

P.A.S.
Acta 1

Res.

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

A C T A

ANNVS I
VOLVMEN I

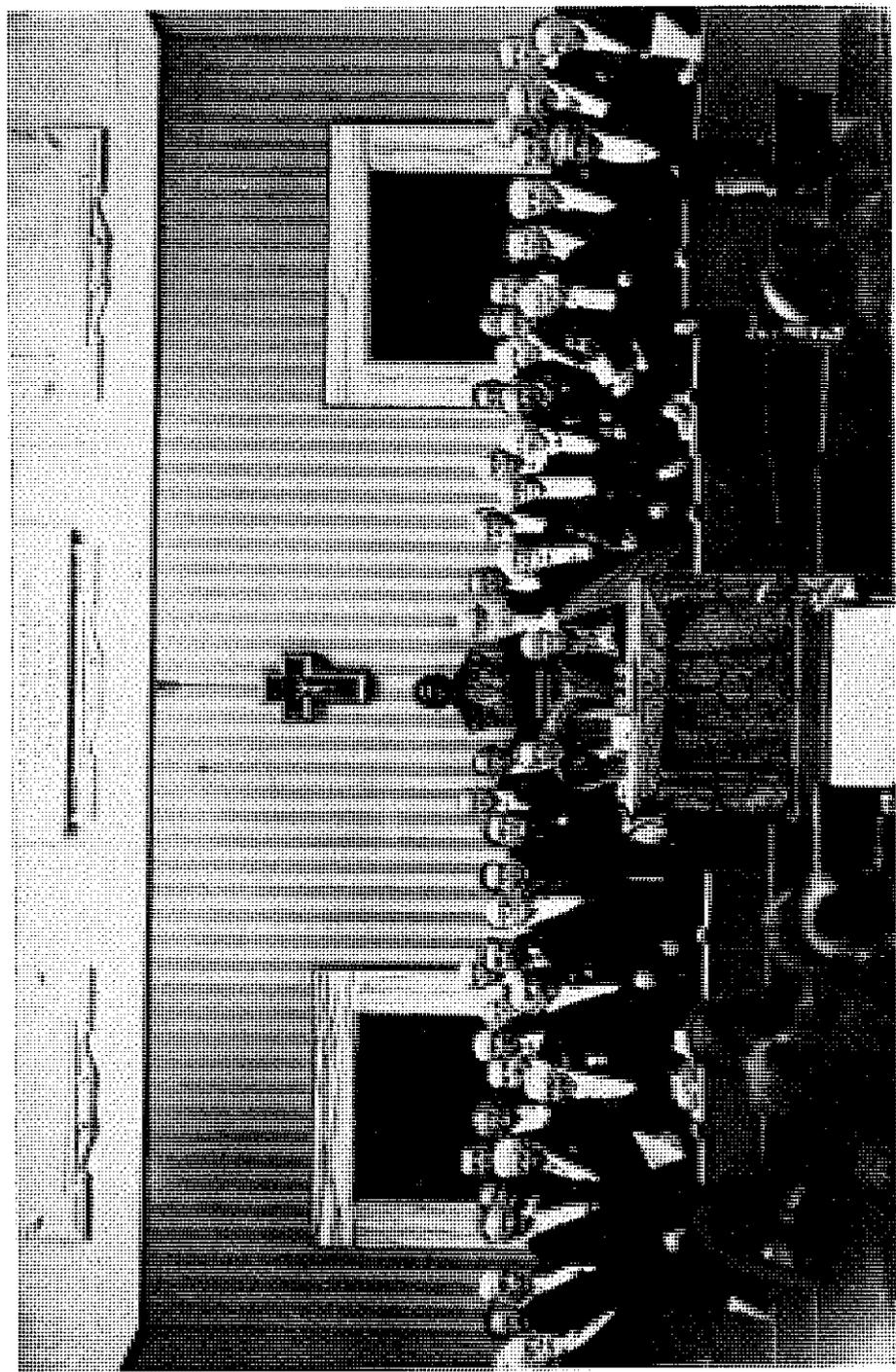


EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

—
MDCCCXXXVII

INDEX

	FOL.
<i>Resoconto della solenne Seduta Inaugurale del 1° giugno 1937 e della prima Tornata accademica</i>	I-XXI
1. U. CISOTTI, <i>Asfericità di una superficie in un suo punto ordinario</i>	1-7
2. G. FINZI, <i>Nuovi dati sul «virus tuberculare» e sulla natura della «esotubercolina spenta» (cum 2 tab.)</i>	9-17
3. M. BOLDRINI, <i>Contributi alla storia della statistica: I. Sul- l'introduzione del metodo statistico in Biologia</i>	19-27
4. C. FERRARI, <i>Problemi della dinamica dei fluidi compres- sibili a velocità ipersonora</i>	29-35
5. R. S. VARMA M. Sc., <i>An infinite integral involving Bessel function and Sonine's polynomial</i>	37-41
6. S. RANZI, <i>Ricerche sulla fisiologia dell'embrione dei cefalo- podi (cum 2 fig.)</i>	43-49
7. N. PARRAVANO e M. GIORDANI, <i>Le proprietà ossidanti del- l'acqua di Fiuggi</i>	51-56
8. E. PISTOLESI, <i>Sulla teoria delle ali sottili (cum 4 fig.)</i>	57-72
9. F. ODONE, <i>Su alcune proprietà di geometria differenziale dei campi vettoriali</i>	73-84
10. M. TIBOR, <i>The distribution of the stars in the Cepheus- Lacerta region (cum 3 fig.)</i>	85-92
11. C. POSSIO, <i>L'azione aerodinamica sul profilo oscillante alle velocità ultrasonore (cum 7 fig.)</i>	93-106



RESOCONTO

DELLA SOLENNE SEDUTA INAUGURALE DEL 1° GIUGNO 1937 E DELLA PRIMA TORNATA ACCADEMICA

La cerimonia inaugurale della Pontificia Accademia delle Scienze si è svolta nella sede dell'Istituto, alla Casina di Pio IV, nei giardini vaticani, ed è riuscita un avvenimento memorando per le personalità che vi hanno preso parte, per le manifestazioni di filiale e riconoscente omaggio verso il Sommo Pontefice Pio XI, munifico Fondatore dell'Accademia, per l'alta e vibrante parola con cui l'Emo Cardinale Eugenio Pacelli, Segretario di Stato di Sua Santità, ha dichiarato, in nome del Santo Padre, inaugurata l'Accademia e ha aperto il primo anno della sua attività.

All'Eminentissimo Principe, che indossava anche la Collana Accademica, faceva corona un elettissimo gruppo di Porporati, e cioè le LL. EE. Revme i Signori Cardinali: Marchetti Selvaggiani, Accademico Pontificio Onorario, Gasparri, Dolci, Laurenti, Verde, Lauri, Rossi, Serafini, Fumasoni Biondi, Tedeschini, Salotti, Marmaggi, Maglione, Cremonesi, Caccia Dominioni, Jorio, Cattani, Massimi, Boetto e Tisserant.

Intervenuti altresì S. A. Ema il Principe Chigi della Rovere Albani, Gran Maestro del S. M. O. di Malta, Accademico Pontificio Onorario; le LL. EE. Revme i Monsignor Pizzardo e Tardini; S. E. il Marchese Serafini, Governatore della Città del Vaticano; le LL. EE. i Monsignor Giannini, Arata, Costantini, Pisani, Ruffini, Castelli, Hayes; il Revmo Padre Cordovani O. P., Maestro del Sacro Palazzo Apostolico; numerosi Prelati, tra cui i Monsignor Perugini, Montini, Fontenelle, Del Ton, Tondini, Colonna, Camagni, Hurley; Generali di Ordini Religiosi, tra cui il Revmo P. Gillet O. P. e il Revmo P. Ledóchowski S. J.; il Rettore

della Pontificia Università Gregoriana Padre Mc Cormik; il P. Frey, Rettore del Seminario Francese; i rappresentanti degli Atenei e dei Seminari di Roma ed altre molte personalità ecclesiastiche.

Dell'Eccellentissimo Corpo Diplomatico erano presenti gli Ambasciatori del Perù, del Cile, d'Italia e del Belgio; i Ministri di Ungheria, Cecoslovacchia, Austria, Venezuela, Ordine di Malta, Romania (il quale rappresentava anche la Reale Accademia di Romania), Portogallo, Inghilterra, Cuba e Jugoslavia; gli Incaricati di Affari di Lituania, Polonia e Francia.

Accoglievano le personalità il Conte Dalla Torre, Cameriere Segreto di Spada e Cappa di Numero e il Gr. Uff. Manzia, Cameriere d'Onore di Spada e Cappa di Numero. Ad essi si era aggiunto il Cameriere d'Onore di Spada e Cappa dott. Hruban. Il comm. Belardo della Segreteria di Stato riceveva gli Eccellentissimi Diplomatici.

Della Pontificia Accademia delle Scienze hanno partecipato alla solenne Tornata, oltre al Presidente Revmo P. Agostino Gemelli, O. F. M., gli Accademici: Amaldi, Armellini, Bianchi, Birkhoff, Bjerknæs, Boldrini, Bottazzi, Buytendijk, Castellani, Celonnetti, Crocco, Dal Piaz, Debye, De Filippi, de la Vallée Poussin, Giordani, Giorgi, Godlewski, Gola, Grégoire, Guidi, Keesom, Lemaître, Lepri, Levi-Civita, Lombardi, Michotte van den Berck, Nobile, Noyons, Panetti, Parravano, Pensa, Petritsch, Pistolesi, Rasetti, Rondoni, Schrödinger, Taylor, Toniolo, Tschermak-Seysenegg, Vallauri, Vercelli, Volterra; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: Dom Albareda O. S. B., P. Gatterer S. J., Monsignor Angelo Mercati, P. Schmidt S. D. V., P. Stein S. J., ed il Cancelliere dell'Accademia dott. Pietro Salviucci.

Tutti gli Accademici indossavano l'aurea collana, distintivo dell'alto ufficio, fatta ad essi pervenire dal Santo Padre.

Presenti inoltre il sen. Millosevich per il Senato del Regno d'Italia e l'on. Borghese per la Camera dei Deputati; molte poi e cospicue le rappresentanze di accademie, enti culturali e scientifici di Roma, di istituti.

All'ora indicata è giunto, fatto segno al deferente saluto dell'Assemblea, Sua Eminenza Revma il Signor Cardinale Eugenio Pacelli: e subito egli, dette le preci di rito, ha dato inizio alla solenne seduta.



L'INDIRIZZO DEL PRESIDENTE

Il Presidente Padre Gemelli, avuto l'assenso dell'Eminentissimo Porporato, ha letto il seguente discorso :

*Eminentissimo Principe, Eccellenze, Signori e Signore
e carissimi ed illustri Colleghi,*

La inaugurazione della Pontificia Accademia delle Scienze doveva aver luogo nel fausto giorno del genetliaco di Sua Santità, nella Villa di Castel Gandolfo, ove Pio XI ci aveva convenuti perchè avessimo modo di ammirare la magnifica Specola e i laboratori annessi, da Lui stesso attrezzati con ogni perfezionato strumento e ove due nostri insigni colleghi scrutano il cielo e ne studiano i fenomeni e indagano la costituzione dell'universo. Noi tutti aspettavamo con gioia di fare corona al trono di Sua Santità e di udirne l'alta parola di Maestro, gioia accresciuta dalla lunga attesa (troppo lungo periodo di tempo per il nostro affetto filiale), durante il quale Pio XI fu costretto nel suo letto di dolori. Le esigenze della sua preziosa salute ci costringono a compiere la inaugurazione senza la Sua augusta e desiderata presenza. I figli devoti avranno al pari di me, offerta la pena patita perchè la Provvidenza di Dio Padre allunghi la Sua preziosa vita. Questa la ragione per la quale la inaugurazione dell'Accademia si compie oggi qui nella Casina di Pio IV che il Pontefice ha destinato a Sede della nostra Accademia, dopo averne restaurata l'antica bellezza e dopo di avere aggiunto quanto era necessario al funzionamento dell'Accademia stessa. Poichè questa si inaugura senza la presenza dolce e cara di Colui che ne è stato il fondatore, senza che a tutti voi sia dato sentire dalle Sue labbra stesse quali sono stati gli intenti e i propositi Suoi nobilissimi nel fondare la nostra Accademia, e poichè io ho avuto la singolare fortuna, in numerose e lunghe udienze indimenticabili, di raccogliere dalla parola di Pio XI stesso gli alti pensieri che Lo hanno guidato nella fondazione della nostra Accademia, mi sia permesso esporli qui. È questo, mi pare, l'omaggio migliore che io, a nome vostro, Gli posso

fare; studiando con Voi l'opera Sua, noi ci sentiremo stimolati a dare ad essa l'attuazione più fedele e più feconda.

Prima però di fare questo, poichè Sua Santità ha voluto essere qui rappresentato dal Suo Cardinale Segretario di Stato, l'E.mo Cardinale Eugenio Pacelli, mi sia lecito presentare al rappresentante del Papa, a nome degli Accademici Pontifici l'omaggio nostro e mi sia concesso di pregarlo di rendersi interprete (migliore non ne potremmo avere di Colui che il Papa ha scelto a Suo più diretto collaboratore nel governo della Chiesa), dei nostri sentimenti di gratitudine, di devozione, di ammirazione. Ma anche alla Vostra persona, Eminentissimo Principe della Chiesa, a Voi che onorate il nostro Collegio, in quanto ne siete Membro Onorario, noi desideriamo porgere il nostro omaggio. Sappiamo l'alta mente Vostra, il Vostro grande cuore, l'indomita volontà di lavoro, sappiamo come Voi onorate oltre che la Chiesa anche gli studi delle scienze sacre. Noi perciò siamo grati al Santo Padre di avere voluto scegliere un così autorevole rappresentante.

