione e di riproduzione è stato fatto con la massima cura e diligenza dal bibliotecario della Società medica, Prof. Guido Sala, appassionato cultore di storia delle scienze mediche. L'opera sua preziosissima desidero segnalare alla considerazione dell'Accademia.

Interessantissima come introduzione all'epistolario è la riproduzione integrale degli appunti autobiografici raccolto in un autografo che è in possesso dell'Università di Pavia e che solo nella loro prima parte erano già stati resi noti dal Favaro.

La raccolta delle lettere incomincia con una giovanile dalla quale risulta che lo Scarpa solo ventenne è già professore di Anatomia all'Università di Modena ed ha scoperto il timpano secondario della finestra rotonda dell'orecchio che ha appunto la denominazione di timpano secondario dello Scarpa. Fra le lettere di chiusura ne eccellono due in latino indirizzate al grande anatomico di Lipsia Enrico Weber che trattano a fondo l'argomento dell'origine e dell'essenza dei nervi e del significato dei gangli spinali. Sono lettere che lo Scarpa ha scritto l'anno precedente alla morte e che ha pubblicato negli Annali universali di Medicina segnando una delle tappe più memorabili nella nevrologia. Oltre a queste lettere indirizzate al Weber moltissime altre di carattere scientifico contengono preziose e curiosissime notizie che fanno ancor più ammirare la genialità, la grande cultura e l'acutezza di osservazione di questo privilegiato ricercatore già immortalato dalle sue opere stampate. Di carattere scientifico ed accademico sono infatti i suoi rapporti epistolari con Alessandro Volta, con Lazzaro Spallanzani, col Blumenbach e col Cuvier, con Bartolomeo Panizza, con Leopoldo e Floriano Caldani, col Rasori, con Pietro Moscati, con Gregorio e Felice Fontana, con Michele Girardi suo condiscepolo alla scuola del Morgagni.

Le sue profonde conoscenze nel campo dell'oculistica si riaffermano negli scritti diretti al Mannoir, la sua magistrale pratica medica e chirurgica risulta manifesta dai limpidi esposti clinici e dai consigli contenuti in molte lettere indirizzate a colleghi e ad allievi; veri consulti medici e chirurgici di immenso valore. Si apprezza la cultura letteraria ed artistica, il buon gusto ed il senso critico nella corrispondenza con Gerolamo Tiraboschi, con Giuseppe Longhi, con Leone Antonini, con Luigi Bossi, col Bodoni; ed anche si sente l'appassionato e sapiente agricoltore negli scritti ad Jacopo Moriggi e perfino in qualche lettera indirizzata ai colleghi e discepoli Panizza e Rusconi.

Di grande interesse poi è la corrispondenza ufficiale con le gerarchie governative, coi funzionari accademici e con colleghi e che riguarda il funzionamento dell'Università di Pavia. Imponente appare la figura dello Scarpa come reggitore degli studi, come organizzatore di istituti scientifici e clinici; intransigente e perfino spietato verso chi egli riteneva impari alla missione di maestro, intollerante di tutto ciò che potesse anche di poco sminuire il fasto e la nobiltà dell'Ateneo lombardo per la cui grandezza tanto egli stesso aveva cooperato.

Questo epistolario è un'opera che oltre a rivelare frutti non ancora conosciuti del pensiero, dell'esperienza e delle penetranti doti di osservatore dello Scarpa, offre anche agli studiosi di storia della scienza e della vita universitaria della sua epoca, materiali preziosissimi.

L'Accademico Soprannumerario P. A. Albareda O. S. B., Prefetto della Biblioteca Apostolica Vaticana, presenta l'ultima pubblicazione edita dalla Biblioteca Apostolica Vaticana: l'opera intitolata *Mappamondo cinese del P. Matteo Ricci S. J.*, tradotta in italiano, commentata e annotata dal P. Pasquale Maria d'Elia S. J.

L'opera comporta tre parti: una introduzione storica, una riproduzione fototipica, e la versione con annotazioni filologiche, geografiche, storiche ecc.

Delle diverse edizioni di questo famoso Mappamondo pubblicate in Cina dal P. Matteo Ricci sul principio del secolo XVII sono rimaste solo due copie autentiche: l'esemplare Kyoto e l'altro, più completo, che si trova nella Biblioteca Apostolica Vaticana e che è riprodotto nell'opera presentata.

Il P. Albareda si intrattiene ad illustrare questa monumentale pubblicazione che costituisce un importante avvenimento nel campo degli studi geografici e sinologici.

L'Accademico Toniolo prende la parola per esprimere all'Accademico Albareda, Prefetto della Biblioteca Apostolica Vaticana, il compiacimento dell'Accademia per un così cospicuo contributo al maggiore sviluppo delle scienze geografiche i cui studiosi lamentavano fino ad ora la difficoltà di una pratica consultazione di così basilare lavoro.

L'Accademico Soprannumerario P. A. Gatterer, Direttore del Laboratorio Astrofisico della Specola Vaticana fa una Comunicazione sul seguente argomento: *Der Nachweis kleinster Mengen von Europium in Gadolinium und Samarium.*

Bekanntlich ist es für den Chemiker ausserordentlich schwierig, die Verbindungen der seltenen Erden, die in der Natur immer gemischt auftreten, so voneinander zu trennen, dass die Verbindungen des einzelnen Elementes in hoher Reinheit erhalten werden. Wegen der geringen chemischen Unterschiede der einzelnen Individuen gelangt man erst zum Ziele, wenn der Prozess der fraktionierten Kristallisation viele Tausendmale wiederholt wird.

Selbst diesen chemisch reinsten Präparaten haften noch kleine Verunreinigungen an freilich in so geringem Grade, dass deren Nachweis die feinsten und empfindlichsten Methoden erfordert.

Neben den rein chemischen Verfahren ist in letzer Zeit für Einzelfälle auch die künstliche Radioaktivität der Elemente mit Erfolg herangezogen worden. So konnte z. B. G. Hevesy in Kopenhagen kleine Mengen von Eu in Gd-Präparaten nachweisen, die von Prof. L. Rolla zur Prüfung übergeben wurden. Zu dem Zwecke wird das Präparat mit Neutronen beschossen, wodurch es aktiv wird. Die Aktivität ist nun in diesem Falle praktisch proportional der Menge der Verunreinigung an Europium. Es gelang auf diese Weise den Gang der Reinigung von Gd-Proben bis zu einem Prozentgehalte von etwa 0,4 an Eu zu verfolgen.

Es schien mir nun von Interesse zu untersuchen, ob diese Nachweisempfindlichkeit auch auf spektroskopischem Wege erreicht, ja vielleicht noch übertroffen werden könnte. Es wurden also die Proben, die Herr Professor Rolla in liebenswürdiger Weise dem astrophysikalischer Laboratorium zur Verfügung stellte, im Lichtbogen verdampft und das Spektrum derselben in grosser Dispersion aufgenommen. Auf dieselbe Platte kamen auch die Spektren der drei Eichlösungen, die 0,1, 0,01 und 0,001 % Eu enthielten.

Aus den Aufnahmen ist zu ersehen, das ein Gehalt bis zu 0,01 % Eu spektroskopisch noch sehr gut nachweisbar ist. Für die Präparate, die Hovesy untersucht hatte ergab sich in Übereinstimmung mit seinen Resultaten ein Gehalt von schätzungsweise 0,3 % Eu. Genauere quantitive Resultete sind durch spektroskopische Untersuchung erst zu erlangen, wenn die Grundsubstanz dieser Präparate (Sm-hältiges Gadolinium) europiumfrei zur Verfügung steht, um sie zur Herstellung ganz geeigneter Eichlösungen zu benützen. Leider ist das nicht der Fall, da uns bis jetzt überhaupt keine Gd-Probe untergekommen ist, die ganz frei von Eu war.

Für die Reinheitsprüfung des Samarium, das fast immer Spuren von Eu enthält, lagen dagegen die Bedingungen günstiger. Wir sind wiederum Herrn Professor Rolla zu grossem Dank verpflichtet, dass er uns eine hinreichende Menge von sehr reinem Sm (D) zur Verfügung stellte, das auch bei reichlicher Belichtung im Bogenspektrum keine Spuren der Eu-Linien zeigte. Mit dieser Grundsubstanz und reinem Eu (Rolla) wurden Eichlösungen angesetzt, die in Bezug auf Samarium 1 %, 0,5 %, 0,1 %, 0,01 %, 0,001 % Eu enthielten Vier Sm-Präparate kamen zur Untersuchung: Sm (P), eine Probe von W. Prandtl, Sm (Au) aus dem ehemaligen Laboratorium des Frh. Auer v. Welsbach, Sm (R) und Sm C, sämtlich von Prof. Rolla.

Die quantitative Auswertung der Bogenspektren dieser Proben ergab folgendes Resultat; Sm (P) 0,11 %, Sm (Au) 0,20 %, Sm (R) 0,27 %, Sm (Gd) 0,35 %, Sm C 0,005 % während, wie oben bereits erwähnt, Sm D keine nachweisbaren Spuren von Eu erkennen liess.

Bei Anwendung des Abreissbogens und öfterem Beschicken der Kohlen mit Lösung dürfte die quantitative Bestimmung his auf 0,001 % Eu möglich sein. Mithin ist die spektralanalyrische Methode der radioaktiven Bestimmung an

Empfindlichkeit sicher nicht nachstehend, an allgemeiner Anwendbarkeit aber überlegen, da sie sich nicht auf den Ausnahmsfall des Eueropium beschränkt, sondern mit ähnlicher Empfindlichkeit auch die meisten anderen Verunreinigungen nachzuweisen gestattet.

L'Accademico Soprannumerario P. J. Stein, Direttore della Specola Vaticana presenta la seguente Nota:

M. Tibor - *The distribution of the stars in the Perseus region.*

C'est la continuation de deux recherches de même nature dans la Voie Lactée, dont les résultats ont été déja publiés dans les «Acta» et les «Commentationes» de l'Académie Pontificale.

Dans un champ de quatre degrés carrés l'auteur a classifié les spectres de toutes les étoiles, en nombre de 1307, jusqu'à la 14$^{me}$ grandeur. Les index de couleur furent determinés en comparant les grandeurs photographiques et photo-visuelles, et la relation entre le type spectral et l'index de couleur fut obtenue graphiquement. Au moyen de cette relation les 51 étoiles, dont les spectres était rendus méconnaissables par superposition, ont été classifiées approximativement, de soste qu'aucune étoile de la 14$^{me}$ grandeur a été exclue des statistiques.

Les diagrammes de la distribution des étoiles à la surface du ciel et dans l'espace confirment les résultats antérieurs, c'est-à-dire la prédominance du type A parmi les étoiles lucides et celle du type G parmi les étoiles faibles. A partir d'une distance de 300 parsecs jusqu'à des distances de plus de 3000 parsecs le nombre des étoiles va en diminuant avec une rapidité constante.

Incidemment il soit mentionné qu'en déterminant les index de couleur l'auteur a trouvé une étoile rouge variable du type N de la 9$^{me}$ grandeur.

La seduta viene tolta alle ore 17,30.

Dopo la Tornata pubblica ha avuto luogo la Tornata segreta.

---

Gli Accademici con le Signore e gli invitati si intrattengono quindi ad un tè offerto dalla Presidenza nelle sale dell'antica Casina di Pio IV.

---

La sera alle ore 20,30 gli Accademici presenti in Roma hanno partecipato ad un banchetto offerto dalla Presidenza dell'Accademia.

*Pubblicazioni della*

# PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

CITTÀ DEL VATICANO

---

## ANNUARIO

Vol. I (1936-37), di pagine 944 e 87 tavole in fototipia, fuori testo.

## ACTA

**1937**

*Resoconto della solenne seduta inaugurale del 1° giugno 1937 e della prima Tornata accademica.* Acta, vol. I, n. 1, pag. I-XXII.

U. Cisotti, *Asfericità di una superficie in un suo punto ordinario.* Acta, vol. I, n. 1, pag. 1-7.

G. Finzi, *Nuovi dati sul virus tubercolare e sulla natura della «esotubercolina spenta»* (con 2 tavole f. t.). Acta, vol. I, n. 2, pag. 9-17.

M. Boldrini, *Contributi alla storia della statistica: I. Sull'introduzione del metodo statistico in Biologia.* Acta, vol. I, n. 3, pag. 19-27.

C. Ferrari, *Problemi della dinamica dei fluidi compressibili a velocità ipersonora.* Acta, vol. I, n. 4, pag. 29-35.

R. S. Varma M. Sc., *An infinite integral involving Bessel function and Sonine's polynomial.* Acta, vol. I, n. 5, pag. 37-41.

S. Ranzi, *Ricerche sulla fisiologia dell'embrione dei cefalopodi* (con 2 figure n. t.). Acta, vol. I, n. 6, pag. 43-49.

N. Parravano e M. Giordani, *Le proprietà ossidanti dell'acqua di Fiuggi.* Acta, vol. I, n. 7, pag. 51-56.

E. Pistolesi, *Sulla teoria delle ali sottili* (con 4 figure n. t.). Acta, vol. I, n. 8, pag. 57-72.

F. Odone, *Su alcune proprietà di geometria differenziale dei campi vettoriali.* Acta, vol. I, n. 9, pag. 73-84.

M. Tibor, *The distribution of the stars in the Cepheus-Lacerta region* (con 3 figure n. t.). Acta, vol. I, n. 10, pag. 85-92.

C. Possio, *L'azione aerodinamica sul profilo oscillante alle velocità ultrasonore* (con 7 figure n. t.). Acta, vol. I, n. 11, pag. 93-106.

**1938**

*Resoconto della solenne Tornata inaugurale del secondo anno accademico all'augusta presenza di S. S. Pio XI e della I Tornata ordinaria (30 gennaio 1938).* Acta, vol. II, n. 1, pag. I-CXXI.

*Resoconto della seconda Tornata ordinaria del secondo anno accademico (9 luglio 1938).* Ibidem, pag. CXXIII-CXXVIII.

G. Barbieri, *Contributi alla storia della statistica: II. Origini e sviluppi italiani della biometria dal Santorio all'Olivi.* Acta, vol. II, n. 2, pag. 1-7.

G. M. Pugno, *Il problema di Clebsch e l'ellisse di elasticità* (con 6 figure n. t.). Acta, vol. II, n. 3, pag. 9-28.

V. Nobile, *Preliminari per una necessaria revisione della teoria dell'aberrazione annua. I fondamenti teorici del problema.* Acta, vol. II, n. 4, pag. 29-44.

A. Silvestri, *Nummulitidi delle Alpi Apuane attribuite al Triassico* (con 1 tavola f. t.). Acta, vol. II, n. 5, pag. 45-50.

H. Brück, *The 1937 Eclipse of ζ Aurigae.* Acta, vol. II, n. 6, pag. 51-60.

E. Frola, *Intorno al teorema di Colonnetti sui sistemi elasto-plastici* (con 4 figure n. t.). Acta, vol. II, n. 7, pag. 61-71.

# COMMENTATIONES

## 1937

A. Gemelli, *Nuovo contributo alla conoscenza della struttura delle vocali* (con 9 tavole f. t. e 20 figure n. t.). Commentationes, vol. I, n. 1, pag. 1-43.

U. Nobile, *Sulle variazioni termiche del gas contenuto nella carena di un'aeronave e conseguenti variazioni di forza ascensionale* (con 5 figure n. t.). Commentationes, vol. I, n. 2, pag. 45-75.

A. Gatterer, *Spektralreines Eisen* (con 3 tavole f. t.). Commentationes, vol. I, n. 3, pag. 77-88.

H. Rohracher, *Die gehirnelektrischen Erscheinungen bei erschiedenen psychischen Vorgängen* (con 4 tavole f. t.). Commentationes, vol. I, n. 4, pag. 89-133.

G. Reverberi, *Ricerche sperimentali sulla struttura dell'uovo fecondato delle Ascidie* (con 15 figure n. t.). Commentationes, vol. I, n. 5, pag. 135-172.

G. Arturo Crocco, *L'iperbole di stabilità laterale nella dinamica dei velivoli* (con 3 figure n. t.). Commentationes, vol. I, n. 6, pag. 175-195.

L. Gialanella, *Determinazione della longitudine della Torre Capitolina e della Torre del primo meridiano d'Italia a Monte Mario.* Commentationes, vol. I, n. 7, pag. 197-276.

F. Loreti, *Esperienze ed osservazioni sulla microfluorescenza della fibra nervosa (periferica) con particolare riguardo alla mielina* (con 1 tavola f. t. ed 1 figura n. t.) Commentationes, vol. I, n. 8, pag. 277-331.

C. Barigozzi, *Lo studio degli spodogrammi dei cromosomi* (con 12 tavole f. t.). Commentationes, vol. I, n. 9, pag. 333-351.

## 1938

U. Nobile, *Alcune questioni attinenti alla meccanica del volo dei dirigibili* (con 38 figure n. t.). Commentationes, vol. II, n. 1, pag. 1-130.

G. Colonnetti, *Saggio di una teoria generale dell'equilibrio elasto-plastico.* Commentationes, vol. II, n. 2, pag. 131-150.

*ACTA*
*Vol. III - N. 1*
Fol. XLIII-XLVI

# RESOCONTO
## DELLA SECONDA TORNATA ORDINARIA
## DEL III ANNO ACCADEMICO

*(Sabato 21 gennaio 1939)*

Presiede il Rev.mo Prof. P. A. GEMELLI O. F. M., Presidente.

Sono presenti gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, BIANCHI, BOTTAZZI, COLONNETTI, CROCCO, DAL PIAZ, GEMELLI, GIORDANI, GIORGI, GOLA, GUIDI, LEPRI, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, NOBILE, PISTOLESI, RONDONI, SILVESTRI, VALLAURI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

*Ordine del giorno:* 1) Approvazione del Verbale della precedente Tornata. 2) Comunicazioni del Presidente. 3) Proclamazione dei nuovi Accademici per i seggi n. 42 e 58. 4) Relazione sui lavori della «Commissione per le proposte relative all'attività dell'Accademia». 5) Varia.

Il Presidente GEMELLI dichiara aperta la seduta alle 16,40.

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione, e poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI comunica al Corpo Accademico l'Augusto dispaccio che il Santo Padre si è degnato fargli trasmettere in risposta al telegramma di riconoscenza inviato dall'Accademia a Sua Santità nella Prima Tornata Ordinaria di questo anno:

*Padre Gemelli Presidente Pontificia Accademia della Scienze — Città del Vaticano — Devoti sensi e nobili propositi nuovamente espressi da Paternità Vostra nome diletta Accademia Pontificia Scienze rinnovano cuore Sua Santità ben fondate speranze lavoro altamente proficuo causa pensiero cristiano Augusto Pontefice paternamente grato invoca speciale Divina assistenza e invia tutti confortatrice Benedizione — Cardinale Pacelli.*

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI legge al Corpo Accademico il venerato dispaccio n. 173539 che Sua Eminenza Reverendissima il Signor Cardinale Eugenio PACELLI, Segretario di Stato di Sua Santità, ha inviato in data odierna per comunicare le seguenti Sovrane decisioni del Santo Padre:

*La Santità di Nostro Signore si è benignamente degnata di nominare Membri della Pontificia Accademia delle Scienze gl'Illustrissimi Signori Prof. Carlo Somigliana e Prof. Arthur Conway.*

Si passa quindi al quarto punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI dà la parola all'Accademico BOTTAZZI perchè riferisca sui lavori e sulle proposte della Commissione per le proposte relative all'attività dell'Accademia (Commissione P. A. A.).

L'Accademico BOTTAZZI divide la sua esposizione nei tre punti seguenti: convegni, monografie sintetiche, missioni.

*Convegni.* – La Commissione sarebbe giunta alla conclusione di convocare personalità eminenti in determinati campi di studi le quali si siano occupate di problemi su cui non esiste un accordo e su cui anzi verte qualche controversia. Si dovrebbero invitare non più di cinque studiosi al massimo, pregarli di venire nella Sede dell'Accademia per passarvi una settimana di discussione privata e tentare di giungere ad una conclusione che potrà essere positiva o no. Una relazione finale conterrebbe i risultati della discussione e l'accordo raggiunto.

Il caso più frequente sarà che non si raggiunga un accordo: in tal caso gli studiosi dovrebbero dichiarare i motivi per cui un'intesa non esiste, indicare i mezzi da seguire e le persone da invitare per un'eventuale altra discussione, ecc.

Gli studiosi invitati potrebbero essere membri dell'Accademia o no, europei o anche non europei, e sarebbero ospiti dell'Accademia.

L'ideale sarebbe fare uno o due convegni all'anno. Ciò dipenderà dal fatto se fra gli invitandi ci sia un americano o no. Qualora per uno dei convegni si sentisse la necessità di invitare un americano si farebbe una o due di queste riunioni, con l'intesa però che nella seguente non ci sia alcun americano.

Tutti gli Accademici sono invitati a mandare indicazioni di temi e soprattutto nomi di invitandi, con le indicazioni del loro atteggiamento, di maniera che la Presidenza sia perfettamente a giorno della loro posizione scientifica.

*Monografie sintetiche.* – La Commissione proporrebbe di invitare gli studiosi che nella loro vita hanno portato un contributo sistematico e continuativo a riassumere la loro opera in modo accessibile agli altri studiosi. Queste Memorie costituirebbero una pubblicazione speciale dell'Accademia ed è da prevedere che dopo una serie di anni si avrebbe una serie di monografie di notevole importanza.

*Missioni.* – Il Presidente si era assunto l'incarico di mettersi in contatto con Propaganda Fide allo scopo di ottenere informazioni di carattere statistico. Sono però sorte delle difficoltà per cui è meglio limitarsi, per ora, alla discussione sulle due prime proposte.

Il Presidente GEMELLI ringrazia l'Accademico BOTTAZZI per la sua chiara esposizione e invita gli Accademici a pronunziarsi sulle proposte, facendo presente che la Commissione tornerà a riunirsi alla fine di febbraio, per cui a quell'epoca sarà necessario avere del materiale per la prima proposta.

L'Accademico CROCCO riafferma la sua simpatica adesione alle conclusioni cui è arrivata la Commissione. Osserva che si è parlato di uno o due convegni all'anno. Già è difficile attuarne uno per cui forse sarebbe meglio limitare le riunioni ad una soltanto. Vorrebbe proporre di trovare per questa un nome latino, che non sia il solito nome di convegno, riunione, e che esprima e contenga il carattere di discussione.

L'Accademico BOTTAZZI non crede di dover condividere la preoccupazione dell'Accademico CROCCO. Tutto dipende dall'argomento che sarà messo in discussione. Se per esso non sarà necessario invitare un americano si possono fare benissimo due riunioni. Invece la seconda proposta è più difficile.

L'Accademico BIANCHI a proposito di questa seconda proposta raccomanda che si sia molto severi tanto nell'invitare quanto nell'esaminare i manoscritti e ciò allo scopo di evitare che si pubblichino monografie di carattere autolaudatorio.

L'Accademico GIORGI sempre sulla seconda proposta riterrebbe più utile che non fosse esposto soltanto il lavoro personale, ma tutto lo stato degli studi in quel determinato campo.

Il Presidente GEMELLI fa osservare che in tal caso si inciderebbe sulla prima proposta.

L'Accademico GIORGI precisa che egli intendeva dire che le monografie sintetiche dovrebbero riguardare solo campi ove non vi siano risultati controversi.

Il Presidente GEMELLI interviene e fa notare che il principio da cui è partita la Commissione è diverso. Infatti i membri della Commissione ritengono che sia interessante avere per il futuro la testimonianza della persona stessa che ha lavorato nei diversi campi.

L'Accademico GUIDI rileva allora che se si tratta di un semplice elenco di studi fatti da un individuo è meglio che lo faccia lui personalmente; ma se si tratta di un giudizio da dare sul lavoro compiuto è meglio che sia altri a redigerlo.

L'Accademico BOTTAZZI riprendendo l'osservazione dell'Accademico GIORGI fa osservare che la Commissione è partita da un principio completamente diverso. Infatti non esistono pubblicazioni che espongano tutto il pensiero dell'autore e tutte le sue ricerche.

L'Accademico RONDONI osserva che forse occorrerebbe trovare allora una denominazione che non sia quella di monografia.

L'Accademico COLONNETTI chiede la parola per fare un'osservazione ancora sul numero dei convegni. Egli vorrebbe pregare l'Accademico CROCCO a non insistere in modo assoluto sulle limitazioni, tanto più che se possono tenersi due riunioni, esse devono riguardare argomenti diversi e quindi il lavoro di preparazione ricadrebbe su persone diverse.

Il Presidente GEMELLI ritiene, che sarebbe conveniente che fossero i membri dell'Accademia a dare il buon esempio nel redigere le monografie secondo lo spirito inteso dalla Commissione.

Nota poi che la Commissione si è fermata a queste due proposte per il carattere speciale, internazionale, della Pontificia Accademia delle Scienze. Queste due forme di lavoro differenzierebbero la sua attività da quella di altre Accademie. Prega gli Accademici di inviare il loro punto di vista sulle due proposte, lasciando alla Commissione ampie facoltà, e chiude la discussione comunicando al Corpo Accademico che la Commissione desidererebbe che anche un fisico partecipasse ai suoi lavori, e propone l'Accademico LEMAITRE.

Il Corpo Accademico approva.

Passando all'altro punto dell'ordine del giorno riguardante i seggi vacanti, il Presidente GEMELLI comunica che il Consiglio sta facendo lo spoglio delle proposte pervenute, e appena terminato procederà alla formazione delle terne.

La Cancelleria invierà prossimamente i risultati.

La seduta è tolta alle ore 17,25.

*ACTA*
*Vol. III - N. 1*
Fol. XLVII-LIV

# RESOCONTO
## DELLA TERZA TORNATA ORDINARIA
## DEL III ANNO ACCADEMICO

*(Sabato 27 maggio 1939)*

Presiede il Revmo Prof. P. A. GEMELLI O. F. M., Presidente.

Sono presenti gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, BOTTAZZI, CROCCO, DAL PIAZ, GEMELLI, GHIGI, GIORDANI, GIORGI, GOLA, LEPRI, LEVI-CIVITA, LOMBARDI, SOMIGLIANA, NOBILE, PANETTI, PISTOLESI, RASETTI, RONDONI, SILVESTRI, TONIOLO, VALLAURI, VERCELLI; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: ALBAREDA, GATTERER, SCHMIDT, STEIN, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

*Ordine del giorno:* 1) Approvazione del Verbale della precedente Tornata. 2) Comunicazioni del Presidente. 3) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note. 4) Varia.

Il Presidente GEMELLI dichiara aperta la seduta alle 11,30.

Al primo punto dell'ordine del giorno si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente Gemelli pone ai voti l'approvazione, e poichè nessuno presenta osservazioni, il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente Gemelli riferisce sulla partecipazione dell'Accademia al lutto della Chiesa per la morte del Santo Padre Pio XI di v. m. Egli partecipò personalmente al trasporto della venerata Salma in S. Pietro e, accompagnato da una numerosa rappresentanza dell'Accademia, ai Novendiali celebrati nella Basilica Vaticana ed alla Tumulazione.

Il Cancelliere legge il telegramma inviato dall'Accademia in questa luttuosa circostanza all'Emo Cardinale Camerlengo di S. R. C. e la di lui risposta:

*Eminentissimo Cardinale Eugenio Pacelli, Camerlengo di Santa Romana Chiesa — Città del Vaticano. — La Pontificia Accademia delle Scienze piange nella dolorosa dipartita dell'amato Pontefice la scomparsa dell'Augusto suo Fondatore e Mecenate che volle affidato a questa Pontificia Istituzione l'onore di mantenere alto nel mondo delle scienze la gloria ed il prestigio del Pontificato Romano e presenta a Vostra Eminenza Reverendissima ed al Sacro Collegio figliali sentimenti di profondissimo cordoglio in cristiana rassegnazione ai Divini Voleri. — Gemelli, Presidente.*

*Padre Agostino Gemelli, Presidente Pontificia Accademia delle Scienze — Città del Vaticano. — Ringrazio Pontificia Accademia delle Scienze espressione profondissimo cordoglio scomparsa Augusto Pontefice fondatore codesta Istituzione. — Cardinale Pacelli, Camerlengo.*

Il Presidente riferisce quindi sulla partecipazione alla letizia della Chiesa per la elevazione al Pontificato di Sua Santità Pio XII f. r. Il Presidente a nome di tutti i membri dell'Accademia partecipò alla terza «Adorazione» dei Cardinali nella Cappella Sistina, e fu poi ricevuto in Udienza privata dal Santo Padre che Si interessò sulla vita e sull'attività dell'Accademia dicendoSi lieto di intervenire alla inaugurazione del prossimo Anno Accademico.

Il Cancelliere dà quindi lettura del telegramma che fu inviato dall'Accademia in tale fausta occasione al Santo Padre e della risposta pervenuta:

*Sua Santità Pio XII — Città del Vaticano. — Pontificia Accademia Scienze umilia trono Vicario di Cristo omaggio figlialmente devoto cultori scienze che prostrati dinanzi Vostra Santità riconoscono con questo atto la luce vivificatrice data alla scienza* *dalla Religione et ricordando con animo grato che Vostra Santità inaugurò lavori attività Accademia restaurata Vostro Augusto Antecessore umilmente implora speciale Benedizione. — Gemelli, Presidente.*

*Padre Agostino Gemelli, Presidente Pontificia Accademia Scienze — Città del Vaticano. — Alla diletta Pontificia Accademia delle Scienze Santo Padre di gran cuore intende impartire primizie Benedizione Apostolica propiziatrice superni lumi sempre più fulgida affermazione provvido et salutare connubio scienza et Fede. — Montini, Sostituto.*

Il Presidente Gemelli comunica ancora che sarà eretto nella Sede dell'Accademia un ricordo marmoreo di Pio XI per onorare la memoria dell'Augusto Restauratore.

Il Presidente infine, interpretando i sentimenti di tutti i convenuti, presenta congratulazioni ed auguri al nuovo Accademico Somigliana che per la prima volta partecipa alle adunanze dell'Accademia.

L'Accademico Vallauri presenta a nome di tutti felicitazioni al Presidente per gli onori ai quali fu fatto segno a Sofia nel suo recente viaggio colà, onori che si riflettono sull'Accademia di cui egli è Presidente.

Il Presidente Gemelli ringrazia e si congratula con gli Accademici Giorgi e Silvestri per la loro nomina ad Accademici d'Italia.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico Amaldi presenta la seguente Nota:

R. Caccioppoli - *Ovaloidi di metrica assegnata.*

L'Accademico Gemelli presenta la seguente Nota:

G. Zunini - *Contributo allo studio dell'apprendimento nei pesci. III: Sulla equivalenza di stimoli ottici.*

Le presenti ricerche, condotte col metodo impiegato da K. Klüver sulle scimmie, hanno lo scopo di mostrare che il comportamento dei pesci non è strettamente legato alla forma di uno stimolo ottico, ma può perdurare invariato di fronte a stimoli ottici anche notevolmente differenti, purchè presentino un carattere comune costante (per esempio un rapporto di grandezza e di configurazione).

È risultato che effettivamente, raggiunta coll'addestramento la discriminazione di due figure a grandezza diversa, è possibile in situazioni analoghe ottenere persino l'inversione del valore dei reattivi, nel senso che, mentre l'addestramento era stato compiuto per esempio alla figura più grande, questa stessa viene evitata, funziona da negativa in coppia con una figura più grande ancora (scelta relativa). Ma è pure risultato che frequentemente in altre circostanze, la figura di addestramento continua ad essere preferita (scelta assoluta).

Nel corso delle esperienze è risultato il carattere totale dell'addestramento, nel senso che questo è strettamente collegato col complesso di condizioni concrete, in cui il soggetto viene a trovarsi. Sicchè sembra di poter concludere che, se l'esistenza di stimoli ottici equivalenti e di una scelta «relativa» mostra l'organismo animale notevolmente indipendente da uno stretto determinismo di stimolo e reazione, non prova però l'esistenza di un «giudizio di reazione», ma semplicemente la risposta ad una situazione totale concreta, che si ripresenta con caratteri costanti.