La costituzione dell'Accademia Pontificia delle Scienze, della quale fanno parte uomini insigni nel campo delle varie scienze pure e applicate scelti in ogni Nazione (basti ricordare a provarlo che ne fanno parte ben undici Premi Nobel) rinnova quel magnifico spettacolo che in Roma diede nei secoli passati la Corte Pontificia quando fu centro e convegno di uomini illustri nelle scienze, nelle lettere e nelle arti e di ogni più alto culto della verità. La istituzione della nostra Accademia nel secolo XX, ossia un secolo che parve e fu detto stupido perchè rinnegatore di ogni più alta idealità, assume un significato che noi dobbiamo sottolineare in questa solenne Tornata. Le scienze, noi lo sappiamo per esperienza nostra e lo sappiamo come frutto delle nostre meditazioni, sono vie per le quali sono indagate e sono scoperte le leggi che governano la natura; sono esse strumenti mirabili per mezzo dei quali l'occhio nostro riesce a penetrare nelle più intime e riposte strutture dell'universo e a cogliere le misteriose funzioni dei viventi; sono anche fonti di preziose applicazioni grazie alle quali all'umanità viene resa la vita più feconda di bene e più agevole; ma le scienze sono anche vie, per quanto indirette, per le quali si può con sufficiente sicurezza, giungere alla conoscenza di quelle verità prime che debbono guidare la vita. Dico verità prime, perchè rivelatrici di ciò che è più importante per l'uomo; primo, perchè ragione suprema nell'agire umano.

Noi che abbiamo consumati i nostri anni nella dolce, ma pur sempre grave fatica di chinarci sugli strumenti per indagare i fenomeni dell'universo e per ricercare da quali misteriose leggi sono regolati, abbiamo imparato non solo quanto piccolo è l'ambito del nostro sapere e corta la nostra veduta, ma abbiamo anche conosciuto che una mano sapiente tutto regola ed ordina in misura e quantità; soprattutto proprio allorchè ci venivano meno le forze all'ardua indagine, allora abbiamo appreso che la luce che ci fa conoscere il vero con il vero stesso si identifica.

Queste considerazioni sull'altezza del compito assolto da un cultore della scienza fedele al rigore del metodo e indagatore onesto nel campo di studi prescelti ci permette di comprendere da quali pensieri è stato mosso Sua Santità nel costituire la nostra Accademia. Egli ha dato all'Accademia per compito esclusivamente di promuovere la ricerca scientifica nei vari campi senza alcuna preoccupazione di altro genere, all'infuori di quella di servire con fedeltà e con amore la scienza. Egli non ha chiesto a noi di avere nella ricerca scientifica nemmeno la preoccupazione degli interessi, i più alti che può avere l'umanità: della religione e della morale. A ciascuno di noi Egli chiede niente altro che abbiamo a servire con fedeltà la scienza da ciascuno prescelta. Nello scegliere poi gli uomini che Egli stesso ha chiamato a far parte della nostra Accademia, Pio XI non ha pesato altro che il valore scientifico di ognuno; non ha di ognuno di noi preso in considerazione la religione e la nazionalità, ma con quale rettitudine d'animo e con quale valore di mente ha servito la propria scienza.

Ardito senza dubbio il disegno di Pio XI, ma pienamente giustificato.

Permettete che io rilegga un brano del *Motu proprio* con il quale Egli ha costituito la nostra Accademia dall'opera di scienziati che attendono a coltivare la loro scienza senza alcuna preoccupazione e che mirano solo ad apportare ad essa il contributo di nuove conoscenze. La Sede Apostolica attende e riceve un grande aiuto e ad essa viene e verrà conferito un grande onore. Infatti « quidquid honoris ac doctrinae cultoribus coelesti Numini tribuitur, id procul dubio, ut debitum humanae rationis obsequium Summae Veritati testatur, ita nobilem prae primis procreatori Deo observantiam praestat ». Per questo il Santo Padre, dapprima nel discorso con il quale in questa stessa Sede due anni or sono annunciava la progettata riforma dell'antica e gloriosa Accademia

dei Lincei, poscia più solennemente nello stesso *Motu proprio*, aggiungeva che la nostra Accademia è chiamata ad essere il Senato scientifico della Chiesa.

Ciò che Pio XI attende dalla nostra attività scientifica impegna noi di fronte a noi stessi e di fronte agli uomini che, come noi hanno dedicato le loro energie alla scienza, ci impegna soprattutto di fronte a questo mondo moderno che, assetato di verità quanto più se ne allontana, ci chiede che noi adempiamo la nostra missione servendo in sincerità e umiltà a quest'ansia del vero che è insita nella natura umana. Per queste considerazioni, parecchi tra gli Accademici, proprio quelli che non hanno la Fede Cattolica, o quelli che non conoscono di Dio altro che quanto è a loro svelato dalla conoscenza naturale, hanno attestato che nessuna corona d'alloro sin qui conseguita, è riuscita a loro più gradita di questo onore che è stato loro fatto con la nomina ad Accademici Pontifici, proprio perchè Pio XI con questo atto, ha dato, come gli antichi Pontefici romani, la dimostrazione che attorno alla Cattedra di Pietro, appunto perchè Cattedra di verità, hanno diritto di stare tutti e soltanto quegli uomini che hanno fatto scopo della loro vita il culto della verità, e a tali uomini chiede di collaborare a quella ricerca del vero che rappresenta per l'uomo la più alta espressione della nobiltà della sua origine e della sua natura.

Queste considerazioni ci conducono a comprendere il profondo significato di un altro atto di Pio XI con il quale ha voluto fare onore alla nostra e Sua Accademia. Sua Santità infatti ha voluto che la medaglia annuale che ogni anno il Pontefice fa coniare, recasse quest'anno, insieme con la Sua cara e paterna effigie, anche la memoria dell'odierna celebrazione. Su questa medaglia, a celebrare la fondazione della nostra Accademia, Egli ha fatto riprodurre da mano di insigne artista, il Mistruzzi, i lineamenti di tre uomini: Michelangelo, Leonardo, Volta, nelle opere dei quali è segnata la più vasta orma dello Spirito Creatore che li diede al mondo maestri di sapere, di bellezza e di vita.

Prendendo esempio da questi grandi (che Pio XI con tratto significativamente palese ha messo innanzi a noi come modello, quasi per impegnarci maggiormente al cospetto del mondo nel nostro compito di Accademici Pontifici), traendo da questa solenne giornata l'ammonimento che il luogo, le persone, con singolare eloquenza implicitamente rivolgono a noi, ci ripromettiamo di far fiorire l'Accademia che alle

nostre cure è stata affidata, affinchè essa sia, tra le grandi consorelle del mondo, strumento di verità e di bontà. In quest'ora in cui le Nazioni sono turbate da lotte e da odi, il trovarsi insieme un manipolo di uomini venuti da Paesi diversi, appartenenti a razze diverse, che parlano lingue diverse, uomini di diversa Fede religiosa, uniti dal solo proposito della ricerca del Vero, assume una profonda significazione che certo a nessuno sfuggirà, ammonimento a tutti noi, ma insieme speranza confortatrice nella visione di una umanità riunita nella pace della giustizia e nell'ordine della verità.

Per servire questo ideale, la nostra Accademia ha già iniziato la sua attività.

Presento alla Eminenza Vostra, anche perchè si degni farne omaggio a Sua Santità, e lo presento anche all'Accademia, il primo Annuario, nel quale è passata in rassegna e documentata l'attività scientifica di ciascun Accademico, onde a chi lo consulterà, l'Accademia si presenti con i titoli della sua nobiltà. Questo Annuario è frutto della speciale fatica del nostro caro e solerte Cancelliere il dott. comm. Pietro Salviucci, al quale sono lieto di esprimere la viva gratitudine dell'Accademia.

Presento pure tre fascicoli delle Memorie Scientifiche (*Commentationes*) e alcuni fascicoli delle Note (*Acta*): presento questi fascicoli a dimostrare che nella sua ancor nascosta e pur breve vita l'Accademia ha saputo nobilmente iniziare l'attuazione del suo programma.

Infine mi permetto annunciare che il Consiglio Accademico ha stabilito che un cospicuo premio che s'intitola a Pio XI verrà assegnato ogni anno allo scienziato che dal Consiglio Accademico, su progetto di tutti gli Accademici, verrà ritenuto più degno per il contributo apportato ad un gruppo di discipline, gruppo da determinare anno per anno, e che per questa prima volta è quello delle scienze biologiche.

Chiudo pregando l'Eminenza Vostra di porgere a Sua Santità l'omaggio del nostro ossequio.

Chiedete a Lui, Eminentissimo Principe, la benedizione per quelli fra noi che nella Sua Persona veggono il Padre Comune dei fedeli e che la loro attività pongono a servizio della Chiesa, loro Madre. Pregatelo anche, Eminentissimo Principe, di accettare l'omaggio di quelli fra noi che, pur non essendo figli per vincoli di Fede, non vogliono essere secondi ad alcuno nell'omaggio stesso perchè onorano la Cattedra di

Pietro come la più alta che nel mondo sia stata eretta. Chiedetegli soprattutto che benedica la nostra Accademia, affinchè ai lieti auspici degli inizi corrisponda una attività feconda di rinnovamento nelle scienze e nella vita

Lo stesso P. Gemelli rimetteva quindi all'Emo Cardinale Pacelli l'Annuario dell'Accademia e le pubblicazioni scientifiche edite per la solenne circostanza; quindi dava notizia di cospicue adesioni, tra cui quella di S. E. il Marchese Marconi, impossibilitato ad intervenire per lieve malattia.

LA GRATITUDINE DEGLI ACCADEMICI
AL SANTO PADRE

Subito dopo Sua Eminenza concedeva la parola all'Accademico Pontificio Charles de la Vallée Poussin il quale a nome dei colleghi, leggeva il seguente indirizzo di riconoscente omaggio per il Sommo Pontefice.

Eminence,

L'inauguration de l'Académie Pontificale est une fête que la présence attendue de Sa Sainteté aurait illuminée d'un incomparable éclat. Dieu ne nous a pas accordé cette joie et la fête en est assombrie. Mais, dans sa bonté, Sa Sainteté daigne désigner Votre Eminence pour la remplacer auprès de nous. Nous la remercions bien vivement et nous remercions aussi Votre Eminence. Nous prions aussi Votre Eminence de daigner agréer l'hommage de notre profond respect. Qu'elle veuille bien transmettre au Saint-Père les sentiments qu'il nous aurait été si cher d'exprimer devant Lui et auxquels nous devons joindre les bien regrets que nous cause son éloignement de nous.

*Eminence, Messieurs, Mesdames, Messieurs,
Chers Confrères,*

En me levant dans cette auguste assemblée, j'éprouve un véritable sentiment de confusion. Ce n'est pas à moi, semble-t-il, que revenait cette place, ni l'honneur de prendre la parole au nom des Académiciens

nouvellement choisis et d'exprimer leur hommage au Saint-Père. Les titres que je possède sont bien obscurs à côté de ceux de tant d'autres confrères, qui m'entourent ici, mais qui occupent dans la science une place à laquelle je ne puis prétendre. Aussi, lorsque, votre très illustre Président m'a proposé cette tâche trop flatteuse pour moi, mon premier mouvement était de m'y dérober. Mais il a évoqué ma charge de professeur à l'Université de Louvain et j'ai cru ne plus pouvoir refuser. Veuillez donc ne point considérer ici ma personne, mais seulement le représentant d'une très vieille Institution catholique, qui doit sa création à la Papauté elle-même et qui, depuis plusieurs siècles et à travers toutes les vicissitudes des temps, lui est toujours restée fidèlement attachée.

Après ces excuses et ces explications indispensables, ma première pensée, car, chers confrères, c'est aussi assurément la vôtre, ma première pensée sera d'offrir au très Saint-Père Pie XI l'hommage de notre plus profond respect à tous et de la soumission filiale de ses enfants.

Ensuite nous lui exprimerons notre plus vive et plus profonde gratitude pour l'honneur insigne qu'il nous a fait en nous inscrivant parmi les membres de l'Académie Pontificale et en nous jugeant dignes d'être associés aux grands desseins qu'il fait réposer sur elle et dont le *Motu proprio* nous laisse entrevoir la généreuse portée.

Le premier objet de cette Institution nouvelle est de contribuer au progrès des sciences positives et déjà, de ce seul point de vue, elle se place au tout premier rang. Elle s'y place par l'autorité et le prestige de son fondateur, par son universalité et par la qualité de ses membres. A toutes les époques de l'histoire, la Papauté, consciente de leur importance pour le bien du monde, s'est révélée la protectrice et la gardienne vigilante des sciences et des arts et la nouvelle Académie baigne en naissant dans tout le rayonnement de l'histoire. Elle s'ouvre à tous les peuples et elle inscrit sur sa première liste les personnalités les plus éminentes de la science présente. En faire partie est déjà, de ce seul point de vue, un honneur exceptionnel dont chacun de nous se sent véritablement grandi.

Mais, au delà de son objet scientifique et sur un plan plus élevé encore, nous reconnaissons à cette Académie un but de préservation morale et sociale auquel chacun de nous se sentira¹ heureux et fier de

contribuer dans la sphère de ses moyens et de ses convictions personnelles.

L'existence de Dieu et l'immortalité de l'âme s'imposent à la base de toute loi morale et de toute vie sociale. Cependant la voix désespérante du matérialisme s'élève sans se lasser contre ces vérités premières et l'écho qui nous en est rapporté par le livre de la sagesse, après bientôt trois mille ans, n'a rien perdu de son actualité.

« Comme nous sommes nés du néant, nous serons ensuite comme si nous n'avions jamais été, notre pensée n'est qu'une étincelle qui émeut notre cœur; quand elle s'éteindra, notre corps s'en ira en poussière, notre esprit se dissipera comme un air léger. Notre nom lui-même s'évanouira dans l'oubli du temps et nul se gardera le souvenir de nos œuvres, car nos jours passent comme l'ombre et notre fin est sans retour. Nous serons comme si nous n'avions jamais été ».

O destinée tragique de l'homme, doctrine implacable qui défend au malheureux qui souffre de lever les yeux vers le ciel. Tout ce qui peut avoir contribué à nous réunir ici proteste contre elles. Tout ce que nous pouvons faire et dire servira à la défense des trésors spirituels qui donnent un sens à la vie et qui font la grandeur et la noblesse de l'humanité.

Et pour moi en particulier qui vous parle, et d'autre sans doute encore, qui sommes les fils soumis de l'Eglise catholique, quel plus grand honneur pouvait-il nous être fait que de juger nos œuvres capables de servir de témoignage pour la défense de notre foi ?

On affirme, en effet, que la foi et la science se contredisent. Cette affirmation gratuite tombe d'elle-même devant l'œuvre des savants catholiques et mieux que toute autre l'Académie Pontificale aura le privilège d'en fournir la preuve. Je reconnais que le préjugé a perdu de sa force dans les milieux académiques et que l'affirmation n'a plus cours que dans des assemblées où la science authentique n'a vraiment rien à voir mais il reste qu'elle a prise sur l'esprit du public innombrable qui est incapable de la contrôler. Notre témoignage sera d'autant plus utile qu'il s'adressera à des âmes plus simples, et neût-il contribué à préserver que la plus humble de toutes, un chrétien devrait encore mille fois s'en réjouir. Peu importe, en effet, à ses yeux l'humanité de celui

que la vraie lumière éclaire, car, comme le dit un grand poète qui, celui-là du moins, n'était pas impie :

La goutte de rosée à l'herbe suspendue
Y réfléchit un ciel aussi vaste aussi pur
Que l'immense Océan dans ses plaines d'azur.

Il n'y a pas de contradiction possible entre la science et la foi, car Dieu, source de l'une et de l'autre, ne peut se contredire lui-même. Ainsi parle le Concile du Vatican. Mais pas n'est besoin d'admettre de dogmes pour constater qu'en fait cette contradiction est inexistente, ni pour reconnaître sans arrière-pensée les bienfaits et la haute valeur sociale de la doctrine catholique, ni pour aller rendre aux pieds du Souverain Pontife l'hommage qui lui revient. Le Saint-Père, dans le *Motu-proprio*, s'est plu à en rappeler le récent et consolant exemple. Mais ce ne sera pas le dernier. D'autres savants, sans autre guide que leur bonne foi et leur bonne volonté, viendront encore à lui comme au plus haut représentant de la spiritualité, et il les verra incliner, comme eux, leur front pensif devant la majesté de Pierre.

Le catholique, dit-on encore, ne peut chercher librement la vérité donc il ne peut mériter le nom de savant. Cette objection est aussi fausse que l'autre dont d'ailleurs elle n'est pas réellement distincte. Non, le savant catholique ne craint pas la vérité, il la cherche pour le bonheur de la connaître et la joie de la contempler. Pour lui comme pour nous tous, la science pure recherche la vérité pour elle-même et la recherche librement. La liberté est sa condition et cette liberté là, c'est Dieu lui-même qui la protège. Où donc la science est-elle asservie, sinon là où Dieu est proscrit ?

C'est l'athéisme qui veut enchaîner la science à son char, maintenant surtout qu'il prétend s'imposer comme raison d'état et comme principe social avec toutes les armes qu'un despotisme inhumain met entre des mains sans scrupules. Il n'a jamais été plus agressif. Ses assauts sont dirigés contre tout ce qui reste encore debout de la civilisation chrétienne; ses vagues balaient la surface du monde; elles viennent se briser ici au pied du phare dressé sur la pierre où le Christ a bâti son Eglise. On se demande avec angoisse comment finira la tempête.

Sa Sainteté Pie XI a fait frapper une médaille qu'il nous invite à porter dans toutes nos réunions, comme nous la portons aujourd'hui. C'est le signe sous lequel cette Académie est fondée. Aucun d'entre nous n'en peut méconnaître ni le sens ni l'opportunité, mais pour ceux qui croient aux promesses divines, elle sera le gage de la victoire, car, sur son avers, nous voyons la tiare signe d'une autorité infaillible, et s'y enlaçant comme la lierre au chêne, trois mots qui sont une proclamation: *Deus Scientiarum Dominus*, il est un Dieu, maître des sciences comme de tout le reste.

J'ai fini. Il ne me reste plus qu'à prier Votre Eminence de transmettre au Saint-Père, avec l'expression renouvelée de notre profond respect, de notre reconnaissance et de nos regrets, celle aussi des vœux que nous formons pour lui. Dieu veuille lui conserver longtemps encore une vie si précieuse pour le bien du monde; qu'il lui accorde les consolations que réclame son cœur paternel, que cette Académie Pontificale dans laquelle il a mis une prédilection particulière, réponde à ses espérances; que Dieu bénisse les travaux de ses membres pour que la moisson soit abondante et qu'avec sa grâce, elles soit une source toujours renouvelée d'édification.

IL DISCORSO DEL RAPPRESENTANTE DEL SANTO PADRE

Quindi salutato da una dimostrazione di rispettoso ossequio Sua Eminenza Revma il Signor Cardinale Eugenio Pacelli rivolgeva al distinto uditorio la sua alta e vibrante parola, recando ai presenti il pensiero affettuoso, il saluto, il compiacimento ed i motivi di paterna dilezione del Sommo Pontefice:

Eminenze Reverendissime, Eccellenze,
illustri Accademici,

Più che il vostro rinascimento nel vedere come a questa solenne inaugurazione della Pontificia Accademia delle Scienze non sia suggello e augusto decoro la sovrana presenza del gran Pontefice Pio XI che, rinnovando l'antico Istituto dei Nuovi Lincei, ideò e compì così altamente e nobilmente questa insigne Accademia, più, dico, che il vostro rinascimento



è grande la mia meraviglia e confusione nel trovarmi in mezzo a voi a rappresentarLo, essendosi Egli degnato stamane di affidarmi così alto onore e ufficio per trasmettervi quel benvenuto e saluto paterno e apostolico, che meditava il Suo pensiero e il Suo cuore per l'eccelsa stima che ha di voi, nel Suo ardore per il progresso delle scienze, delle quali in voi apprezza così celebrati maestri, che del vedervi presenti e adunati intorno a Lui il suo spirito si sarebbe esaltato in un inno di lode e ringraziamento a Dio, datore di ogni bene. Ma l'ufficio commessomi dall'augusta Sua bontà ben so che desta negli animi vostri, inclinati ad ogni nobiltà di affetto, innanzi tutto la brama, più che di conoscere, di avere una nuova conferma di quanto già è stato autorevolmente annunziato, ossia del motivo per cui non è presente in mezzo a voi la Persona di tanto venerato Padre e Fondatore dell'Accademia, nel fortunato momento della sua aspettata inaugurazione.

Il Santo Padre, come ho avuto io stesso l'onore e la gioia di constatare questa mattina nella consueta Udienza, sta bene, non meno bene di prima, ha potuto celebrare ieri stesso il S. Sacrificio; ma tutto considerato, e solo all'ultima ora, ha ritenuto più prudente, non tanto di risparmiarsi questa fatica e questa prova, quanto di privarsi del grandissimo e desideratissimo piacere che avrebbe avuto nel compierla.

La Sua lontananza è dunque una violenza che il Santo Padre ha fatto al Suo cuore e alla Sua viva brama di rispondere alla vostra non meno viva aspettazione; ma è insieme, permettete che dica così, un deferente omaggio alla scienza, a quella scienza che scruta i segreti e gli occulti limiti delle forze della natura umana, per assicurare una preziosa salute riconquistata e consolidata. È un deferente omaggio che è onore per voi e per il vostro sapere, mentre al tempo stesso è testimonio di stima ai dettami di una scienza, che Egli ha pure inteso di onorare colla istituzione di questa Accademia, memore del precetto della Sacra Scrittura: *Honora medicum propter necessitatem, etenim illum creavit Altissimus (Eccl., 38, 1)*. Anche della medicina è signore Iddio, Signore di tutte le scienze; ed altissimo esempio di questa fede è la sommissione di un Pontefice, che vuole onorare la parola di chi veglia sopra la preziosa vita del Padre Comune del popolo cristiano, per conservarne la salute, buona come da Dio è stata a Lui restituita, salute di un Vegliardo glorioso e franco, cui grava la fronte, insieme col peso di sedici lustri di età, la immensa sollecitudine di tutte le Chiese. Egli non ricusa il

lavoro, e al pari del lavoro non ricusa il dolore, neppure quello di non essersi potuto trovare in mezzo a voi, sacrificando a Dio una brama, il cui compimento era da lui tanto desiderato ed atteso. Era la brama di dichiarare inaugurato questo Senato scientifico, da Lui concepito e creato per il progresso della scienza e della investigazione umana, per l'onore della Sede Apostolica, faro di verità e di salute, per la conoscenza e la gloria di quel Dio, dalla potenza del quale furono fatte le cose tutte, e senza di cui nulla fu fatto di ciò che è stato fatto in cielo, in terra e negli abissi. Appariva al Sommo Pontefice in tutta la sua fulgida luce come dal medesimo divino fonte scaturiscono e scendono all'uomo i rivi potenti delle scienze naturali e razionali e il gran fiume della sapienza rivelata, per quanto questa sgorgi da più profonda origine, inaccessibile alla ragione, ma non alla fede, e pure non meno certa e vera; mentre quelle, dovunque cerchino e incontrino la verità, da qualunque regione dell'universo creato, dai cieli, dagli oceani, dagli abissi terrestri si sprigionano e lampeggino al genio umano, apprestano e innalzano il vestibolo del tempio della fede, i gradini del Sancta Sanctorum, dietro il cui velo si occultano e palpitano i segreti della divinità. Tutta la natura è indirizzata all'uomo, e il fine del moto del cielo, afferma l'Aquinate, è rivolto all'uomo come a fine ultimo nell'ambito degli esseri generabili e mobili (*Contra Gentes*, 3, 22). Ma l'uomo alla sua volta è indirizzato e rivolto a quella immagine e somiglianza che segna in lui il volto di Dio, a quella gloria che cantano i cieli; a quella verità che la mano di Dio ha lasciato come vestigio delle sue dita quando creava il mondo e ogni cosa, a quella più alta verità, che sublima il genio umano oltre le stelle e permane in eterno.

Senonchè ben più che le povere espressioni, con cui io volessi tentar di interpretare la mente dell'Augusto Pontefice, varranno le parole stesse di Lui, che ho l'alto onore di comunicarvi, quelle medesime parole che Egli avrebbe voluto dirvi di persona, se di persona fosse stato qui presente, come lo è col pensiero e col cuore, parole che rimarranno per tutti i giorni avvenire sigillo solenne di apostolica autorità e fondamento della Pontificia Accademia delle Scienze.

Sua Santità avrebbe voluto ricordare di aver già avuto parecchie occasioni, come è facile pensare, di incontrarsi con una parola che è fra le più gravi che si contengono nei Libri divini e che proprio riguarda gli uomini di chiesa, il che può facilmente voler dire alunni e insegnanti

della fede e in genere della verità: Quia tu scientiam repulisti, ego repellam te (Osea, 4, 6). Il Santo Padre avrebbe aggiunto che in questa quasi sommità della sua vita, in questo colmo di anni che Dio ha voluto concederGli, Gli è sembrato non inopportuno e non alieno dal suo ufficio di dare anche ulteriore prova del peso che Egli dà a quelle parole divine, mostrandosi non solo affatto alieno dal respingere da Sè la scienza ma sollecito anzi di chiamarla a Sè, di averla con Sè; e perciò Sua Santità ha pensato che un ottimo modo per raggiungere questo scopo era quello di chiamare intorno a Sè le vostre degnissime persone, illustri Accademici, che per consenso, si può dire universale, tanta e così alta scienza rappresentate.

Verò è che non mancano quelli per i quali scienza e fede dicono difficoltà e contrasti poco conciliabili. Non così, non può essere così, per il Santo Padre, nè per chi per poco rifletta che la scienza è la ricerca della verità come si trova nella naturale rivelazione del creato, e la fede è l'ossequio dell'intelletto creato alla verità direttamente rivelata dal Creatore. Cosicchè è evidente che questo ossequio dell'intelletto creato alla rivelazione diretta del Creatore mai non sarà più degno e della creatura e del Creatore, come quando è illuminato dagli splendori della scienza.

Questa persuasione ha ispirato il Santo Padre e ha altamente consolato il Suo cuore nella istituzione, o restituzione che voglia dirsi, di questa Accademia, alla quale voi, illustri Accademici, venite a portare il contributo davvero ambito dei vostri nomi, della vostra scienza, delle opere vostre.

Il buon Padre Gemelli ha avuto cura, tra le molte delle quali il Santo Padre gli è sempre gratissimo, di rimettere le insegne accademiche a ciascuno di voi e Sua Santità confida che non vi siano dispiaciute. L'Augusto Pontefice riservava a Se stesso il piacere di consegnar di Sua mano la così detta Medaglia annuale, che io ora vi dò per Suo preciso mandato. È, come facilmente è risaputo, ormai tradizionale costume della Santa Sede di affidare al conio speciale di Medaglia pontificia il ricordo di quello che si ritiene l'avvenimento più importante dell'annata. Il Santo Padre, da una parte, ha ritenuto che la Sua e vostra Accademia — non meno vostra si può dire che Sua — fosse precisamente l'avvenimento che meritava quest'anno una tale consacrazione. Dall'altra, voi stessi Gliene avete ispirato la composizione, impersonando, come già è stato detto, così

degnamente la scienza: Gli avete richiamato più vive alla mente le grandi immagini di quei magni spiriti che veramente sembrano mandati da Dio Creatore per rivelare più ampiamente gli splendori della scienza e come quei sui quali veramente piacque a Lui