L'Accademico Levi-Civita da parte del Collega Accademico Amaldi e sua, offre in omaggio all'Accademia il II volume della seconda edizione del *Compendio di meccanica razionale*.

Ricorda che quando nel luglio scorso fu fatto omaggio del primo volume, fu potuta richiamare l'attenzione dell'illustre Consesso almeno sopra una circostanza di interesse speculativo generale, cioè sopra una precisazione metodologica, che agli Autori pare di qualche rilievo, sulla nozione di tempo nella meccanica o fisica classiche, in contrapposto e insieme, si può ben dire, di primordiale accenno alla relatività. In questo secondo volume invece si potrebbero soltanto segnalare piccoli perfezionamenti o accorgimenti didattici, su cui non è certo il caso di intrattenere l'Accademia.

L'Accademico Pistolesi presenta la seguente Nota:

R. Giovannozzi – *Un metodo generale per la determinazione del fattore di interferenza nelle gallerie aerodinamiche a contorno libero, rigido e misto.*

Il metodo consiste nella rappresentazione conforme della sezione del getto nel semipiano limitato inferiormente dall'asse reale e nella risoluzione, per detto semipiano, del problema al contorno a cui si riconduce, con i noti concetti di

Prandtl, il problema dell'interferenza. Nel caso più generale di contorno misto (cioè parte rigido e parte libero) il problema al contorno è un problema misto, nel senso che occorre trovare una funzione di variabile complessa di cui è nota su certi tratti del contorno la parte reale, sui rimanenti la parte immaginaria. La soluzione di tale problema può essere effettuata col precedimento di Signorini e la discussione relativa chiarisce molti punti interessanti, specie nei riguardi delle difficoltà che si incontrano nel caso di contorno misto.

Il procedimento è applicato al caso di contorno circolare misto e la risoluzione conduce all'uso di funzioni ellittiche.

L'Accademico VERCELLI presenta la seguente Nota:

F. VERCELLI - *Analizzatore meccanico delle curve oscillanti.*

Ricordati i concetti generali sull'analisi degli elementi periodici che caratterizzano una curva, sono presentati schemi di calcolo che consentono l'analisi con metodi aritmetici. Viene descritto un apparecchio che realizza l'esecuzione meccanica dei calcoli, rendendo facili e precise le applicazioni.

L'Accademico TONIOLO presenta in omaggio all'Accademia il volume: *Compendio di Geografia generale.*

È indispensabile che la Geografia generale, base fondamentale ad ogni studio e descrizione regionale, venga conosciuta tutta quanta nella sua struttura scientifica e nella sua esposizione logica e coordinata. D'altra parte era sentita in Italia la necessità di un lavoro che potesse anche servire alla preparazione prossima dei docenti di corsi universitari di materie letterarie o di scienze naturali, che non avessero avuto grande preparazione geografica.

Risponde a queste ragioni il presente *Compendio di Geografia generale*, al quale si è creduto di dover premettere, oltre ad una breve introduzione metodologica, anche alcuni elementi di cartografia e di geologia, le cui conoscenze, se sono indispensabili per i geografi, è bene rimangano limitati a semplici nozioni, facendo essi parte di altre discipline con finalità e metodi propri, che esulano dal campo geografico.

Nel preparare e stendere questo lavoro, non si è inteso scrivere un trattato, bensì un riassunto dei principî di Geografia generale, basato sulle recenti vedute scientifiche.

Per non esulare dai fini proposti, si è cercato di attenersi il più possibile allo studio dei fatti e fenomeni spaziali, che contraddistinguono il campo della Geografia e lo differenziano da quelli delle scienze affini.

Nell'economia del lavoro, larga parte viene data alla Climatologia e alla Biogeografia, a causa della loro importanza fondamentale per lo studio scolastico dei fatti umani, economici e quindi politici, onde porre in evidenza la correlazione dei fatti e fenomeni distribuiti, ciò che è alla base della metodologia geografica. Per la prima volta in Italia si tenta di dare con il presente lavoro una esposizione organica della Antropogeografia, come studio dei rapporti fra l'uomo e le condizioni geografiche, e come illustrazione delle grandiose manifestazioni della reazione dell'uomo sull'ambiente naturale.

L'Accademico Soprannumerario Gatterer presenta all'Accademia i due primi numeri delle *Ricerche spettrografiche* che vengono pubblicate dal Laboratorio astrofisico della Specola Vaticana.

Il primo fascicolo dà un nuovo metodo per determinare quantitativamente il contenuto del Carbonio in Ferro adoperando la riga C III 2296, 8 A. Nel secondo è spiegata una via assai pratica e precisa per le misure di lunghezza d'onda nello spettro prismatico. Infine segue la descrizione d'un nuovo tipo di porta-elettrodi universale per la scarica delle scintille e dell'arco. La costruzione fu ideata dall'autore ed eseguita dal meccanico della Specola Vaticana.

Il Cancelliere dà poi notizia degli altri lavori originali presentati da Accademici prima dell'attuale Tornata:

G. Colonnetti - *Saggio su la resistenza dei materiali in regime plastico (il problema del gancio).*

G. S. Coen - *«Emarginulae» nuove del Mediterraneo.*

F. Rasetti - *Contributo allo studio della fauna cavernicola italiana. Due nuove specie di Bythinus: Pselaphidae, Coleoptera.*

G. Reverberi e M. Pitotti - *Differenziazioni fisiologiche nell'uovo delle ascidie.*

L. Toscano - *Numeri di Stirling generalizzati, operatori differenziali e polinomi ipergeometrici.*

La seduta viene tolta alle ore 18,10.

---

Dopo la Tornata pubblica ebbe luogo la Tornata segreta.

*ACTA*
*Vol. III - N. 2*

# SU ALCUNI SVILUPPI IN SERIE PROCEDENTI PER FUNZIONI NON NECESSARIAMENTE ORTOGONALI (*)

CARLO MIRANDA

(Istituto per le Applicazioni del Calcolo
del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma)

SVMMARIVM. — Auctor disputat an et quomodo possint obtineri evolutiones in series procedentes per autosolutiones aequationum integralium, quarum nucleus sit parametri functio.

È ben noto che gran parte dei problemi al contorno relativi a equazioni differenziali lineari ordinarie o alle derivate parziali si possono tradurre in equazioni integrali di seconda specie tipo FREDHOLM. Se il nucleo dell'equazione integrale a cui si perviene è simmetrico e se in esso figura, nel modo noto, un parametro $\lambda$, dalla teoria delle equazioni integrali, si può subito dedurre l'esistenza di autovalori per il detto parametro, nonchè la ortogonalità delle relative autosoluzioni. Il teorema di HILBERT-SCHMIDT fornisce inoltre un criterio di convergenza puntuale per lo sviluppo di un'assegnata funzione in serie di tali autosoluzioni.

Se il nucleo dell'equazione integrale a cui si perviene non è simmetrico, nulla si può dire in generale, ma, molto spesso, uno studio diretto del caso particolare che interessa permette di dimostrare l'esistenza di infiniti autovalori.

Si potrà poi ottenere formalmente lo sviluppo di una funzione assegnata in serie di autosoluzioni, basandosi sulla circostanza che le dette autosoluzioni, e quelle dell'equazione integrale trasposta, formano un sistema ortogonale, laddove, per la dimostrazione della convergenza

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini, il 1° giugno 1937.

di tale sviluppo, ci si potrà utilmente valere, in molti casi, del cosiddetto metodo di POICARÉ-CAUCHY, esposto dal POICARÉ in una celebre Memoria nel 1894 (1).

Notevoli risultati, in quest'ordine di idee, sono stati ottenuti, per il caso di problemi ai limiti relativi ad equazioni differenziali lineari ordinarie, dal BIRKHOFF (2), dal TAMARKINE (3) e dal KNESER (4).

Molto più difficile si presenta l'analisi dei casi in cui il nucleo dell'equazione integrale è esso stesso funzione del parametro $\lambda$. Prescindendo dalla questione dell'esistenza degli autovalori, le maggiori difficoltà si presentano, in questo caso, nel problema dello sviluppo in serie di autosoluzioni e ciò per il fatto che esse, in generale, non costituiscono un sistema ortogonale, nè sono ortogonali a quelle della equazione trasposta.

Voglio ora esporre, a questo proposito, qualche considerazione sull'applicazione del citato metodo di POICARÉ-CAUCHY a quest'ultimo caso.

Consideriamo un'equazione integrale

$$[1] \qquad \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, y, \lambda)\, \varphi(y)\, dy \quad ,$$

il cui nucleo sia una funzione reale continua e simmetrica di $x$ e $y$. Ci metteremo, inoltre, nell'ipotesi che $G(x, y, \lambda)$ sia una funzione analitica di $\lambda$, avente, per esempio, soltanto delle singolarità polari.

Supponiamo che la soluzione della [1] $\varphi(x, \lambda)$ riesca una funzione meromorfa di $\lambda$ avente soltanto poli reali del primo ordine, che designeremo con

$$\lambda_1 \ , \quad \lambda_2 \ , \quad \ldots \ , \quad \lambda_n \ , \quad \ldots$$

---

(1) H. POICARÉ, *Sur les équations de la physique mathématique*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo VIII, 1894.

(2) A. KNESER, *Belastete Integralgleichnugen*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo 37, 1914.

(3) J. TAMARKINE, *Sur quelques points de la théorie des équations différentielles lineaires ordinaires et sur la géneralisations de la serie de Fourier*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo 34, 1912.

(4) G. BIRKHOFF, *Boundary values and expansion problems of ordinary linear differential equations*, « Trans. of the Am. Math. Soc. », vol. 9 (1908), pag. 373-395.

È facile, allora, vedere che, se detti poli sono punti ordinari di $G(x, y, \lambda)$, essi sono autovalori per l'equazione omogenea associata della [1]. Noi li supporremo, per semplicità, di rango 1. Designando allora, con

$$\varphi_1(x)\ ,\quad \varphi_2(x)\ ,\quad \ldots\ ,\quad \varphi_n(x)\ ,\quad \ldots$$

un sistema di autosoluzioni normalizzate, si trova

$$\lim_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) \frac{\varphi(x,\lambda) - f(x)}{\lambda} = - \frac{\varphi_n(x) \int_a^b f(y)\, \varphi_n(y)\, dy}{1 + \lambda_n^2 \int_a^b \int_a^b G_\lambda(s, t, \lambda_n)\, \lambda_n(s)\, \varphi_n(t)\, ds\, dt}$$

Pertanto, se la funzione $\frac{1}{\lambda}\left[\varphi(x, \lambda) - f(x)\right]$ è sviluppabile in serie di frazioni semplici al modo di Cauchy, si perviene alla seguente formula risolutiva della [1]

$$[2] \qquad \varphi(x,\lambda) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \int_a^b f(y)\, \varphi_n(y)\, dy}{(\lambda_n - \lambda)\left(1 + \lambda_n^2 \int_a^b \int_a^b G_\lambda(s, t, \lambda_n)\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t)\, ds\, dt\right)}$$

Dalla [2] è poi facile dedurre la seguente formula

[3]

$$\int_a^b G(x,y,\lambda) f(y)\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \int_a^b \int_a^b \left[\lambda_n G(y,t,\lambda_n) - \lambda G(y,t,\lambda)\right] f(y)\, \varphi_n(t)\, dt\, dy}{(\lambda_n - \lambda)\left(1 + \lambda_n^2 \int_a^b \int_a^b G_\lambda(s, t, \lambda_n)\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t)\, ds\, dt\right)}$$

che rappresenta la naturale estensione del teorema di Hilbert-Schmidt.

Ovviamente, le ipotesi in cui sono valide le [2] e [3] sono molto restrittive e non ci si può attendere che esse siano sempre verificate. Basterebbe pensare che le ordinarie equazioni integrali con nucleo non simmetrico, si possono trasformare in equazioni del tipo [1] con $G(x,y,\lambda)$ lineare in $\lambda$. Il metodo esposto può però rispondere bene al suo scopo nello studio di problemi di tipo particolare, e anche quando non si riesce con la sua applicazione a dimostrare la validità delle [2] e [3], ci si può, tuttavia, valere di esso come di un procedimento euristico atto a fornire risultati assai presumibili.

Io ho preso, per esempio, in considerazione l'equazione [1] in cui $G(x, y, \lambda)$ è del tipo

$$G(x, y, \lambda) = K(x, y) + \frac{\lambda}{\lambda + a} X(x) X(y)$$

con $K(x, y)$ nucleo simmetrico. È facile dimostrare che, se $K(x, y)$ non è specializzato, esistono infiniti autovalori del parametro $\lambda$. Ebbene, con procedimenti, che non è qui il caso di precisare, sono riuscito a dimostrare la validità delle formule [2] e [3].

Sarà opportuno dire che questa particolare classe di equazioni non è stata da me scelta a caso: molti problemi al contorno relativi ad equazioni differenziali con condizioni ai limiti che contengono il parametro $\lambda$, danno luogo, appunto, ad equazioni integrali di questo tipo.

Quanto ho qui esposto legittima, a mio avviso, la speranza che si possa riuscire a caratterizzare una larga classe di equazioni del tipo [1] per le quali si possa asserire la validità delle formule [2] e [3]. A me sembra che un tale risultato sarebbe assai importante per le applicazioni e mi propongo, quindi, di dedicare all'argomento ulteriori ricerche.

*ACTA*
*Vol. III - N. 3*

# PROBLEMI DELLA DINAMICA DEI PONTI (*)

*(Con sette figure)*

GIULIO KRALL

SVMMARIVM. — Referuntur limitationes quae respiciunt elasticas trabum amotiones, a mobilibus oneribus uniformis celeritatis productas. Integrodifferentiales istituuntur aequationes, quae exprimunt vibratorium trabum motum, productum a mobilibus oneribus inertibus et mollescentibus. Perpenditur trabs mere apposita, et aequationum, de quibus supra diximus, graphice solutiones exprimuntur.

Il problema centrale della dinamica dei ponti riguarda la caratterizzazione del moto di un'*asta* semplicemente appoggiata agli estremi percorsa da un treno rigido di carichi (eventualmente ridotto ad *uno* per semplicità) *pesanti* e quindi *inerti*, in parte direttamente applicati (ruote, assi) in parte molleggiati.

All'*asta* infatti si lascia schematizzare la classica *travata* dei ponti ferroviari, unica struttura leggera che si considera nel loro ambito, altrimenti dominato da sistemi molto inerti, poco sensibili alle azioni dinamiche.

Per quanto lo studio di questo problema s'inizi, per merito di STOKES (1849) particolarmente, già agli albori delle costruzioni ferroviarie e sia stato attivamente proseguito da RÉSAL (1882), BOUSSINESQUE (1883), DESLANDRES (1892), ZIMMERMANN (1896), KRILOFF (1905) e TIMOSHENKO, non si può affermare certamente ch'esso sia a buon punto, sicchè ormai, per gli sviluppi grandiosi nel campo delle realiz-

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio T. Levi-Civita il 1° giugno 1937.

zazioni effettive, in certo senso si potrebbe anche pensare che la questione si trovi superata dalla realtà.

Comunque sia, per eccellenti ragioni, il problema è pur sempre agitato; conviene dunque considerarlo e, possibilmente, avanzarne la soluzione.

Con questo intento daremo qui l'impostazione analitico-meccanica rigorosa e la soluzione numerica di taluni importanti aspetti del problema; ci affrancheremo precisamente dalle ipotesi consuete in cui si trascura la massa del ponte in raffronto a quella dei carichi (Stokes, Zimmermann) o viceversa (Kriloff, Timoshenko), salvo a tenerne al più conto in via approssimata (Bleich). Constateremo tra l'altro che certi convincimenti già tratti in questo senso poco rispondono alla realtà e gli aumenti dinamici dovuti all'inerzia dei carichi, *agli effetti della velocità pura*, sono di gran lunga inferiori a quelli che generalmente si ritiene abbiano luogo in misura tanto notevole per i ponti di piccola luce.

In alcune Note apparse nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei già ebbi a trattare delle equazioni del moto vibratorio di un ponte percorso da carichi inerti e molleggiati e compendiarle poi, in una unica equazione integrodifferenziale.

Da questa s'erano tratte alcune notevoli limitazioni rigorose del moto nel caso in cui la massa del carico era trascurabile e con riflesso non solo alla travata ma ad una struttura da ponte qualunque, infine, una soluzione di prima approssimazione nel caso generale che, se era facile scriverla procedendo nello spirito delle approssimazioni successive, era, dal punto di vista del calcolo numerico, poco accessibile.

Mi sia perciò lecito riprendere la questione e trattarla in modo autonomo; per i metodi con cui qui si affronta l'integrazione non occorre arrivare sino all'equazione integrodifferenziale suddetta. Faremo però naturalmente vedere come da quella con una semplice operazione si arrivi all'impostazione attuale forse più nitida, certamente più efficace, della precedente.

## I. — EQUAZIONE DEL MOTO PER IL CARICO MOBILE PRIVO DI INERZIA.

Consideriamo dunque un'asta di cui sieno note le autofunzioni $u_\varrho$ ed i corrispondenti autovalori $\sigma_\varrho$ relativi al moto puramente trasversale. Sia $\mu$ la massa per unità di lunghezza, E il modulo d'elasticità, J il momento d'inerzia funzione dell'unica coordinata misurata lungo l'asse a partire da un estremo. Un carico P, di cui per ora trascuriamo l'inerzia, la percorre con velocità uniforme $v$. Si tratta di descrivere il moto trasversale, che riterremo caratterizzato da una funzione $w = w(x,t)$ di una coordinata $x$ misurata sull'asse a partire da un estremo, e del tempo $t$, con riflesso alle circostanze iniziali

$$w(x,0) = 0 \quad , \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = 0 \quad .$$

Introdotte al solito le coordinate normali $\varphi_\varrho$ si avrà

$$[1] \qquad w(x,t) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\varrho}\, u_\varrho(x)\, \varphi_\varrho$$

con le $\varphi_\varrho$ da determinare in base alle equazioni del Lagrange.

Poichè si ha per l'energia cinetica T ed il potenziale U l'espressione

$$T = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty}{}_{\varrho}\, \dot{\varphi}_\varrho^2 \quad , \qquad U = -\frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} \sigma_\varrho^2 \varphi_\varrho^2$$

non resta che calcolare la componente lagrangiana ridotta $Q_\varrho$ della sollecitazione. All'uopo basta osservare che al tempo $t$ il carico è in $x = vt$ ed ha ivi il valore P mentre è nullo in ogni altro punto. Sarà dunque

$$Q_\varrho = P\, u_\varrho(vt)$$

Le equazioni lagrangiane divengono allora

$$\ddot{\varphi}_\varrho + \sigma_\varrho^2 \varphi_\varrho = \mathrm{P}\, u_\varrho(vt)$$

La soluzione che per $t = 0$ si annulla assieme alla prima derivata, com'è richiesto per tutte le $\varphi_\varrho$ dalle circostanze iniziali prescritte, è data, come si sa, dall'espressione

$$[2] \qquad \varphi_\varrho = \frac{1}{\sigma_\varrho} \int_0^t \mathrm{P}\, u_\varrho(vt') \sin \sigma_\varrho (t - t')\, dt'$$

e la soluzione del problema diviene quindi, in virtù della [1],

$$[3] \qquad w(x, t) = \sum_{1}^{\infty}{}_\varrho \frac{u_\varrho}{\sigma_\varrho} \int_0^t \mathrm{P}\, u_\varrho(vt') \sin \sigma_\varrho (t - t')\, dt'$$

## II. — ASTA A CARATTERISTICHE COSTANTI.

Sia $\mathrm{EJ} = \text{cost.}$, $\mu = \mu_0 = \text{cost.}$ Si hanno allora, notoriamente, per le $u_\varrho$ e $\sigma_\varrho$ le espressioni

$$u_\varrho = \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \sin \frac{\rho\pi}{l} x \quad , \qquad \sigma_\varrho = \frac{\rho^2 \pi^2}{\rho^2} \sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mu_0}}$$

Ne segue per le $\varphi_\varrho$, esplicitando l'integrale [2], posto $\lambda_\varrho = \dfrac{\rho\pi v}{l}$ ,

$$[2a] \qquad \varphi_\varrho = \mathrm{P} \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \; \frac{\sin \lambda_\varrho t - \dfrac{\lambda_\varrho}{\sigma_\varrho} \sin \sigma_\varrho t}{\sigma_\varrho^2 - \lambda_\varrho^2}$$

Introduciamo ora la velocità $v = v_k$ necessaria per fare una escursione completa di andata e ritorno sul ponte nel periodo fondamentale, dunque, poichè questo vale $\tau_1 = 2\pi : \sigma_1$ ,

$$v_k = \frac{2l}{\dfrac{2\pi}{\sigma_1}} = \frac{l\sigma_1}{\pi} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{\mathrm{EJ}}{\mu_0}}$$

Con riferimento alle travate normali per ponti ferroviari si hanno i seguenti valori per $\mu_0$, $v_k$, $\sigma_1$ e lo spostamento $\delta_s$ che il carico $P=1$ ton. provoca in mezzeria

| $l$ | 4 | 6 | 10 | 15 | 20 | 25 | 50 | 100 | 150 | metri |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_0 g$ | 1,10 | 1,20 | 1,42 | 1,69 | 1,96 | 2,23 | 3,02 | 4,37 | 5,06 | ton. m$^{-1}$ |
| $v_k$ | 1152 | 1210 | 1368 | 1550 | 1440 | 1440 | 1692 | 1944 | 2160 | km. h$^{-1}$ |
| $\delta_s$ | 0,0772 | 0,0962 | 0,1042 | 0,1368 | 0,1439 | 0,1536 | 0,1613 | 0,1639 | 0,1777 | cm. ton$^{-1}$ |
| $\sigma_1$ | 251 | 176 | 119 | 78,5 | 62,8 | 50,3 | 29,5 | 16,9 | 12,6 | sec$^{-1}$ |

Ricordiamo che la frequenza, cioè il numero di oscillazioni nell'unità di tempo, vale $\sigma : 2\pi$.

Senza indugiare sull'attributo di *critica* dato alla velocità $v_k$, giustificato da condizioni di risonanza rese manifeste dalla definizione stessa, rileviamo che si ha

$$\sigma_\varrho^2 = \rho^4 \sigma_1^2 = \rho^4 \frac{\pi^2}{l^2} v_k^2$$

$$\lambda_\varrho^2 = \rho^2 \lambda_1^2 = \rho^2 \frac{\pi^2}{l^2} v^2$$

La serie [1] si scrive allora, attesa l'espressione trovata per $\varphi_\varrho$,

$$[3a] \qquad w(x,t) = P \frac{2}{\pi^4} \frac{l^3}{EJ} \sum_{1}^{\infty}{}_{\varrho} \sin \frac{\rho\pi}{l} x \, \frac{\sin \frac{\rho\pi v}{l} t - \frac{v}{\rho v_k} \sin \sigma_\varrho t}{\rho^4 - \rho^2 \left(\frac{v}{v_k}\right)^2}$$

Ove si introduca lo spostamento statico che il carico in mezzeria produce sul suo punto di applicazione,

$$\delta_s = \frac{l^3}{48\,EJ}$$

e si rilevi che

$$vt = x' \, , \quad \sigma_\varrho t = \rho^2 \sigma_1 t = \rho^2 \frac{\pi v_k}{l} t = \rho^2 \frac{v_k}{v} \pi \frac{x'}{l}$$

con $x'$ definiente la posizione del carico, si potrà anche scrivere

$$w(x, x') = \mathrm{P}\, \delta_s\, \mathrm{D}(\xi, \xi')$$

con $\xi = \frac{x}{l}$, $\xi' = \frac{x'}{l}$ e

$$\mathrm{D}(\xi, \xi') = \frac{96}{\pi^4} \sum_{1}^{\infty}{}_{\varrho} \sin \varrho \pi \xi \, \frac{\sin \varrho \pi \xi' - \frac{v}{\varrho v_k} \sin \varrho \pi \frac{v_k}{v} \xi'}{\varrho^4 - \varrho^2 \left(\frac{v}{v_k}\right)^2}$$

Per i valori di $v$ (intorno ad $^1/_{10}$ di $v_k$ per i treni più veloci) questa serie è rapidamette convergente, e tanto, che se ne può considerare anche un solo termine. In ogni modo rileverò che per essa ho calcolate limitazioni superiori rigorose, avvalendomi di taluni criteri di maggiorazione desunti dalla disuguaglianza di SCHWARZ.

Si ha precisamente pel fattore numerico $\mathrm{D}(\xi, \xi')$,

$$\mathrm{D}(\xi, \xi') \leq \frac{48}{1 - \frac{v^2}{v_k^2}} \left\{ \frac{\xi \xi' (1 - \xi)(1 - \xi')}{3} + \frac{v}{v_k} \left( \delta(\xi) - \frac{2}{\pi^4} \sin \pi \xi \sin \frac{v_k}{v} \pi \xi' \right) \right\}$$

con

$$\delta(\xi) = \frac{\xi (1 - \xi)}{\sqrt{143{,}62}} - \frac{2}{\pi^4} \sin \pi \xi$$

qui appresso tabellata

| $\xi$ | $\delta(\xi)$ |
|---|---|
| 0,1 | 0,00116526 |
| 0,2 | 0,00128260 |
| 0,3 | 0,00091226 |
| 0,4 | 0,00049890 |
| 0,5 | 0,00032900 |

Si constata con una semplice ispezione che $D(\xi, \xi')$ dà la linea di influenza per la maggiorazione dinamica sicchè si ha, quando il ponte è percorso da un treno rigido di carichi $P_1, P_2, \ldots, P_N$;

$$w(x,t) \leq \delta_s \sum_1^N{}_i P_i D(\xi, \xi_i)$$

Per la serie che da $w(x,t)$ ho calcolato, tenendo conto di tutto il campo di variabilità di $v$, tra $0 - \infty$, limitazioni superiori rigorose compendiate per il punto di mezzo della trave in fig. 1.

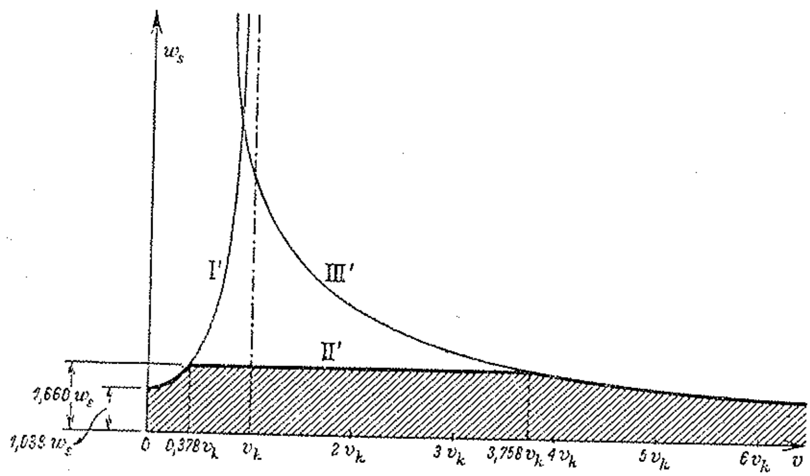



FIG. 1.

Limitazioni superiori per lo spostamento dinamico in mezzeria d'una trave semplicemente appoggiata in funzione della velocità $v$ del carico mobile.

Si constata che per piccole velocità gli aumenti sono lievi, che non superano mai più del 46% il valore statico e che tendono a zero per $v \to \infty$.

Si rilevi che se si considera il solo primo termine della serie si trova un massimo spostamento in condizioni di risonanza che è 1,42 volte quello statico. Si argomenta da ciò la bontà della limitazione.

Rileverò che per una struttura qualunque si ha la limitazione

$$w(x,t) < \sqrt{\frac{l}{2}\, c(x,x) \int_0^l \omega(x,x)\, dx} \tag{4}$$

essendo $\omega(x,x)$ la rotazione che nella sezione $x$ provoca il momento $M = 1$ applicato in $x$; $c(x,x)$ lo spostamento che in $x$ provoca il carico $P = 1$ pure applicato in $x$.

Per il caso della trave semplicemente appoggiata questa limitazione porge per la mezzeria il limite $2w_s$ alquanto superiore al $1{,}56\, w_s$ dianzi trovato. Ma da questa si può dedurre una limitazione più efficace, però meno semplice e nitida, che dà valori utilizzabili in pratica.

Una limitazione che fa a meno di alcune ipotesi inerenti alle condizioni di realizzazione del limite [4] mi è stata suggerita dal prof. R. Einaudi.

A questa si perviene opportunamente adattando la deduzione trovata per la [4]; ecco come:

Considerata la serie [3] che dà l'espressione di $w(x,t)$ si integri *per parti* supponendo $u_\varrho(0) = 0$. Si trae

$$w(x,t) = \sum_\varrho \frac{u_\varrho(x)\, u_\varrho(vt)}{\sigma_\varrho^{\,2}} - \sum_\varrho \frac{u_\varrho(x)}{\sigma_\varrho^{\,2}}\, J_\varrho(t) \tag{3b}$$

con

$$J_\varrho(t) = \frac{1}{\sigma_\varrho} \int_0^t \cos \sigma_\varrho(t-t')\, \frac{du_\varrho(vt')}{dt'}\, dt'$$

Per la classica disuguaglianza di Schwarz relativa all'integrale del prodotto $f \cdot g$ di due funzioni $f$ e $g$ di una stessa variabile $t$,

$$\int_a^b f g\, dt \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2\, dt \int_a^b g^2\, dt}\ ,$$

si ha per $J_\varrho(t)$ la limitazione

$$|\, J_\varrho(t)\, | \leq \frac{1}{\sigma_\varrho} \sqrt{\int_0^t \cos^2 \sigma_\varrho(t-t')\, dt' \int_0^t \left[\frac{du_\varrho(vt')}{dt'}\right]^2 dt'}$$

ovvero, ponendo $vt = x$, $\cos^2 \sigma_\varrho (t - t') = 1$,

$$|J_\varrho(t)| \leq \frac{1}{\sigma_\varrho} \sqrt{vt \int_0^{vt} \left(\frac{du_\varrho}{dx}\right)^2 dx}$$

Dalla [3b] si ha a sua volta, applicando la disuguaglianza di Schwarz relativa alla somma di una serie di prodotti $a_i b_i$,

$$\left| \sum_i a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2} \quad ,$$

la limitazione

$$|w(x,t)| \leq \sum_\varrho \frac{u_\varrho(x)\, u_\varrho(vt)}{\sigma_\varrho^2} + \sqrt{\sum_\varrho \frac{u_\varrho^2(x)}{\sigma_\varrho^2} \sum_\varrho J_\varrho^2(t)}$$

e quindi, per la limitazione trovata per $J_\varrho$,

$$|w(x,t)| \leq \sum_\varrho \frac{u_\varrho(x)\, u_\varrho(vt)}{\sigma_\varrho^2} + \sqrt{\sum_\varrho \frac{u_\varrho^2(x)}{\sigma_\varrho^2} \cdot vt \cdot \int_0^{vt} \frac{1}{\sigma_\varrho^2} \left(\frac{du_\varrho}{dx}\right)^2 dx}$$

Avendosi infine, per gli elementi della teoria delle equazioni integrali,

$$\sum_\varrho \frac{u_\varrho(x)\, u_\varrho(x')}{\sigma_\varrho^2} = c(x,x') \qquad \sum_\varrho \frac{\left(\dfrac{du_\varrho(x)}{dx}\right)^2}{\sigma_\varrho^2} = \omega(x,x) \; ,$$

si trae in definitiva in luogo della limitazione [4] la limitazione suggerita, valida in rigore,

$$|w(x,t)| \leq c(x,vt) + \sqrt{c(x,x) \cdot vt \int_0^{vt} \omega(x,x)\, dx}$$

Essa da, per $vt = l$ e $x = \frac{l}{2}$, un valore $(1 + \sqrt{2})$ volte maggiore della [4]; per $vt = \frac{l}{2}$, $x = \frac{l}{2}$, sempre per la trave semplicemente appoggiata, avendosi

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \omega(x,x)\, dx = \frac{l}{12\,\mathrm{EJ}} \quad , \quad c(x,x) \Big|_{x = \frac{l}{2}} = \frac{l^3}{48\,\mathrm{EJ}} = w_s$$

E, J essendo il modulo d'elasticità rispettivamente il momento d'inerzia della sezione resistente,

$$|w(x,t)| \leq (1+\sqrt{2})\, w_s$$

## III. — CARICO INERTE.

Se il carico è inerte, allora, in luogo del carico P va considerata la *forza perduta*

$$P - \frac{P}{g} \frac{d^2 w(vt,t)}{dt^2}$$

e le equazioni nelle $\varphi_\varrho$ divengono, se si pone $\frac{P}{g} = M$,

$$\ddot{\varphi}_\varrho + \sigma_\varrho{}^2 \varphi_\varrho = \left(P - M \frac{d^2 w(vt,t)}{dt^2}\right) u_\varrho(vt)$$

Esprimendo $w$ in termini di $u_\varrho$ e $\varphi_\varrho$ si ha, ricordando che

$$w = \sum_{1}^{\infty}{}_\varrho\, u_\varrho(x)\, \varphi_\varrho \,,$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \sum_{1}^{\infty}{}_\varrho\, \ddot{u}_\varrho(vt) \cdot \varphi_\varrho + 2 \sum_{1}^{\infty}{}_\varrho\, \dot{u}_\varrho(vt)\, \dot{\varphi}_\varrho + \sum_{1}^{\infty}{}_\varrho\, u_\varrho(vt)\, \ddot{\varphi}_\varrho \;;$$

[5] $$\ddot{\varphi}_\varrho + \sigma_\varrho{}^2 \varphi_\varrho = \left\{P - M \sum_{1}^{\infty}{}_\varrho\, \ddot{\varphi}_\varrho u_\varrho(vt) + 2\, \dot{\varphi}_\varrho \dot{u}_\varrho(vt) + \varphi_\varrho \ddot{u}_\varrho(vt)\right\} u_\varrho(vt)$$

$$(\rho = 1, 2, \ldots;)$$

Se però si pensa che al piano stradale si può dare una curvatura iniziale andrebbero aggiunti termini che in parte ridurrebbero i due primi dalle espressioni di $\frac{d^2 w}{dt^2}$. *In tale circostanza si potrebbe porre*

$$\frac{d^2 w}{dt^2} \sim \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)_{x=vt} = \sum_{1}^{\infty}{}_\varrho\, u_\varrho(vt)\, \ddot{\varphi}_\varrho$$

In ogni modo si osservi che anche trascurando codesti due termini si ottengono risultati sostanzialmente analoghi come alcune rigorose esplorazioni numeriche fatte e compendiate nei grafici consentono di affermare.