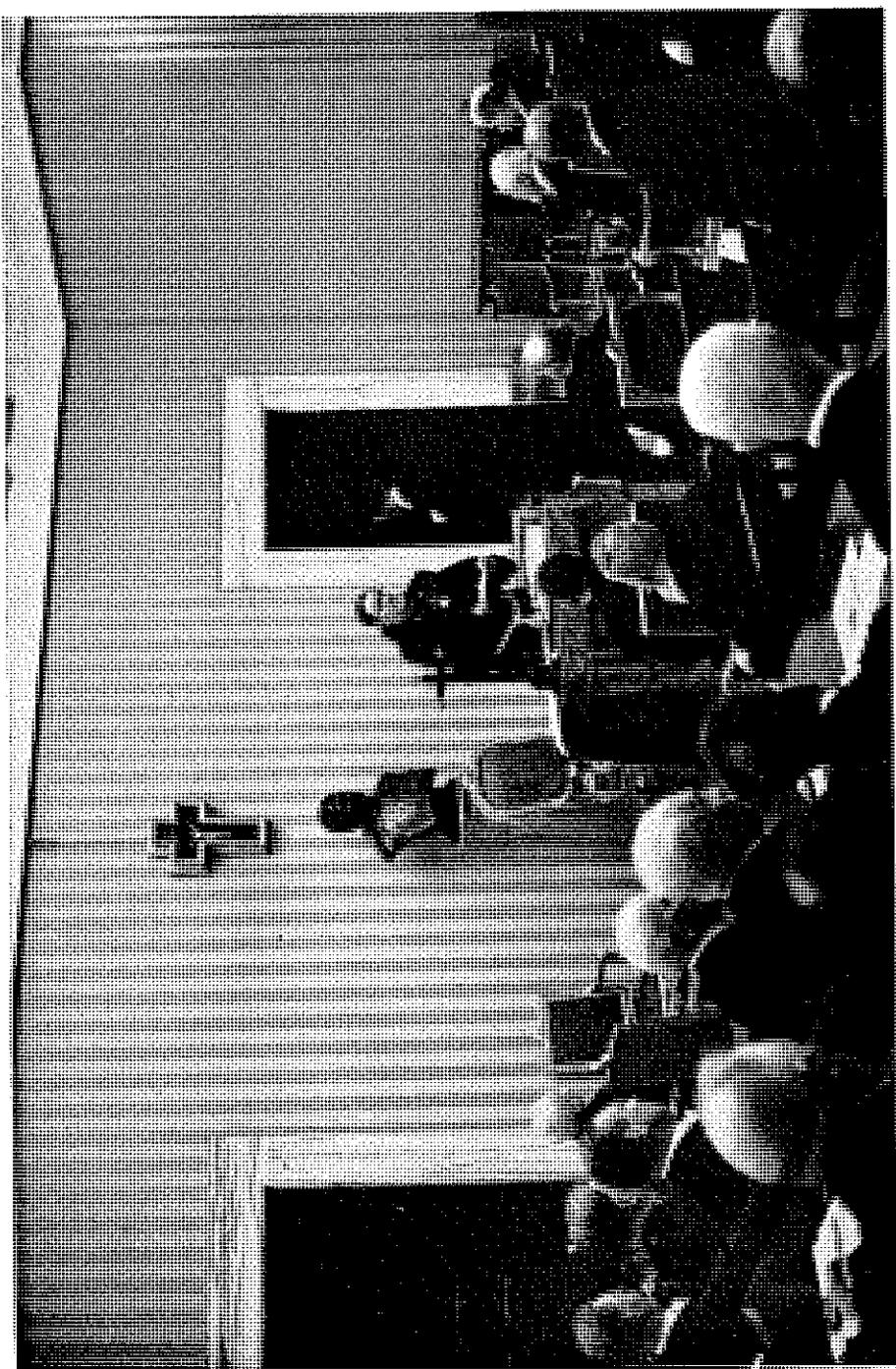
*del Creator suo spirito
più vasta orna stampar.*

La Medaglia che sto per consegnarvi a nome del Santo Padre vi dice tutto e meglio che una parola qualsiasi potrebbe dire, presentandovi immagini facilmente riconoscibili, perchè storiche: Volta, Michelangelo, Leonardo da Vinci. La loro rappresentanza scientifica non ha nemmeno bisogno di essere richiamata a voi che ne siete tra i più profondi conoscitori: Volta con le meraviglie della elettricità, Leonardo con la universalità del suo genio scientifico, Michelangelo che è un maestro non solo in letteratura, ma anche in vera e propria scienza, con le meraviglie sue di architetto sacro e profano, civile e militare. Non voleva il Santo Padre neanche ricordare a voi queste cose. Egli riservava piuttosto a Sè e a voi la compiacenza di richiamare nel grande Volta il catechista dei bambini della sua parrocchia Comense, in Michelangelo il suscitatore della cupola di San Pietro, in Leonardo il meraviglioso molteplice spirito scientifico che nel suo testamento lasciava un legato di Messe in suffragio dell'anima sua, la maniera più compendiosa, più comprensiva, più profonda di professare fin nel dettaglio tutte le verità della sua fede cattolica, dogmatica e pratica.

Dopo di che il Santo Padre sentiva di ben chiudere le Sue parole e l'espressione di tutta la Sua compiacenza e paterna riconoscenza per la presenza vostra, additandovi in quei tre grandi un triplice altissimo monito, un triplice magnifico programma, un triplice gloriosissimo esempio.

Tale è, o illustri Accademici, l'Augusto Messaggio. Lasciate pertanto che io aduni come in un serto da offrirsi al grande Pontefice tutta la gloria dei vostri sudori e dei vostri meriti, e li presenti con voi al cuore di Lui, perchè trovi in essi col profumo di ogni Sua più lieta speranza il balsamo della mancata Sua presenza, che si impersona nello spirito e nel volere Suo, che dà oggi vita perenne a questa Pontificia Accademia.

E con questo in nome del Santo Padre la dichiaro inaugurata e dichiaro aperto il primo anno accademico.



Una grande manifestazione di vivissimo applauso e di fervida gratitudine ha coronato le parole dell'Eminentissimo Porporato.

Subito dopo Egli, a nome del Santo Padre, consegnava ai singoli accademici la Medaglia Annuale del Pontificato, avendo per ognuno degli illustri scienziati parole di benevolenza e di felicitazione.

Quindi ossequiato, come già al suo giungere, dai presenti, l'Eminentissimo Principe lasciava la Sede dell'Accademia.

Anche gli altri Eminentissimi Cardinali e le personalità invitate lasciavano la Sala.

Agli Accademici e agli invitati era stato distribuito un elegante opuscolo, con i cenni sulla rinnovata Accademia, dal Cancelliere dott. Salviucci, che aveva coadiuvato il Presidente in tutta la complessa preparazione del grande avvenimento.

Gli Accademici Pontifici tenevano quindi la loro prima Tornata Accademica presieduta dal Presidente Padre Agostino Gemelli.

LA PRIMA TORNATA ACCADEMICA

Il Presidente, aperta la seduta, disse parole di benvenuto agli Accademici giunti da ogni parte del mondo e si dichiarò dolente di dovere inaugurare quella prima Tornata con la commemorazione dell'Accademico Paolo Luigioni, passato a miglior vita poco tempo prima della Solenne Inaugurazione.

Annunciò quindi che la commemorazione ufficiale del defunto Accademico Luigioni sarebbe stata fatta in una prossima Tornata.

Ebbero quindi luogo le presentazioni di lavori originali da parte di Accademici:

KRAHL - Intorno ad un fondamentale problema della dinamica dei ponti. Presentato dall'Accademico Levi-Civita.

CESARI - Sulle funzioni di più variabili generalmente a variazione limitata e sulla convergenza delle relative serie multiple di Fourier. Presentato dall'Accademico Armellini.

PARRAVANO, Accademico Pontificio - *Le proprietà ossidanti dell'acqua di Fiuggi.*

CROCCO, Accademico Pontificio - *L'iperbole di stabilità laterale nella dinamica dei velivoli.*

MIRANDA - *Su alcuni sviluppi in serie procedenti per funzioni non necessariamente ortogonali.* Presentato dall'Accademico Armellini.

BARBIERI - *Contributi alla storia della Statistica: II. Origini e sviluppi italiani della biometria dal Santorio all'Olivi.* Presentato dall'Accademico Boldrini.

NOBILE, Accademico Pontificio - *Sul costo di trasporto dei sopraccarichi dinamici nei dirigibili ed altre questioni connesse.*

Il Presidente diede poi notizia degli altri lavori originali presentati da Accademici prima della Solenne Inaugurazione:

GEMELLI, Accademico Pontificio - *Nuovo contributo alla conoscenza della struttura delle vocali.*

NOBILE, Accademico Pontificio - *Sulle variazioni termiche del gas contenuto nella carena di un'aeronave e conseguenti variazioni di forza ascensionale.*

GATTERER, Accademico Pontificio - *Spektralreines Eisen.*

ROHRACHER - *Die gehirnelektrischen Erscheinungen bei verschiedenen psychischen Vorgängen.* Presentata dall'Accademico P. Gemelli.

FERRARI - *Problemi della dinamica dei fluidi compressibili a velocità ipersonora.* Presentato dall'Accademico Panetti.

BOLDRINI, Accademico Pontificio - *Contributi alla storia della Statistica: I. Sull'introduzione del metodo statistico in biologia.*

- CISOTTI - *Asfericità di una superficie in un suo punto ordinario*. Presentato dall'Accademico P. Gemelli.
- FINZI - *Nuovi dati sul virus tubercolare e sulla natura della «esotubercolina spenta»*. Presentato dall'Accademico P. Gemelli.
- FANTAPIÈ - *Sulle soluzioni del problema di Cauchy per tutti i sistemi di equazioni a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti d'ordine qualunque*. Presentato dall'Accademico Armellini.
- ANTÚNEZ DE MAYOLO - *Teoria unitaria del campo elettromagnetico*. Presentato dall'Accademico Giorgi.
- PUGNO - *Il problema di Clebsch e l'ellisse di elasticità*. Presentato dall'Accademico Colonnetti.
- PUGNO - *Studio di uno speciale telaio sollecitato normalmente al suo piano*. Presentato dall'Accademico Colonnetti.
- GIALANELLA - *Determinazione della longitudine della torre del primo meridiano d'Italia a Monte Mario e della Torre Capitolina a Roma*. Presentato dall'Accademico Armellini.
- VARMA - *An infinite integral involving Bessel function and Sonine's polynomial*. Presentato dall'Accademico Armellini.
- POSSIO - *L'azione aerodinamica sul profilo oscillante alle velocità ipersonore*. Presentato dall'Accademico Panetti.
- HOFBAUER - *Tentamen novae delineationis curvae aequationis temporis, id est: Zeitgleichnung*. Presentato dall'Accademico Armellini.
- RANZI - *Ricerche sulla fisiologia dell'embrione dei cefalopodi*. Presentato dall'Accademico Bottazzi.
- ODONE - *Su alcune proprietà di geometria differenziale dei campi vettoriali*. Presentato dall'Accademico Giorgi.

REVERBERI - *Ricerche sperimentali sulla struttura dell'uovo fecondato delle Ascidie.*
Presentato dall'Accademico P. Gemelli.

PISTOLESI, Accademico Pontificio - *Sulla teoria delle ali sottili.*

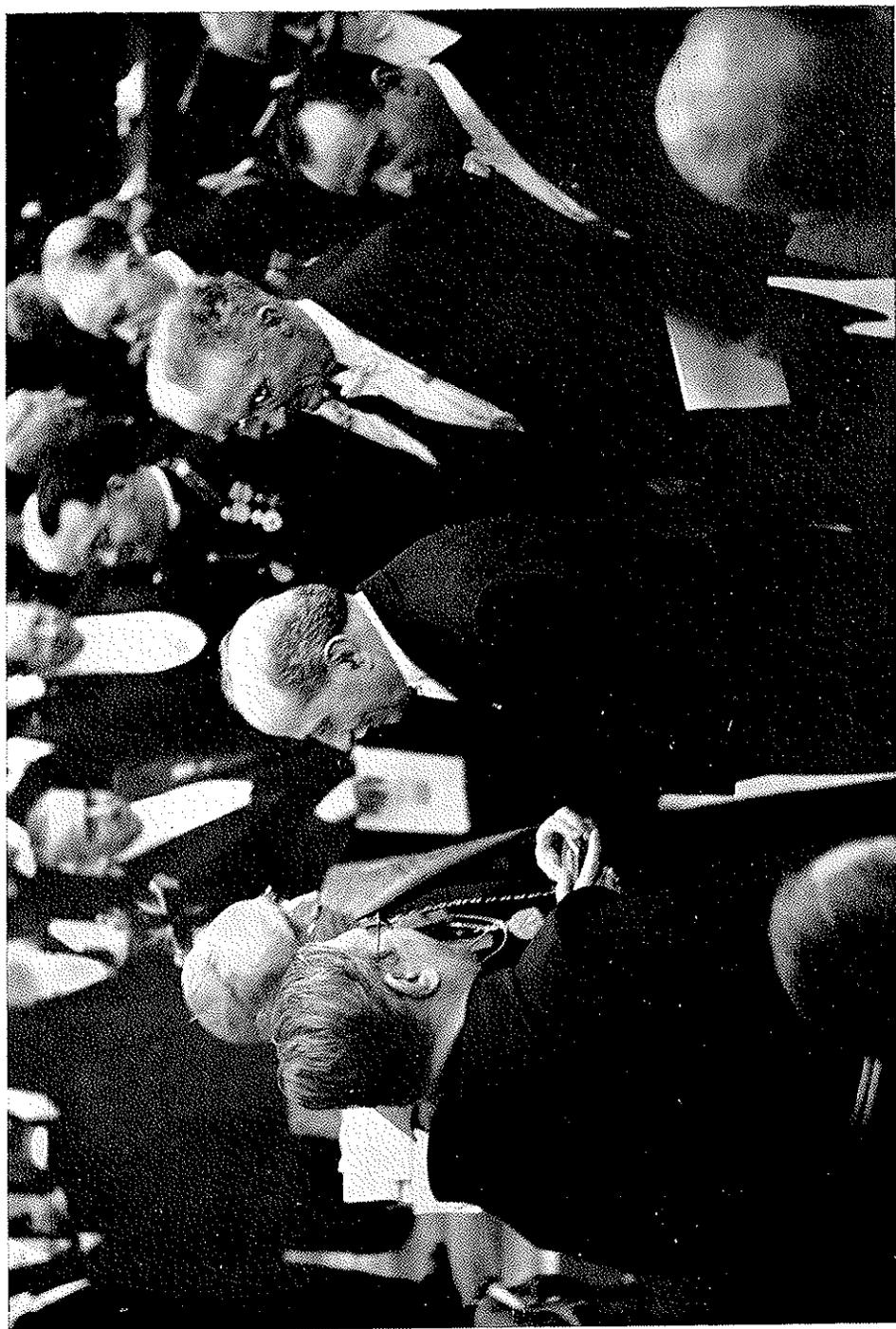
Terminate le comunicazioni scientifiche il Presidente domandò agli Accademici se avessero eventuali idee da esporre sull'attività svolta o da svolgersi dall'Accademia stessa.