È il sistema [5] un sistema di equazioni differenziali non più a variabili separate e neanche a coefficienti costanti come venne fatto di

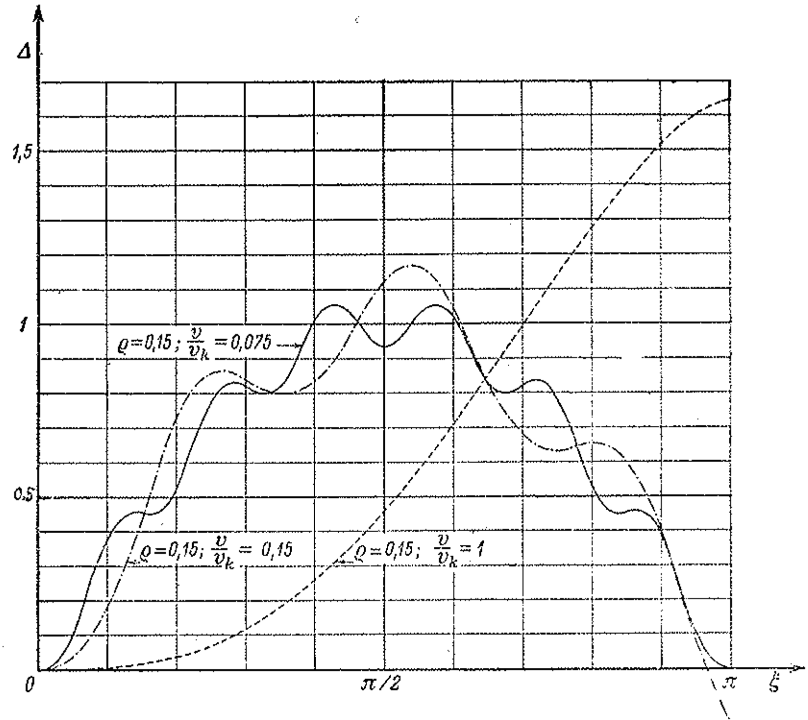



FIG. 2.

Lo spostamento $w(\bar{x}, t)$ della sezione generica $x = \bar{x}$ vale

$$w(\bar{\xi}, \xi) = 0{,}9855 \, \mathrm{P} \, \delta_s \sin \bar{\xi} \, \Delta(\xi)$$

con

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{l} \pi \,, \quad \xi = \frac{vt}{l} \pi \,, \quad \delta_s = \frac{l^3}{48 \mathrm{EJ}}$$

$l$ = luce della travata, E = modulo d'elasticità, J = momento d'inerzia della sezione resistente, $\rho$ = rapporto tra massa del carico e metà della massa della travata. Per $v_k$, $\delta_s$ si confronti la tabella a pag. 9.

*

riscontrare precedentemente. Se ci si accontenta del solo primo termine dello sviluppo in serie delle $u_\varrho$ di $\dfrac{d^2 w(vt,t)}{dt^2}$ si ha

$$[5a] \qquad \ddot{\varphi}_1 + \sigma_1^2 \varphi_1 = \Big\{ P - M \left[ \ddot{\varphi}_1 u_1(vt) + 2\,\dot{\varphi}_1 \dot{u}_1(vt) + \varphi \ddot{u}_1(vt) \right] \Big\} u_1(vt)$$

e la prima equazione nella coordinata normale diviene, raccogliendo opportunamente,

$$[5b] \quad \ddot{\varphi}_1 \Big\{ 1 + M u_1^2(vt) \Big\} + \varphi_1 \Big( \sigma_1^2 + M \ddot{u}_1(vt) \Big) + 2\,\dot{\varphi}_1 M\, u_1(vt)\, \dot{u}_1(vt) = P\, u_1(vt) \;.$$

Si tratta, come si vede manifestamente, di un'equazione differenziale lineare a coefficienti variabili.

Per il caso dell'asta omogenea in cui

$$u_1(vt) = \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \sin \frac{\pi v t}{l} \quad , \qquad \sigma_1^2 = \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EJ}{\mu_0}$$

essa diviene, posto $\rho = \dfrac{2M}{\lambda \mu_0}$,

[5c]
$$\ddot{\varphi}_1 (1 + \rho \sin^2 \lambda_1 t) + \varphi_1 \left\{ \frac{\pi^4 EJ}{l^4 \mu_0} - \rho \lambda_1^2 \sin \lambda_1 t \right\} + \rho \sin \lambda_1 t\, \dot{\varphi}_1 = P \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \sin \lambda_1 t \;.$$

Introducendo la trasformazione di variabili per ridursi alle dimensioni zero,

$$\xi = \frac{x}{l}\pi \quad , \qquad t = \frac{x}{v} = \frac{\xi}{\lambda} \,,$$

posto

$$\varphi_1(t) = \varphi_1\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = P\, \delta_s \sqrt{\frac{l\mu_0}{2}}\, \frac{96}{\pi^4}\, \Delta(\xi)$$

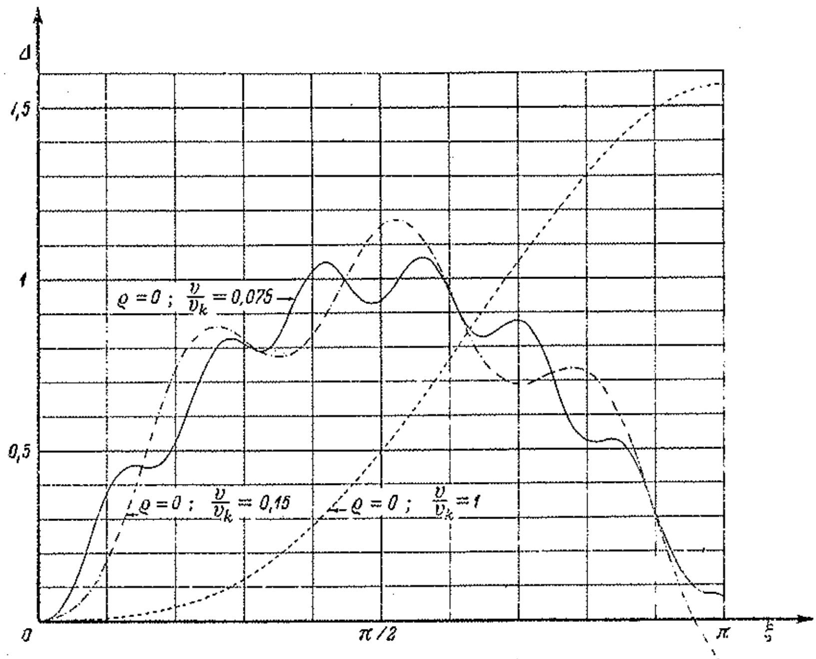



FIG. 3.

Cfr. la leggenda della figura 2.

e rilevato che

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{v}{v_k} \quad , \qquad \lambda = \frac{\pi v}{l}$$

risulta

[5 $d$]

$$\frac{d^2\Delta}{d\xi^2}\left(\frac{v}{v_k}\right)^2 \left\{1 + \rho \sin^2\xi\right\} + \Delta(\xi)\left\{1 - \rho\left(\frac{v}{v_k}\right)^2 \sin^2\xi\right\} + \frac{d\Delta}{d\xi}\, \rho\left(\frac{v}{v_k}\right)^2 \sin 2\xi = \sin\xi$$

Si ha così, trascurando nella serie [1] tutti i termini successivi al primo, preso riferimento ad una generica sezione $x = \bar{x}$,

$$w(\bar{x}, t) \simeq u_1(\bar{x}) \cdot \varphi_1(t)$$

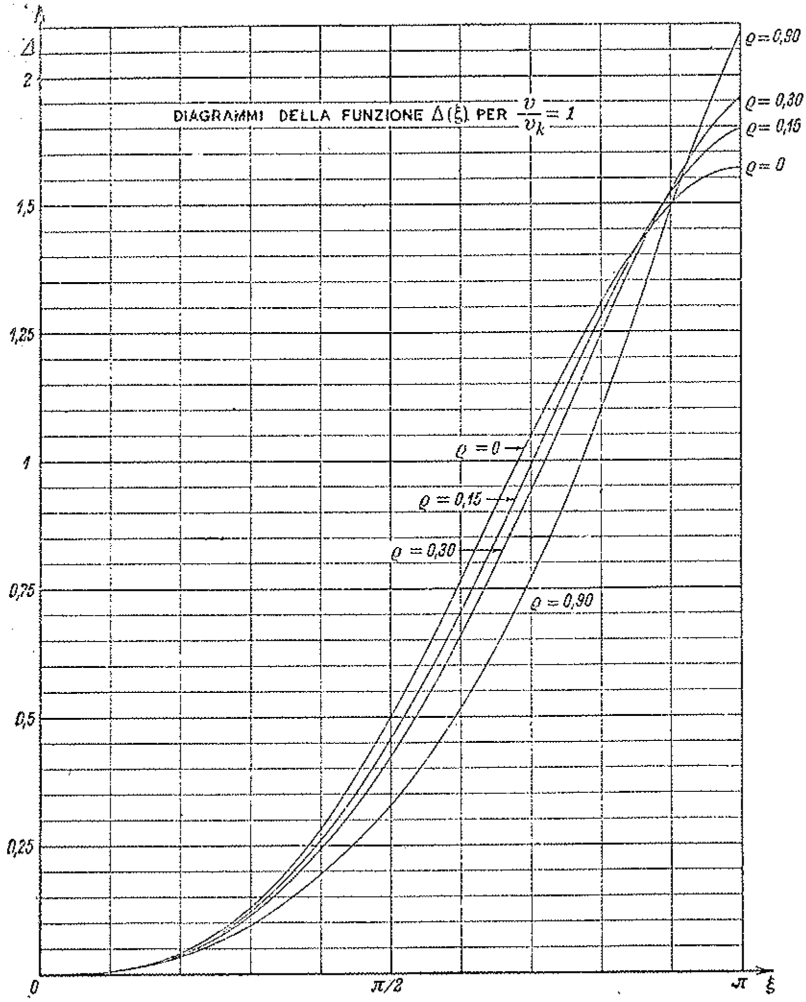



Fig. 4.

Cfr. la leggenda della figura 2.

ovvero, con riflesso alla definizione di $u_1(x)$ ed alle posizioni fatte, poichè $96 : \pi^4 = 0{,}9855$,

$$w(\bar{\xi}, \xi) = 0{,}9855 \, P \, \delta_s \cdot \sin \bar{\xi} \cdot \Delta(\xi)$$

essendo

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{l}\pi \,, \quad \delta_s = \frac{l^3}{48\,\mathrm{EJ}}$$

## IV. — CASO DEL MOLLEGGIO PARZIALE.

Supponiamo che della massa M una parte $(1-\chi)$ sia molleggiata l'altra $\chi$ M direttamente applicata (in pratica si ha $\chi \cong 0{,}25$).

Quale sarà il carico da sostituire in luogo di P?

Si avrà evidentemente

$$\mathrm{P} - \chi\,\mathrm{M}\,\frac{d^2 w}{dt^2} + \Pi$$

essendo $\Pi$ la pressione del molleggio dovuta ai soli scostamenti dalla configurazione di equilibrio (sotto al carico $(1-\chi)$ Mg.).

Ora, se si indica con $\varepsilon^2$ il coefficiente di elasticità della molla si avrà

$$\Pi = \varepsilon^2 \Big( w'(t) - w(vt, t) \Big)$$

e $w'$ soddisferà l'equazione

$$(1-\chi)\,\mathrm{M}\,\frac{d^2 w'}{dt^2} + \varepsilon^2 (w' - w) = 0$$

Se al tempo $t = 0$ in cui il carico imbocca il ponte è $w = 0$ e $\dot{w} = 0$, si trae per $w$ la soluzione

$$w' = \nu \int_0^t \sin \nu (t - t')\, w\,(vt')\, dt'$$

essendo

$$\nu^2 = \frac{\varepsilon^2}{(1-\chi)\,\mathrm{M}} \;;$$

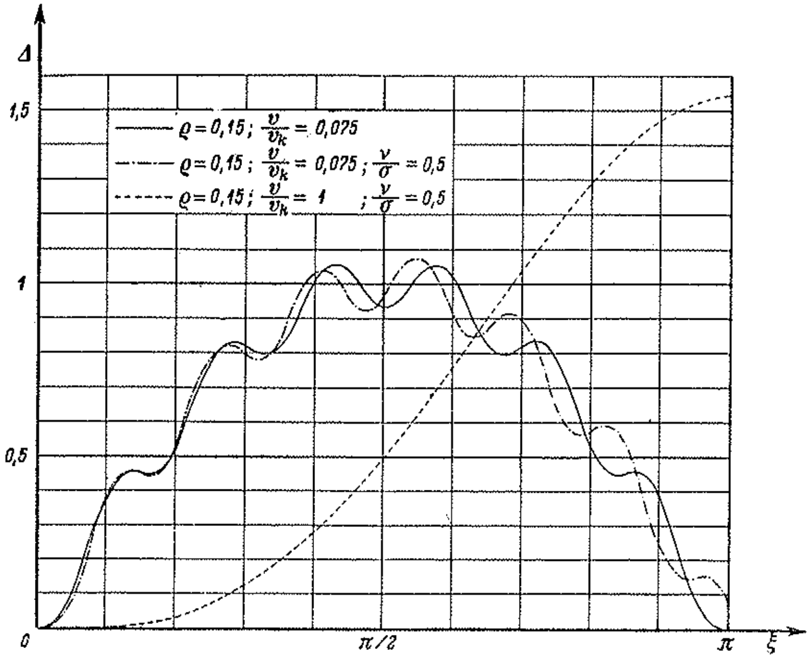



Fig. 5.

Cfr. la leggenda della figura 2.
Si considera il molleggio del carico; $\nu$ è la frequenza della massa sospesa, $\sigma$ la frequenza del ponte (cfr. tabella a pag. 9).

il carico mobile sarà perciò rappresentato da

$$P - \chi M \frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2} + \varepsilon^2 \left\{ \nu \int_0^t \sin \nu (t - t')\, w(vt', t')\, dt' - w(vt, t) \right\}$$

Introduciamo in luogo di P codesta espressione nella [3] e scriviamo in luogo di $w$

$$w = \sum_1^\infty{}_\varrho\, u_\varrho(vt)\, \varphi_\varrho$$

Otteniamo il sistema di equazioni integro-differenziali nelle $\varphi_\varrho$

$$[6]\qquad \ddot{\varphi}_\varrho + \sigma_\varrho^2 \varphi_\varrho = \left\{ \mathrm{P} - \chi \mathrm{M} \frac{d^2 \sum_1^\infty{}_\varrho u_\varrho(vt)\varphi_\varrho}{dt^2} + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^2 \left[ \nu \int_0^t \sin \nu(t-t') \cdot \sum_1^\infty{}_\varrho u_\varrho(vt')\varphi_\varrho(t')\,dt' - \sum_1^\infty{}_\varrho u_\varrho(vt)\varphi_\varrho(t) \right] \right\} u_\varrho(vt)$$

L'equazione in $\varphi_1$ diviene, trascurando tutte le $\varphi_\varrho$ successive alla prima

$$[6a]\qquad \ddot{\varphi}_1 \left\{ 1 + \chi \mathrm{M} u_1^2(vt) \right\} + \varphi_1 \left\{ \sigma_1^2 + \chi \mathrm{M} \ddot{u}_1(vt) u_1(vt) + \varepsilon^2 u_1^2(vt) \right\} + 2\dot{\varphi}_1 \chi \mathrm{M} \dot{u}_1(vt) u_1(vt) -$$
$$- \varepsilon^2 \nu u_1(vt) \int_0^t \sin \nu(t-t')\, u_1(vt')\, \varphi_1(t')\, dt' = \mathrm{P}\, u_1(vt)$$

Per l'asta omogenea, usando le stesse posizioni fatte nel caso delle masse non molleggiate, precisamente

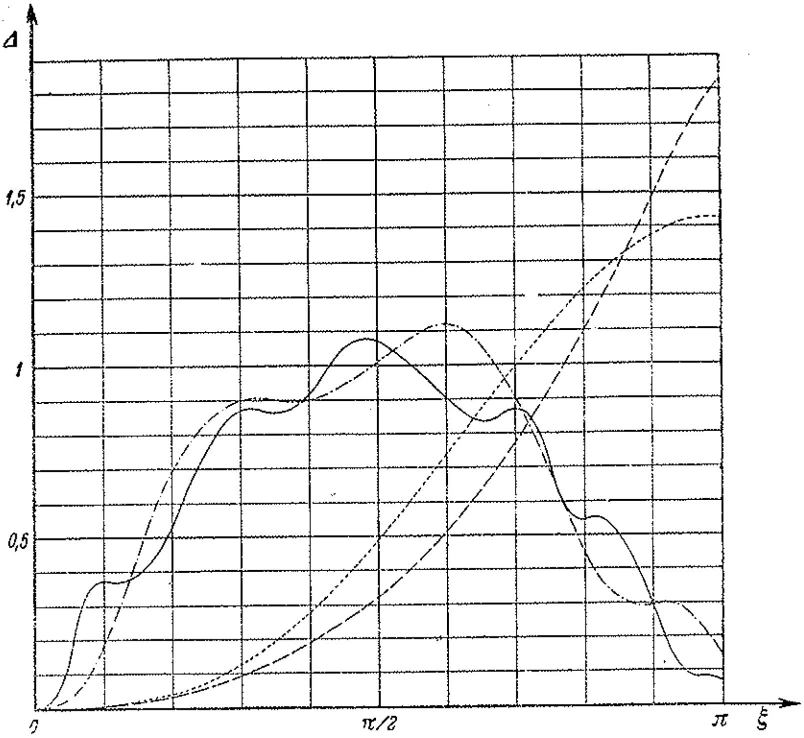
$$\xi = \frac{x}{l}\pi\,,\quad t = \frac{\xi}{\lambda}\,,\quad \varphi_1 = \mathrm{P}\,\delta_s \sqrt{\frac{l\mu_0}{2}}\,\frac{96}{\pi^4}\,\Delta(\xi)\,,\quad \delta_s = \frac{l^3}{48\,\mathrm{EJ}}$$

che portano la $w(x,t)$ per $x = \bar{x}$ alla forma

$$[7]\qquad w(\bar{x},t) = \mathrm{P}\,\frac{96}{\pi^4}\,\delta_s \sin\bar{\xi}\,\Delta(\xi)$$

si ottiene

$$[6b]\qquad \left(\frac{v}{v_k}\right)^2 (1 + \chi\rho \sin^2\xi)\,\frac{d^2\Delta}{d\xi^2} + \chi\rho\left(\frac{v}{v_k}\right)^2 \sin 2\xi\,\frac{d\Delta}{d\xi} +$$
$$+ \left[1 - \chi\rho\left(\frac{v}{v_k}\right)^2 \sin^2\xi + \left(\frac{\nu}{\sigma}\right)^2 \rho(1-\chi)\sin^2\xi\right]\Delta -$$
$$- (1-\chi)\left(\frac{\nu}{\sigma}\right)^3 \frac{v_k}{v}\,\rho \sin\xi \int_0^\xi \Delta(\xi')\sin\xi' \cdot \sin\left[\frac{\nu}{\sigma}\,\frac{v_k}{v}(\xi-\xi')\right] d\xi' = \sin\xi$$




——— $\varrho = 0{,}9$ ; $\frac{v}{v_k} = 0{,}075$ — · — · — $\varrho = 0{,}9$ ; $\frac{v}{v_k} = 0{,}15$

— — — $\varrho = 0{,}9$ ; $\frac{v}{v_k} = 1$ ········ $\varrho = 0{,}9$ ; $\frac{v}{v_k} = 1$ ; $\frac{\nu}{\sigma} = 0{,}5$

FIG. 6.

Cfr. la leggenda della figura 5.

e se si pone $\chi = 0$,

$$
\left(\frac{v}{v_k}\right)^2 \frac{d^2\Delta}{d\xi^2} + \left[1 - \left(\frac{\nu}{\sigma}\right)^2 \rho \sin^2\xi\right] \Delta -
$$

[6c]
$$
- \left(\frac{\nu}{\sigma}\right)^3 \frac{v_k}{v} \rho \sin\xi \int_0^\xi \Delta(\xi') \sin\xi' \sin\left[\frac{\nu}{\sigma}\frac{v_k}{v}(\xi - \xi')\right] d\xi' = \sin\xi
$$

Le equazioni [5c] e [6c], differenziale lineare del second'ordine a coefficienti variabili la prima, integrodifferenziale lineare del secondo ordine a coefficienti variabili la seconda, sono state affrontate dall'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche coi metodi d'integrazione numerica secondo CAUCHY-LISCHPITZ.

Si considerarono gruppi dei parametri $\rho, \frac{v}{v_k}$ rispettivamente $\rho, \frac{v}{v_k}, \frac{\nu}{\sigma}$ che intervengono nella pratica e nel caso limite, come sappiamo assai discosto dalla realtà, in cui $v$ tende alla velocità $v_k$ cosiddetta *critica* (in assenza di masse mobili) e si sono determinate, nel campo $0 \leq \xi \leq \pi$, che corrisponde alla luce del ponte, essendosi posto $\xi = \frac{x}{l}\pi$, le soluzioni $\Delta = \Delta(\xi)$ a partire dalle condizioni iniziali spettanti alla configurazione naturale ed alla quiete, quindi

$$\Delta(0) = 0 \quad , \quad \left(\frac{d\Delta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0$$

I risultati di questi faticosi scandagli sono riportati nei diagrammi (cfr. fig. 2, 3, 4, 5, 6, 7) che traducono sinteticamente tabelle calcolate con l'approssimazione del $^1/_{1000}$.

Si constata da una semplice ispezione che, dando la [7] lo spostamento in $\bar{x}$, ovvero in $\bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{l}\pi$, quando il carico è in $x = vt$ dunque in $\xi = \frac{vt}{l}\pi$, i diagrammi in questione rappresentano le linee di influenza per lo spostamento in $\bar{\xi}$ a meno del fattore $\frac{96}{\pi^4} P\,\delta_s \sin\bar{\xi}$. Esse determinano quindi (moltiplicate per $96:\pi^4$) il coefficiente $> 1$ d'aumento dinamico in funzione del posto che ha il carico mobile (all'istante $t = x:v$). Sarà bene rilevare che, a meno che non sia $\rho = 0$, queste linee d'influenza si riferiscono al *carico solitario* in quanto la sovrapposizione degli effetti non è più legittima se $\rho \neq 0$; che, se gli spostamenti sono proporzionali ai carichi non lo sono invece in raffronto alla loro inerzia; il carico (la forza) interviene come termine perturbante ordinario nella equazione differenziale lineare del moto, l'inerzia corrispondente ne perturba invece i coefficienti.

In ogni modo, confrontando i diagrammi spettanti alle circostanze in cui $\rho = 0$ e $\rho \neq 0$ si constata che, per le velocità ordinarie ($v \cong {}^1/_{10}\, v_k$) l'effetto d'inerzia non è rilevante, sicchè addirittura, in linea appros-

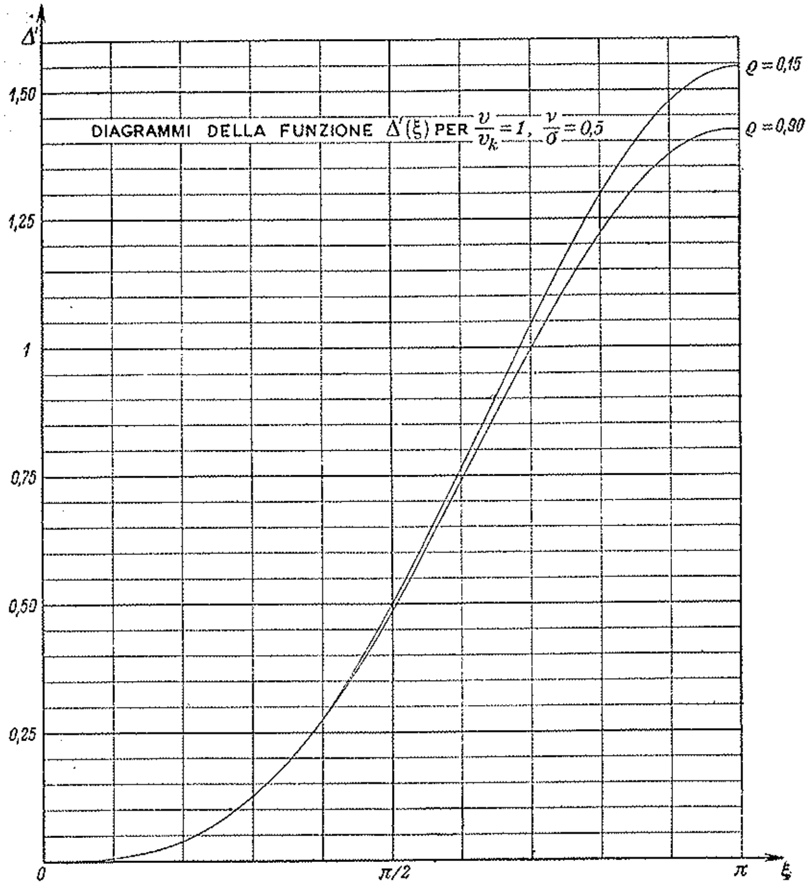



FIG. 7.

Cfr. la leggenda della figura 5.

simata, ai diagrammi in quistione si può attribuire la portata di linee di influenza nel senso ordinariamente inteso in statica.

Merita rilevare che, mentre l'azione dell'inerzia si fa sentire fortemente nel campo delle velocità critiche, risulta invece, per le velocità ordinarie, agli effetti della velocità pura, per ruote perfettamente levigate e per un binario ideale, assai lieve sia essa molleggiata o no. E ciò, anche per ponti di piccola luce. Che poi i ponti di minor luce risentano particolarmente le azioni dinamiche nessun dubbio, ma esse sono di altra natura. Accanto all'effetto di velocità ed inerzia si debbono considerare i carichi mobili armonici, la perniciosa azione dei *giunti* nelle rotaie, delle deformazioni delle rotaie stesse.

Senza insistere ulteriormente sulla questione mi sia lecito porre in rilievo come, traverso l'impostazione rigorosa di un vecchio problema e per merito della possibilità offertami dal Direttore dell'Istituto di Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Prof. M. Picone, di scandagliare numericamente le soluzioni di equazioni differenziali ed integrodifferenziali irte di difficoltà eccezionali è stato possibile trarre risultati assai significativi che consentono di abbandonare certe empiriche limitazioni non rispondenti alla realtà. È ben vero che per il tramite di soluzioni intuitivamente approssimate delle equazioni in questione, almeno in taluni casi, si può anche arrivare a risultati in linea generale quantitativamente analoghi, ma ad essi non si potrebbe dare, naturalmente, alcun affidamento.

Sia detto infine che nelle integrazioni numeriche eseguite non si è valutato l'errore ma si è diviso l'intervallo in 90, 180, 270, 360 parti constatando sempre la stabilizzazione della soluzione già alla prima o seconda stretta del passo.

# SAGGIO SU LA RESISTENZA DEI MATERIALI IN REGIME PLASTICO
## (IL PROBLEMA DEL GANCIO) (*)

*(Con quattro figure)*

GUSTAVO COLONNETTI
*Accademico Pontificio*

SVMMARIVM. — Auctor, occasionem arripiens ex quodam practico problemate sat crebro in scientia constructionum, de materiarum robore in regimine plastico generalia quaedam exponit, quorum cum experimentorum resultatibus ostendit congruentiam.

La figura 1 riproduce (in scala 1 : 3) il profilo di un gancio normale da paranco, che il fabbricante garantisce per un carico utile di 2000 chilogrammi.

Ora il calcolo, eseguito secondo le buone regole della teoria dell'elasticità (1), ci dice che, sotto l'azione di un tal carico, si deve verificare nella sezione più sollecitata del gancio una tensione unitaria massima di 20 kg./mm.$^2$.

D'altra parte il materiale con cui il gancio è stato fabbricato è un buon acciaio dolce con 26 kg./mm.$^2$ di limite elastico, 42 kg./mm.$^2$ di resistenza ed un allungamento di rottura $> 20\,\%$.

Se ne deve dedurre che, sotto l'azione del carico indicato, il gancio possiede un margine di sicurezza appena superiore a *due*?

Io ho avuto occasione di sottoporre questo tipo di gancio a ripetute prove, ed ho constatato che in realtà esso può regolarmente sop-

---

(*) Nota presentata il 31 marzo 1939.

(1) C. GUIDI, *Lezioni sulla scienza delle costruzioni*, parte II, cap. III (*Solidi di grande curvatura*); cfr. anche: *Esercizii.*

portare, prima di rompersi — o, per esser precisi, prima di aprirsi a tal segno da diventare inservibile — un carico compreso fra le 9 e le 10 tonnellate.

Il margine di sicurezza, nelle condizioni di carico su indicate, è dunque *in realtà* prossimo a *cinque*.

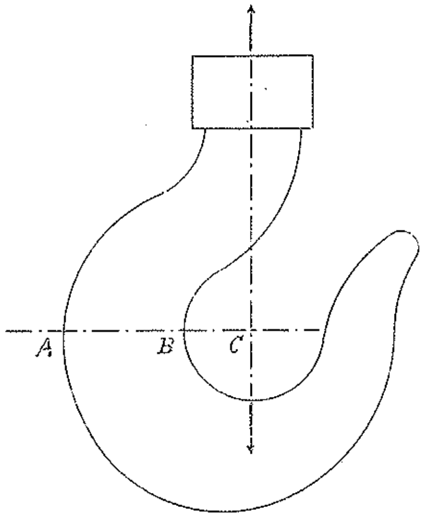



Fig. 1.