L'Accademico Colonnetti chiesta la parola osserva che l'Accademia male corrisponderebbe ai nobili e sapienti intendimenti del suo Augusto Fondatore se si limitasse a svolgere il solito lavoro, in certo senso passivo, che consiste nel raccogliere e pubblicare le memorie scientifiche dovute alla personale iniziativa dei singoli Accademici. Pensa che l'Accademia, nello svolgimento del suo programma di lavoro e conformemente ai suoi statuti, dovrebbe farsi parte attiva promovendo un'opera organica di messa a punto delle varie scienze e dei loro mutui rapporti, di critica e di valorizzazione dei loro progressi, di segnalazione dei nuovi punti di vista che a progressi ulteriori possono preludere. Opera a cui tutti gli Accademici possono utilmente dare il contributo della loro personale competenza, ma che non può riuscire veramente organica se l'Accademia stessa non si assume l'alto compito di promuoverla, di disciplinarla, di orientarla verso il raggiungimento di finalità superiori.

Osserva che la proposta non contrasta con quelle che sono le tradizioni accademiche. Quando le antiche Accademie letterarie si accingevano alla compilazione dei loro grandi vocabolari non facevano altro in fondo che un tentativo di messa a punto dei progressi formali della lingua.

Vorrebbe che la Pontificia Accademia delle Scienze si accingesse — da un punto di vista non formale ma eminentemente sostanziale — a « fare il punto » nelle varie discipline, e, mettendo i frutti di questa sua fatica a disposizione degli studiosi tutti, recasse un contributo suo al progresso della scienza.

Sulla comunicazione Colonnetti prese la parola l'Accademico Armellini osservando che l'idea del Colonnetti doveva essere meglio precisata giacchè la messa a punto nel senso ordinario della parola viene spesso considerata come una divulgazione.



Ora è chiaro che ogni lavoro divulgatorio sarebbe al di sotto delle alte mansioni proprie dell'Accademia.

L'Accademico Armellini osserva che l'Accademia potrebbe invece con molto frutto dire la sua opinione sulle più alte questioni scientifiche oggi dibattute per quanto riguarda tutti i campi delle scienze e specialmente per quei campi in cui maggiormente ferve il contrasto e che hanno maggiori relazioni con le scienze fisiche e biologiche.

Aggiungo inoltre che sarebbe anche utilissima una parola dell'Accademia in altre questioni in cui sembra forse che la fantasia abbia preso il sopravvento sul freddo ragionamento scientifico portando ad esagerazioni che urge ridurre nei limiti giusti della dimostrazione scientifica.

L'Accademico Armellini conclude coll'esprimere il parere che tale questione debba essere esaminata dal Consiglio Accademico.

L'Accademico Bottazzi si associa alle dichiarazioni dell'Accademico Armellini e propone che la questione sia portata innanzi al Consiglio.

Parlano anche altri Accademici manifestando idee analoghe.

Il Presidente prega infine l'Accademico Colonnetti di redigere con maggiori particolari le sue proposte perchè possano venire discusse in una prossima seduta di Consiglio.

Aderendo ai desideri espressi dai Colleghi ed all'invito della Presidenza, l'Accademico Colonnetti prende impegno di presentare alla Presidenza proposte concrete, e così ha la fine la prima tornata.

ASFERICITÀ DI UNA SUPERFICIE IN UN SUO PUNTO ORDINARIO *

UMBERTO CISOTTI

SUMMARIUM. — Disceptat Auctor de peculiari quadam functione rationis curvaturarum principalium quae reducitur ad nullum cum punctus sit sphaericus.

Pro hac functione proponitur ab Auctore nomen: « non-sphaericitas » cuiusdam superficiei.

Sono noti i tentativi fatti allo scopo di definire mediante una sola quantità scalare la curvatura di una superficie in un suo punto ordinario, cioè in un punto ove la superficie ammette un piano tangente e due curvature principali

$$\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}.$$

Sorsero così: la *curvatura assoluta* o di Gauss

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2};$$

la *curvatura media* o di Sophie Germain

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right);$$

la *curvatura di Casorati*

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right).$$

* Nota presentata dall'Accademico Pontificio P. Agostino Gemelli O. F. M.

Ciascuna di queste curvature è intimamente connessa a particolari categorie di questioni: così la curvatura gaussiana ha grande importanza in questioni geometriche e in meccanica relativistica, e la curvatura media interessa particolarmente questioni fisico-matematiche. Pur tuttavia nella massima parte dei problemi che riguardano la geometria di un intorno di secondo ordine di un punto ordinario di una superficie intervengono *entrambe* le curvature

$$\frac{1}{\rho_1} \text{ e } \frac{1}{\rho_2} .$$

i Premesso questo, mi sembra non del tutto privo di interesse indagare - seguendo una via, sotto un certo punto di vista, inversa ai quella ora rammentata - se è possibile definire uno scalare il quale fornisca una misura del distacco della superficie, in un intorno di secondo ordine del punto prescelto, dalla forma sferica, vale a dire quella che io chiamerei l'*asfericità* della superficie in quel punto.

A questa indagine sono dedicate le considerazioni che seguono, le quali portano alla conclusione seguente, che per la sua semplicità mi sembra degna di rilievo: *supposto* $\rho_1^2 \geq \rho_2^2$, è a dirsi *asfericità della superficie l'espressione*

$$\sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}} .$$

La ragione di questa definizione è ampiamente giustificata dalle considerazioni che seguono.

Intanto constatiamo subito che l'*asfericità* così definita è nulla quando, e solamente quando, è $\rho_1 = \rho_2$, cioè quando si tratta di un punto sferico.

Ha il massimo valore $\sqrt{2}$ quando $\rho_1 = -\rho_2$, quindi per le superficie a curvatura media nulla (superficie di area minima).

Per una superficie cilindrica, avendosi $\rho_1 = \infty$, l'*asfericità* è = 1.

Se ρ_1 e ρ_2 sono dello stesso segno - e questo avviene quando, in un intorno di secondo ordine, la superficie è tutta da una parte del piano tangente - l'*asfericità* ha valori compresi tra 0 e 1; nel caso opposto i valori dell'*asfericità* sono compresi tra 1 e $\sqrt{2}$.

1. - FUOCHI ED ECCENTRICITÀ
DEGLI ELLISSOIDI ROTONDI ALLUNGATI.

Si consideri un ellissoide di rotazione: sia a il raggio polare e b quello equatoriale; se, come supporremo, è $a > b$, l'ellissoide è *allungato* e diviene sferico per $a = b$. Tutte le ellissi meridiane sono confocali e hanno comune l'eccentricità

$$[1] \quad E_e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}},$$

che si può definire anche *eccentricità dell'ellissoide*¹. Se $b = a$ risulta, com'è ovvio, $E_e = 0$.

2. - FUOCHI ED ECCENTRICITÀ
DEGLI IPERBOLOIDI ROTONDI A UNA FALDA.

Si abbia ora un iperboloide di rotazione a una falda. Se si considerano le iperboli meridiane, esse hanno i loro fuochi situati sopra una circonferenza del piano equatoriale. Se, in ogni piano meridiano, si considerano le iperboli coniugate alle corrispondenti sezioni meridiane dell'iperboloide, esse hanno comuni i fuochi, che si possono definire i *fuochi dell'iperboloide*. Conseguentemente si può definire *eccentricità dell'iperboloide rotondo a una falda* l'eccentricità comune a tutte le suaccennate iperboli coniugate, cioè

$$[2] \quad E_i = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}},$$

dove b designa il raggio equatoriale (che misura il semiasse trasverso delle iperboli meridiane) e a il raggio polare (che misura il semiasse

¹ Cfr. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Analitica*, Pisa, Spoerri, 1920, pag. 539.

trasverso delle iperboli coniugate). Se $a = b$, tutte le iperboli risultano equilatera e quindi $E_1 = \sqrt{2}$.

3. - INTORNO DI SECONDO ORDINE DI UN PUNTO ORDINARIO DI UNA SUPERFICIE.

Sia $z = f(x, y)$ l'equazione di una superficie riferita a un sistema di coordinate cartesiane coll'origine in un suo punto ordinario, l'asse z normale alla superficie, e gli assi x, y diretti, nel piano tangente, secondo le direzioni principali. Con queste ipotesi si ha:

$$f(0, 0) = 0 \quad , \quad f'_x(0, 0) = 0 \quad , \quad f'_y(0, 0) = 0 \quad ,$$

e le curvature principali risultano essere

$$\frac{1}{\rho_1} = f''_{xx}(0, 0) \quad , \quad \frac{1}{\rho_2} = f''_{yy}(0, 0) \quad ;$$

in conseguenza, la superficie può essere rappresentata, in un intorno di secondo ordine del punto $x = y = z = 0$, dalla seguente equazione:

$$[3] \quad z = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} \right) .$$

4. - QUADRICHE CENTRATE OSCULATRICI.

L'equazione

$$[4] \quad \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} + \frac{(z - \nu)^2}{\nu^2} = 1 \quad ,$$

rappresenta una quadrica centrata, col centro nel punto $x = 0, y = 0, z = \nu$, contenente l'origine delle coordinate e avente ivi tangente il

piano $z = 0$. In un intorno di secondo ordine dell'origine, all'equazione [4] si può sostituire la seguente:

$$[5] \quad z = \frac{\nu}{2} \left(\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\mu} \right).$$

Dal confronto di questa relazione colla relazione [3] scende che basta assumere

$$\frac{\nu}{\lambda} = \frac{1}{\rho_1}, \quad \frac{\nu}{\mu} = \frac{1}{\rho_2},$$

cioè

$$[6] \quad \lambda = \nu\rho_1, \quad \mu = \nu\rho_2,$$

affinchè la quadrica [4] sia osculatrice della superficie data nell'origine.

Risulta dalle [6] che, una volta noti ρ_1 e ρ_2 , nella determinazione di λ e μ interviene ancora il parametro ν , che è a priori indeterminato; se ne deduce che vi è una semplice infinità di quadriche centrate osculatrici in un punto ordinario di una superficie.

5. - QUADRICHE CENTRATE OSCULATRICI ROTONDE.

Supponiamo sia $\rho_1^2 \geq \rho_2^2$, con che, per le [6], risulta $\lambda^2 \geq \mu^2$. Impo-
niamo alla quadrica, rappresentata dall'equazione [4], di essere rotonda; siccome gli assi di riferimento sono paralleli agli assi della quadrica, se questa è di rotazione il rispettivo asse dovrà avere la stessa direzione di uno dei tre assi di riferimento. Dobbiamo escludere, in massima, che l'asse di rotazione coincida coll'asse z (cioè colla normale alla superficie nel punto in discorso) perchè dovendo allora essere $\lambda = \mu$, per le [6] si esigerebbe fosse pure $\rho_1 = \rho_2$, il che è accordabile solamente quando il punto della superficie sia sferico; in tal caso particolare esiste addirittura una superficie sferica di raggio $\rho_1 = \rho_2$ che, in quel punto, è sfera osculatrice, e si rilevi che dev'essere nulla l'asfericità della superficie in quel punto.

Tornando al caso generale, in cui $\rho_1^2 > \rho_2^2$, la quadrica osculatrice rotonda non può dunque avere per asse di rotazione la normale alla superficie; vogliamo allora indagare se l'asse di rotazione può essere parallelo a una delle direzioni principali, precisamente parallelo all'asse x , che si riferisce all'asse di maggiore lunghezza. Dalla [4] scende che in tal caso dev'essere $\mu = \nu^2$, ossia, per la seconda delle [6],

$$[7] \quad \nu = \rho_2 ,$$

con che le [6] stesse danno per λ e μ le seguenti espressioni:

$$[8] \quad \lambda = \rho_1 \rho_2 , \quad \mu = \rho_2^2 .$$

Per queste relazioni, e per la precedente, l'equazione [4] diviene:

$$[9] \quad \frac{x^2}{\rho_1 \rho_2} + \frac{y^2 + (z - \rho_2)^2}{\rho_2^2} = 1 .$$

Questa quadrica è un ellissoide allungato se ρ_1 e ρ_2 sono dello stesso segno, che - senza ledere la generalità - potremo supporre entrambi positivi. Di questo ellissoide: $\sqrt{\rho_1 \rho_2}$ è il semiasse polare, e ρ_2 il raggio equatoriale; in conseguenza è [n. 1]:

$$E_e = \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2 - \rho_2^2}}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}} = \sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

la *eccentricità dell'ellissoide*.

Se ρ_1 e ρ_2 sono di segni opposti - poniamo $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 < 0$ - la quadrica [9] è un iperboloide rotondo a una falda, che ha $-\rho_2$ per misura del raggio equatoriale e $\sqrt{-\rho_1 \rho_2}$ come misura del raggio non trasverso; ne segue che la *eccentricità di questo iperboloide* (n. 2) è:

$$E_i = \frac{\sqrt{\rho_2^2 - \rho_1 \rho_2}}{\sqrt{-\rho_1 \rho_2}} = \sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}} .$$

Si può concludere che a ogni punto ordinario di una superficie si può coordinare una quadrica centrata rotonda osculatrice, che è un ellissoide se le curvatures principali sono dello stesso segno e un iperboloide

a una falda se le dette curvaturei sono di segno opposto; l'asse di rotazione è parallelo a quella delle direzioni principali a cui corrisponde la minima curvatura: se $\rho_1^2 \geq \rho_2^2$ la eccentricità è, in ogni caso, definita dall'unica espressione

$$\sqrt{1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

Questa eccentricità abbiamo creduto opportuno scegliere per misurare l'asfericità della superficie nel punto considerato.

NUOVI DATI SUL VIRUS TUBERCOLARE
E SULLA NATURA
DELLA « ESOTUBERCOLINA SPENTA »*

(Con due tavole fuori testo)

GUIDO FINZI

(Istituto di Patologia speciale e Clinica medica della Facoltà di Medicina veterinaria
della R. Università di Milano).

SUMMARIUM. — Disceptat Auctor de esotuberculinis diagnosticis et de esotuberculinis extinctis vel anallergicis in peculiari terapia tuberculari.

Loquitur deinde de inquisitionibus circa esotuberculinam extinctam et virus tuberculare percolans peractis, necnon circa virtutem antigenicam in ipsa esotuberculina extincta contentam.

Agitur denique de novis inventis quoad familiam carbohydratorum, contextum proteicum et virus tuberculare percolans in esotuberculina extincta anallergica.

In una precedente comunicazione [1], riferivamo intorno a nuovi dati acquisiti sulla biologia del bacillo tuberculare coltivato a 42°, indicando attraverso quali procedimenti tecnici si era addivenuti, per la prima volta, alla preparazione di « esotubercoline » anallergiche.