Ho già detto altrove (1) che, per rendersi ragione di siffatte apparenti discordanze tra teoria ed esperienza, basta tener conto del fatto che, al di là del limite elastico, la teoria dell'elasticità cessa di essere applicabile.

Là dove il limite elastico è stato raggiunto, si determinano infatti le prime deformazioni plastiche, la tensione cessa di crescere, o quanto

(1) G. Colonnetti, *Le deformazioni plastiche e la loro funzione statica*, Costruzioni Metalliche («Casabella»), 1938; *Sistemi iperstatici in regime elasto-plastico*, Costruzioni Metalliche («Casabella»), 1939; *Su la resistenza dei tubi per condotte forzate*, «Il Cemento Armato», 1939.

meno prende a crescere assai più lentamente del carico, tendendo ad un limite ben definito.

Continuano invece a crescere (anzi prendono a crescere più rapidamente) le tensioni nelle regioni attigue, inizialmente meno sollecitate, almeno fino a che il limite elastico venga anche in esse raggiunto.

Così il regime plastico si va progressivamente estendendo dall'uno, o da entrambi i bordi della sezione, verso l'asse neutro.

Nel frattempo il gancio accusa le prime deformazioni permanenti, ma queste si mantengono molto piccole fino a che vi è, in prossimità dell'asse neutro, una regione *finita* in cui continua a sussistere il regime elastico.

Solo quando questa regione si sarà ridotta a dimensioni trascurabili, ed il regime plastico si sarà praticamente esteso a tutta la sezione, solo allora potrà aver inizio il periodo delle grandi deformazioni.

Tuttavia la resistenza del gancio sarà, in generale, ancor ben lontana dall'essere esaurita. Perchè insieme colle grandi deformazioni il materiale incomincerà a presentare fenomeni di incrudimento: in conseguenza le tensioni riprenderanno a crescere, sia pure molto lentamente, prima in corrispondenza dei bordi dove le deformazioni sono più grandi, poi su tutta la sezione.

E solo quando l'incrudimento si sarà integralmente verificato su l'intiera sezione, e il materiale sarà giunto al punto di deformarsi plasticamente senza che le tensioni possano più crescere, perchè hanno ovunque toccato il limite massimo, solo allora la resistenza del gancio si potrà considerare esaurita, nel senso che un ulteriore aumento del carico dovrà necessariamente determinarne il cedimento definitivo (o la rottura).

Volendo schematizzare le cose, si possono dunque considerare tre fasi successive attraverso a cui il fenomeno si svolge secondo leggi ben nettamente distinte: una fase elastica, una elasto-plastica, ed una plastica.

La prima ha notoriamente termine quando il limite elastico viene per la prima volta raggiunto (fig. 2); al suo studio basta la teoria classica dell'elasticità.

La seconda fase obbedisce invece a quelle che io ho chiamate le leggi dell'equilibrio elasto-plastico (¹). Nel caso dei sistemi staticamente determinati essa è da considerarsi chiusa quando il regime plastico si è praticamente esteso a tutta intiera la sezione più sollecitata.

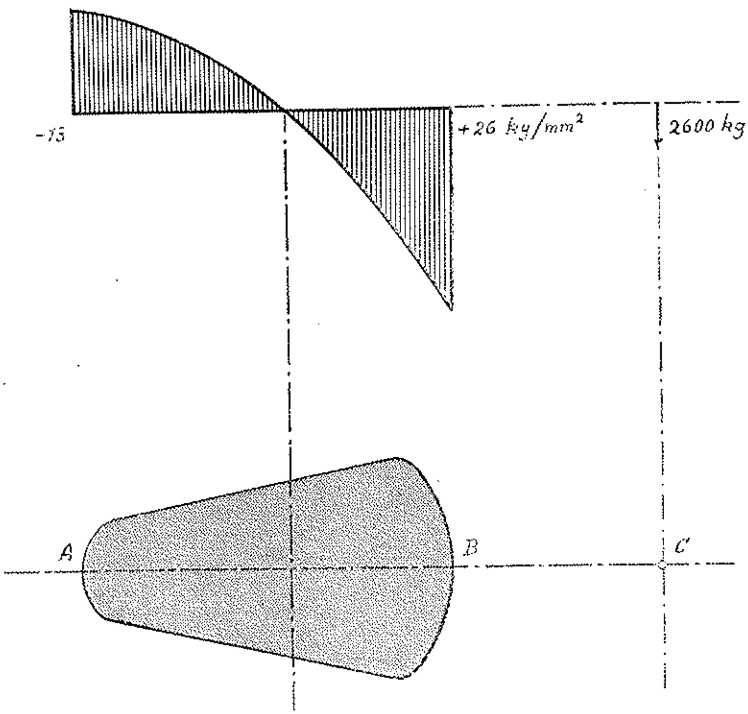



Fig. 2.

Supposto che ciò possa verificarsi prima che nel materiale si determini un qualsiasi accenno a fenomeni di incrudimento — il che implica che il materiale presenti quello che correntemente si chiama uno snervamento ben definito e sufficientemente prolungato — la distribuzione effettiva delle tensioni sulla sezione assumerà un andamento assai prossimo al caso limite rappresentato nella figura 3.

(¹) G. Colonnetti, *La statica dei corpi elasto-plastici*, Pontificia Academia Scientiarum, «Commentationes», anno II, vol. II, n. 12.

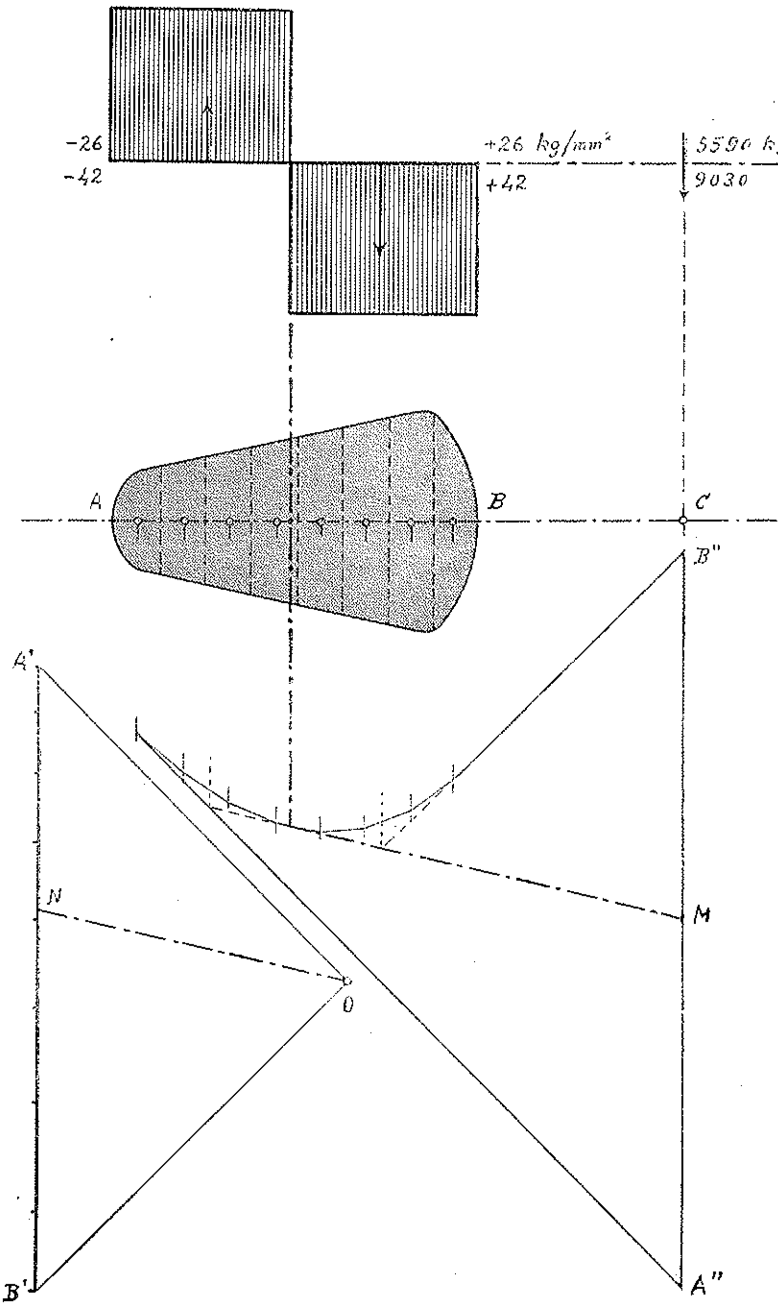



FIG. 3.

Nel qual caso limite la sezione viene supposta divisa in due porzioni, soggette l'una a trazioni, l'altra a compressioni, di intensità tutte eguali al limite elastico del materiale.

L'asse neutro, o asse di separazione delle due porzioni, è perfettamente definito dalla condizione che la risultante generale di tutte quelle tensioni abbia per punto di applicazione un punto dato, e precisamente il centro C di sollecitazione.

Ciò implica infatti che i momenti statici delle due risultanti parziali (di trazione e di compressione) presi rispetto a C, siano eguali.

Supposta pertanto l'area della sezione idealmente divisa in tante strisce elementari, e considerate le aree di queste strisce come altrettante forze parallele, si collegheranno queste con una linea funicolare, al fine di determinare, sulla parallela condotta per C, i relativi momenti statici.

Indi per il punto di mezzo M della retta dei momenti statici si condurrà la tangente a quella linea funicolare. Si verrà così a definire la posizione dell'asse neutro (e, occorrendo, anche quella delle due risultanti parziali di trazione e di compressione).

Colla parallela condotta per il polo O alla stessa tangente si determineranno poi le aree delle due porzioni in cui quest'asse divide la sezione (e, occorrendo, la grandezza di quelle risultanti).

Quanto alla risultante generale, ossia al valore del carico che, applicato in C, determina la fine della fase elasto-plastica e l'inizio di quella plastica, la si potrà nel modo più semplice calcolare moltiplicando la differenza di quelle due aree per il valore unitario della tensione, che, nel caso di cui ci stiamo occupando, è il limite elastico del materiale.

Non meno semplice è il calcolo del valore del carieo che, applicato in C, può determinare la fine della fase plastica ed il definitivo cedimento (o la rottura) del gancio.

Abbiamo infatti già detto che ciò si verificherà solo quando, a incrudimento avvenuto, le tensioni avranno ovunque raggiunto il limite massimo o carico di rottura del materiale. Lo stesso diagramma limite delle tensioni, adunque, con un semplice cambiamento di scala!

Basterà perciò moltiplicare per il carico di rottura la differenza delle aree già determinata.

Nel caso concreto la differenza delle aree è risultata eguale a

mm.$^2$ 215

Il valore limite inferiore o carico corrispondente all'inizio della fase plastica, sarà quindi eguale a

$$215 \times 26 = 5590 \text{ kg.}$$

Il valore limite superiore o carico corrispondente al termine della fase plastica, dovrà invece essere eguale a

$$215 \times 42 = 9030 \text{ kg.}$$

Tali valori limiti (insieme con quello relativo alla fase elastica) sono stati indicati nella figura 4 accanto al diagramma *sforzi-deformazioni* da me rilevato sperimentalmente sui ganci di cui si tratta.

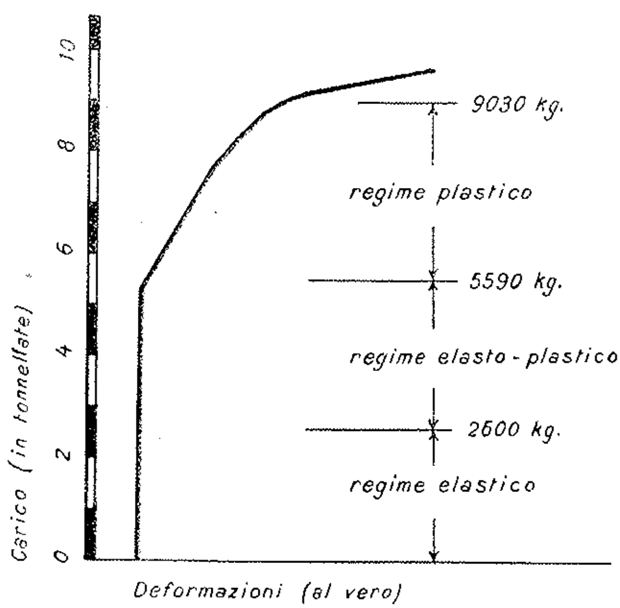



FIG. 4.

Basta uno sguardo alla figura per constatare come le semplici considerazioni che io sono venuto esponendo si prestino bene a caratterizzare così l'inizio come il termine della fase plastica, o fase delle grandi deformazioni.

La coincidenza tra i valori limiti calcolati ed i punti di inflessione del diagramma è infatti più che soddisfacente.

Sembra pertanto lecito affermare che — pur restando di esclusivo dominio della teoria dell'equilibrio elastico (o dell'equilibrio elasto-plastico) lo studio della distribuzione delle tensioni nella prima (o rispettivamente nella seconda) fase del fenomeno — giova ricorrere a considerazioni del genere di quelle che ho qui esposte tutte le volte che il problema consiste semplicemente nella determinazione dei probabili margini di sicurezza rispetto al pericolo di cedimento o di rottura.

*ACTA*
*Vol. III - N. 5*

# SUL CALCOLO DEI SIMBOLI DI RIEMANN PER $ds^2$ ASSEGNATI QUALSIASI (*).

CARLO TOLOTTI

SVMMARIVM. — Exhibetur generale supputationis schema quod attinet ad symbolos Riemann, metricis varietatibus quomodocumque statutis; hoc schemate vitari potest laboriosa supputatio eorum symbolorum, substitutione directe peracta in eorum expressionibus definitionis.

## I. — PREFAZIONE.

Quando, occorrendo di calcolare i simboli di RIEMANN di 1ª specie $R_{ij,kl}$ o di 2ª specie $R_{i}^{h}{}_{,kl}$ per una varietà metrica $V_n$ di assegnato elemento lineare $ds^2 = \sum_{ik}^{n}{}_{1} a_{ik}dx^i dx^k$, si voglia evitare la materiale e laboriosa sostituzione delle $a_{ik}$ nelle espressioni generali di definizione dei detti simboli, non si ha che da cercare di rifarsi a qualcuno dei modi per introdurli globalmente.

Fra questi modi, un metodo possibile di calcolo si ha già nella via indicata dal LEVI-CIVITA nella sua classica Memoria: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*... [1], in cui, in modo geometricamente luminoso, i simboli $R_{i}^{h}{}_{,kl}$ vengono introdotti per mezzo del trasporto ciclico per parallelismo di un vettore $dx^h$ lungo il paralle-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio T. Levi-Civita, il 30 ottobre 1938.

(1) T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo*..., «Rend. Circ. Mat. di Palermo», vol. XLII, 1917, § 16.

logramma elementare individuato da due generici spostamenti $d'x^h$, $\delta' x^l$ spiccati dal punto considerato della $V_n$, e cioè, in formule:

[1] $$(d'\delta' - \delta' d')\, dx^h = \sum_{ikl}^{n} \mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl}\, dx^i d'x^k \delta' x^l \qquad (h = 1, \dots, n)$$

con i differenziali terzi a primo membro (essenzialmente non invertibili) definiti mercè applicazione ripetuta delle

[2] $$\tau^h(d, \delta) = \delta dx^h + \sum_{kl}^{n} \Gamma^h_{kl}\, dx^k \delta x^l = 0 \qquad (h = 1, \dots, n)$$

($\Gamma^h_{kl}$ simboli di Christoffel di 2ª specie). Calcolati così dalle [1] i simboli di 2ª specie $\mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl}$, le relazioni

[3] $$\sum_{h}^{n} a_{jh}\, \mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl} = \mathrm{R}_{ij,kl}$$

permetterebbero poi di dedurne agevolmente quelli di 1ª specie $\mathrm{R}_{ij,kl}$.

Si può osservare però che, sia quando si tratti del calcolo dei soli simboli $\mathrm{R}_{ij,kl}$, e sia anche quando si tratti di quello dei simboli $\mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl}$, non è detto che la via precedente, che ottiene dapprima le $\mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl}$, sia la più adatta. Difatti i simboli di 1ª specie $\mathrm{R}_{ij,kl}$, per le molteplici proprietà d'invarianza dei loro moduli rispetto a scambi degli indici, dovrebbero poter prestarsi (a parità di condizioni) ad un calcolo molto più rapido che non quelli di 2ª specie $\mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl}$; e d'altra parte il lavoro di risoluzione del sistema [3], che interviene quando si subordini (come noi proponiamo) il calcolo delle $\mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl}$ a quello delle $\mathrm{R}_{ij,kl}$, non va contato ai fini di un computo di economia di lavoro, dato che, come vedremo meglio in seguito, un sistema identico ha già dovuto essere risolto nella deduzione (comunque necessaria) delle formazioni contravarianti [2].

Oggetto della presente Nota è appunto, anzitutto, modificare le [1] del Levi-Civita in guisa da ottenerne delle relazioni semplici che introducano direttamente i simboli di 1ª specie $\mathrm{R}_{ij,kl}$, ed indi mostrare come sulla base di esse, sfruttando le molteplici proprietà di detti simboli, si possa pervenire ad uno schema generale di calcolo dei simboli di RIEMANN molto rapido e semplice, valido per un qualsiasi tipo di $ds^2$.

È interessante notare che mentre, nell'ambito delle relazioni che trovano la loro interpretazione geometrica nella teoria del parallelismo di LEVI-CIVITA, non siamo riusciti a modificare le [1] in guisa da renderle adatte al calcolo diretto delle $R_{ij,kl}$, a tale intento siamo invece pervenuti acconsentendo a porsi in un altro sistema di differenziali (geometricamente molto meno significativo) che il PÉRÈS ha considerato ed illustrato in una sua Nota (1) destinata a chiarire una discussa (2) relazione (3) mediante la quale il RIEMANN caratterizzava il comportamento covariante dei suoi simboli $R_{ij,kl}$. Mostreremo anzi che le relazioni, da noi dedotte dalle [1] in questo nuovo sistema di differenziali, si rivelano, per mezzo di un'elegante formula del LIPSCHITZ (4), non essere altro che la citata relazione originaria del RIEMANN, analizzata nella sua struttura formale e presentata nella forma più adatta al calcolo.

A titolo d'esempio applicheremo infine il nostro schema generale al calcolo dei simboli di RIEMANN per il $ds^2$ relativistico

$$[4] \qquad ds^2 = \mathrm{V}dt^2 + 2\mathrm{W}\,dt\,d\rho - \mathrm{H}\left[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2)\right],$$

(V, W, H funzioni soltanto di $t, \rho$; inoltre $\mathrm{V} > 0$, $\mathrm{H} > 0$). Nel caso particolare $\mathrm{W} = 0$, detto calcolo fu già da noi eseguito per altra via meno rapida in una nostra Nota di alcuni anni or sono (5). La generalizzazione al caso $\mathrm{W} \neq 0$ corrisponde, nell'interpretazione cosmologica, all'ammettere che, nel sistema di coordinate per cui la metrica considerata

(1) J. PÉRÈS, *A propos de la notion de parallélisme...*, «Rend. Acc. Lincei», serie 5ª, vol. XXIX, 1920, pag. 134-138; cfr. anche M. R. FABBRI, *Sui differenziali d'ordine superiore*, «Rend. Acc. Lincei», serie 6ª, vol. XXI, 1935, pag. 543-546.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, Mem. cit., pag. 202.

(3) B. RIEMANN, *Commentatio Mathematica*, «Ges. Werke», Leipzig, 1876, pag. 380 ss.

(4) R. LIPSCHITZ, *Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges*, «Journ. f. reine u. ang. Mathematik», v. 82, 1876, pag. 316-321.

(5) C. TOLOTTI, *Calcolo del tensore di Ricci-Einstein nel caso ortogonale*, «Rend. Acc. Lincei», serie 6ª, vol. XXI, 1935, pag. 326-332.

assume la forma semplice [4], possa non valere l'isotropia della propagazione della luce (¹).

## II. — INTRODUZIONE DIRETTA DEI SIMBOLI DI PRIMA SPECIE $R_{ij,kl}$.

Cerchiamo anzitutto di modificare le [1] del Levi-Civita in guisa da ottenerne delle relazioni semplici che introducano direttamente i simboli di 1ª specie $R_{ij,kl}$.

Conformemente alle assunzioni della teoria del parallelismo, nelle [1] i differenziali terzi (essenzialmente non invertibili) vanno ottenuti (proprietà associativa) mercè applicazione ripetuta della definizione [2] dei differenziali secondi. Le [1] divengono così

$$[1'] \qquad \delta' \sum_{kl}^{n} {}_1 \Gamma_{kl}^{h} dx^k d'x^l - d' \sum_{kl}^{n} {}_1 \Gamma_{kl}^{h} dx^k \delta' x^l = \sum_{ikl}^{n} {}_1 R_{i}^{h}{}_{,kl} dx_i d'x^k \delta' x^l$$

$$(h = 1, \ldots, n) \, .$$

Si consideri ora con il Pérès (cfr. Nota citata) un sistema di differenziali in cui, pur conservando per i differenziali secondi la definizione [2] del Levi-Civita, si rinunci alla proprietà associativa dei differenziali terzi assumendo per essi dei differenziali che siano invece invertibili. Ad esempio si può assumere come valore di $d'\delta' dx^h$ (indipendentemente dall'ordine di differenziazione) la media aritmetica dei tre differenziali distinti $d'\delta' dx^h$, $\delta' d' dx^h$, $dd'\delta' x^h$ della teoria del parallelismo.

Poichè le [1'] non contengono differenziali terzi, e non essendosi, d'altra parte, cambiata la definizione [2] dei differenziali secondi, ne segue che le [1'] restano valide anche nel nuovo sistema di differen-

(¹) Cfr. T. Levi-Civita, *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna, « Zanichelli », 1928, pag. 59.

ziali introdotto. Ma, per la proprietà commutativa dei nuovi differenziali, le differenze

$$\delta' d' dx^h - d' \delta' dx^h \qquad (h=1,\dots,n)$$

risultano nulle. Esse possono quindi venire aggiunte indifferentemente ai primi membri delle [1'], con che queste divengono

$$\delta' \tau^h(d,d') - d'\tau^h(d,\delta') = \sum_{ikl}^{n}{}_{1} \mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl}\, dx^i d'x^k \delta' x^l \qquad (h=1,\dots,n).$$

Moltiplicando ambo i membri di esse per $a_{jh}$ e sommando rispetto ad $h$, si ha infine, in virtù delle [2],

[5] $$\delta' \tau_j(d,d') - d'\tau_j(d,\delta') = \sum_{ikl}^{n}{}_{1} \mathrm{R}_{ij,kl}\, dx^i d'x^k \delta' x^l \qquad (j=1,\dots,n)$$

dove si sono introdotte le formazioni covarianti

$$\tau_j(d,\delta) = \sum_{h}^{n}{}_{1} a_{jh} \tau^h(d,\delta) = \sum_{h}^{n}{}_{1} a_{jh} \delta dx^h + \sum_{kl}^{n}{}_{1} \Gamma_{j,kl}\, dx^k \delta x^l \quad (j=1,\dots,n)$$

($\Gamma_{j,kl}$ simboli di Christoffel di 1ª specie).

Le [5] sono le relazioni che desideravamo stabilire e la cui pratica utilità per il calcolo dei simboli $\mathrm{R}_{ij,kl}$ illustreremo nei prossimi paragrafi. Come abbiamo mostrato, esse sono valide nel sistema di differenziali del Pérès e non in quello della teoria del parallelismo.

## III. — CONFRONTO CON UNA CLASSICA RELAZIONE DEL RIEMANN.

È interessante mettere in rilievo in che rapporto stiano le [5], da noi stabilite, colla relazione del RIEMANN a cui accennavamo nella prefazione, e cioè colla relazione

$$\text{[6]} \qquad \mathrm{R} = -2\mathrm{I}$$

essendo

$$\text{[7]} \qquad \mathrm{R} = d^2 \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\,\delta x^i \delta x^k - 2d\delta \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\,dx^i \delta x^k + \delta^2 \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\,dx^i dx^k ,$$

e

$$\mathrm{I} = \sum_{ijkl}^{1\ldots n} \mathrm{R}_{ij,kl}\,dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l .$$

A tale scopo osserveremo con il LIPSCHITZ (cf. paragrafo I) che, poichè è identicamente

$$\text{[8]} \qquad d \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\,\delta x^i \delta x^k = 2 \sum_{j}^{1\ldots n} \tau_j(d,\delta)\,\delta x^j$$

$$\text{[8']} \qquad 2d \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\,\delta x^i \delta x^k - \delta \sum_{ik}^{1\ldots n} a_{ik}\,dx^i dx^k = 2 \sum_{j}^{1\ldots n} \tau_j(d,d)\,\delta x^j ,$$

l'espressione [7] della R del RIEMANN si può trasformare nella seguente

$$\text{[9]} \qquad \mathrm{R} = 2d \sum_{j}^{1\ldots n} \tau_j(d,\delta)\,\delta x^j - 2\delta \sum_{j}^{1\ldots n} \tau_j(d,d)\,\delta x^j$$

Con questa trasformazione [9] dovuta al LIPSCHITZ e tenendo presente che con i differenziali secondi [2] è $\tau_j(d,\delta)=0$ $(j=1,\ldots,n)$, è facile riconoscere che le [5], in cui si faccia $d' = d$, $\delta' = \delta$, moltiplicate per $\delta x^j$ e sommate rispetto a $j$, danno appunto la [6] del Riemann.

Le relazioni [5] da noi scritte al paragrafo precedente si rivelano così non essere altro che l'originaria relazione di Riemann analizzata intimamente nella sua struttura formale e presentata nella forma più adatta al calcolo pratico. Il loro interesse consiste quindi anche nel fatto che esse forniscono una giustificazione diretta della relazione del Riemann, giustificazione che, forse non cedendo in eleganza a quella indiretta del Pérès (cfr. paragrafo I), presenta rispetto a questa il vantaggio di mettere in evidenza il meccanismo formale del processo con cui da R, per opportune associazioni di termini, si viene a formare $-2\mathrm{I}$.

## IV. — SCHEMA GENERALE DI CALCOLO DEI SIMBOLI $\mathrm{R}_{ij,kl}$ e $\mathrm{R}_{i}{}^{h}{}_{,kl}$.

Venendo alla pratica applicazione delle [5] al calcolo dei simboli $\mathrm{R}_{ij,kl}$, osserveremo che essa richiede le seguenti successive operazioni:

*a*) preparare le espressioni covarianti $\tau_j(d, d')$, il che si può fare agevolmente ricorrendo, ad esempio, alla [8'];

*b*) ricavare dalle $\tau_j(d, d') = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ le espressioni dei differenziali secondi $d'dx^h$; cosa alquanto faticosa se il $ds^2$ assegnato non è ortogonale, ma che ad ogni modo non ci è sembrata potersi evitare;

*c*) eseguire le differenziazioni $\delta'\tau_j(d, d')$ $(j = 1, \ldots, n)$ sostituendo i differenziali secondi colle espressioni trovate e avendo cura di semplificare gli sviluppi col non scrivere affatto tutti quei termini (o gruppi di termini) che contengono simmetricamente i due operatori $d'$ e $\delta'$, dato che poi nella successiva operazione *d*) detti termini verrebbero ad eliminarsi;

*d*) scambiare nelle espressioni trovate $d'$ con $\delta'$ e formare le differenze $\delta'\tau_j(d, d') - d'\tau_j(d, \delta')$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Ma (e ciò è l'essenziale vantaggio della via da noi seguita rispetto a quella suggerita dalle [1] del Levi-Civita) per ottenere tutti i simboli $\mathrm{R}_{ij,kl}$ non è necessario sviluppare completamente tutte le $n$ espressioni $\delta'\tau_j(d, d') - d'\tau_j(d, \delta')$. Difatti poichè, in virtù di note proprietà dei simboli di 1ª specie, è

$$R_{ij,kl} = R_{ji,lk} = R_{kl,ij} = R_{lk,ji} ,$$

si può, senza alterare il valore del simbolo considerato $R_{ij,kl}$, far comparire sempre come secondo indice uno qualsiasi dei quattro indici di cui è dotato. Ne segue che le operazioni *c*), *d*) possono essere sostituite dal seguente schema ridotto:

*c'*) sviluppare $\delta'\tau_1(d, d')$ trascurando la parte simmetrica in $d', \delta'$; formare la differenza $\delta'\tau_1(d, d') - d'\tau_1(d, \delta')$ ottenendo così tutti i simboli $R_{ij,kl}$ di cui almeno un indice è eguale ad 1;

*c''*) sviluppare $\delta'\tau_2(d, d')$ trascurando, oltre la parte simmetrica in $d'$, $\delta'$, tutti quei termini che verrebbero a contenere differenziali primi operanti su $x^1$; nella corrispondente differenza $\delta'\tau_2(d, d') - d'\tau_2(d, \delta')$ verranno a comparire così solamente quei simboli $R_{ij,kl}$ che hanno almeno un indice eguale a 2 e nessun indice eguale ad 1;

*c'''*) sviluppare $\delta'\tau_3(d, d')$ trascurando, oltre la parte simmetrica in $d'$, $\delta'$, tutti quei termini che verrebbero a contenere differenziali primi operanti su $x^1$ o $x^2$; nella corrispondente differenza $\delta'\tau_3(d, d') - d'\tau_3(d, \delta')$ verranno a comparire così solamente quei simboli $R_{ij,kl}$ che hanno almeno un indice eguale a 3 e nessun indice eguale ad 1 o 2;

e così via fino a:

$c^{(n-1)}$) sviluppare $\delta'\tau_{n-1}(d, d')$ tenendo conto dei soli termini (non simmetrici in $d'$, $\delta'$) che contengono esclusivamente differenziali primi operanti su $x^{n-1}$ e $x^n$ e formare la corrispondente differenza $\delta'\tau_{n-1}(d, d') - d'\tau_{n-1}(d, \delta')$.

Ottenuti così dalle [5] i simboli di 1ª specie $R_{ij,kl}$, per ottenere anche quelli di 2ª specie $R_i{}^h{}_{,kl}$ non si ha che da applicare al sistema [3], per ogni fissati $i$, $k$, $l$, le formule risolutive già dovute costruire in *b*) per risolvere le $\tau_j(d, d') = 0$ $(j = 1, ..., n)$ rispetto ai differenziali secondi. Riteniamo quindi il nostro metodo vantaggioso e di pratica utilità anche per il calcolo dei simboli di 2ª specie $R_i{}^h{}_{,kl}$, giacchè la difficoltà della risoluzione del sistema [3] (risoluzione alquanto faticosa per $ds^2$ non ortogonali) che s'incontra nella nostra via che subordina il calcolo delle $R_i{}^h{}_{,kl}$ a quello delle $R_{ij,kl}$ è una difficoltà che già interviene indipendentemente da ciò in ogni metodo di calcolo dei simboli di RIEMANN in cui non si riesca ad evitare la formazione delle espressioni contravarianti $\tau^h(d, d')$.

## V. — APPLICAZIONE AL CALCOLO DEI SIMBOLI DI RIEMANN PER IL $ds^2$ [4].

A titolo d'esempio applicheremo qui infine il precedente schema di calcolo per ottenere i simboli $R_{ij,kl}$ relativi al $ds^2$ (cfr. paragrafo I)

$$[4] \qquad ds^2 = Vdt^2 + 2W dt d\rho - H\left[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)\right],$$

(V, W, H funzioni soltanto di $t$, $\rho$; $V > 0$, $H > 0$), appartenente ad una metrica cronotopica dotata di completa simmetria (geometrica e cinematica) attorno ad un centro ed in cui, nel semplice sistema di riferimento scelto, può non valere l'isotropia della propagazione della luce.

Identificando le variabili $t$, $\rho$, $\theta$, $\varphi$ rispettivamente con $x^0$, $x^1$, $x^2$, $x^3$, si ha dalla [8']

$$\tau_0(d,d') = V d d't + W d d'\rho + \frac{1}{2}\dot{V} dt d't + \frac{1}{2}V'(dt d'\rho + d't d\rho) +$$
$$+ \left(W' - \frac{1}{2}\dot{H}\right) d\rho d'\rho + \frac{1}{2}\rho^2\dot{H}(d\theta d'\theta + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi d'\varphi),$$

$$\tau_1(d,d') = W d d't - H d d'\rho + \left(\dot{W} - \frac{1}{2}V'\right) dt d't - \frac{1}{2}\dot{H}(dt d'\rho + d't d\rho) -$$
$$- \frac{1}{2}H' d\rho d'\rho + \frac{1}{2}(\rho^2 H)'(d\theta d'\theta + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi d'\varphi),$$

$$\tau_2(d,d') = -\rho^2 H d d'\theta - \frac{1}{2}\rho^2\dot{H}(dt d'\theta + d't d\theta) -$$
$$- \frac{1}{2}(\rho^2 H)'(d\rho d'\theta + d'\rho d\theta) + \rho^2 H \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\varphi d'\varphi,$$

$$\tau_3(d,d') = -\rho^2 H \operatorname{sen}^2\theta\, d d'\varphi - \frac{1}{2}\rho^2\dot{H}\operatorname{sen}^2\theta\,(dt d'\varphi + d't d\varphi) -$$
$$- \frac{1}{2}(\rho^2 H)'\operatorname{sen}^2\theta\,(d\rho d'\varphi + d'\rho d\varphi) - \rho^2 H \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,(d\theta d'\varphi + d'\theta d\varphi),$$

dove il punto denota derivazione rispetto a $t$ e l'apice (quando non sia applicato al simbolo $d'$ di differenziazione) denota derivazione rispetto a $\rho$.

Formiamoci ora quelle parti delle espressioni $\delta'\tau_j(d, d')$ $(j=0, ..., 3)$ che, come abbiamo visto al paragrafo precedente, sono sufficienti a darci tutti i simboli $R_{ij,kl}$. Poichè è a nostro arbitrio la scelta di quale delle $\delta'\tau_j(d, d')$ si vuole sviluppare più completamente delle altre, sceglieremo la più semplice: $\delta'\tau_2(d, d')$. Eseguendo le differenziazioni che in essa compaiono e sostituendo ai differenziali secondi le espressioni che si ottengono coll'eguagliare a zero le $\tau_j(d, d')$ $(j=0, 1, 2, 3)$ ora calcolate, si ha, posto $D = HV + W^2$,

[10]

$$\delta'\tau_2(d, d') = \left[\frac{1}{4}\rho^2\frac{\dot H^2}{H}\right] dt\,d't\,\delta'\theta + \left[-\frac{1}{2}\rho^2\left(\ddot H - \frac{\dot H^2}{H}\right) + \frac{1}{2D}\rho^2\dot H\left(\frac{1}{2}H\dot V - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}V'W + W\dot W\right) + \frac{1}{2D}(\rho^2 H)'\left(\frac{1}{2}VV' + \frac{1}{2}\dot V W - V\dot W\right)\right] dt\,d'\theta\,\delta't +$$

$$+ \left[\frac{\dot H}{4H}(\rho^2 H)'\right](d\rho\,d't + d'\rho\,dt)\,\delta'\theta + \left[-\frac{1}{2}(\rho^2\dot H)' + \frac{\dot H}{2H}(\rho^2 H)' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4D}\rho^2\dot H(HV' - \dot H W) + \frac{1}{4D}(\rho^2 H)'(\dot H V + V'W)\right](d\rho\,\delta't + \delta'\rho\,dt)\,d'\theta +$$

$$+ \left[\frac{1}{4\rho^2 H}(\rho^2 H)'^2\right] d\rho\,d'\rho\,\delta'\theta + \left[\frac{1}{2\rho^2 H}(\rho^2 H)'^2 - \frac{1}{2}(\rho^2 H)'' + \frac{1}{2D}\rho^2\dot H\left(\frac{1}{2}H\dot H - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}H'W + HW'\right) + \frac{1}{2D}(\rho^2 H)'\left(\frac{1}{2}H'V + \frac{1}{2}\dot H W + WW'\right)\right] d\rho\,d'\theta\,\delta'\rho +$$

$$+ [-\rho^2 H\,\mathrm{sen}^2\theta]\,d\varphi\,d'\varphi\,\delta'\theta + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{4D}\left[H(\rho^2\dot H)^2 + 2\rho^2\dot H(\rho^2 H)'W - \right.$$

$$\left. - V(\rho^2 H)'^2\right] d\varphi\,d'\theta\,\delta'\varphi + \ldots$$

dove i puntini finali denotano la parte trascurata simmetrica in $d'$, $\delta'$ (comprendente tra l'altro anche i differenziali terzi per la loro supposta invertibilità).

La [10] ci permette intanto di ricavare tutti i simboli $R_{ij,kl}$ che hanno almeno un indice uguale a 2. Precisamente, confrontandola con quella delle [5] che corrisponde a $j=2$, si deduce

$$R_{02,02}=\frac{1}{2}\rho^2\left(\ddot{H}-\frac{\dot{H}^2}{2H}\right)-\frac{1}{4D}\Big[\rho^2\dot{H}(H\dot{V}-V'W+2W\dot{W})+$$
$$+(\rho^2 H)'(VV'+\dot{V}W-2V\dot{W})\Big],$$

$$R_{02,12}=\frac{1}{2}(\rho^2\dot{H})'-\frac{\dot{H}}{4H}(\rho^2 H)'-\frac{1}{4D}\Big[\rho^2\dot{H}(HV'-\dot{H}W)+$$
$$+(\rho^2 H)'(\dot{H}V+V'W)\Big],$$

$$R_{12,12}=\frac{1}{2}(\rho^2 H)''-\frac{1}{4\rho^2 H}(\rho^2 H)'^2-\frac{1}{4D}\Big[\rho^2\dot{H}(H\dot{H}-H'W+2HW')+$$
$$+(\rho^2 H)'(H'V+\dot{H}W+2WW')\Big],$$

$$R_{32,32}=-\rho^2 H\,\mathrm{sen}^2\theta-\frac{\mathrm{sen}^2\theta}{4D}\Big[H(\rho^2\dot{H})^2+2\rho^2\dot{H}W(\rho^2 H)'-V(\rho^2 H)'^2\Big];$$

inoltre tutte le altre $R_{ij,kl}$ aventi almeno un indice eguale a 2 sono nulle oppure si possono portare a coincidere (a meno del segno) con uno dei precedenti quattro simboli mediante opportuni scambi degli indici.

Occorrerebbe ora sviluppare $\delta'\tau_3(d,d')$ trascurando, oltre la parte simmetrica in $d'$, $\delta'$, anche i termini contenenti differenziali primi operanti su $\theta$. Ma questo sviluppo non è necessario perchè un semplice confronto delle espressioni di $\tau_2(d,d')$ e $\tau_3(d,d')$ mostra che si giungerebbe così al secondo membro della [10] moltiplicato per $\mathrm{sen}^2\theta$ dopo aver omessi i termini in $d\varphi$ ed aver scambiato $\theta$ con $\varphi$. Ne segue

$$R_{03,03}=\mathrm{sen}^2\theta\, R_{02,02}\,,\quad R_{03,13}=\mathrm{sen}^2\theta\, R_{02,12}\,,\quad R_{13,13}=\mathrm{sen}^2\theta\, R_{12,12}$$

e che inoltre tutti gli altri simboli $R_{ij,kl}$ aventi almeno un indice eguale a 3 e nessuno eguale a 2 sono o nulli o riconducibili ai tre simboli ora scritti.

Ci restano ancora da calcolare i simboli $R_{ij,kl}$ con i soli indici 0 ed 1. A tal scopo sviluppiamo $\delta'\tau_1(d,d')$ trascurando, oltre la parte simmetrica in $d'$, $\delta'$, tutti i termini contenenti differenziali primi operanti su $\theta$ o su $\varphi$. Si ha:

[11]

$$\delta'\tau_1(d,d) = \left[\dot{W}' - \frac{1}{2}V'' + \frac{1}{2D}\left(\frac{1}{2}V' - \dot{W}\right)(HV' - \dot{H}W) + \frac{\dot{H}}{4D}(\dot{H}V + \right.$$

$$+ V'W) - \frac{W'}{D}\left(\frac{1}{2}H\dot{V} - \frac{1}{2}V'W + W\dot{W}\right) + \frac{H'}{D}\left(\frac{1}{2}VV' + \frac{1}{2}\dot{V}W - \right.$$

$$\left.\left. - V\dot{W}\right)\right] dt\,d't\,\delta'\rho + \left[-\frac{1}{2}\ddot{H} - \frac{\dot{W}}{2D}(HV' - \dot{H}W) + \frac{\dot{H}}{2D}(\dot{H}V + V'W) + \right.$$

$$\left. + \frac{\dot{H}}{2D}\left(\frac{1}{2}H\dot{V} - \frac{1}{2}V'W + W\dot{W}\right) + \frac{H'}{2D}\left(\frac{1}{2}VV' + \frac{1}{2}\dot{V}W - V\dot{W}\right)\right] dt\,d'\rho\,\delta' t + \ldots$$

dove i puntini finali denotano la parte trascurata.

Confrontando la [11] con quella delle [5] che corrisponde a $j = 1$, si deduce infine:

$$R_{01,01} = \frac{1}{2}(\ddot{H} - V'') + \dot{W}' + \frac{1}{4D}\Big[V'(HV' - \dot{H}W) - \dot{H}(\dot{H}V + V'W) -$$

$$- (\dot{H} + 2W')(H\dot{V} - V'W + 2W\dot{W}) + H'(VV' + \dot{V}W + 2V\dot{W})\Big],$$

gli altri simboli cogli indici 0 ed 1 essendo nulli o riconducibili a $R_{01,01}$.

*ACTA*
*Vol. III - N. 6*

# LA DENSITÀ DI ENERGIA IN ALCUNI PROBLEMI DI ACUSTICA (*)

GINO SACERDOTE

SVMMARIVM. — Densitas energiae sumitur tamquam parameter propagationis undae acusticae. Si undae sunt planae habetur propagatio undulatoria huius densitatis.

Praeterea A. loquitur de quibusdam applicationibus quibus quaedam supputationes, quae ad acusticam architectonicam inservire possunt, simpliciores fiunt.

1. — In molti problemi di acustica ambientale, particolarmente in quelli della distribuzione dell'energia sonora e dell'andamento della coda sonora in un determinato ambiente, si considera come parametro fondamentale la densità di energia.

Infatti l'espressione analitica di tali fenomeni in funzione della densità di energia assnme una forma molto più semplice che in funzione della pressione sonora.

Ci si può ora chiedere in quali casi, partendo dalle equazioni generali di propagazione sonora, si possa effettivamente parlare della densità di energia come di un parametro da considerare a sè.

La densità di energia E è definita da

$$E = \frac{1}{2}\left(\rho U^2 + \frac{P^2}{\rho c^2}\right)$$

ed è la somma delle energie cinetica e potenziale per unità di volume ($\rho$ densità del mezzo, $c$ velocità di propagazione del suono, U velocità di spostamento, P pressione sonora).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Luigi Lombardi, il 18 dicembre 1938.

La densità di energia è una quantità scalare e viene espressa in joule/m.$^3$, quantità omogenea con una pressione espressa in decabar. Questa pressione è quantità direttamente accessibile alla misura in quanto essa è proporzionale alla pressione di radiazione.

Oltre alla densità di energia bisogna considerare una seconda quantità di carattere energetico; l'intensità espressa dal prodotto $p \cdot u$ watt/m.$^2$. L'intensità è una quantità vettoriale.

In tutte le considerazioni che seguono si ammettono suoni di piccole intensità, e quindi si suppongono valide le equazioni lineari di propagazione sonora.

2. — Le equazioni generali di propagazione sono:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \operatorname{grad} p$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \rho c^2 \operatorname{div} u$$

Moltiplico per $u$ e per $p$ queste relazioni:

$$\rho\, u \frac{\partial u}{\partial t} = - u \operatorname{grad} p \qquad p \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} p \operatorname{grad} p$$

$$\frac{1}{\rho c^2} p \frac{\partial p}{\partial t} = - p \operatorname{div} u \qquad u \frac{\partial p}{\partial t} = - \rho c^2 u \operatorname{div} u$$

Sommando si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \frac{p^2}{\rho c^2}\right) = - \operatorname{div} u p \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial E}{\partial t} = - \operatorname{div} I$$

$$\frac{\partial p u}{\partial t} = - c^2 \left\{ \operatorname{grad} \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho c^2} + \rho u \operatorname{div} u \right.$$

$$= - c^2 \left\{ \operatorname{grad} \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\rho c^2} + \rho u^2\right) + \left[\rho u \operatorname{div} u - \rho \frac{1}{2} \operatorname{grad} u^2\right] \right\}$$

$$= - c^2 \operatorname{grad} E - c^2 \rho \left\{ u \operatorname{div} u - \frac{1}{2} \operatorname{grad} u^2 \right\}$$

Si perviene quindi al sistema:

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = - \operatorname{div} \mathrm{I}$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t} = - c^2 \operatorname{grad} \mathrm{E} - \rho c^2 \left( u \operatorname{div} u - \frac{1}{2} \operatorname{grad} u^{-2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathrm{I} = - \operatorname{div} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t} = + c^2 \Delta^2 \mathrm{E} + \rho c^2 \operatorname{div} \left[ u \operatorname{div} u - \frac{1}{2} \operatorname{grag} u^2 \right] .$$

Si ha una propagazione ondulatoria della E quando:

$$u \operatorname{div} u = \frac{1}{2} \operatorname{grad} u^2 .$$

In coordinate cartesiane, posto:

$$u = i\mathrm{X} + j\mathrm{Y} + k\mathrm{Z} ,$$

si ha:

$$\mathrm{X} \left( \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2)$$

e analoghe

$$\mathrm{X} \left( \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} \right) = \mathrm{Y} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \mathrm{Z} \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} \quad ;$$

Se il moto è irrotazionale: $\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} \quad \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}$

$$\mathrm{X} \left( \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z} \right) = \mathrm{Y} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} + \mathrm{Z} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z}$$

$$\mathrm{X} \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} - \mathrm{Y} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} = \mathrm{Z} \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} - \mathrm{X} \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z}$$

$$\mathrm{X}^2 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{X}} \right) + \mathrm{X}^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} \right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\mathrm{Z}}{\mathrm{X}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X}} \right) = 0$$

$$\operatorname{div} \frac{j\mathrm{X} + j\mathrm{Y} + k\mathrm{Z}}{\mathrm{X}} = 0 \qquad \operatorname{div} \left( \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{X}} \right) = 0$$

e analogamente

$$\operatorname{div}\frac{U}{Y}=0 \qquad \operatorname{div}\frac{U}{Z}=0 .$$

Queste tre equazioni ci danno la condizione di propagazione ondulatoria della densità di energia.

3. — Un caso particolarmente semplice ed interessante si ha quando la velocità è sempre parallela ad una medesima direzione. Allora la quantità $u \operatorname{div} \cdot u$ è uguale a $\frac{1}{2} \operatorname{grad} u^2$, quindi le relazioni fondamentali si riducono a:

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-\operatorname{div} I \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=c^2 \Delta^2 E$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}=-c^2 \operatorname{grad} E \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}=c^2 \Delta^2 I$$

Questo caso, particolarmente semplice, si può applicare senz'altro ai problemi di propagazione sonora per onde piane, che ne costituiscono un caso particolare.

Trattandosi di quantità variabili con la sola $x$, le equazioni di propagazione della densità di energia e della intensità si riducono a:

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{\partial I}{\partial x}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t}=-c^2 \frac{\partial E}{\partial x}$$

Si può quindi asserire che in linea di massima, nel caso di una propagazione per onde piane la densità di energia e la intensità si comportano come la pressione e la velocità sonora: cambiano naturalmente le condizioni ai limiti, di modo che differiscono poi i risultati definitivi nello studio di un determinato problema.

Sempre con riferimento al caso particolarmente semplice della propagazione per onde piane, si può notare il vantaggio che si ha adottando come parametro delle equazioni di propagazione la densità di energia, nello studio di fenomeni transitori: infatti, dal calcolo separato della $p$ e della $v$, per avere la E bisogna eseguire il quadrato di due serie, operazione che difficilmente ci può ricondurre a risultati semplici, mentre partendo dalle equazioni proposte, e ricorrendo all'analogia di noti problemi di propagazione, si perviene direttamente al risultato ricercato.

4. — Un primo problema particolarmente interessante è lo studio dell'andamento della coda sonora in un tubo senza perdite, chiuso da una resistenza acustica R.

In questo caso si ha subito una relazione fra la E e la I, all'estremità del tubo:

$$\mathrm{I} = \alpha c \mathrm{E}$$

ove $\alpha$ è il coefficiente di assorbimento del materiale di chiusura:

$$\alpha = \frac{2 \mathrm{R} \rho c}{\mathrm{R}^2 + (\rho c)^2}$$

Una seconda relazione si può avere dal fatto che all'origine del tubo la velocità è nota. Nel caso del fenomeno in esame tale velocità è sinoidale per tempi anteriori al tempo zero, è nulla per tempi posteriori.

Senza svolgere per ora tutto il calcolo, ed esaminarne i risultati, possiamo notare senz'altro che la densità di energia decresce col tempo secondo una legge esponenziale

$$l^{-\left[\log \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\right] \frac{ct}{l}} \qquad (l \text{ lunghezza del tubo})$$

È bene notare che la densità di energia, che si considera normalmente, è la media su una lunghezza d'onda della quantità che noi abbiamo adottato: quindi per riportarci a risultati noti si deve eseguire tale media con una opportuna integrazione.

Accenniamo ancora che si possono agevolmente trattare altri problemi quali l'isolamento in regime transitorio, la riverberazione in ambienti accoppiati e via dicendo.

*ACTA*
*Vol. III - N. 7*

# CONFERME SPERIMENTALI DELLA TEORIA DI COLONNETTI SU L'EQUILIBRIO ELASTO-PLASTICO (*)

*(Con una figura ed una tavola)*

E. GIACCHERO E F. LEVI

SVMMARIVM. — Auctores breviter exponunt quid ex experimentis peractis ad comprobandam theoriam Colonnetti invenerint.

Nella sua Nota *Sulla resistenza alla flessione in regime elasto-plastico* (1), il prof. COLONNETTI ha indicato quale doveva essere, secondo la sua nuova teoria dell'equilibrio elasto-plastico, la legge di interdipendenza fra curvatura e momento flettente. Le conclusioni a cui egli è giunto presentano però alcune nette discordanze da quelle a cui sono giunti altri autori che, in questi ultimi tempi, si sono occupati dello stesso argomento (2).

Ci è parso perciò che fosse del maggiore interesse istituire qualche esperienza intesa a chiarire l'effettivo andamento del fenomeno, e precisamente:

1) per quale valore del momento flettente abbiano inizio le prime deformazioni plastiche;

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Colonnetti, il 10 settembre 1938.

(1) G. COLONNETTI, *Sulla resistenza alla flessione in regime elasto-plastico,* Pontificia Academia Scientiarum, « Commentationes », anno III, vol. III, n. 1.

(2) W. PRAGER, *Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique,* « Memorial des Sciences Mathématiques », fasc. LXXXVII, 1937, Paris, Gauthier-Villars.

2) se tali deformazioni plastiche si manifestino progressivamente dai bordi della sezione verso l'asse neutro o se si determinino d'un tratto estese all'intera sezione;

3) quale sia il reale andamento del diagramma che traduce graficamente la relazione tra momento flettente e curvatura.

Le esperienze furono intraprese nel Laboratorio di Scienza delle Costruzioni del Politecnico di Torino, su macchina Amsler da 5 tonn. accuratamente tarata e si effettuarono sopra una serie di travi di ferro omogeneo a sezione quadrata. Da ogni trave furono ricavate due provette su cui, con l'aiuto della stessa macchina, si eseguirono le prove di elasticità e resistenza alla trazione semplice determinando, con l'apparecchio a specchi di Martens e con un estensimetro di Ewing, il modulo di elasticità normale, il carico di snervamento, l'ampiezza delle deformazioni permanenti sotto carico costante e l'andamento successivo della curva sforzi-allungamenti.

Nella prova a flessione semplice (ottenuta mediante l'applicazione di due carichi uguali e simmetricamente disposti rispetto agli appoggi) la curvatura fu ricavata:

*per piccoli valori del carico*, misurando con l'aiuto di apparecchi a specchi gli allungamenti e gli accorciamenti delle fibre estreme;

*per valori più grandi* dalla misura diretta della freccia di incurvamento di un tronco di trave semplicemente inflesso.

Le facce laterali delle travi erano state rese speculari onde potere rilevare immediatamente la comparsa delle linee di scorrimento.

I risultati sperimentali ottenuti sono riassunti dalla curva a tratto continuo della figura, la quale si riferisce ad una delle migliori fra le numerose esperienze da noi eseguite.

*Dal punto di vista qualitativo*, tali esperienze confermarono pienamente e concordemente le previsioni del Colonnetti. Infatti, dopo una prima fase elastica durante la quale la curvatura è funzione lineare del momento, non appena si raggiunga quel valore della sollecitazione per cui le tensioni (calcolate secondo la ordinaria teoria della elasticità) raggiungono ai bordi della sezione il limite di elasticità del materiale si nota sempre:

1) che la legge di interdipendenza fra curvatura e momento cessa di essere lineare (mentre il fenomeno cessa di essere elastico);

2) che la curvatura prende a crescere sempre più rapidamente mentre il momento tende verso quel valore limite che si può definire

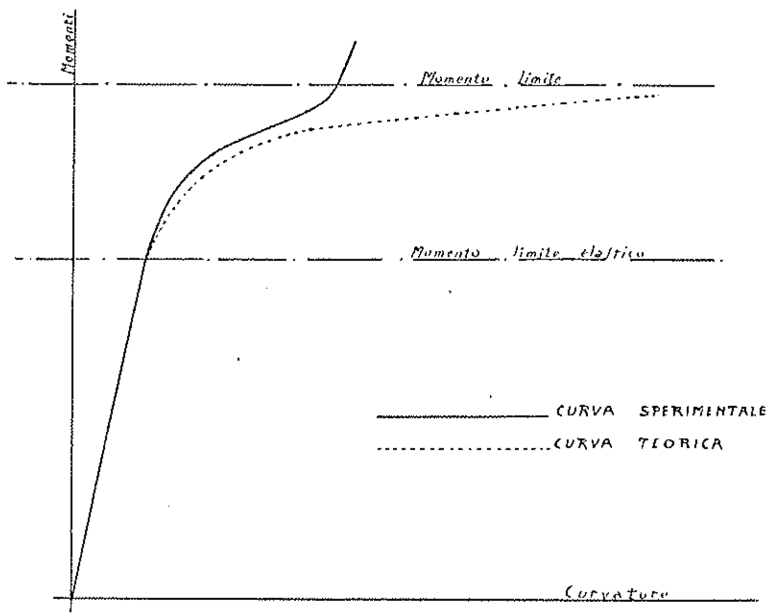



Fig. 1.

ammettendo che il limite di elasticità del materiale sia stato raggiunto in tutti i punti della sezione retta della trave;

3) che il diagramma che traduce graficamente la relazione fra momento flettente e curvatura si scosta dall'andamento teorico (che in figura è stato rappresentato dalla curva punteggiata) quando entra in gioco l'incrudimento del materiale ai bordi della sezione. A partire da questo istante la legge di deformazione prende un andamento completamente nuovo in cui il momento flettente accusa una netta ripresa

grazie alla quale non solo raggiunge, ma supera nettamente il valore limite precedentemente definito.

L'estensione di queste varie fasi del fenomeno è naturalmente influenzata dalle caratteristiche del materiale che costituisce la trave. Si osserva così che l'ampiezza della porzione di curva sperimentale che segue da vicino quella teorica è in relazione diretta con la lunghezza della fase di allungamento plastico sotto carico costante che il materiale presenta a trazione semplice. Quando questa sia molto breve il cambiamento della legge di deformazione nella prova a flessione assume, nella rappresentazione pratica, l'aspetto di un semplice flesso (ciò può anche avvenire quando l'esperienza venga condotta rapidamente). In ogni caso però il cambiamento di legge è molto netto e, fatto di notevole importanza, esso avviene sempre per un valore del momento inferiore al valore limite.

*Dal punto di vista quantitativo*, le esperienze che stiamo descrivendo diedero luogo ad alcuni altri rilievi degni di venire messi bene in evidenza.

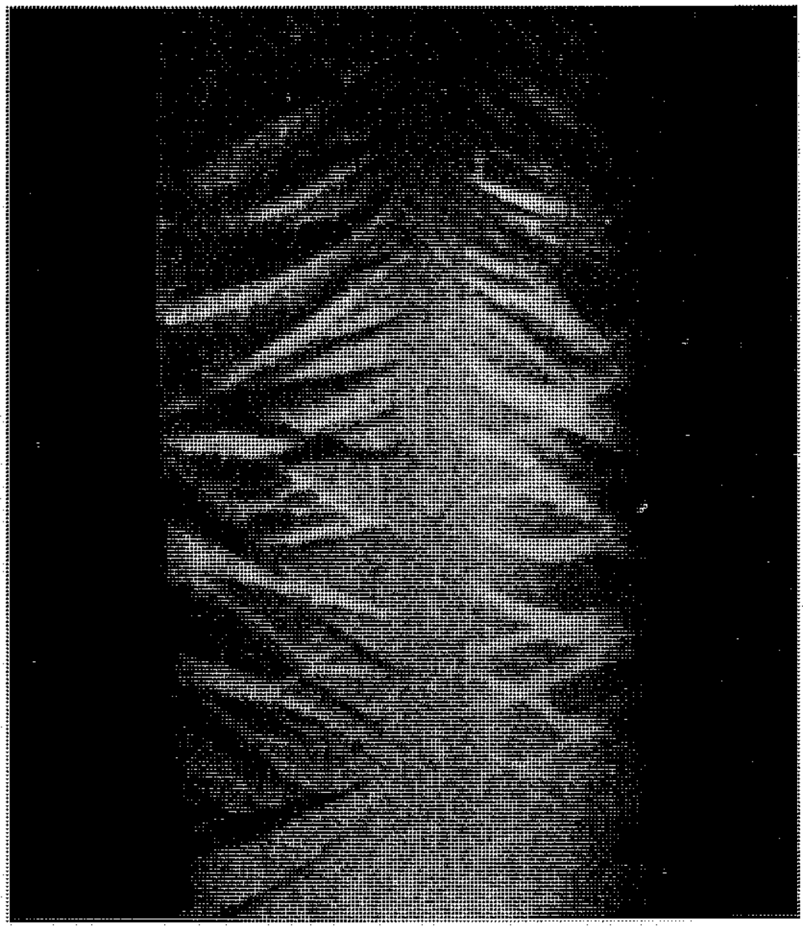
Si nota così, esaminando la figura dove la curva teorica e quella sperimentale sono state affiancate, che quest'ultima si mantiene costantemente al di sopra dell'altra. A questo si aggiunga che l'inizio della ripresa, nella prova a flessione, sembra precedere l'istante in cui nelle fibre estreme detta ripresa dovrebbe avere inizio tenuto conto dei risultati della prova a trazione semplice.

Si viene così a mettere in luce l'interesse che potrebbero avere ulteriori sistematiche esperienze che chiariscano le ragioni di questi due fatti e che stabiliscano con precisione l'approssimazione con cui, dal punto di vista quantitativo, la teoria del COLONNETTI interpreta il fenomeno fisico.

Sin d'ora però è da considerarsi come ben assodato che, contrariamente a quanto, in base alle esperienze di THUM e WUNDERLICH, il PRAGER credeva di potere affermare nella suaccennata Nota [1], il fe-

---

[1] Nella sua Nota dianzi citata (a pag. 54) il PRAGER si esprime testualmente così: « Les fibres de la barre placées à la plus grande distance de la couche neutre atteignent les premières l'effort qui permet l'entrée dans la région pla-



nomeno plastico nell'esperienza di flessione ha sempre inizio ben prima che il momento raggiunga il valore limite.

A questo proposito va ricordato che il PRAGER, e con lui gli sperimentatori cui egli si riferisce, credeva di potere individuare la prima apparizione di deformazioni plastiche con la comparsa sulle facce laterali della trave delle prime linee di Lüders. Ora, nelle esperienze che formano oggetto della presente Nota, si notò sempre che, come già il COLONNETTI prevedeva, dette linee non compaiono che quando il fenomeno plastico abbia già assunto una certa importanza.

Non sembra perciò assolutamente ammissibile scegliere come criterio dell'inizio della fase elasto-plastica l'apparizione delle linee di Lüders. D'altronde non è neppure vero ciò che riteneva provato il PRAGER, che cioè questa comparsa coincida con il raggiungimento del momento limite, poichè invece in tutte le nostre esperienze l'apparizione delle prime linee, pure verificandosi in ritardo rispetto alla comparsa delle prime deformazioni permanenti, precedette sempre sensibilmente il raggiungimento del momento limite.

Il modo stesso con cui le prime linee si presentano (quale è raffigurato nella fotografia riprodotta) ci ha permesso di constatare che, conformemente alla teoria del COLONNETTI, le deformazioni plastiche si manifestano dapprima soltanto in prossimità dei bordi (e sopratutto del bordo teso) e solo in seguito si propagano avvicinandosi progressivamente all'asse neutro.

stique. Mais comme cette entrée est accompagnée d'un accroissement discontinu de dilatation, auquel les fibres voisines qui sont encore sous le régime élastique ne peuvent s'adapter, les fibres extérieures n'entrent pas encore dans la région plastique mais dépassent élastiquement l'effort d'écoulement. Ce n'est qu'après que le moment de flexion est devenu suffisamment grand pour que toute une couche transversale de la barre puisse entrer en état plastique, que le passage à cet état se produit subitement pour les élements de cette couche. Les premières déformations plastiques, indiquées par les lignes dites de Lüders ou de Hartmann, ne peuvent donc se produire avant que le moment de flexion n'ait atteint la valeur qu'on peut calculer en attribuant à tous les éléments d'une section droite les efforts dont les valeurs absolues sont égales à l'effort de l'écoulement».

*ACTA*
*Vol. III - N. 8*

# CONTRIBUTO ALLA TEORIA DELLE TRAVI INFLESSE IN STATO DI COAZIONE (*)

*(Con una figura)*

GUSTAVO COLONNETTI
*Accademico Pontificio*

SVMMARIVM. — Primum exponitur methodus computandi omnino generaliter statum coactionis in trabibus ex coagmento armato, quarum fultura antea arrecta sit.

È noto che la nuova tecnica del cemento armato tende alla eliminazione degli sforzi di trazione nel calcestruzzo.

Ora, nel caso delle travi semplicemente inflesse, questa eliminazione si può evidentemente ottenere nel modo più semplice sottoponendo il calcestruzzo ad una conveniente compressione assiale mediante la messa in tensione preventiva delle armature longitudinali (1).

Ma se il momento flettente è accompagnato da uno sforzo di taglio, la semplice compressione assiale non è più sufficiente; essa determina bensì una riduzione, spesso cospicua, nella intensità degli sforzi di trazione, ma non li elimina.

La eliminazione, nel caso della trave sollecitata a flessione e taglio, si ottiene soltanto mediante l'introduzione di stati di coazione più complessi, quali si possono realizzare mediante la messa in tensione preventiva di un duplice sistema di armature (longitudinali e trasversali).

(*) Nota presentata il 10 agosto 1939.