Più tardi nuove comunicazioni venivano da noi fatte sulla « esotuberculina spenta » e sulla sua possibile applicazione nella terapia specifica della tubercolosi [2].

Sul potere anallergico di questa tuberculina hanno riferito A. PERRAZZI [3], G. C. COLOMBO [4] ed E. VALCARENGHI [5], confermando le nostre prime considerazioni. E sulle proprietà terapeutiche della « esotuberculina spenta », in Italia, in Francia, in Svizzera e in Austria, stanno

* Nota inviata da Giuseppe Caronia S. O. e presentata dall'Accademico Pontificio P. Agostino Gemelli O. F. M.

esperimentando, in Cliniche Universitarie specializzate, il prof. A. CECCHINI e il dott. PERAZZI, il prof. DONATI e il prof. CAVALLI, il prof. CARPI e il dott. FOSSATI, il prof. A. PASINI, il prof. TACCONI e il dott. COLOMBO, il prof. PARODI e il dott. DI MATTEO, i professori P. COURMONT, F. DUMAREST, A. PELLÉ e MAURER, e i dottori DAVY, LOWYS e TOBÉ, direttori di sanatori di alta montagna in Savoia.

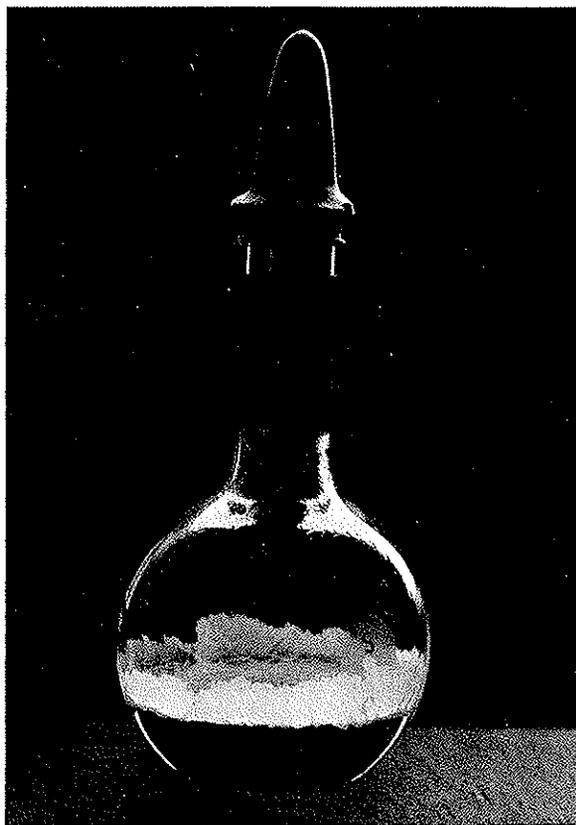
A questo riguardo sarebbe assolutamente azzardato qualsiasi parere, in quanto solo una lunga e metodica osservazione potrà in seguito acconsentire un giudizio fondato e sicuro sul valore terapeutico della « esotubercolina spenta ». Le prime pubblicazioni comparse sono tutte molto favorevoli.

Sulla sua natura noi ammettevamo che la temperatura a $41^{\circ}5-42^{\circ}$ agiva sui bacilli della tubercolosi dei mammiferi togliendo loro definitivamente la capacità di eliminare, nei mezzi di cultura, i principi solubili, diffusibili, le tossine genuine che, conservate nelle loro frazioni termolabili e termostabili, conferiscono alle « esotubercoline » un valore diagnostico superiore a qualsiasi altra tubercolina allergica, compresa quella standard internazionale indicata, dal Comitato di Igiene della Società delle Nazioni, come la più attiva.

Ciò è ormai riconosciuto in medicina umana e comparata attraverso numerosi lavori sperimentali italiani, tedeschi, francesi, spagnuoli e americani.

Secondo le indagini da noi eseguite, i bacilli tubercolari, messi a coltivare ad alta temperatura ($41^{\circ}5-42^{\circ}$), perderebbero la capacità di eliminare frazioni albuminiche atte a provocare reazioni positive alla prova sottocutanea. Di conseguenza, se nella « esotubercolina » allergica sono contenuti complessi primari che constano di albumine e di carboidrati, complessi responsabili di tutte le manifestazioni reattive riferibili alla tubercolina, nella « esotubercolina spenta » persiste solo il gruppo carboidrato (capace, come abbiamo dimostrato [6] di determinare le reazioni di flocculazione con il siero precipitante antitubercolinico di cavallo) mentre non esiste più il complesso proteico specifico che nell'« esotubercolina » diagnostica provoca le reazioni allergiche. Recentemente, in una comunicazione presentata alla Società Lombarda di Medicina [7], affermavamo:

1° che in cultura a sviluppo regolare, il massimo grado di tossicità raggiunto verso la sesta-ottava settimana non è assolutamente



c. c. 55 di « esotubercolina » S.
cm.² 16,60 di superficie.

subordinato all'ampiezza del velo ottenuto alla superficie del mezzo liquido e quindi al numero dei germi;

2° che il valore allergico dell'« esotubercolina » sembra ricondursi ad un determinato grado di concentrazione in esotossina;

3° che tale grado di concentrazione e di attività diagnostica viene raggiunto, sempre in 6-8 settimane, indipendentemente dalla quantità del mezzo liquido nel quale si effettua la cultura dei diversi bacilli tubercolari tipo Koch;

4° che l'attività allergica dell'« esotubercolina », lungi dall'essere esclusivamente subordinata al numero ed alla moltiplicazione dei bacilli atti ad eliminare veleni diffusibili, sembra essere legata anche allo sviluppo del bacillo tubercolare e alla presenza, nei mezzi di cultura, di un « virus tubercolare filtrante »;

5° che tale « virus tubercolare filtrante », lungi dal trovarsi unicamente aderente ai corpi bacillari e alla sostanza amorfa che unisce i bacilli stessi, è estremamente diffuso nel mezzo culturale già all'inizio della coltura;

6° che l'« esotubercolina » è una nuova tubercolina diagnostica, improntata ai componenti termostabili e alle frazioni termolabili dei prodotti di ricambio del bacillo di Koch e al potere allergico del « virus tubercolare filtrante » in essa contenuto.

* * *

Come è noto il bacillo di Koch, essendo un aerobio particolarmente avido di ossigeno, fu sempre ottenuto da mezzi di cultura messi in recipienti tali da permettere un largo contatto con l'aria, per quanto dimostrato che una esagerata concentrazione volumetrica dell'ossigeno nuocerebbe al suo sviluppo.

Tuttavia come germe squisitamente aerobio, nei substrati liquidi tende a svilupparsi abbondantemente alla superficie, a contatto diretto con l'ossigeno libero, con le caratteristiche culturali a tutti ben note.

Fin dalla nostra prima comunicazione [8], intesa a riferire sulla tecnica di preparazione della nostra « esotubercolina », noi si informava di avere usato « dei matracci a fondo piano, a collo relativamente largo e contenenti del brodo peptonato glicerinato fino al punto di più ampia circonferenza del matraccio ».

In altre parole consideravamo, d'accordo con tutti gli sperimentatori, che a cultura costituita da un largo, spesso, rugoso e pieggettato velo, rigogliosamente arrampicantesi sulle pareti del matraccio, dovesse conseguentemente corrispondere, nel mezzo liquido, una più abbondante quantità di « esotubercolina » diagnostica. Con questo convincimento infatti, negli istituti dove si preparano in grande le « vecchie tubercoline », allo scopo di avere un maggior quantitativo di corpi microbici e una maggiore concentrazione in prodotti solubili, è abitudine corrente impiegare per le culture, i flaconi piatti di Roux o recipienti piatti circolari, appunto perchè più indicati a permettere un largo contatto con l'aria e a soddisfare la particolare avidità di ossigeno del bacillo di Koch.

Partendo da ceppi microbici tipo umano e tipo bovino, già coltivati a 42°, e quindi atti a dare soltanto « esotubercoline spente » anallergiche, abbiamo seminato, nelle identiche condizioni di esperimento, lo stesso mezzo di Sauton (ph. 7.2), distribuito in matracci di capacità identica fino a raggiungere, in taluni un livello oltre i due terzi del matraccio (c. c. 220), in altri un livello molto basso (c. c. 55).

Nei due matracci l'ampiezza delle superfici raggiunte dal liquido è identica: cm.² 16,60.

In altre parole ci siamo preoccupati di ottenere delle culture su superfici identiche, con quantità massime e minime di terreno nutritivo.

Dopo 8 settimane dalla semina, quando i veli della superficie del mezzo erano diventati spessi, rugosi, incespati, rimontanti la parete del matraccio, quando non avevamo ormai motivo di sorta per pensare ad un possibile aumento dell'attività specifica della nostra « esotubercolina spenta », abbiamo, seguendo la tecnica già indicata, estratto e preparato dai diversi matracci l'« esotubercolina » anallergica.

Ne consegue che all'ottava settimana avevamo, per ognuno dei ceppi umani e bovini, 2 campioni di « esotubercolina spenta ».

Il 1° proveniente da un velo di cm.² 16,60 su c. c. 200 di mezzo Sauton.

Il 2° proveniente da un velo di cm.² 16,60 su c. c. 55 di identico mezzo Sauton.

Naturalmente, in conformità di quanto fino a ieri sembrava acquisito noi avremmo dovuto avere, sia per il ceppo umano come per il ceppo bovino, 2 campioni di « esotubercolina spenta » a potere floc-

culante diverso, che, per quanto grossolanamente, si poteva così supporre: minima nel campione 1°; massima nel campione 2°.

La determinazione sperimentale del valore antigene intrinseco dei due campioni di « esotubercolina spenta » venne eseguita mediante l'unico mezzo a nostra disposizione, vale a dire con la reazione di flocculazione specifica [6].

Questa si esegue preparando un determinato numero di provette [6] contenenti ciascuna, e in quantità varie, la « esotubercolina spenta » (precipitogene), ferma restando la quantità di siero antitubercolinico (siero flocculante).

Infatti se in quattro serie di provette contenenti c. c. 15 di siero anti, noi introduciamo c. c. 5-4-3-2-1-0,5 di « esotubercolina spenta », campione 1° (b. umano), e ripetiamo questa serie con i diversi campioni: 1° (b. bovino); 2° (b. umano); 2° (b. bovino), e se in quattro serie di provette contenenti c. c. 20 dello stesso siero flocculante anti-tubercolinico, ripetiamo le stesse diluizioni, noi vediamo, dopo 4 ore alla temperatura di laboratorio e dopo 2 ore alla temperatura di 38°5, l'apparizione dei primi segni di una intensa flocculazione che poi procede intensificandosi rapidamente, per essere notevole e massima alla nona-decima e settima-ottava ora. Nelle prime quattro serie la prima provetta nella quale si svolge più intenso ed identico il fenomeno è costantemente la 5^a, nella seconda serie il fenomeno si appalesa identico o con le stesse precise caratteristiche nelle provette 5^a e 6^a.

Da quanto sopra, risulta nel modo più chiaro e convincente, che i due campioni di « esotubercolina spenta », preparati nelle condizioni indicate, hanno un valore antigene intrinseco perfettamente identico, anzi assolutamente sovrapponibile, giacchè i rapporti ottimali fra antigene precipitogeno e antisiero flocculante sono perfettamente uguali nei due campioni di « esotubercolina spenta », sia per il bacillo tipo umano che per quello tipo bovino.

Il potere antigene raggiunto dai diversi campioni di « esotubercolina spenta » non è quindi assolutamente subordinato all'ampiezza del velo ottenuto alla superficie del mezzo liquido, e conseguentemente al numero dei germi, giacchè tale valore antigene sembra legato ad un grado determinato di concentrazione di gruppi atomici capaci di legare in *vitro* le precipitine dell'antisiero flocculante. Tale concentrazione viene raggiunta indipendentemente dalla quantità del mezzo liquido

nel quale si effettua la semina e, indipendentemente dal numero dei germi.

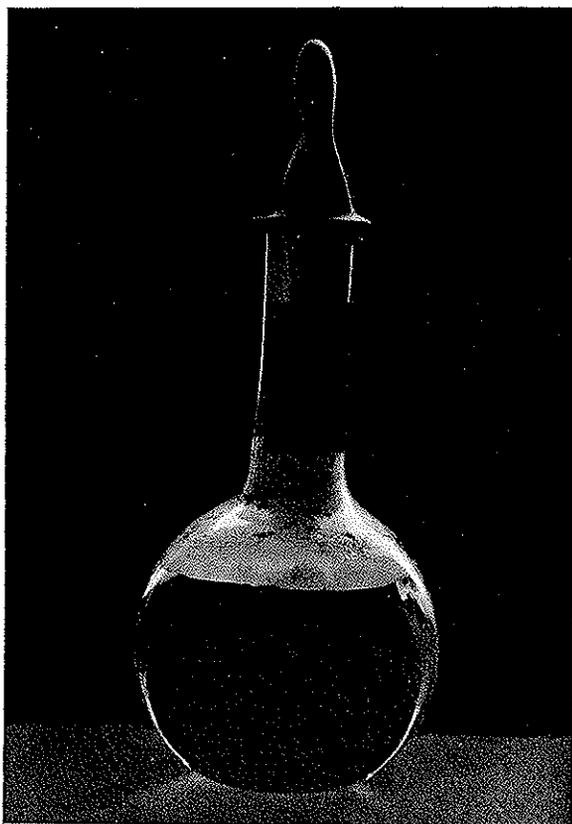
Ne consegue che il potere antigene intrinseco dell' « esotubercolina spenta », analogamente a quanto abbiamo osservato per la « esotubercolina » allergica, sembra essere legato allo sviluppo del bacillo tubercolare.

Come abbiamo fatto [7] partendo da culture in mezzo liquido, di bacilli tubercolari non esposti in precedenza all'azione del calore ($41^{\circ}5-42^{\circ}$), ci siamo proposti di stabilire se anche in questo caso si trovava diffuso nel mezzo di cultura, coltivantesi in profondità, un germe invisibile capace di attraversare le candele filtranti e nel contempo patogeno per gli animali da esperimento.

Da culture in mezzo Sauton (pH 7.2), di pochi giorni (3-6-15), allestite con ceppi umani e bovini atti a darci « esotubercoline spente », non appena si vedeva che l'esile porzione di velo seminata nella parte più periferica della superficie del mezzo di coltura, tendeva ad allargarsi sulla stessa superficie del mezzo, si aspirava una conveniente quantità (c. c. 25-50-75) di liquido mediante una comune pipetta a bolla, tenendoci ben discosti dal bordo del velo che coi soliti caratteri andava costituendosi ed allargandosi, indi si estraeva la pipetta badando non solo di non toccare, ma neppure di sfiorare i margini del velo. Anche in questo caso tale liquido, sempre perfettamente limpido e trasparente, veniva in primo tempo centrifugato per 20', poi filtrato prima due volte su carta, poi infine su candela Berkefeld N. Dimostrata la sterilità sui diversi terreni di cultura, veniva iniettato nel peritoneo di cavie sane, del peso di 300-400 grammi, alla dose di c. c. 5-10 sempre in una sola iniezione (gruppi di 10-20 cavie).

(L'esame microscopico della porzione più profonda del liquido centrifugato, naturalmente senza il benchè minimo deposito, fu sempre negativo di fronte a forme bacillari acido-resistenti e non).

Anche per queste indagini alcune delle cavie iniettate venivano sacrificate in terza-quarta giornata dalla iniezione, allo scopo di allestire strisci con materiale ottenuto da una rigorosa triturazione dell'epiploon e con materiale ottenuto raschiando con bisturi la superficie della parete peritoneale; le altre venivano seguite per 4-6-8 mesi con precauzioni speciali (alimentazione scelta ed abbondante, custodia in ampi, igienici ricoveri cambiati una o due volte per settimana).



c. c. 220 «esotubercolina» S.
cm.² 16,60 di superficie.

Dopo mesi e mesi di osservazione, si è constatato che tutte le cavie iniettate erano rimaste perfettamente indifferenti alla iniezione subita. Malgrado la più paziente ricerca, l'esame microscopico degli strisci allestiti col materiale più indicato proveniente da cavie sacrificate in periodi diversi, fu sempre negativo. Ne consegue che nelle nostre culture, ottenute con ceppi esposti all'azione del calore ($41^{\circ}5-42^{\circ}$), non coltiva in profondità nessun germe invisibile capace di attraversare le candele filtranti.

Nel 1934 [1] noi si affermava che la temperatura di $41^{\circ}5-42^{\circ}$ agiva sui bacilli tipo Koch togliendo loro definitivamente la capacità di eliminare, nei vari mezzi di cultura, principî attivi speciali, che invece conferiscono, alla « esotubercolina » allergica, un valore diagnostico superiore a quello di qualsiasi altra tubercolina. Oggi noi riteniamo poter affermare che l'azione del calore, non soltanto toglie ai bacilli tubercolari la capacità di eliminare le frazioni albuminiche, il complesso proteico responsabile di tutte le manifestazioni reattive riferibili alla « esotubercolina » allergica, ma toglie anche ad essi la capacità di ingenerare, nei mezzi culturali più appropriati, un virus tubercolare filtrabile che, nelle culture ottenute con ceppi non esposti all'azione del calore ($41^{\circ}5-42^{\circ}$), sarebbe sempre presente ed estremamente diffuso nel mezzo già all'inizio della cultura.

In questo caso, neppure seguendo la tecnica più raccomandabile (NINNI), ci fu dato dimostrare l'esistenza di tale virus tubercolare filtrante nè aderente ai corpi bacillari, nè nella sostanza amorfa che unisce e lega i bacilli stessi.

Oggi quindi ci domandiamo fino a che punto le caratteristiche anallergiche della nostra « esotubercolina spenta » sono riferibili alla mancanza del complesso proteico, e fino a che punto tali caratteristiche sono riferibili alla mancanza del virus tubercolare filtrante, dato che a questo è oggi necessario riconoscere un potere allergico.

CONCLUSIONI

1° Il potere antigene della « esotubercolina spenta » non è assolutamente in rapporto all'ampiezza del velo ottenuto alla superficie del mezzo liquido e quindi al numero dei germi, giacchè tale valore antigene sembra essere indubbiamente legato ad un determinato grado di

concentrazione di gruppi atomici capaci di legare *in vitro* le precipitine di un antisiero flocculante.

2° Il valore antigene della « esotuberculina spenta » anallergica viene raggiunto in un determinato periodo di tempo, indipendentemente dalla quantità del mezzo liquido nel quale si effettua la semina. Ne consegue che il potere antigene intrinseco dell'« esotuberculina spenta », lungi dall'essere subordinato alla moltiplicazione dei germi è, analogamente a quanto abbiamo osservato per la « esotuberculina » diagnostica, unicamente subordinato allo sviluppo del bacillo tubercolare.

3° Se nei mezzi di cultura adatti, accanto ai diversi bacilli tipo Koch, si sviluppa in profondità, sin dall'inizio, un « virus tubercolare filtrante », nei mezzi di cultura seminati con bacilli tubercolari ancora patogeni, ma esposti all'azione del calore (41°5-42°), non è possibile dimostrare l'esistenza di un « virus tubercolare filtrante ».

4° Le caratteristiche anallergiche della nostra « esotuberculina spenta », che riteniamo assolutamente meritevole di indagini nel campo della terapia specifica della infezione tubercolare, sembrano riferibili non solo alla mancanza del complesso proteico, ma benanco alla mancanza, nel mezzo di cultura, del « virus tubercolare filtrante ».

BIBLIOGRAFIA

- [1] FINZI G., *Nuovi dati sulla biologia del bacillo tubercolare e sulle «esotubercoline»*. Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei. Seduta del 21 gennaio 1934. — «Profilassi», fasc. 4, aprile 1934.
- [2] FINZI G., *Über die Biologie des Mycobacterium tuberculosis und über «gelöschtes Tuberkulin»*. — «Wiener Tierärztlichen Monatsschrift», vol. XXI, 1934, fasc. 15.
- *Novelles donnés sur la biologie du mycobacterium tuberculosis. Les «exotubercolines éteintes»*. — «Revue de la Tuberculose», serie 4^a, tomo II, n. 5, maggio 1934.
- «*Exotubercolines» allergiques et «exotubercolines éteintes»*. — «Bollettino della Sezione Italiana della Società Internazionale di Microbiologia», fasc. VIII-IX, agosto-settembre 1935.
- [3] PERAZZI A., *Le caratteristiche anallergiche della «esotubercolina spenta»*. — «Profilassi», fasc. 7, luglio 1934.
- [4] COLOMBO G. C., *La «esotubercolina Finzi» nella diagnosi della tubercolosi infantile*. Comunicazione fatta il 6 ottobre 1935 a Brescia nella seduta della Sezione Lombarda della Associazione Italiana di Pediatria.
- [5] VALCARENCHI E., *L'action anallergique de l'«exotubercoline éteinte» chez les bovins tuberculeux*. — «Bull. de l'Académie Vétérinaire de France», tomo VII, 1934, n. 7.
- [6] FINZI G., in «Académie des Sciences», 10-24 luglio 1933, tomo 197, pag. 361.
- [7] FINZI G., *Nuovi dati sulla preparazione e sulla natura delle «esotubercoline»*. Società Lombarda di Medicina. Seduta del 22 novembre 1935-xiv.

CONTRIBUTI ALLA STORIA DELLA STATISTICA

I. SULL'INTRODUZIONE DEL METODO STATISTICO IN BIOLOGIA

MARCELLO BOLDRINI

Accademico Pontificio

SUMMARIUM. — Disciplina quae nunc est « biometria » ex mensuris phaenomenorum vitae — auctore Santorio — primum exstitit, deinde ex earum rationaria tractatione — auctore Jacobo Keill — vere constitit.

1. — Si è giunti alla moderna Biometria passando per due fasi, di cui l'una è la misura dei fenomeni biologici e l'altra il trattamento statistico dei dati ⁽¹⁾.

La prima costituisce una vera rivoluzione, che rompe i ponti col passato e sostituisce alle qualità aristoteliche delle cose, l'idea geometrica dell'estensione, alla descrizione dei fenomeni e degli oggetti, la misura dei loro caratteri. Il merito di avere introdotto il metodo quantitativo in Biologia spetta a SANTORIO SANTORIO da Capodistria (1561-1636), professore nell'università di Padova, amico e seguace di GALILEO. Egli si inserisce vividamente nella nuova scia aperta alle Scienze dal pisano, e nella « Medicina statica » (da $\sigma\tau\alpha\tau\acute{\eta}\rho$ = peso) riferisce intorno alle esperienze a cui per un trentennio aveva sottoposto se medesimo e numerosi

⁽¹⁾ In realtà, le fasi sono tre, ma la prima, vale a dire la formazione dello spirito investigativo come esigenza fine a se stessa, è un processo generale, che invade tutto il campo degli studi dopo la Rinascenza, e senza il quale, non solo la Biometria, ma non sarebbe sorta nessuna delle moderne Scienze, che hanno sostituito le arti utili dell'antichità (cfr. le mie lezioni di *Statistica*, vol. I, Milano 1937, cap. II). Spesso si dimentica, però, anche la necessità fondamentale di entrambe le due successive fasi — introduzione del metodo quantitativo, trattamento dei fenomeni per gruppi di casi — nella formazione della Biometria, e si vanno perciò erroneamente a cercare le sue origini prima dell'introduzione del metodo statistico. Cfr. M. BOLDRINI, *Biometria e Antropometria*, Milano, 1934, cap. I.

altri soggetti, allo scopo di misurare, mediante una stadera, l'intensità del ricambio materiale, in particolare di quella componente ch'egli chiamava la traspirazione insensibile.

Ma anche il secondo passo è fondamentale, perchè col trattamento statistico delle misure si trasferisce l'interesse dai singoli casi ai gruppi di manifestazioni di un carattere o fenomeno, si esaurisce la tendenza a voler spiegare ogni particolarità, e subentra invece l'impegno a dar rilievo a quanto v'è di relativamente regolare nell'intensità, nelle variazioni, nei nessi reciproci degli eventi.

La conquista di questa seconda posizione è lenta e in parte si confonde col progresso della logica e della tecnica statistica. Chi ne sia iniziatore nel campo della Biologia sarebbe difficilissimo accertare, anche perchè v'è appena una sfumatura tra i fenomeni biometrici in senso stretto (misura dei caratteri dei viventi e, in particolare, dell'uomo) e quelli demografici (misura degli aspetti quantitativi della popolazione, fra cui rientra quello essenzialmente biometrico della durata della vita), a servizio dei quali ultimi già dalla metà del seicento si veniva elaborando una tecnica statistica, col concorso di aritmetici politici, fisici, astronomi, matematici, in una parola di tutto il mondo dei dotti, che costituiva l'ambiente di vita e l'alone anche dei biologi.

Certamente, però, si allinea con quella di altri eventuali pionieri l'opera: *Tentamina Medico Physica, ad quasdam Quaestiones, quae Oeconomiam animaleam spectant, accomodata. Quibus accessit Medicina Statica Britannica*, Authore JACOBO KEILL, M. D. Londini, apud Geo. Strahan & W. & J. Innys, MDCCXVIII. Nella « Medicina Statica », il dottor KEILL riprende il problema di SANTORIO, al quale anzi esplicitamente si collega; ma nell'uso dei dati, mentre da una parte rimane fedele al criterio di interpretarli singolarmente, dall'altra progredisce riuscendo a compendiare e a valutare poi come gruppo l'ingente massa delle osservazioni raccolte. Questa posizione intermedia ed ancora incerta fra l'analisi e la sintesi, vale a dire fra il passato e l'avvenire, e l'epoca nella quale scrive, permettono, dunque, di fissare l'attenzione sul dottor KEILL, come su uno dei primi che abbiano usato la logica e la tecnica statistica nell'investigazione dei fenomeni biologici.

2. — Il nome di JAMES KEILL, M. D. non è oggi molto onorato. Esso, per esempio, non si trova nell'Enciclopedia Britannica nè in quella Ita-

liana, e non figura nemmeno nella nostra ultima Storia della Medicina (quella di A. Castiglioni, ediz. 1936).

Egli nacque in Scozia il 27 marzo 1673 ⁽¹⁾, essendo fratello minore a GIOVANNI KEILL, celebre matematico. Educato in parte nel continente, in parte in Inghilterra, coltivò in modo speciale l'Anatomia, acquistando reputazione, come lettore di tale materia, a Oxford e a Cambridge. Nel 1703 si stabilì a Northampton, ove passò il resto della vita, facendo il medico e occupandosi di studi, e vi morì nel luglio del 1719.

I *Tentamina* sono la sua opera principale, che ebbe un vasto successo di edizioni e di notorietà. HALLER non ne parla nella sua *Bibliotheca Medicinæ Praticæ*, di cui la parte moderna, compilata in vecchiaia, è molto affrettata; ma la conobbe, come risulta da un'annotazione manoscritta in uno degli esemplari che possedeva, e forse se ne troverebbe la recensione nei suoi manoscritti, ora a Berna.

Quantunque a noi interessi soprattutto la « Medicina Statica », getteremo almeno uno sguardo sulla prima parte del volume, alla scopo di completare le notizie biografiche, con una migliore conoscenza scientifica dell'Autore.

Il KEILL considera l'organismo umano come una macchina, e chiama « Oeconomia Animalis » ⁽²⁾ il suo regime. Trattasi di un indirizzo perfettamente adeguato ai tempi, e lo scrittore scozzese riconosce volentieri il merito di averlo tracciato al nostro GIAN ALFONSO BORELLI (1608-1679), esso pure allievo di GALILEI e maestro di MALPIGHI. Anche in Inghilterra, l'impostazione iatromeccanica della Fisiologia si era sviluppata, ed alcuni predecessori e contemporanei del KEILL vi avevano acquistato rinomanza: tali ARCHIBALD PITCAIRN (1652-1713), GEORGES CHEYNE (1671-1743), JAMES JURIN (1684-1750), il quale ultimo fu, anzi, in aspra polemica col nostro. Non, dunque, una mente originale, il KEILL, che creò nuovi problemi ed aprì vie maestre, e tuttavia uno studioso onesto, appassionato, sagace.