(1) G. COLONNETTI, *Le rôle des états de coaction élastique dans la technique des constructions*. Conferenza tenuta alla Sorbona il 9 giugno 1939, e pubblicata a cura del « Centro del Consiglio Nazionale delle Ricerche per gli studi sui materiali da costruzione » (R. Politecnico di Torino).

Le brevi considerazioni che seguono hanno per iscopo di precisare — nei limiti e coi metodi della teoria approssimata nelle travi inflesse — le condizioni a cui questi stati di coazione debbono soddisfare.

Consideriamo, nell'interno di una trave, un elemento di volume e precisamente un prismetto triangolare infinitesimo, limitato:

1) dalla sezione trasversale di quota $z$;

2) dalla sezione longitudinale che interseca la prima in corrispondenza della corda di quota $y$;

3) da una sezione obliqua qualunque, parallela alla corda e vicinissima ad essa.

Dette $dy$, $dz$, $ds$ le larghezze delle tre faccie del prismetto, ed assunta l'area della prima di esse come area unitaria, noi converremo di caratterizzare le tensioni interne relative a ciascuna faccia colle loro componenti normali e tangenziali (che denoteremo al solito colle lettere $\sigma$ e $\tau$) ammettendo che queste ultime siano ovunque dirette normalmente alla corda ed uniformemente distribuite lungo di essa (1).

In queste condizioni il problema dell'equilibrio del prismetto si riduce notoriamente ad un problema piano, e la sua soluzione dipende dalla chiusura della poligonale costituita:

1) dai due vettori rappresentanti (in grandezza direzione e senso) la tensione normale $\sigma_z$ e la tensione tangenziale $\tau_{zy}$ operanti sulla faccia trasversale del prismetto;

2) dai due vettori rappresentanti (in grandezza direzione e senso) la tensione normale $\sigma_y \dfrac{dz}{dy}$ e la tensione tangenziale $\tau_{yz} \dfrac{dz}{dy}$ operanti sulla faccia longitudinale;

3) dai due vettori rappresentanti (in grandezza direzione e senso) la tensione normale $\sigma_n \dfrac{ds}{dy}$ e la tensione tangenziale $\tau_{ns} \dfrac{ds}{dy}$ operanti sulla faccia obliqua.

Ora, quando son dati il momento flettente e lo sforzo di taglio nella sezione trasversale della trave, nonchè le caratteristiche dello stato di coazione a cui questa è soggetta, le $\sigma_z$, $\sigma_y$, $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ sono da

(1) Circa la portata di queste ipotesi, vedi: G. Colonnetti, *La statica delle costruzioni*, vol. I, Torino, «U.T.E.T.», 1928, pag. 192 ss.

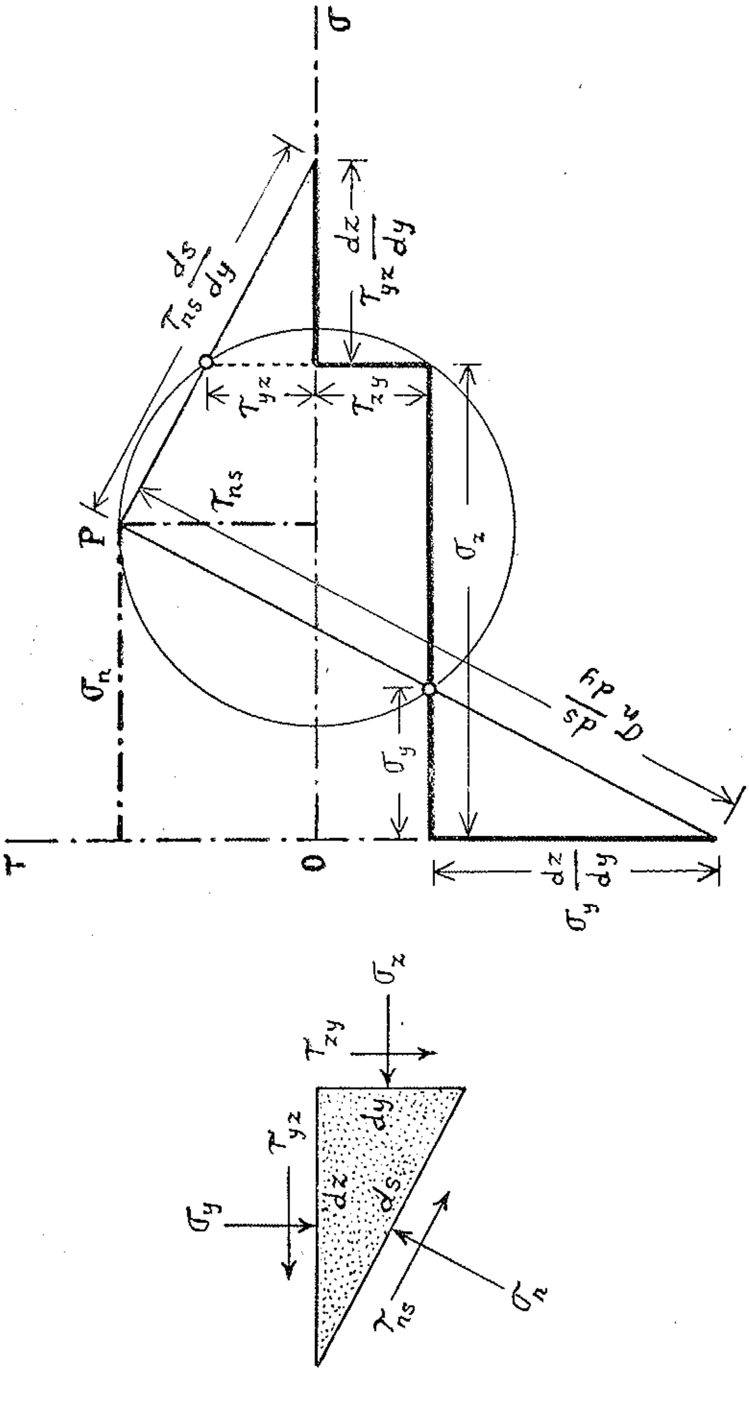


FIG. 1.

considerarsi come note. La poligonale delle forze riesce per conseguenza, in ciascun caso concreto, completamente determinata.

Inoltre, al variare della giacitura della sezione obliqua, detta poligonale presenta due punti fissi — quelli contrassegnati in figura con due cerchietti — ed un vertice mobile P che descrive la circonferenza avente per diametro la congiungente di quei due punti fissi.

Accade poi ancora che i valori unitari della tensione normale $\sigma_n$ e della tensione tangenziale $\tau_{ns}$ operanti sulla faccia obliqua, sono misurati dalle coordinate di questo punto P rispetto a due assi ortogonali fissi $\sigma$ e $\tau$.

Così stando le cose, la condizione necessaria e sufficiente perchè $\sigma_n$ si mantenga sempre dello stesso segno è semplicemente questa: che la circonferenza luogo dei punti P stia tutta da una parte dell'asse delle $\tau$.

E si traduce analiticamente così:

$$\frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_y) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^{\,2}}$$

o, riducendo:

$$\sigma_z \sigma_y \geqslant \tau_{zy}^{\,2}$$

Questa relazione definisce la grandezza della compressione trasversale $\sigma_y$ che si deve introdurre (insieme alla compressione longitudinale $\sigma_z$) se si vuole ottenere la eliminazione degli sforzi di trazione nel calcestruzzo.

Essa mostra come, a parità di sforzo di taglio, tale compressione trasversale possa essere tanto minore quanto maggiore è la compressione longitudinale impressa in vista del momento flettente.

Come caso particolare: nelle sezioni di momento nullo — là dove cioè sussiste il solo sforzo di taglio — le più favorevoli condizioni si potrebbero realizzare adottando due compressioni $\sigma_z$ e $\sigma_y$ di grandezza eguale alla tensione tangenziale massima $\tau_{zy}$.

Così si determina, su gli elementi inclinati a 45°, una compressione massima di grandezza doppia. Ciò vuol dire che si potrebbe, in queste condizioni, sollecitare il calcestruzzo ad una tensione tangenziale pari alla metà del carico di sicurezza alla compressione (1).

E questa è una conferma delle cospicue economie di materiale che la nuova tecnica è suscettibile di realizzare.

(1) E. Freyssinet, *Une révolution dans les techniques du béton*, Paris, Eyrolles éd., 1939, pag. 69.

# SULL'ENERGIA INTERNA DELLA TERRA (*)

FRANCESCO SBRANA

SVMMARIVM. — Theoricam quaedam computatio elasto-plastica, ab auctore abhinc a. 1922 peracta, magni momenti esse ostenditur. Nam, si geoidi, iuxta nostrae aetatis certiores investigationes, tribuatur viscositatis coefficiens ordinis $10^{20}$ (C. G. S.), robur quod, durante temporis unitate, nucleus terrestris, ob suam plasticitatem, in suo motu rototranslativo circam solem, amittit, ad 1000 calorias circiter in die pertingit, in singulis $cm^2$ superficiei; quod bene congruit cum supputatione aliis rationibus peracta.

1. — Il desiderio di pervenire ad un apprezzamento della quantità di calore che si può produrre giornalmente per l'attrito interno entro il nucleo terrestre, mi condusse tempo addietro a considerare, secondo uno schema suggeritomi dai professori LEVI-CIVITA e LO SURDO, un solido imperfettamente elastico, paragonabile con la Terra, animato di moto rotatorio uniforme intorno ad un suo diametro, soggetto all'attrazione di un corpo lontano, assimilabile al sole (ed a tensioni superficiali nulle). Mi risultò che la perdita di energia, corrispondente all'unità di tempo, sarebbe data in cifra tonda da $29555\,\eta$, essendo $\eta$ il coefficiente di viscosità del nucleo, misurato nel sistema C. G. S. (1).

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio T. Levi-Civita il 12 luglio 1939.

(1) Cfr. F. SBRANA, *Sopra un problema di statica elastica suggerito dal raffreddamento della Terra*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXXII, serie 5ª, 2° sem., pag. 16; *Sul raffreddamento terrestre*, ibid., pag. 206; *Sulla dissipazione di energia nel centro della Terra*, ibid., vol. XXXIII, serie 5ª, 2° sem., pag. 553.

Non mi fu possibile ottenere allora un apprezzamento numerico degno di essere preso in considerazione, non avendo rintracciato alcuna indicazione sull'ordine di grandezza di $\eta$.

Sono lieto ora di rilevare che una tale indicazione è stata conseguita posteriormente, in seguito ai recenti studi di vari autori, fondati su diversi fenomeni, che non hanno alcuna relazione con lo sviluppo di calore per attrito interno. Il risultato che essenzialmente ci interessa è dovuto ad H. JEFFREYS, che dallo spostamento dei poli ha ricavato per il nucleo terrestre un coefficiente di viscosità dell'ordine di $10^{20}$ (C. G. S.) (1). In base a questo risultato, la perdita giornaliera di energia corrisponderebbe a $29555 \cdot 86164 \cdot 10^{20}$ erg., e quindi a uno sviluppo di calore pari a $6 \cdot 10^{21}$ calorie al giorno. Dividendo per la superficie terrestre espressa in cm.$^2$, e cioè per $5{,}1 \cdot 10^{18}$ si ottengono più di 1000 calorie per cm.$^2$ al giorno. Non è forse superfluo osservare che dello stesso ordine di grandezza è l'energia perduta dalla superficie della Terra (espressa con le stesse unità) (2).

2. — Il valore elevatissimo di $\eta$ stabilito da H. JEFFREYS supera di gran lunga quello che compete alle sostanze solide sperimentate sulla superficie della Terra. Ciò potrebbe apparire in contradizione con quanto abbiamo ammesso nelle Note citate, dove abbiamo ritenuto che il nucleo terrestre si trovi sostanzialmente in uno stato intermedio tra il fluido e il solido (3). A questa obiezione crediamo di poter ri-

(1) Cfr. H. JEFFREYS, Month. Not., R. A. S., London, Geophys. Suppl., I, dicembre 1926, pag. 412. Questo lavoro mi è stato segnalato dal prof. P. GUARESCHI. Cfr. anche MÜLLER-POUILLETS, *Lehrbuch der Physik*, Fünfter Bd., 1e Hälfte, *Physik der Erde*, (1928), pag. 808 ss.

(2) Cfr. per esempio F. VERCELLI, *L'aria*, Torino, (1933), pag. 118.

(3) Ricordiamo che secondo il POINCARÉ se si considera una sfera completamente fluida, incomprimibile e viscosa, il coefficiente di viscosità dev'essere molto più elevato di quello che compete ai fluidi osservati sulla superficie terrestre, se si vuole che gli spostamenti superficiaii siano dell'ordine di grandezza di quelli osservati. Cfr. H. POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, t. III, pag. 444. D'altra parte è noto che per una sfera solida perfettamente elastica l'energia interna si annullerebbe periodicamente ad ogni ciclo.

spondere con le seguenti semplici parole del compianto prof. LUIGI DE MARCHI: « In natura non esiste la rigidità nè la fluidità perfetta, e sotto alte pressioni e temperature una distinzione netta fra solido e fluido non si può stabilire. Noi dobbiamo rappresentarci adunque la Terra nel suo complesso in questo stato fisico indeterminato tra fluido e solido... » (1).

(1) Cfr. il noto *Trattato di geografia fisica* (Milano, Vallardi), pag. 28.

# *EMARGINULAE* NUOVE DEL MEDITERRANEO (*)

*(Con una tavola fuori testo)*

G. S. COEN

SVMMARIVM. — Emarginulae maris Mediterranei tres formae describuntur, quas, utpote diversas ab aliis ex hoc mari iam notis, Auctor censet novarum specierum esse exempla.

Fra molte forme di conchiglie raccolte e datemi dal mio chiarissimo amico, prof. OTTORINO DE FIORE, parecchie ne trovai di grande interesse, ed in parte del tutto nuove, che mi fu dato così di studiare e vado descrivendo (1).

Notevoli sono ben tre nuove specie di *Emarginula*, molto diverse da quelle ben note dei nostri mari, con le quali non è possibile confonderle.

## I. – EMARGINULA CREBRISCULPTA n. sp.

*(Tav. I, fig. 1)*

Conchiglia conica estremamente depressa; contorno del peristoma ovale, più arrotondato ed allargato posteriormente, più stretto invece nella parte anteriore, dove lo intacca la fessura, ampia e breve, la cui profondità o lunghezza non oltrepassa $^1/_5$ del maggior diametro L dell'intera conchiglia.

L'apice è posto un poco posteriormente, non è sporgente nè adunco, e si affaccia all'indietro sopra una depressione ben visibile.

L'orlo è crenulato in corrispondenza delle costole radiali costituenti la scultura esterna: queste costole sono molto pronunziate e

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi il 2 febbraio 1939.

(1) COEN, *Sul solco spirale soprasuturale nella* Gibbula magus *Linn. e del genere* Forskalia *H. e A. Adams*, Istituto Geo-Paleontologico R. Università di Catania, n. 5, 1937; *Di una nuova forma mediterranea di* Galliostoma, « Annali Museo Civico di Storia Naturale di Genova », vol. LIX, dicembre 1936.

numerose, precisamente 54, piuttosto irregolarmente alternate in dimensione; esse sono intersecate da lamelle concentriche acute e sporgenti, le quali le sormontano in cresta e le uniscono negli interstizii, che ne risultano profondamente clatrati.

Il fondo della fessura non è unito all'apice da una costola, bensì da uno degli interstizii o solchi intercostulari, largo e profondo, che le lamelle, relitti dei fondi previi della fessura, traversano fino alla cima.

La faccia interna presenta depressioni radiali, lievi per lo spessore rilevante della conchiglia, rispondenti a ciascuna costola esterna e raggiungenti il peristoma in crenature irregolarmente dicotome. Gli orli laterali della fessura sono callosi, e dal fondo di essa si stacca una costola pure callosa, solcata nel mezzo, che va fino all'apice e corrisponde al solco esterno mediano.

Nell'esemplare in esame, la fessura non è mediana, come non è simmetrico il peristoma che (visto dall'esterno) è più convesso e sporgente a sinistra che a destra.

L'impressione muscolare è normale, a ferro di cavallo coll'apertura in avanti, e poco appariscente.

Colore esterno bianco-giallognolo uniforme; interno bianco splendente, subiridiscente.

Dimensioni: L = mm. 25; l = mm. 18; h = mm. 6.

*Osservazioni.* – Questa specie è notevole per le dimensioni tanto superiori a quelle delle altre specie nostrali; confrontandola con la *E. Huzardi* Payraudeau, che è la più piatta, vediamo che la lunghezza è circa doppia [1] e sopratutto le proporzioni sono ben diverse, per cui è assai differente la forma, l'habitus della conchiglia: infatti con la lunghezza doppia, abbiamo la larghezza più che doppia, mentre l'altezza non arriva che ad $1\,{}^1/_2$ volte quella della *Huzardi.*

La scultura si scosta pure molto da quella delle altre nostre specie del genere, mostrando piuttosto grande analogia con quelle delle *Diodora*, e specialmente con la *Diodora graeca* Linneo nella sua varietà più piatta ed aspra.

Habitat: Golfo di Napoli (De Fiore).

(1) Vedi Bucquoy, Dautzenberg e Dollfus, *Mollusques marins du Roussillon,* Paris, Baillière, 1882-1886, vol. I, pag. 450, per le dimensioni massime della *E. Huzardi*: L = mm. 13, l = mm. 8, h = mm. 4.

## II. – Emarginula cristata n. sp.

*(Tav. I, fig. 2)*

Conchiglia conica allungata convessa capuliforme; peristoma regolarmente ovale, un poco più stretto nella parte anteriore, dove la fessura mediana si addentra poco profondamente verso il centro: la larghezza di essa non supera mm. 0,5 su una totale lunghezza L della conchiglia di mm. 6, e così appena $^1/_{12}$.

L'apice, spirale, molto sporgente, carenato, è piuttosto posteriore, e, essendo adunco, raggiunge quasi, in proiezione verticale, la sporgenza dell'orlo posteriore.

Il peristoma è profondamente crenato in corrispondenza delle costole radiali, le quali sono molto pronunziate e sporgenti, non eguali, ma non regolarmente alternate, in numero di 16 da ogni lato, più una posteriore mediana minore, ed altra anteriore, grossa e forte, che prolunga fino all'apice il fondo della fessura, costituendo così una vera carena.

Fra le costole si notano solchi con scultura lamellare, la cui altezza raggiunge, senza superarlo, il sommo delle costole, sulle quali tuttavia si osservano noduli in corrispondenza solo di una lamella ogni tre o quattro: questi noduli sono particolarmente acuti e sporgenti e, sulla carena anteriore, raggiungono tale sporgenza e acutezza da dare alla carena stessa l'aspetto « crestato » da cui trae origine il nome specifico qui proposto.

La superficie interna è vitrea, lucente, solcata radialmente in corrispondenza delle costole esterne, e festonata profondamente al peristoma: la trasparenza è tale che dall'interno si vedono perfettamente le lamelle delle intercoste esterne.

L'impressione muscolare è la consueta, pochissimo apparente.

Il colore sia esterno che interno, nell'intero spessore della conchiglia, è quello dell'ambra bruna.

Dimensioni: L = mm. 6; l = mm. 3,5; h = mm. 3.

*Osservazioni.* – Confrontata la specie con la *E. elongata* O. G. Costa, che per la forma maggiormente le si avvicina, la si trova molto più piccola: ma, a parte la statura che può esser diversa per età o per sviluppo, le proporzioni sono differenti: L è infatti 6 contro 10 della *elongata*, mentre l è 3,5 contro 7, cioè $^7/_{12}$ invece di $^7/_{10}$; h è 3, cioè

$^1/_2$ di L invece di $^4/_{10}$: la forma generale risulta così più compressa lateralmente e più elevata (1).

Habitat: Golfo di Napoli (De Fiore).

### III. – Emarginula octaviana n. sp.

*(Tav. I, fig. 3)*

Conchiglia conica capuliforme allungata, compressa lateralmente; contorno a lati paralleli subretti, raccordati alle estremità con due semicerchi; fessura anteriore mediana stretta profonda che, lunga mm. 2, raggiunge $^1/_4$ della totale lunghezza (L = mm. 8).

Apice spirale, molto sporgente, non carenato, adunco, situato ai $^1/_5$ della lunghezza totale verso l'orlo posteriore, dal quale, in proiezione verticale, dista circa mm. 1 $^1/_2$.

L'orlo del peristoma è crenato, anzi addirittura festonato dalle costole, che sono rade, arrotondate e molto sporgenti, 12 da ogni lato oltre alla mediana posteriore ed alla mediana anteriore che unisce all'apice il fondo della fessura. Gli intervalli fra le costole sono clatrati da grosse lamelle trasversali, fra ciascun paio delle quali regnano 2 o 3 lamelle minori meno sporgenti.

Le lamelle maggiori si incrociano colle costole radiali, la cui sporgenza eguagliano alternatamente ogni 2 costole; su queste danno origine all'incrocio ad un tubercolo perliforme elevato, formando così una scultura di grande originalità ed eleganza, e che pare (non è però) regolare.

La faccia interna riproduce, sia per solchi, sia per la trasparenza estrema della conchiglia, la scultura esterna in modo perfetto: è lucidissima, candida, vitrea.

Dimensioni: L = mm. 8; l = mm. 5; h = mm. 2,75.

*Osservazioni.* – La conchiglia, a parte l'ornamentazione del tutto diversa, si differenzia dalla *E. elongata* per essere più lunga, più stretta e meno alta (1).

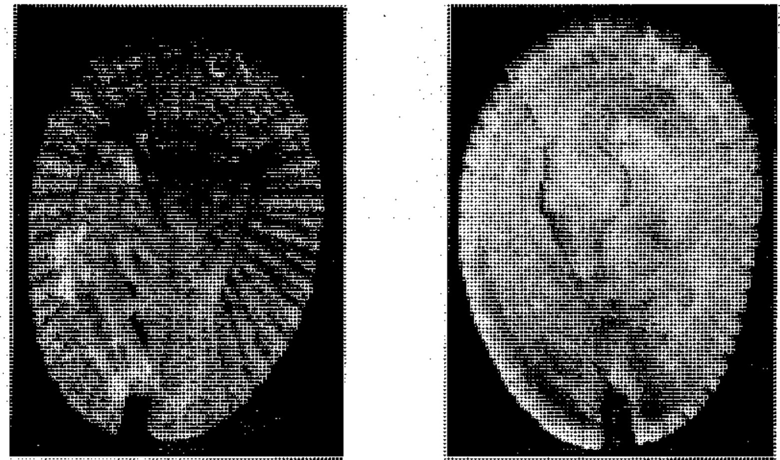
Dedico la specie al Barone prof. De Fiore, dandole il nome del suo adorato unico figliuolo Ottaviano.

Habitat: Tirreno, (Napoli?, Sicilia?) De Fiore.

---

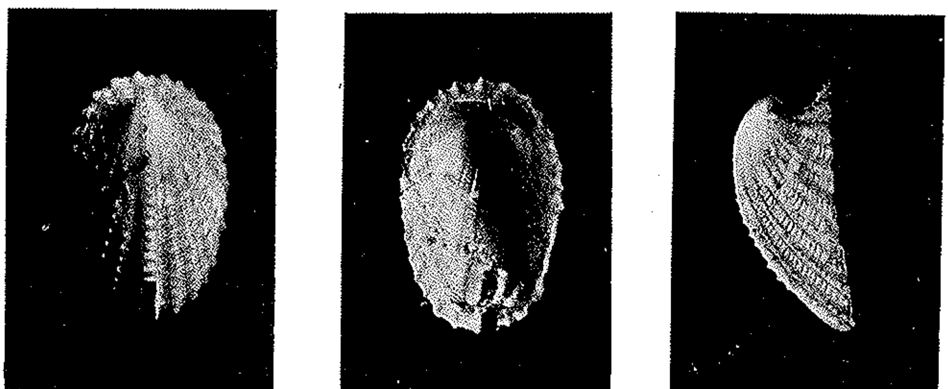
(1) Vedi Bucquoy, Dautzenberg e Dollfus, *op. cit.*; per la *E. elongata* Costa, pag. 452: L = mm. 10, l = mm. 7, h = mm. 4.

(1) Per la stessa specie vedi Bucquoy, Dautzenberg e Dollfus, *op. cit.*



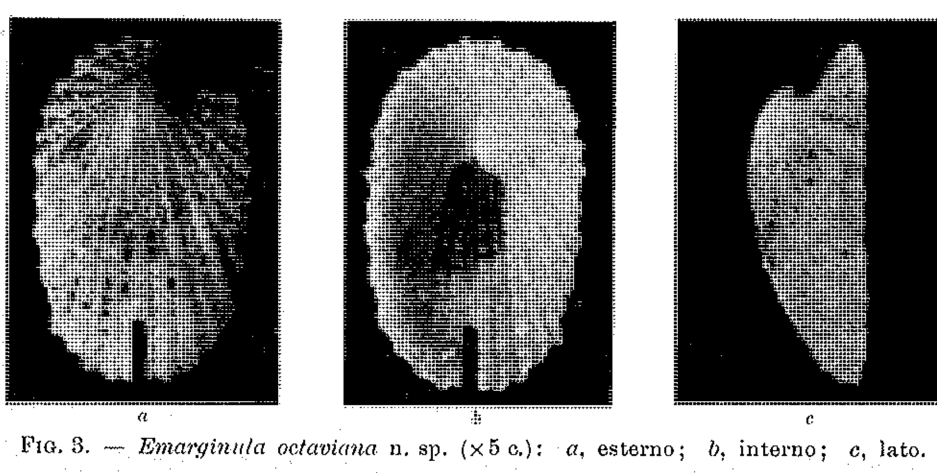
a b

FIG. 1. — *Emarginula crebrisculpta* n. sp. (×2 c.): *a*, esterno; *b*, interno.



a b c

FIG. 2. — *Emarginula cristata* n. sp. (×5 c.): *a*, esterno; *b*, interno; *c*, lato.



a b c

FIG. 3. — *Emarginula octaviana* n. sp. (×5 c.): *a*, esterno; *b*, interno; *c*, lato.

*ACTA*
*Vol. III - N. 11*

# SOPRA ALCUNE RICERCHE RIGUARDANTI IL CALCOLO DEGLI OPERATORI FUNZIONALI (*)

FRANCESCO SBRANA

SVMMARIVM. — Nonnulla animadvertuntur de quibusdam scriptis ab Auctore ante paucos annos editis, circa calculum operatorium Heaviside-Giorgi, et circa huius calculi generalem extensionem.

Quale contributo alle relazioni sul calcolo operatorio funzionale, che formano in questo tempo oggetto di discussione, ritengo utile dedicare qualche osservazione intorno ad alcuni lavori che ho pubblicato qualche anno fa sul calcolo operatorio di HEAVISIDE-GIORGI, e ad una sua generalizzazione.

1. – Procedendo in ordine cronologico, mi occuperò dapprima di una mia Memoria, di carattere analitico, del 1931 (1). Di questa Memoria è stata data dal FANTAPPIÈ (2) una recensione sostanzialmente sfavorevole, in cui è detto che ho risolto in modo puramente formale alcune equazioni integrali di VOLTERRA, senza dare la verifica delle soluzioni, nè alcuna precisazione dei campi funzionali in cui le espressioni simboliche hanno significato. Ora io non trovo giustificati questi

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi, il 31 luglio 1939.
(1) F. SBRANA, *Sulla applicazione del calcolo degli operatori funzionali alla risoluzione di equazioni integrali del Volterra*, « Mem. della R. Accad. dei Lincei », serie VI, vol. V, fasc. 1, 1931, pag. 1-23.
(2) « Zentralblatt für Mathematik », Bd. 5, pag. 164.

appunti, per le ragioni che seguono. Anzitutto mi sono valso costantemente del procedimento del GIORGI, assicurandomi della validità dei simboli adoperati e delle formule ottenute, nei casi in cui sono pervenuto alla effettiva risoluzione delle equazioni esaminate. Quanto alle verifiche, il detto procedimento non le richiede, quando sia correttamente applicato, come mi lusingo di aver fatto io. D'altra parte, per quelle equazioni che erano già state risolute per altra via da TEDONE e VOLTERRA, e di cui ritrovo la soluzione col metodo degli operatori funzionali, la verifica era doppiamente superflua, per il fatto che ottengo gli stessi risultati stabiliti anteriormente da quegli Autori.

Nella Memoria citata mi ero prefisso anche un altro scopo, di cui il FANTAPPIÈ non tiene alcun conto. Negli ultimi anni della sua notevole attività scientifica il prof. TEDONE si era preoccupato di ricercare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'equazione integrale di VOLTERRA col nucleo funzione della differenza delle due variabili sia risolubile *con procedimento finito*, e cioè con un numero finito di integrazioni e derivazioni. Egli indicò diverse classi di equazioni risolubili in questo senso, e tra di esse una gli si presentò con caratteri eccezionali, e fu ribelle ad ogni suo tentativo. Nel § 3 (pag. 7 ss.) della mia Memoria io risolvo la detta equazione, col metodo del GIORGI, e nella forma desiderata dal prof. TEDONE. Una nuova dimostrazione di questo risultato mi riserbo di pubblicare prossimamente, essendone già da tempo in possesso.

2. – Una seconda Memoria (1) mi fu ispirata dalla lettura di una Nota del prof. SERINI (2). Il problema trattato si può ricondurre allo studio delle vibrazioni di una corda elastica di lunghezza finita in un mezzo resistente, con date condizioni iniziali, e agli estremi. Di questo problema ritengo essere stato il primo a dare la soluzione per mezzo

(1) F. SBRANA, *Sui problemi di propagazione in una dimensione*, « Mem. della R. Accad. dei Lincei », serie 6ª, vol. V, fasc. 6, 1933, pag. 221-251.

(2) R. SERINI, « Rend. della R. Accad. dei Lincei », serie 6ª, vol. XIII, fasc. 5, 1° sem., 1931, pag. 354-358.

di integrali definiti [1]. Il SERINI riprese la questione in un caso particolare, ed io tornai sull'argomento con la Memoria ultimamente citata, risolvendo più in generale il problema delle vibrazioni di una corda semifinita, o finita. Del problema trattato dal SERINI davo poi una soluzione apparentemente diversa, che desidero ora identificare con quella stessa del SERINI.

Si tratta in sostanza di determinare, per $t$ qualunque, ed $x$ compreso tra zero ed $l$, la funzione $u(x,t)$ definita dalla relazione:

$$[1] \qquad u(x,t) = e^{-bt} \frac{e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2-b^2}} - e^{-\frac{2l-x}{a}\sqrt{\Delta^2-b^2}}}{1-e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2-b^2}}} e^{bt} f(t) ,$$

in cui $\Delta = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $a$ e $b$ sono due costanti positive, $f(t)$ una funzione per cui si suppongono lecite le operazioni indicate, che si riduce a zero per $t<0$; del secondo membro si deve scegliere la *valutazione fondamentale* (o retrospettiva). Posto per brevità $q$ in luogo di $\sqrt{\Delta^2-b^2}$, dalla [1] si ha:

$$[2] \qquad u(x,t) = e^{-bt}\left(e^{-\frac{x}{a}q} - e^{-\frac{2l-x}{a}q} + e^{-\frac{2l+x}{a}q} - e^{-\frac{4l-x}{a}q} + \ldots\right) e^{bt} f(t) .$$

Per ottenere la valutazione richiesta occorre servirsi della seguente, stabilita dal GIORGI, nell'ipotesi che $\mathrm{F}(t)$ si annulli per $t<0$:

$$[3] \qquad \begin{aligned} & e^{-\frac{x}{a}q}\,\mathrm{F}(t) = 0 \ , \quad \text{per} \quad t<\frac{x}{a} \ , \\ & e^{-\frac{x}{a}q}\,\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}\left(t-\frac{x}{a}\right) + \frac{bx}{a}\int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{I}_1\left(b\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{x^2}{a^2}}}\,\mathrm{F}(\tau)\,d\tau \ , \ \text{per} \ t>\frac{x}{a} . \end{aligned}$$

---

[1] Cfr. F. SBRANA, *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente*, « Rend. della R. Accad. dei Lincei », serie 5ª, vol. XXIV, 1° sem., 1915, pag. 207-212 e 409-411.

Dalla [3] segue intanto che:

$$[4] \qquad u(x,t)=0 \ , \quad \text{per} \quad t<\frac{x}{a} \, .$$

Infatti per $t<\frac{x}{a}$, essendo $x<l$ è pure $t$ minore di $\frac{2l-x}{a}$, $\frac{2l+x}{a}$, ecc.; perciò il secondo membro della [2] si annulla identicamente. In modo analogo si trova poi:

$$[4^a] \quad u(x,t)=e^{-bt}e^{-\frac{x}{a}q}e^{bt}f(t) \ , \quad \text{per} \quad \frac{x}{a}<t<\frac{2l-x}{a} \ ,$$

$$[4^b] \quad u(x,t)=e^{-bt}\left(e^{-\frac{x}{a}q}-e^{-\frac{2l-x}{a}q}\right)e^{bt}f(t) \ , \quad \text{per} \quad \frac{2l-x}{a}<t<\frac{2l+x}{a} \ ,$$

$$[4^c] \quad u(x,t)=e^{-bt}\left(e^{-\frac{x}{a}q}-e^{-\frac{2l-x}{a}q}+e^{-\frac{2l+x}{a}q}\right)e^{bt}f(t) \, , \quad \text{per} \quad \frac{2l+x}{a}<t<\frac{4l-x}{a} \ ,$$

e così via. Le [4], [$4^a$], [$4^b$], [$4^c$], ecc. costituiscono sostanzialmente il risultato ottenuto nella mia Memoria nel caso in esame, salvo qualche differenza puramente formale (cfr. pag. 249). Si può notare che le [3] portano come conseguenza:

$$[5^a] \qquad u(x,t)=e^{-bt}e^{-\frac{x}{a}q}e^{bt}f(t) \ , \quad \text{per} \quad t<\frac{l}{a} \ ;$$

similmente le [$4^a$], [$4^b$] forniscono:

$$[5^b] \qquad u(x,t)=e^{-bt}e^{-\frac{x}{a}q}e^{bt}f(t) \ , \quad \text{per} \quad \frac{l}{a}<t<\frac{2l}{a} \ ,$$

e così via. Le [$5^a$], [$5^b$], ..., rappresentano la soluzione ottenuta dal SERINI.

3. – In una terza Memoria (1), propongo l'impiego di operatori funzionali in più variabili per l'integrazione delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti. Questo procedimento si può considerare una estensione del metodo di GIORGI, come mi permetto di mostrare brevemente.

Abbiasi per esempio da integrare l'equazione:

$$[6] \qquad \mathrm{E}(u) \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \ ,$$

in cui $a, b, c, \ldots$ sono costanti reali, ed $f(x, y)$ una funzione assegnata, che supponiamo esprimibile nel modo che segue:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta)\, 1(x-\xi)\, 1(y-\eta)\, d\xi\, d\eta \ ,$$

dove $1(x)$ è la solita funzione, uguale a zero per $t < 0$, ad uno per $t < 0$. È noto che si può porre:

$$1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(s)} \frac{e^{\omega x}}{\omega}\, d\omega \ , \quad (i^2 = -1) \ ,$$

dove $s$ è una linea del piano della variabile complessa $\omega$ che va da $-i\infty$ a $+i\infty$, lasciando a sinistra l'origine. Posto similmente:

$$1(y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(l)} \frac{e^{\xi y}}{\zeta}\, d\zeta \ ,$$

(1) F. SBRANA, *Sulla integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti*, « Atti della Società Ligustica di Scienze e Lettere di Genova », vol. XIII, pag. 1-35, 1934.

dalla [6] segue:

$$u(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{G}(x-\xi, y-\eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \ ,$$

con

$$\mathrm{G}(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\mathrm{E}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{(s)} \frac{e^{\omega x}}{\omega} d\omega \int_{(l)} \frac{e^{\zeta y}}{\zeta} d\zeta \ .$$

Risulta subito che si può porre:

$$\mathrm{G}(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(s)} d\omega \int_{(l)} \frac{e^{\omega x + \zeta y}\, d\zeta}{a\omega^2 + b\zeta^2 + c\zeta\omega + d\omega + e\zeta} \ . \tag{7}$$

Si potranno avere diverse determinazioni per G, a seconda della maniera in cui sono disposte le linee $s$ ed $l$ rispetto alle singolarità della funzione integranda. Nasce così una discussione, analoga a quella che si deve fare per gli operatori in una variabile, con la differenza che questi conducono allo studio del comportamento di funzioni di una variabile complessa, mentre gli operatori in due variabili danno luogo allo studio di funzioni di due variabili complesse.

Abbiamo qui accennato ad un'equazione *completa*, come la [6]; ma nella Memoria citata abbiamo mostrato anche come si pervenga alla integrazione di un'equazione omogenea. Il procedimento seguito ha permesso di ottenere qualche nuovo risultato concernente il problema delle vibrazioni di una sbarra elastica omogenea, con date condizioni iniziali, e agli estremi (1).

(1) Di questa Memoria è data una lunga e benevola recensione dal Bateman («Zentralblatt für Math.», Bd. 10, 1935, pag. 167); nello stesso volume (pag. 400) si trova una recensione di V. Bernstein sulla Memoria ricordata nel § 2.

*ACTA*
*Vol. III - N. 12*

# CONTRIBUTO ALLO STUDIO DELLA FAUNA CAVERNICOLA ITALIANA

## Due nuove specie di Bythinus: *Pselaphidae, Coleoptera* (*)

*(Con due figure)*

FRANCO RASETTI
*Accademico Pontificio*

Summarium. — Duae novae species, ad genus Bythinum pertinentes, describuntur, quarum altera in specu in Carnica regione, altera autem in specu in Campania inventa est.

Lo studio delle specie cavernicole presenta per lo zoologo interessanti problemi di carattere zoogeografico e filogenetico. Tali questioni possono venir affrontate soltanto quando si posseggano estese conoscenze sopra un gruppo di animali cavernicoli e sopra le forme affini non cavernicole. Tra gli insetti, valgano a questo proposito i magistrali lavori di R. Jeannel (1) e di G. Müller (2) sopra i due più grandi gruppi cavernicoli, i *Trachinae* e i *Bathysciinae*.

Lo studio di altri gruppi di coleotteri cavernicoli è di gran lunga meno progredito. Così per esempio per la famiglia *Pselaphidae* si conoscono numerose forme cavernicole, ma si tratta per ora di specie estremamente rare, raccolte in località distanti l'una dall'altra: circostanze che rendono molto difficile un lavoro di insieme.

---

(*) Nota presentata il 22 aprile 1939.

(1) R. Jeannel, *Monographie des* Bathysciinae, « Archiv. Zool. Expér. », 1924; pag. 1-436, *Monographie des* Trechinae, «Abeille», vol. 33-35, 1927-1930.

(2) G. Müller, *Revision der blinden Trechus-Arten*, « Denkschr. Akad. der Wissensch. », Wien, vol. XC, 1913.

In questa Nota mi propongo di portare un piccolo contributo a tale studio, descrivendo due nuove specie di *Pselaphidae* cavernicoli, frutto di brevi visite ad alcune grotte delle Prealpi e dell'Italia meridionale.

I.

## Bythinus (*Linderia*) Persicoi, n. sp.

Rosso testaceo, coperto di breve pubescenza giallognola. Lunghezza del ♂ mm. 2, della ♀ mm. 1,8.

Capo liscio, appena più lungo che largo, poco più stretto del torace, ristretto in avanti. Vertice sottilmente carenato fino al principio della profonda depressione anteriore. Tubercoli antennarii molto elevati; fossette frontali piccole e poco profonde, puntiformi. Occhi distinti nel ♂, costituiti di pochissime faccette, indistinti nella ♀.

Antenne sottili, allungate. Primo articolo nel ♂ subcilindrico, circa tre volte e mezzo più lungo che largo, finemente carenato al lato interno nella metà basale; secondo articolo nel ♂ subtriangolare, circa così largo che lungo, prolungato in punta acuta all'estremo apicale interno. Nella ♀ il primo articolo è regolarmente cilindrico, il secondo ovale, circa una volta e mezza più lungo che largo. Gli articoli successivi sono uguali nei due sessi. Terzo, quarto e quinto sottili e allungati, da due volte e mezza a due volte più lunghi che larghi; sesto, settimo e ottavo poco più lunghi che larghi; nono un poco più grande dei precedenti; decimo assai più grande, ovale; ultimo grande, piriforme, più lungo che i tre precedenti presi insieme.

Palpi mascellari col secondo articolo liscio; il terzo circa una volta e mezza più lungo che largo, fornito di pochi tubercoli poco accentuati; il quarto lungo oltre quattro volte la sua massima lunghezza, debolmente attenuato verso l'estremità.

Protorace liscio, appena più lungo che largo, con la massima larghezza a $^2/_3$ dalla base, ristretto verso la base con lati quasi rettilinei. Solco prebasale sottile e quasi diritto, terminato lateralmente in una piccola fossetta.

Elitre circa due volte più larghe del torace, più arrotondate lateralmente nella ♀, meno nel ♂; coperte di punteggiatura rada e poco profonda.

Zampe senza particolarità nella ♀. Nel ♂, tutti i femori sono ingrossati, ma specialmente i posteriori, che sono estremamente robusti. Le tibie anteriori sono fortemente smarginate e dentate, le intermedie

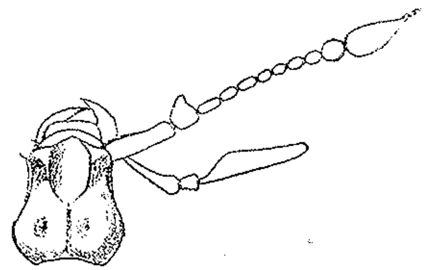


FIG. 1.

*Bythinus Persicoi*, capo e antenna del ♂.

curvate all'interno verso la metà, le posteriori nettamente ispessite in tutta la loro lunghezza, e curvate verso l'interno nel terzo apicale.

Questa nuova forma assomiglia assai per statura ed aspetto generale, ed è indubbiamente molto affine al *B.* (*Linderia*) *troglodytes* Fiori, della grotta di Oliero. Da esse si distingue a prima vista per la forma molto diversa dei due primi articoli delle antenne nel ♂. Nel *troglodytes* il primo articolo ha un tubercolo al lato interno, che manca nel *Persicoi*; in quest'ultimo il secondo articolo è molto più piccolo che nel *troglodytes*, e acuminato al lato interno, invece di essere largamente arrotondato. Anche la ♀ si può distinguere da quella del *troglodytes* per l'ultimo articolo dei palpi mascellari più stretto e allungato.

Raccolsi una coppia di questa specie, alla fine di agosto, nella grotta denominata localmente « fontana della Ciuvita », situata nel territorio carsico tra il Tagliamento e il Meduna, e precisamente a nord del M. Ciaurlec (provincia di Udine). Una ♀, apparentemente identica alla precedente, venne raccolta nella grotta (distante circa 15 km. dalla precedente) detta « Mainarie del Puint » presso Clauzetto. Dedico la nuova specie all'amico prof. E. PERSICO, che mi accompagnò in una breve esplorazione entomologica di alcune grotte di quella regione.

II.

BYTHINUS (*Bythoxenus*) AMATOI, n. sp.

Rosso, testaceo, coperto di rada pubescenza giallognola, abbastanza lunga. Lunghezza mm. 1,3.

Capo piccolo, liscio, circa una volta e mezza più lungo che largo, attenuato gradatamente in avanti, finemente carenato sul vertice. Fossette frontali convergenti in avanti e riunite alla profonda depressione anteriore. Tubercoli antennarii elevati, carenati al lato esterno. Occhi nulli nei due sessi.

Antenne uguali nei due sessi, molto sottili e allungate, sorpassanti la metà delle elitre. Primo articolo quasi sei volte più lungo che largo, ristretto nella metà basale, regolarmente cilindrico per il rimanente; secondo ovale, quasi così largo come il primo; terzo a nono sottili, ovali, tutti più lunghi che larghi; decimo assai più grande, sferico; ultimo grande, piriforme, circa così lungo come i quattro precedenti presi insieme.

Palpi mascellari col secondo articolo fortemente ricurvo, munito di una serie regolare di una diecina di tubercoli al lato posteriore, e di qualche tubercolo sparso al lato anteriore e superiore, verso l'estremo apicale. Terzo articolo allungato, con qualche tubercolo poco accentuato; quarto articolo lungo e sottile, leggermente ricurvo, poco attenuato verso l'estremità, pubescente.

Protorace di $^1/_3$ più largo del capo, liscio nella parte anteriore, irregolarmente e rugosamente punteggiato alla base; ristretto debolmente in addietro, più fortemente in avanti, con la massima larghezza verso la metà. Solco prebasale profondo, diretto in avanti a ciascun lato, e riunito quivi ad una fossetta poco profonda, rugosa.

Elitre quasi due volte più larghe del torace, sparsamente e finemente punteggiate, molto convesse, arrotondate ai lati. Alla base munite di due foveole poco profonde.

Zampe lunghe e sottili, senza particolarità degne di nota nella ♀, salvo una crenulazione dei femori anteriori, nella metà basale dell'orlo anteriore. Nel ♂, le zampe medie e posteriori non si distinguono

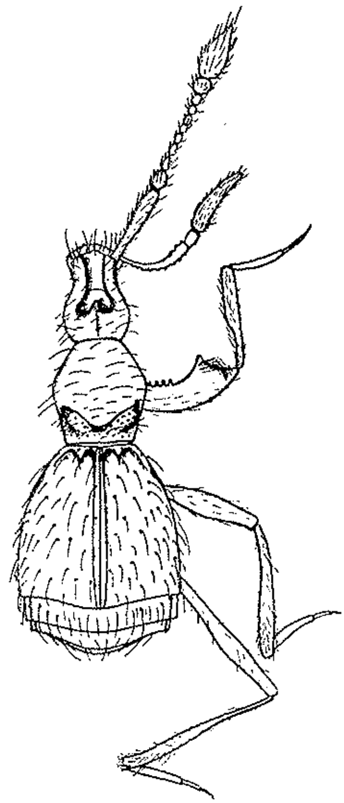


FIG. 2.

*Bythinus Amatoi*, ♂.

da quelle della ♀, mentre le anteriori presentano particolarità molto singolari. I femori sono ispessiti in tutta la loro lunghezza, e ricurvi in avanti nella parte apicale. Sulla metà basale dell'orlo anteriore, si presenta una serie regolare di tubercoli, piccoli ma molto nettamente sporgenti. Infine, a $^{3}/_{4}$ della lunghezza, sempre al lato anteriore, si ha un robustissimo dente acuminato. L'incavo tra questo dente e l'estremità del femore presenta un ciuffo di peli gialli. Le tibie anteriori sono sottili nel terzo basale, poi si dilatano bruscamente assumendo una larghezza doppia.

Questa specie, notevole per la forma dei femori anteriori del ♂, deve porsi vicino al *B.* (*Bythoxenus*) *propomacrus* Dod., che pure presenta particolarità ai femori anteriori del ♂. Da esso si distingue nettamente, oltre che per la forma dei femori anteriori, anche per il capo più stretto, per il primo articolo delle antenne più regolarmente cilindrico, per la diversa scultura della base del protorace, e infine per la pubescenza assai più lunga.

Raccolsi un ♂ e due ♀ della specie in questione (al principio di aprile) vaganti sulle stalagmiti, nella grotta di S. Cosma, presso Ravello (provincia di Salerno). Si accede a tale grotta attraverso alle abitazioni annesse alla Chiesa di S. Cosma, situata ai piedi della parete strapiombante che limita a mezzogiorno il parco della celebre Villa del Cimbrone. La grotta, una volta inaccessibile per la strettezza dell'entrata, è stata resa praticabile mercè il vivo e intelligente interessamento del Rev. Parroco Pantaleone D'Amato. A lui, che con grande cortesia volle accompagnarmi nella visita della grotta, desidero esprimere anche qui la mia viva gratitutine, dedicandogli la nuova specie.

* * *

Desidero in questa occasione rilevare che anche il *Bythinus propomacrus* Dod., descritto sopra (1), un unico ♂ trovato sotto una pietra interrata a Ponte Stazzemese (Alpi Apuane), fa pure vita cavernicola. Infatti ne raccolsi un esemplare, pure un ♂, nella grotta del Buggine (presso la località precedente), dove convive col *Bythinus* (*Macrobythus*) *Mancinii* Dod.

(1) A. Dodero, « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova », vol. XLVIII, 1919, pag. 46.

*ACTA*
*Vol. III - N. 13*

# GLI EFFETTI DEL SECONDO ORDINE NELLE VIBRAZIONI ELASTICHE (*)

(Nota I)

PIETRO TEOFILATO

Svmmarivm. — Hac Nota primum quaeritur an et quomodo lex Hooke extendi possit, ita ut etiam elementa alterius ordinis perpendantur; deinde efficitur ut haec elementa fiant explicita in aequationibus vibrationum elasticarum.

1. – In una mia Nota che risale al 1933 [1], ebbi a studiare da un punto di vista molto generale e piuttosto qualitativo, gli effetti del secondo ordine nelle vibrazioni, effetti, che in una corda vibrante, si rivelano attraverso il fenomeno dei suoni del Tartini, e in generale consistono nell'introduzione di nuove frequenze.

Ora, per giungere alla nozione dell'energia che accompagna queste frequenze, occorre passare alla esplicitazione degli elementi del secondo ordine; e questo appunto costituirà l'argomento di cui voglio occuparmi, non appena discussa la varia possibilità di estensione della legge di Hooke.

2. – Pongasi:

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\ , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\ , \quad (i \neq j) \tag{1}$$

$$e_{ii} = \varepsilon_{ii} + \frac{1}{2}\sum_s \left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right)^2\ ; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\sum_s \frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_j} \tag{2}$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini, l'8 ottobre 1939.
(1) « Atti Pontificia Accademia delle Scienze », anno 36, 1933.

e inoltre:

$$Q(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3) = 2(e_{11}\,\alpha_1^{\,2} + e_{22}\,\alpha_2^{\,2} + e_{33}\,\alpha_3^{\,2} + 2e_{12}\,\alpha_1\,\alpha_2 + 2e_{13}\alpha_1\alpha_3 + 2e_{23}\alpha_2\alpha_3)$$

$$\overline{Q}(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3) = (1+2e_{11})\,\alpha_1^{\,2} + (1+2e_{22})\,\alpha_2^{\,2} + (1+2e_{33})\,\alpha_3^{\,2} + \\ + 4e_{12}\,\alpha_1\,\alpha_2 + 4e_{13}\,\alpha_1\,\alpha_3 + 4e_{23}\,\alpha_2\,\alpha_3\ .$$

Allora, se per effetto di una deformazione, i punti di coordinate $x_1\,x_2\,x_3$ passano in $x_1+u_1$, $x_2+u_2$, $x_3+u_3$, si trova subito (¹) che l'elemento lineare $ds$, avente i coseni direttori $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$, si muta in un elemento lineare $ds_1$, la cui lunghezza è legata a $ds$ da ciascuna delle due seguenti relazioni:

[3] $$\frac{ds_1^{\,2} - ds^2}{ds^2} = \frac{\Delta\,(ds^2)}{ds^2} = Q(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$$

[4] $$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta\,ds}{ds}\right)^2 = \overline{Q}(\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3)$$

Ne consegue che i raggi vettori centrali delle due quadriche:

$$Q(x_1\,x_2\,x_3) = 1 \quad , \quad \overline{Q}(x_1\,x_2\,x_3) = 1$$

danno una rappresentazione geometrica, gli uni e gli altri, rispettivamente di:

$$\left(\frac{1}{ds}\sqrt{\Delta\,(ds^2)}\right)^{-1} \ , \quad \left(1 + \frac{\Delta\,ds}{ds}\right)^{-1} \ .$$

Si trova subito che gli allungamenti unitari secondo gli assi sono:

[5] $$\omega_{ii} = \sqrt{1+2e_{ii}} - 1 \ ,$$

(¹) Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 1934, pag. 60.

donde si ricava:

$$[6] \qquad e_{ii} = \omega_{ii} + \frac{1}{2}\omega_{ii}^2 \;;$$

mentre le semivariazioni angolari $\omega_{ij}$ degli angoli formati dagli elementi lineari paralleli agli assi, sono date da:

$$[6] \qquad e_{ij} = \sqrt{1+2e_{ii}}\,\sqrt{1+2e_{jj}}\,\operatorname{sen}\omega_{ij} \;,$$

donde si deduce:

$$[7] \qquad e_{ij} = \omega_{ij}(1 + \omega_{ii} + \omega_{jj})$$

3. – Come si è detto in principio, supponiamo trattarsi di deformazioni tali che non possano più trascurarsi gli elementi del secondo ordine, esplicitati fin dal paragrafo precedente.

Immagineremo però, ciò malgrado, di trovarci in quel campo di variabilità della deformazione, anteriore allo snervamento, per cui sussista ancora la linearità tra sforzi ed elementi di deformazione, conformemente a quanto dimostrano le esperienze su provini.

La legge di HOOKE per piccoli spostamenti, tali cioè che ci si può limitare alla considerazione delle quantità del primo ordine è espressa da:

$$[8] \qquad p_{ij} = \sum c_{ijhk}\,\varepsilon_{hk}$$

dove le $\varepsilon_{hk}$ sono date dalle [1] ed i coefficienti $c_{ijhk}$ sono indipendenti dalle $\varepsilon_{hk}$ e formano, attesa l'esistenza del potenziale elastico, una matrice simmetrica. Quando, sotto l'ipotesi della citata linearità, si passa, a causa di spostamenti più cospicui, a considerare gli elementi del secondo ordine, l'estensione della [8], che sembra più ovvia, consiste nel sostituire alle $\varepsilon$, i termini aventi il medesimo loro significato, cioè le $\omega$ delle [6] e [7], scrivendo:

$$p_{ij} = \sum c_{ijhk}\,\omega_{hk}$$

Orbene è facile vedere che una siffatta linearità, la quale esprime una proprietà meccanica, non è affatto indipendente dalla scelta delle coordinate, come invece sarebbe da aspettarsi.

4. - Per provare questo asserto, ci riferiremo ad un corpo isotropo. Posto:

$$P(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \sum p_{ij} \alpha_i \alpha_j$$

dove $\|p_{ij}\|$ è la matrice del tensore degli sforzi, sappiamo che $P(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ esprime la componente normale dello sforzo agente sull'elemento superficiale perpendicolare alla direzione definita dai coseni $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

Segue di qui l'interpretazione meccanica del raggio vettore centrale della quadrica:

$$P(x_1 x_2 x_3) = 1$$

i cui assi corrispondono alle tre direzioni, che simboleggeremo con $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, lungo le quali agiscono gli sforzi (normali) massimi o minimi. L'equazione della quadrica riferita agli assi $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, si riduce a:

$$p_{11}{}^0 \bar{x}_1{}^2 + p_{22}{}^0 \bar{x}_2{}^2 + p_{33}{}^0 \bar{x}_3{}^2 = 1 \ ,$$

dove i coefficienti $p_{11}{}^0\ p_{22}{}^0\ p_{33}{}^0$, inverse dei quadrati dei semiassi della quadrica, misurano appunto le pressioni normali massime o minine agenti sulle facce parallele ai piani assiali $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

Allo stesso modo, in virtù del significato cinematico di $Q(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ e della conseguente interpretazione cinematica dei raggi centrali della quadrica $Q(x_1 x_2 x_3) = 1$, le direzioni $x_1{}^0\ x_2{}^0\ x_3{}^0$ degli assi di simmetria di questa, corrispondono alle direzioni del massimo o minimo assunto da ciascuno dei due membri dell'eguaglianza:

$$[9] \qquad \frac{\Delta (ds)^2}{ds^2} = \frac{\Delta\, ds}{ds}\left(2 + \frac{\Delta\, ds}{ds}\right)$$

Analogamente gli assi di simmetria della quadrica $\overline{Q}(x_1\, x_2\, x_3)=1$ corrispondono alle direzioni del massimo o minimo assunto da $\frac{\Delta\, ds}{ds}$, e poichè in un intervallo a destra di $x=0$, il massimo o minimo esterno di $x(2+x)$ corrisponde al massimo o minimo esterno di $x$, segue che gli assi della quadrica $Q=1$ coincidono in direzione (non in grandezza) con quelli della quadrica $\overline{Q}=1$. Riferita la quadrica $Q=1$ agli assi $x_1{}^0\, x_2{}^0\, x_3{}^0$, la sua equazione diverrà:

$$e_{11}{}^0\, x_1{}^{0^2} + e_{22}{}^0\, x_2{}^{0^2} + e_{33}{}^0\, x_3{}^{0^2} = 1$$

dove $e_{11}{}^0\, e_{22}{}^0\, e_{33}{}^0$, inverse dei semiassi della quadrica in parola, sono i massimi o minimi delle grandezze rappresentate in ciascuno dei due membri della [9], e sono appunto i valori assunti lungo le direzioni $x_1{}^0\, x_2{}^0\, x_3{}^0$.

È da osservare che l'espressione:

$$\Omega(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3) = \sum \omega_{ij}\, \alpha_j\, \alpha_i\ ,$$

a differenza delle analoghe $Q$, $\overline{Q}$, $P$, non ha un significato indipendente dalla scelta degli assi coordinati; non possiamo perciò ripetere per la quadrica:

$$\Omega(x_1\, x_2\, x_3) = 1$$

quanto invece si è detto per le altre quadriche.

L'ipotesi di isotropia porta la coincidenza degli assi $\overline{x}_1\, \overline{x}_2\, \overline{x}_3$ con $x_1{}^0\, x_2{}^0\, x_3{}^0$, ed allora, limitandoci per semplicità alle due dimensioni, possiamo, a norma del significato attribuito alle $\omega$, parlare (¹) degli allungamenti unitari $\omega_{11}{}^0\, \omega_{22}{}^0$ secondo gli assi $x_1{}^0\, x_2{}^0$ di simmetria comuni alle tre coniche:

$$Q(x_1\, x_2) = 1\quad,\quad \overline{Q}(x_1\, x_2) = 1\quad,\quad P(x_1\, x_2) = 1\quad;$$

(¹) Cfr. pag. 86, formola [5].

non possiamo peraltro asserire che $\omega_{11}^0\,\omega_{22}^0$ corrispondono alle inverse dei quadrati dei semiassi della conica $\Omega = 1$, nè che questa abbia $x_1^0\,x_2^0$ come assi di simmetria.

D'altra parte, il già espresso significato di $\omega_{11}^0\,\omega_{22}^0$ ci permette di stabilire che:

$$\omega_{ii}^0 = \sqrt{1+2e_{ii}^0} - 1 = \sim e_{ii}^0 - \frac{1}{2}\,{e_{ii}^0}^2 \quad ,$$

per modo che l'ipotetica linearità fra le $p$ e le $\omega$, si esprime, sia con le equazioni:

$$p_{11}^0 = \mathrm{M}\,\omega_{11}^0 + \mathrm{N}\,\omega_{22}^0$$

$$p_{22}^0 = \mathrm{M}\,\omega_{22}^0 + \mathrm{N}\,\omega_{11}^0 \quad ,$$

sia con:

$$p_{ii}^0 = (\mathrm{M} - \mathrm{N})\left(e_{ii}^0 - \frac{1}{2}\,{e_{ii}^0}^2\right) + \mathrm{N}\left(\sum_s e_{ss}^0 - \frac{1}{2}\sum_s {e_{ss}^0}^2\right) \; .$$

Rappresenti:

[10]

| | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| $x_1^0$ | $\alpha_{11}$ | $\alpha_{12}$ |
| $x_2^0$ | $\alpha_{21}$ | $\alpha_{22}$ |

il quadro dei coseni tra gli assi qualsiasi $x_1\,x_2$ e gli altri già definiti $x_1^0\,x_2^0$.

Sussistono le relazioni:

$$\alpha_{ih} = \frac{\partial x_i^0}{\partial x_h} \quad , \quad 0 = \frac{\partial^2 x_i^0}{\partial x_h\,\partial x_h}$$

e quindi:

$$[11] \qquad p_{ij} = \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x_i\,\partial x_j} = \sum_s \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial {x_s^0}^2}\,\alpha_{si}\,\alpha_{sj} = \sum_s p_{ss}^0\,\alpha_{si}\,\alpha_{sj}$$

e così pure:

[12] $$e_{ij} = \sum_s e_{ss}^0 \alpha_{si} \alpha_{sj}$$

Se ne deduce:

[13] $$\begin{aligned} p_{ii} &= (\mathrm{M} - \mathrm{N}) \left(e_{ii} - \frac{1}{2} \sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{si}^2\right) + \mathrm{N}\left(\sum e_{ss}^0 - \frac{1}{2} \sum e_{ss}^{0^2}\right) \\ p_{12} &= (\mathrm{M} - \mathrm{N}) \left(e_{12} - \frac{1}{2} \sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s1} \alpha_{s2}\right) \end{aligned}$$

D'altra parte, poichè $e_{11}^0 e_{22}^0$ sono radici dell'equazione:

[14] $$\begin{vmatrix} e_{11} - e_{ss}^0 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} - e_{ss}^0 \end{vmatrix} = 0$$

ed hanno un preciso significato geometrico, invariante per trasformazione di assi, si ricava che le due espressioni:

[15] $$e = e_{11} + e_{22} \quad , \quad g = e_{11} e_{22} - e_{12}^2$$

sono anch'esse invarianti e si ricava inoltre che i coseni del quadro [10] sono proporzionali ai minori di una delle due linee della matrice [14].

Posto cioè:

$$\mathrm{A}_1 = e_{12}^2 + (e_{11} - e_{11}^0)^2 \quad , \quad \mathrm{B}_1 = e_{12}^2 + (e_{11} - e_{22}^0)^2$$

e, con scambio di indici:

$$\mathrm{A}_2 = e_{21}^2 + (e_{22} - e_{22}^0)^2 \quad , \quad \mathrm{B}_2 = e_{21}^2 + (e_{22} - e_{11}^0)^2 \; ,$$

si ottiene:

[16] $$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (e_{22} - e_{11}^0)\, \mathrm{B}_2^{-1/2} \quad , \quad \alpha_{12} = - e_{21}\, \mathrm{B}_2^{-1/2} \\ \alpha_{21} &= (e_{22} - e_{22}^0)\, \mathrm{A}_2^{-1/2} \quad , \quad \alpha_{22} = - e_{21}\, \mathrm{A}_2^{-1/2} \end{aligned}$$

oppure:

$$[17] \qquad \begin{aligned} \alpha_{11} &= - e_{12} A_1^{-1/2} \quad , \quad & \alpha_{12} &= (e_{11} - e_{11}^0) A_1^{-1/2} \\ \alpha_{21} &= - e_{12} B_1^{-1/2} \quad , \quad & \alpha_{22} &= (e_{11} - e_{22}^0) B_1^{-1/2} \end{aligned}$$

Si ricava subito:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 = H \quad ,$$

$$H = 4 e_{12}^2 + (e_{11} - e_{22})^2 \; .$$

Così pure si ha:

$$e_{11}^0 A_2 + e_{22}^0 B_2 = e_{22} H \quad ,$$

donde, moltiplicando ambo i membri per $e_{11}^0 + e_{22}^0$, e tenendo presente l'invariantività di $e$, $g$, espressa dalle [15] ed il significato di H, si deduce:

$$[18] \qquad e_{11}^{0^2} A_2 + e_{22}^{0^2} B_2 = (e_{12}^2 + e_{22}^2) H$$

Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima ancora per $e_{11}^0 + e_{22}^0$, si ottiene:

$$[19] \qquad e_{11}^{0^3} A_2 + e_{22}^{0^3} B_2 = (e_{12}^2 e_{11} + 2 e_{12}^2 e_{22} + e_{22}^3) H$$

Si ricava infine:

$$A_2 B_2 = e_{12}^2 H$$

Dalle [16] e [18] deriva:

$$[20] \qquad \sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s2}^2 = e_{21}^2 \left( \frac{e_{11}^{0^2}}{B_2} + \frac{e_{22}^{0^2}}{A_2} \right) = e_{21}^2 + e_{22}^2 \quad ,$$

mentre dalle [17] e dall'analoga della [18], ottenuta mediante scambio degli indici 1, 2, si ottiene:

$$[21] \qquad \sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s1}^2 = e_{12}^2 + e_{11}^2 \; .$$

Finalmente dalle [14]:

$$\sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s1} \alpha_{s2} = -e_{21} \frac{e_{11}^{0^2}(e_{22} - e_{11}^0)}{B_2} + \frac{e_{22}^{0^2}(e_{22} - e_{22}^0)}{A_2}$$

ed a causa delle [18] e [19]:

$$[22] \qquad \sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s1} \alpha_{s2} = e_{12}(e_{11} + e_{22}) \ ,$$

per cui, ricordando il significato di $e$ dato nelle [13], si può scrivere, in virtù di [20], [21], [22]:

$$p_{ii} = (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, e_{ii} + \mathrm{N} e - \frac{\mathrm{M} - \mathrm{N}}{2}(e_{ii}^2 + e_{12}^2) - \mathrm{N}(2 e_{12}^2 + e_{11}^2 + e_{22}^2)$$

$$p_{12} = (\mathrm{M} - \mathrm{N}) \left(1 - \frac{1}{2} e\right) e_{12}$$

ed in causa di [6] e [7]:

$$p_{ii} = (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, \omega_{ii} + \mathrm{N}(\omega_{11} + \omega_{22}) - \frac{\mathrm{M} + \mathrm{N}}{2} \omega_{12}^2$$

$$p_{12} = (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, \omega_{12} \left[1 + \frac{1}{2}(\omega_{11} + \omega_{22})\right] .$$

Dunque, mentre le $p^0$ sono lineari nelle $\omega^0$, invece le $p$ non risultano più lineari nelle $\omega$, e non permane quindi la linearità tra sforzi ed elementi di deformazione, quando si opera una trasformazione di assi.

È inoltre da osservare che l'espressione:

$$\sum p_{ij} \delta \omega_{ij}$$

non è un differenziale esatto, onde, sotto l'ipotesi fatta, non esisterebbe più il potenziale elastico.

Se invece assumiamo, come estensione della legge di Hooke, quella che esprime la linearità fra le $p$ e le $e$, allora si vede subito che questa permane con la trasformazione di assi, e inoltre che $\Sigma p \delta e$ è un differenziale esatto.

Infatti, assunta nel corpo isotropo, la coincidenza fra le direzioni di massimo e minimo sforzo con le direzioni di massimo e minimo allungamento, le quali ultime coincidono poi anche con quelle di massimo e minimo di $\frac{\Delta\, ds^2}{ds^2}$, cioè di massimo e minimo delle $e$ (vale a dire $e_{11}{}^0\, e_{22}{}^0$), avremo:

$$\begin{aligned} p_{11}{}^0 &= \mathrm{M} e_{11}{}^0 + \mathrm{N} e_{22}{}^0 \\ p_{22}{}^0 &= \mathrm{M} e_{22}{}^0 + \mathrm{N} e_{11}{}^0 \quad , \end{aligned}$$

ovvero:

$$p_{ii}{}^0 = (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, e_{ii}{}^0 + \mathrm{N} e^0 \quad , \qquad (e^0 = e_{11}{}^0 + e_{22}{}^0)$$

ed, in virtù di [11] e [12] e sottintendendo anche le tre dimensioni:

$$\text{[23]} \qquad \begin{aligned} p_{ii} &= (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, e_{ii} + \mathrm{N} e \\ p_{ij} &= (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, e_{ij} \end{aligned}$$

dove però:

$$e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

non rappresenta più la dilatazione unitaria di volume.

La linearità tra $p$ ed $e$ dunque si conserva.

Poichè le [23], per spostamenti infinitesimi, devono ridursi alle ordinarie formole di elasticità, in quanto che le $e_{ii}\, e_{ij}$ delle [2] devono ridursi alle $\varepsilon_{ii}\, \varepsilon_{ij}$ delle [1], segue che:

$$\mathrm{M} - \mathrm{N} = \frac{\mathrm{E}}{1 + \nu} \quad , \quad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{E}\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$$

dove E, $\nu$ sono i due moduli di elasticità longitudinale e trasversale (1).

---

(1) Le $\varepsilon_{ij}$, per $i \neq j$, che noi abbiamo adottate, sono la metà di quelle adoperate da altri autori.

Il lavoro elastico relativo ad un volume unitario, e dovuto da un incremento infinitesimo $\delta e$ delle $e$, si esprime con:

$$\sum p_{ij} \delta e_{ij} \ ,$$

perciò il lavoro L occorrente per passare dallo stato definito da: $e_{ij} = 0$, allo stato finale sarà:

$$[24] \qquad L = \frac{1}{2} M e^2 + (M - N)(e_{12}{}^2 + e_{13}{}^2 + e_{23}{}^2 - e_{11} e_{22} - e_{11} e_{33} - e_{22} e_{33})$$

Le [23] e [24] sono espressioni nelle $e$, perfettamente identiche a quelle che le $p$ ed L hanno nelle $\varepsilon$, quando cioè i termini di secondo ordine sono trascurabili.

5. - Quando si procede ad esprimere la [24] per mezzo delle [1] e [2], si ottiene un polinomio nelle derivàte prime di $u_1 u_2 u_3$, per modo che la variazione $\delta L$ risulta del tipo:

$$[25] \qquad \delta L = \sum A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j + \sum B_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j$$

dove le $A_{ij}$ contengono le derivate delle $u$ al primo grado, mentre le $B_{ij}$ le contengono al secondo grado, se omettiamo i termini di grado superiore.

Allorchè ci si vale del principio di Hamilton, e per L si assume solo il primo termine del secondo membro della [25], cioè si assume $\delta L$ eguale a:

$$[26] \qquad \delta L_1 = \sum A_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j \ ,$$

allora si ottengono le ordinarie equazioni delle vibrazioni elastiche, ovvero:

$$[27] \qquad - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{i1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{i2}} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{i3}} = 0$$

dove U è il potenziale delle forze di massa e $\varphi$ non è altro che l'analoga della funzione L, costruita per mezzo delle $\varepsilon$, anzichè delle $e$. Al contorno del corpo elastico si ha:

$$[28] \qquad \cos \widehat{nx_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{i1}} + \cos \widehat{nx_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{i2}} + \cos \widehat{nx_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{i3}} = X_{ni}$$

$n$ essendo la normale al contorno ed $X_{n1} X_{n2} X_{n3}$ le componenti dello sforzo applicato su questo.

La [27] si può anche scrivere, come è noto:

$$[29] \qquad -\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{M+N}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum \frac{\partial u_h}{\partial x_h} + \frac{M-N}{2} \Delta u_i = 0$$

e la [28] invece:

$$[30] \qquad \begin{aligned} &\left[(M-N) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + N \sum \frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right] \cos \widehat{nx_1} + \\ &+ (M-N)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \cos \widehat{nx_2} + (M-N)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \cos \widehat{nx_3} = X_{1n} \end{aligned}$$

e due analoghe che si ottengono con permutazione di indici.

Quando poi, invece della [26] si assume la [25], cioè:

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 \ ,$$

dove $\delta L_2$ rappresenta il secondo termine del secondo membro della [25], allora le [29] e [30] vanno modificate con l'aggiunta dei termini che derivano dalle integrazioni per parti relative agli addendi che costituiscono $\delta L_2$. Sussisteranno a conti fatti (omettendo gli sviluppi alquanto prolissi) le equazioni seguenti:

$$[31] \qquad -\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{is}} = F_i$$

$$[32] \qquad \sum \cos \widehat{nx_s} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{is}} - X_{ni} = f_i$$

dove:

$$F_1 = -\frac{M}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{si}\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right)^2 - M\sum_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} -$$

$$-\frac{M-N}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\sum_s\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_2}\right)^2-\sum_s\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_3}\right)^2-2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\sum_s\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\frac{\partial u_s}{\partial x_2}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)+\sum_s\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\frac{\partial u_s}{\partial x_3}-\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right]\right\}$$

da cui, con permutazione degli indici, si ottengono $F_2 F_3$.

A sua volta:

$$f_1 = \cos\widehat{nx_1}\left\{M\sum_{si}\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right)^2 + M\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\sum_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\right.$$

$$+\frac{M-N}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)-\sum\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_3}\right)^2-\sum\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_2}\right)^2-\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]\right\}+\cos\widehat{nx_2}\left\{M\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\sum_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\right.$$

$$+\frac{M-N}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\sum\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\frac{\partial u_s}{\partial x_2}-\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right]\right\}+\cos nx_3\left\{M\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\sum_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\right.$$

$$+\frac{M-N}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)+\sum\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\frac{\partial u_s}{\partial x_3}-\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right]\right\};$$

da cui, con permutazione degli indici si ottengono $f_2\, f_3$.

Indicando con $L_i$ l'espressione che si ottiene dal primo membro della [29] quando si prescinda dal termine $-\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$, e indicando con $l_i$ il primo membro della [30], le equazioni delle vibrazioni, ove si tenga conto degli elementi del secondo ordine, sono:

[31] $$-\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+L_i+F_i=0$$

[31′] $$l_i+f_i=X_{ni}$$

Posto:

$$u_i=\sigma V_i+\sigma^2 W_i$$

dove $\sigma$ è quantità così piccola che noi possiamo trascurarne le potenze superiori alla seconda, si ricava dal conguaglio dei termini contenenti $\sigma$ allo stesso grado e mettendo poi $v$ in luogo di $\sigma V$ e $w$ in luogo di $\sigma^2 W$:

$$-\rho\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}+L_i(v)=0$$

$$l_i(v)=X_{ni}$$

e poi:

$$-\rho\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}+L_i(w)=F(v)$$

$$l_i(w)=f(v)$$

dove $F(v)$ $f(v)$ stanno ad indicare che le funzioni $F$ ed $f$ sono costruite con $v_1 v_2 v_3$ anzichè con le $u_1 u_2 u_3$.

Vedremo con un esempio che $w$ ammette oltre alle frequenze proprie di $v$, anche altre, che si ottengono da quelle, per via di somma o differenza.

# GLI EFFETTI DEL SECONDO ORDINE NELLE VIBRAZIONI ELASTICHE (*)

(Nota II)

PIETRO TEOFILATO

Summarium. — Aequationes, quae superiore Nota inventae sunt, applicantur ad studium vibrationum liberarum vel coactarum alicuius tubi cylindrici indefiniti; ostenditur autem novas frequentias ac novas possibiles resonantias introduci si quis etiam ad elementa secundi ordinis attendat.

1. – Come applicazione delle cose dette nella Nota precedente, prendiamo a considerare le vibrazioni di un tubo cilindrico indefinito sulle cui pareti agiscano pressioni dipendenti dal tempo e periodiche, come può ad esempio avvenire in una condotta d'acqua forzata, in seguito a variabilità del flusso, ovvero in una canna da sparo, quando l'esplosivo abbia difetto di granitura o di distribuzione.

La considerazione degli elementi del secondo ordine introdurrà, come vedremo, nuove frequenze e nuove possibili risonanze.

Sulle componenti dello spostamento elastico, in coordinate cilindriche $r\, z\, \theta$, faremo la seguente ipotesi:

$$u_r = u(r, t) \quad , \quad u_z = 0 \quad , \quad u_\theta = 0 \ ,$$

per modo che, come è facile calcolare in base a quanto abbiamo esposto in precedenza, le componenti di deformazione, in coordinate $r\, z\, \theta$, saranno:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{r^2} \ , \quad e_{zz} = 0$$

$$e_{r\theta} = e_{z\theta} = e_{rz} = 0 \ .$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini, l'8 ottobre 1939.

L'energia potenziale elastica è data da:

$$L = \frac{M}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right)^2 - (M - N)\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{M}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}\right] -$$
$$- \frac{M - N}{2}\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{u}{r}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) ,$$

ove si è tenuto conto fino agli elementi del terzo ordine.

Indicato con $dS$ l'elemento di volume dello spazio elastico e con $d\sigma$ un elemento del contorno, infine con $P_r$ lo sforzo normale a questo, otterremo dal principio variazionale:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[T - \int_s L\, dS\right] dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_\sigma P_r\, \delta r \cdot d\sigma \ ,$$

l'equazione del moto vibratorio e le condizioni al contorno.

Per scriverle in breve, porremo:

$$F(u) \equiv \frac{3M - N}{2r}\left[\frac{u^2}{r^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right] - 3M\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} -$$
$$- N\frac{u}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) - N\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$f(u) \equiv -\left[\frac{3}{2}M\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{N}{2}\frac{u^2}{r^2} + N\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]$$

e porremo anche:

$$L(y) \equiv M\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{y}{r}\right)$$

$$l(y) \equiv M\frac{\partial y}{\partial r} + N\frac{y}{r}$$

Se le pressioni sulle pareti sono espresse da:

$$P_r = -\sum_i P_i \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) , \quad \text{sulla parete interna} \quad (r = a)$$
$$P_r = -\sum_i Q_i \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) , \quad \text{sulla parete esterna} \quad (r = b) \ ,$$

si avrà l'equazione indefinita:

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mathrm{L}(u)=\mathrm{F}(u)$$

e al contorno:

$$\Big[l(u)\Big]_{r=a}=\Big[f(u)\Big]_{r=a}-\sum_i \mathrm{P}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

$$\Big[l(u)\Big]_{r=b}=\Big[f(u)\Big]_{r=b}-\sum_i \mathrm{Q}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

dove è importante rilevare che $\mathrm{F}(u)$ ed $f(u)$ sono di secondo grado nelle $u$ e loro derivate.

Posto:

$$u=\sigma\mathrm{V}+\sigma^2\mathrm{W}\ ,$$

dove $\sigma$ è quantità piccola per cui si possono trascurare i termini in $\sigma^3$, potremo stabilire il conguaglio fra i termini contenenti $\sigma$ al primo grado, separatamente dal conguaglio fra i termini che contengono $\sigma$ al secondo grado. Nelle equazioni che così si ottengono, si metta poi $v$ in luogo di $\sigma\mathrm{V}$, e $w$ in luogo di $\sigma^2\mathrm{W}$, e si avranno per $v$ e $w$ rispettivamente le seguenti equazioni e condizioni:

$$-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\mathrm{L}(v)=0$$

[1]
$$\Big[l(v)\Big]_{r=a}=-\sum_i \mathrm{P}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

$$\Big[l(v)\Big]_{r=b}=-\sum_i \mathrm{Q}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

$$-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mathrm{L}(w)=\mathrm{F}(v)$$

[2]
$$\Big[l(w)\Big]_{r=a}=\Big[f(v)\Big]_{r=a}$$

$$\Big[l(w)\Big]_{r=b}=\Big[f(v)\Big]_{r=b}$$

essendo:

$$[3] \qquad u = v + w$$

2. – Prima di affrontare i problemi [1] e [2], ne risolveremo due altri, l'uno in questo paragrafo, l'altro nel successivo. Ci occupiamo qui del problema omogeneo:

$$[4] \qquad \begin{aligned} &-\rho \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \mathrm{L}(g) = 0 \\ &l(g) = 0 \,, \quad \text{per} \begin{cases} r = a \\ r = b \,. \end{cases} \end{aligned}$$

Posto:

$$[5] \qquad g_n = \cos(p_n t + \omega_n) \cdot \psi_n(r)$$

$$[6] \qquad g = \sum \mathrm{A}_n g_n \,,$$

si trova per $\psi_n$:

$$[7] \qquad -\rho p_n^2 \psi_n + \mathrm{L}(\psi_n) = 0$$

$$[8] \qquad l(\psi_n) = 0 \,, \quad \text{per} \begin{cases} r = a \\ r = b \,. \end{cases}$$

Un sistema fondamentale di soluzioni della [7] è dato da:

$$[9] \qquad c_1 \mathrm{J}_1(rh_n) + c_2 \mathrm{Y}_1(rh_n)$$

$$[10] \qquad \left(\text{per } h_n = \sqrt{\frac{\rho p_n^2}{\mathrm{M}}}\right) \,,$$

dove $\mathrm{J}_1$ $\mathrm{Y}_1$ sono le funzioni di Bessel, rispettivamente di prima e di seconda specie, e del primo ordine.

Posto:

[11] $$\chi(r,h) \equiv \left[h\mathrm{M}\,\mathrm{J}_1'(rh) + \frac{\mathrm{N}}{r}\,\mathrm{J}_1(rh)\right] / \left[h\mathrm{M}\,\mathrm{Y}_1'(rh) + \frac{\mathrm{N}}{r}\,\mathrm{Y}_1(rh)\right]$$

e sostituita la [9] nella [8], si trova:

[12] $$\chi(a,h) = \chi(b,h) = -\frac{c_2}{c_1}$$

L'eguaglianza dei due primi membri della [12] costituisce per la [7] l'equazione degli autovalori $h_n$ ossia, per la [4] e [5], *l'equazione delle frequenze $p_n$ delle vibrazioni libere.* Poichè l'equazione [7] rientra nel tipo di equazione autoaggiunta:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda\,r(x)\right]y = 0 \quad ,$$

dove è:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= x > 0 \\ q(x) &= -\frac{1}{x} \neq 0 \\ r(x) &= n k^2 x > 0 \end{aligned}\right\} \text{per} \quad a \leqslant x \leqslant b \ ,$$

allora, attese le condizioni ai limiti [8], gli autovalori sono, come è noto, tutti reali, ed a ciascuno di essi corrisponde una sola autofunzione, essendo dalla [12], il rapporto $c_2 : c_1$ univocamente determinato.

Assunto $c = 1$, risulterà, a norma delle [5], [6], [9] e [12]:

[13] $$g = \sum \mathrm{E}_n \cos(p_n t + \omega_n)\left[\mathrm{J}_1(rh_n) - \chi(a,h_n)\cdot \mathrm{Y}_1(rh_n)\right]$$

dove $h_n$ ha il significato [10].

La [13] è l'espressione dello spostamento elastico, nella comune approssimazione, dovuto alle frequenze *libere*.

3. – Consideriamo adesso il problema seguente:

$$[14] \qquad \begin{aligned} & -\rho \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + L(G) = \Phi(r) \cos(\lambda t + \mu) \\ & l(G) = \chi(r) \cos(\lambda t + \mu) \quad \text{per} \begin{cases} r = a \\ r = b \end{cases} \end{aligned}$$

Poniamo:

$$[15] \qquad R = Ar + Br^2 + Cr^3 + Dr^4$$

$$[16] \qquad G = R \cos(\lambda t + \mu) + H \quad ,$$

ed allora il problema [14] si trasforma nell'altro:

$$\begin{aligned} & -\rho \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + L(H) = \left[\Phi(r) - \lambda^2 \rho R - L(R)\right] \cos(\lambda t + \mu) \\ & l(H) = l(G) - l(R) \cos(\lambda t + \mu) \quad \text{per} \begin{cases} r = a \\ r = b \end{cases} \end{aligned}$$

Poniamo per brevità:

$$[17] \qquad \gamma(r) \equiv \Phi(r) - \lambda^2 \rho R - l(R)$$

e teniamo conto del valore di $l(G)$ dato in [14]; potremo scrivere:

$$[18] \qquad \begin{aligned} & -\rho \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + L(H) = \gamma(r) \cos(\lambda t + \mu) \\ & l(H) = \left[\chi(r) - l(R)\right] \cos(\lambda t + \mu) \quad \text{per} \begin{cases} r = a \\ r = b \end{cases} \end{aligned}$$

Possiamo ora scegliere le quattro costanti A B C D in modo che risultino soddisfatte le quattro equazioni algebriche, lineari in A B C D, seguenti:

[19]
$$\Big[l(\gamma)\Big]_{r=a}=0\ ,\quad \Big[l(\gamma)\Big]_{r=b}=0\ ,$$
$$\chi(a)-\Big[l(\mathrm{R})\Big]_{r=a}=0\ ,\quad \chi(b)-\Big[l(\mathrm{R})\Big]_{r=b}=0\ .$$

Le [18] assumeranno la forma:

[20]
$$-\rho\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial t^2}+l(\mathrm{H})=\gamma(r)\cos(\lambda t+\mu)$$
$$l(\mathrm{H})=0\begin{cases}\text{per } r=a\\ \text{per } r=b\end{cases}.$$

Sarà inoltre verificata l'importante circostanza, che $\gamma(r)$ soddisfa alle condizioni: $l(\gamma)=0$, per $r=a,b$ (espresse dalle due prime delle equazioni [19]); soddisfa cioè alle stesse condizioni ai limiti [8], cui soddisfano le autofunzioni.

Segue che $\gamma(r)$ è sviluppabile in serie uniformemente convergente delle $\psi_n$, e potremo scrivere:

$$\gamma(r)=\sum \mathrm{A}_n\,\psi_n(r)$$

Posto allora:

[21] $$\mathrm{H}=\sum \varphi_n(t)\cdot\psi_n(r)\ ,$$

avremo:

$$\sum\Big[-\rho\ddot{\varphi}_n\psi_n+\varphi_n\mathrm{L}(\psi_n)\Big]=\sum \mathrm{A}_n\cos(\lambda t+\mu)\,\psi_n\quad ;$$

ovvero, per la [7]:

$$\sum \left[\rho \ddot{\varphi}_n + p_n^2 \varphi_n - A_n \cos(\lambda t + \mu)\right] \cdot \psi_n = 0$$

che si soddisfa assumendo:

$$\varphi_n = c_n \cos(p_n t + \gamma_n) + \frac{A_n}{\rho(\lambda^2 - p_n^2)} \cos(\lambda t + \mu) \quad . \tag{22}$$

La [22] mette in vista il fenomeno di risonanza per $\lambda$ che tende verso $p_n$, in quanto il termine $n^{mo}$ dell'espressione H, data dalla [21], cresce in tal caso indefinitamente.

4. – Tanto il problema [1] che il problema [2], rientrano in quello più generale impostato nelle [14]; [1] vi rientra quando si ponga:

$$\chi_i(a) = -P_i \quad ; \quad \chi_i(b) = -Q_i \quad ; \quad v = \sum_i v_i \tag{23}$$

dove $v_i$ soddisfi a:

$$-\rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + L(v_i) = 0$$

$$l(v_i) = \chi_i(r) \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) \quad \text{per} \begin{cases} r = a \\ r = b \end{cases} .$$

Porremo allora, a norma della [15]:

$$v_i = R \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) + H$$

ed otterremo, per le quattro costanti A B C D, le equazioni seguenti, che si deducono dalle [17] e [19]:

$$-\lambda^2 \rho\, l(R) - l\big(l(R)\big) = 0 \quad \text{per} \begin{cases} r = a \\ r = b \end{cases}$$

$$-P_i - \big[l(R)\big]_a = 0 \quad , \quad -Q_i - \big[l(R)\big]_b = 0 \quad ,$$

ovvero, esplicitando:

$$-\mathrm{A}\left[\lambda^2\rho(\mathrm{M}-\mathrm{N})+\frac{\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2}{a}\right]-\mathrm{B}\Big[\lambda^2\rho(2\mathrm{M}+\mathrm{N})a+$$

$$+(2\mathrm{M}^2+3\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)\Big]-\mathrm{C}\left[\lambda^2\rho(3\mathrm{M}+\mathrm{N})a^2+(6\mathrm{M}^2+5\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)a\right]-$$

$$-\mathrm{D}\left[\lambda^2\rho(4\mathrm{M}+\mathrm{N})a^3+(12\mathrm{M}^2+7\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)a^2\right]=0$$

$$-\mathrm{A}\left[\lambda^2\rho(\mathrm{M}-\mathrm{N})+\frac{\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2}{b}\right]-\mathrm{B}\Big[\lambda^2\rho(2\mathrm{M}+\mathrm{N})b+$$

$$+(2\mathrm{M}^2+3\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)\Big]-\mathrm{C}\left[\lambda^2\rho(3\mathrm{M}+\mathrm{N})b^2+(6\mathrm{M}^2+5\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)b\right]-$$

$$-\mathrm{D}\left[\lambda^2\rho(4\mathrm{M}+\mathrm{N})b^3+(12\mathrm{M}^2+7\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)b^2\right]=0$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{M}+\mathrm{N})+\mathrm{B}(2\mathrm{M}+\mathrm{N})a+\mathrm{C}(3\mathrm{M}+\mathrm{N})a^2+\mathrm{D}(4\mathrm{M}+\mathrm{N})a^3=-\mathrm{P}_i$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{M}+\mathrm{N})+\mathrm{B}(2\mathrm{M}+\mathrm{N})b+\mathrm{C}(3\mathrm{M}+\mathrm{N})b^2+\mathrm{D}(4\mathrm{M}+\mathrm{N})b^3=-\mathrm{Q}_i$$

Ottenute così A B C D, costruiremo R con la [15], e $\gamma(r)$ con la [17]; sviluppando $\gamma(r)$ in serie di $\psi_n$ troveremo H dalla [21]; e quindi $v_i$.

Attribuendo ad R ed H l'indice $i$ e ricordando le [23], otterremo:

$$\mathrm{H}_i=\sum_n \varphi_{ni}\psi_n$$

[24] $$v=\sum \mathrm{R}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)+\sum\psi_n(\sum\varphi_n) \;,$$

dove $\varphi_{ni}$, analoga espressione della [22], non è altro che:

[25] $$\varphi_{ni}=c_{ni}\cos(p_n t+\eta_n)+\frac{\mathrm{A}_{ni}}{\rho(\nu_i^2-p_n^2)}\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

La [24], tenuto conto della [25], esprime *lo spostamento elastico*, in prima approssimazione, *quando*, a differenza del paragrafo 3, *sulle pareti del tubo si esercitano delle pressioni variabili*. Troviamo dunque in tal caso, che alle frequenze delle vibrazioni libere, $p_n$, si aggiungono le frequenze $\nu_i$ delle pressioni sopra una parete, e la *risonanza* avviene quando una delle $\nu_i$ si accosta ad una delle $p_n$.

5. – Osserviamo anzitutto che tanto $F(u)$ che $f(u)$, come già si è detto nel paragrafo 1, sono di secondo grado in $u$ e sue derivate rispetto ad $r$. Quindi $F(v)$ ed $f(v)$, a norma delle [24] e [25], conterranno termini in cui figurano i prodotti di secondo grado delle espressioni seguenti:

$$\cos(p_n t + \eta_n) \quad , \quad \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) \ ;$$

cosicchè $F(v)$ ed $f(v)$ conterranno termini di primo grado in:

$$\cos(\lambda t + \mu) \ ,$$

dove $\lambda$ ha uno dei valori:

$$0 \ , \quad p_n \pm p_m \ , \quad \nu_i \pm \nu_j \ , \quad p_r \pm \nu_s \ .$$

Potremo cioè scrivere:

$$F(v) = \Phi_0(r) + \sum \Phi_i(r) \cos(\lambda_i t + \mu_i)$$

$$f(v) = \chi_0(r) + \sum \chi_i(r) \cos(\lambda_i t + \mu_i) \ ;$$

e allora, posto:

$$w = w_0 + \sum w_i \ ,$$

soddisferemo il problema [2] mediante:

$$-\rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + L(w_i) = \Phi_i(r) \cos(\lambda_i t + \mu_i)$$

$$l(w_i) = \chi_i(r) \cos(\lambda_i t + \mu_i) \quad \text{per} \quad r = a, b \ .$$

Il calcolo di ogni $w_i$ richiede quindi il procedimento adottato per la ricerca di G nel § 3. Quanto a $w_0$ si hanno le seguenti condizioni:

$$-\rho\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+\mathrm{L}(w_0)=\Phi_0(r)$$

$$l(w_0)=\chi_0(r) \quad \text{per} \quad r=a,b \ .$$

Posto:

$$w_0=\overline{\mathrm{R}}_0+\overline{\mathrm{H}}_0$$

dove $\overline{\mathrm{R}}_0$ è dato dalla [15] ed $\overline{\mathrm{H}}_0$ dalla [21], il metodo del § 3 si applica senz'altro ($\lambda=\mu=0$).

Indicando con $\overline{\mathrm{R}}_i$ la funzione R della [15] ottenuta nel calcolo diretto alla determinazione di $w_i$, avremo:

$$w=\sum_{i=0}\overline{\mathrm{R}}_i\cos(\lambda_i t+\mu_i)+\sum_{i=0}\psi_n\sum_n\overline{\varphi}_{ni}$$

dove:

$$\overline{\varphi}_{ni}=\overline{c}_{ni}\cos(p_n t+\overline{\gamma}_n)+\frac{\overline{\mathrm{A}}_{ni}}{\lambda_i^2-p_n^2}\cos(\lambda_i t+\mu_i) \ . \qquad (i=0,1,2,3,\ldots)$$

*La presenza degli elementi di secondo ordine porta dunque risonanza quando una delle frequenze libere coincide con:*

$$p_n\pm p_m \ , \quad \nu_i\pm\nu_j \ , \quad p_n\pm\nu_s \ ,$$

cioè con una delle somme o differenze, sia di due frequenze libere, sia di due frequenze relative a pressione di parete, sia di una di pressione con una libera.

6. – L'equazione delle frequenze [2], posto:

$$rh = y \ ,$$

si scrive:

$$\left[\chi(1,y)\right]_{y=ah} = \left[\chi(1,y)\right]_{y=bh}$$

che, posto:

$$\sigma = \frac{b}{a} \ , \quad x = ah \ ,$$

diventa:

$$\chi(1,x) = \chi(1,\sigma x) \ .$$

È da segnalare un particolare autovalore, quando $a, b$ sono molto vicini fra loro, cioè quando lo spessore della parete è molto sottile. Infatti, in tal caso si può scrivere:

$$\sigma = 1 + \omega$$

con $\omega$ piccolo, e perciò:

[26] $$\chi(1,x) = \chi(1,x) + \omega x \frac{\partial}{\partial x} \chi(1,x) \ .$$

Si tenga ora presente la nota formola cui soddisfano le funzioni di Bessel:

[27] $$J_1 Y_1' - Y_1 J_1' = \frac{2}{\pi x}$$

donde, per derivazione, si ha:

[28] $$J_1 Y_1'' - Y_1 J_1'' = -\frac{2}{\pi x^2}$$

Si osservi inoltre che $J_1$, $Y_1$ soddisfano l'equazione in $z$:

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sqrt{x}\cdot z) + \left(1 - \frac{3}{4x^2}\right)\sqrt{x}\cdot z = 0$$

Se, invece di $z$, mettiamo ora $J_1$ ed ora $Y_1$, e moltiplichiamo per $\sqrt{x}\,Y_1'$ e $\sqrt{x}\,J_1'$ rispettivamente, procedendo dopo a sottrazione, si ottiene:

[29]
$$\begin{aligned}(\sqrt{x}\,J_1)''(\sqrt{x}\,Y_1)' - (\sqrt{x}\,Y_1)''(\sqrt{x}\,J_1)' &= \\ = -\left(1 - \frac{3}{4x^2}\right)\sqrt{x}\left[J_1(\sqrt{x}\,Y_1)' - Y_1(\sqrt{x}\,J_1)'\right]\end{aligned}$$

La [26] che si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(1, x) = 0 ,$$

in virtù di [27], [28], [29], diventa:

[30]
$$2x^2 - \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{2N^2}{M^2} - 1 = 0$$

rimanendo esclusi gli altri valori di $x$, che naturalmente saranno molto grandi.

Per l'acciaio, la [30] si riduce approssimativamente a:

$$4x^2 - 3x^{1/2} - 1{,}25 = 0 ,$$

da cui risultano le radici positive:

$$x = 0{,}15 , \quad x = 1{,}04 ,$$

ovvero:

$$h = \frac{0{,}15}{a} \;, \quad h = \frac{1{,}04}{a} \;;$$

e ricordando la [10] si ottengono circa:

$$\frac{3}{2\pi a} \;, \quad \frac{20}{2\pi a} \;\; \text{chilocicli}$$

$a$ essendo il raggio del tubo, espresso in centimetri.