Nei *Tentamina*, l'autore si pone questioni come di determinare il volume del sangue, la sua velocità di circolazione, la pressione circolatoria,

⁽¹⁾ Notizie desunte da: *The Dictionary of National Biography*, vol. XXX, London, 1892, pag. 309-310, e da altri comuni repertori.

⁽²⁾ Sarebbe interessante stabilire l'origine del nome di Economia animale, applicato alla Fisiologia, il quale pone un'analogia reciproca dell'altra, più moderna e tuttora usuale di « organismo economico ».

le proprietà meccaniche dei liquidi interni e dei muscoli. Per quanto riguarda la tecnica, il KEILL — che trova nel fratello un saggio consigliere — usa correttamente lo strumento matematico, quantunque se ne serva schematizzando eccessivamente i problemi; e si dimostra al corrente con le Scienze del tempo, citando con disinvoltura i *Principia* di Newton e le ricerche sull'elasticità di GIACOMO BERNOULLI.

Quantunque l'indirizzo iatromeccanico contribuisse al progresso scientifico soprattutto in maniera generica, cioè concorrendo all'unificazione del reale con l'assimilare alcuni fenomeni biologici a quelli fisici, pure il KEILL non mancò di conseguire qualche risultato specifico abbastanza importante. Un suo conterraneo recente, infatti, il Mc KENDRIC, lo considera come il primo che abbia eseguito una stima quantitativa della forza del cuore, fissandola a cinque once e mezza, con un errore dovuto alla mancanza di dati raccolti con adeguate esperienze ⁽¹⁾.

È importante rilevare la netta e cosciente impostazione deduttiva dei problemi iatromeccanici, ciò che appare, a tutta prima, alquanto singolare nel paese di BACONE e di LOCKE, dove l'indirizzo empiristico del pensiero pare quasi connaturato col genio nazionale, ed invece è perfettamente logico, come dirò in altra nota. Il KEILL si appella senz'altro a CARTESIO, ammettendo, col filosofo del metodo, che « principia non ex naturae sinu, sed ingeniosorum cerebris desumpta adhibet ». Ed aggiunge: « Ex his principiis, si quid recte concludatur, non pro vero nedum probabili, sed possibili tantum, quatenus a nobis intelligitur, admittendum est ».

3. — Neppure nella « Medicina Statica » il dottor KEILL pretende di impostare e risolvere una questione originale. Al contrario, egli si rifà esplicitamente al « celeberrimo » SANTORIO, riconoscendo in lui quegli che « primus excogitavit et ad perfectionem solus deduxit » la misura della traspirazione insensibile ⁽²⁾. L'Autore si propone, anzi, un ben modesto

⁽¹⁾ J. Mc KENDRIC, *The circulation of the Blood, a Problem of Hydrodynamics*, « The British Medical Journal », 1883, vol. I, pag. 654. L'articolo riassume la prima delle letture tenute dall'autore sull'argomento. Nella terza lettura (pag. 755 del medesimo volume) l'autore accenna a SANTORIO, come probabilmente il primo autore che compì studi quantitativi sulla nutrizione, ma dal sunto non appare ch'egli abbia ricordato il KEILL.

⁽²⁾ Sulle relazioni fra le ricerche di SANTORIO, il pensiero scientifico inglese e in particolare i contributi del KEILL, si veda il mio citato volume, *Biometria e*

scopo e cioè di stabilire « quantum vero inter italos ac britannos discriminis sit ».

La « Medicina Statica » si apre con una lettera dedicatoria, e ad essa seguono tre pagine di prefazione nelle quali l'Autore — con un motivo frequente nella letteratura scientifica inglese — afferma ch'egli attribuisce la massima importanza alle cifre, quasi esperienze presenti e giudici di quella « veritas involuta » che sono le proposizioni generali. Seguono trentacinque pagine di tabelle, che trovano il loro commento nelle ultime quarantotto pagine, contenenti « Aphorismi » e « Disquisitiones ». Le tabelle, dunque, sono e vogliono rimanere il centro dell'interesse per il lettore: e ve n'è anche motivo, chè esse contengono un materiale enorme, per lo più raccolto con sistematiche rilevazioni sull'Autore stesso e sul suo ambiente.

Il KEILL ha cominciato col misurare il proprio ricambio durante tutte le notti e in molte giornate di un intero anno; ha continuato con rilievi saltuari condotti per un decennio, dai 30 ai 40 anni di età; ha completato le esperienze durante due mesi, su un giovane di 23 anni; infine, ha corredoato i dati raccolti con una serie di notizie meteorologiche e fisiche.

Le tabelle recano nel senso delle righe la data di ciascuna osservazione e in quello delle colonne le seguenti notizie: 1° ora della rilevazione mattutina (variabile dalle ore 7 alle 10); 2° pressione barometrica; 3° temperatura; 4° numero delle pulsazioni per minuto ⁽¹⁾; 5° peso del corpo; 6° peso dell'urina emessa dopo la rilevazione notturna; 7° peso della traspirazione notturna; 8° ora della rilevazione notturna (variabile dalle ore 11 alla 1 dopo mezzanotte); 9°-12° pressione, temperatura, numero delle pulsazioni, peso notturni; 13° peso dei cibi e delle bevande ingeriti dopo la pesata mattutina; 14°-16° peso dell'urina, delle deiezioni alvine, della traspirazione diurne; 17° direzione del vento; 18° fasi della luna (eventuale).

Antropometria, loc. cit., nonchè le seguenti Note: *Per la storia della Biometria: l'orologio da polso di Giovanni Floyer*, nel volume di *Studi dedicati alla memoria di Pier Paolo Zanucchi dalla Facoltà di Giurisprudenza*, in « Pubblicazioni dell'Università Cattolica », Milano, s. d.; *Spectator contro Santorio*, in « Rivista Internazionale di Scienze Sociali », 1937.

(1) È uno dei primi esempi, nella letteratura, di conteggio sistematico delle pulsazioni dell'arteria radiale, proposto da sir John Floyer nel 1707, e che sarà combattutissimo per molti decenni, prima di imporsi nella pratica medica. Cfr. M. BOLDRINI, *Per la storia della Biometria, ecc.*, cit.

4. — Sull'esattezza delle pesate di questo tempo c'è sempre da dubitare; ed è noto che occorre arrivare a SÉGUIN e a LAVOISIER per una revisione attendibile dei risultati di SANTORIO ⁽¹⁾. Ma in quest'opera, interessano non le cifre, al lettore moderno, ma il metodo d'indagine, metodo che s'avvantaggia altresì dalla serietà e dalle vive esigenze intellettuali dell'Autore — come rivelano la sua assiduità nello sperimentare, e l'impegno messo nella elaborazione, nell'interpretazione e perfino nella correttissima stampa dei dati — ed è solo sotto questo profilo che qui deve essere esaminata.

Perciò, il nostro interesse si concentrerà in una tabella, nella quale sono riassunte le quantità orarie diurne e notturne della traspirazione e dell'urina emessa, secondo i mesi. Semplici riscontri permettono di constatare che le cifre di tale tabella sono medie aritmetiche, ricavate dalle osservazioni giornaliere di un anno: non è difficile rendersi conto delle lievi differenze risultanti dal controllo, che non alterano, del resto, affatto il significato delle cifre.

La tabella, riprodotta qui sotto, è ideata semplicemente ma ingegnosamente. Essa compendia molte centinaia di dati, eliminando l'influenza del variabile numero di ore di osservazione diurna e notturna, del numero di giorni di osservazione, ineguale da mese a mese, della diversa lunghezza dei mesi. E ciò, usando medie di intensità orarie della traspirazione e della minzione, che perciò possono essere fra loro confrontate, sia nel senso delle colonne (confronti fra mesi) sia in quello delle righe (confronto fra notte e giorno). Non basta. Il dottor KEILL ha usato l'accorgimento di sommare fra loro le medie orarie di ciascuna colonna, ottenendo dei totali che misurano la complessiva traspirazione ed emissione di urina media diurna e notturna, considerando le 24 ore come equipartite in 12 ore diurne e 12 notturne. La somma dei due totali delle due prime colonne e quella dei totali delle ultime due esprimeranno, alla loro volta, la complessiva traspirazione e la minzione delle 24 ore, indipendentemente da ogni influenza stagionale.

Bisogna, dunque, convenire che non per niente il dottor KEILL sapeva di geometria e leggeva CARTESIO, NEWTON e BERNOULLI. Infatti, qui abbiamo un esempio di corretta ricapitolazione di una ingente massa di dati, ricavandone pochi valori medi, perfettamente idonei a risolvere un problema biologico con metodo statistico.

⁽¹⁾ A. CASTIGLIONI, *Storia della Medicina* cit., pag. 470-472.

Haec Tabula Perspirationem & Urinam in una hora, tam interdiu, quam noctu per singulos menses excreta, exhibet.

PERSPIRATIO		MENSES	URINA	
Nocturna	Diurna		Nocturna	Diurna
un.	un.		un.	un.
0.961	1.477	Januarius	1.209	1.974
.850	1.677	Februar.	1.362	1.722
.892	1.348	Mart.	1.589	2.382
.951	1.543	Aprilis	1.666	2.087
1.114	1.872	Maius	1.756	1.382
1.115	2.	Junius	1.534	1.609
1.329	1.582	Julius	1.498	1.545
1.093	1.526	Augustus	1.147	1.439
1.104	1.561	Septem.	1.5	1.333
.950	1.355	Octob.	1.296	1.822
.875	1.515	Novem.	1.431	1.835
.934	1.348	Decem.	1.202	1.581
12.168	18.804		17.192	20.711

5. — Ma una tabella può essere tutto e nulla, a secondo della più o meno chiara coscienza di chi l'ha preparata e della sua attitudine a farla parlare. Il dottor KEILL anche su questo punto è capace di soddisfare le aspettative.

Egli non è ancora, lo si ricordi, un perfetto statistico e perciò, in un lungo commentario dei dati greggi, indugia ad esporre le circostanze che potrebbero spiegare le variazioni giornaliere del ricambio. Attraverso tali note, a più di due secoli di distanza, siamo ancora testimoni della vita quotidiana dell'Autore, quando si compiace di narrare che, in quella certa sera, mangiò delle ostriche e bevve del punch; che in un dato giorno ha molto cavalcato, o ha dormito nudo, ha preso un purgante, fatto il bagno, s'è buscato un raffreddore per essersi rasa la testa. Quando non gli riesce nemmeno di accusare la luna in perigeo o la pioggia, è costretto ad arrendersi: «*Tantae perspirationes nocturnae nulla causa procatartica patet*» (15 febbraio) ed anche: «*Nec hujus diminutionis, causa innotescit*» (19 febbraio).

Ma negli aforismi che seguono, l'Autore si riprende in pieno, riuscendo ad evadere dal pantano dei particolari, per rifugiarsi nei dati sintetici, ed estrarre da quelli notizie generali, circa quanto v'è di costante e di generale nelle variazioni dei fenomeni del ricambio.

Riproduciamo, liberamente disposti, alcuni degli aforismi ricavati dalle cifre della tavola.

1) «*Perspirationis quotidianae pondus ad uncias triginta plus unam assurgit. Si inter somnum et vigiliam diem aequaliter dividamus, perspiratio unius diei est 30 unciarum, 97 partium decimalium, vel septem drachmarum*» (esatto).

2) «*Urina unius diei, vel viginti quatuor horarum, est duarum librarum et unciarum fere sex*» (inesatto, in realtà 2 libbre e once 4).

3) «*Perspiratio diurna est nocturna sesquialtera*» (esatto, once 18,8 contro 12,2).

4) «*Quantitas urinae diurnae major est quam nocturnae*» (esatto, once 20,7 contro 17,2).

5) «*Aestiva perspiratio, hiemalem longe excedit*» (esatto: media oraria dei tre mesi estivi, once 1,46 e dei tre mesi invernali, once 1,21).

6) «*Nocturna perspirationis diminutio non auget quantitatem urinae, nec aucta diurna urinae quantitas diurnam perspirationem minuit*» (inesatto, almeno in funzione dei mesi, esistendo evidente corre-

lazione negativa fra le somme delle prime due e quelle delle due ultime colonne della tabella).

A questi aforismi, desunti dalle cifre elaborate, meritano di esserne aggiunti altri, che esprimono fatti generali, probabilmente ricavati da una sintesi mentale dei dati greggi.

7) «Utrumque evacuationum rationes inter se, a variis causis mutantur; in saluberrimo tamen corporis statu, omnium egestorum summa omnium ingestorum summae est aequalis».

8) «Evacuaciones naturales non sunt corporis ponderi, sed debitae victus rationi proportionales».

9) «Pulsus nocturnus matutino multo celerior est, idemque a prandio acceleratur».

10) «Inter maximam et minimam perspirationem unciae triginta et tres, fere mediae proportionales sunt; quem numerum ex tabulis collectum pro perspiratione quotidiana stabilivimus».

11) «Ea, quam perspiratio naturalis patitur latitudo, est inter sesquilibrium et tres libras; sed modo hic, modo illuc, pro varia corporis conditione inclinatur».

6. — Senza continuare nelle citazioni e senza indugiare in commenti, inutili data la chiarezza degli aforismi riportati, i quali trovano nella tabella la loro base positiva, concluderemo che il KEILL prende posto nel momento della transizione, tra la semplice pratica di misurare i fenomeni biologici e lo studio collettivo dei dati raccolti. È in virtù dello strumento statistico, ancora vergine nei confronti di queste ricerche, e perciò adoperato solo in parte e nei suoi ingranaggi più semplici, che l'Autore ha potuto fissare l'ordine di grandezza, la reciproca concordanza, la variabilità di alcuni fenomeni del ricambio, prescindendo dalle particolarità che invano gli scrittori precedenti e, in parte, il KEILL stesso, cercavano di spiegare e che modernamente consideriamo come dipendenti dal caso. Questa sostanziale innovazione nel metodo di valutazione dei fenomeni, sia ch'egli stesso l'abbia introdotta nel campo della Biologia, sia che abbia tratto ispirazione da altri, è stata fatta con semplicità ma anche con acume e perciò con profitto; e perciò dà diritto al dottor GIACOMO KEILL di essere sollevato da un ingiusto oblio e ricordato fra coloro che concorsero nel tracciare la strada, attraverso la quale si è venuta formando la Biometria moderna.

PROBLEMI DELLA DINAMICA DEI FLUIDI COMPRESSIBILI A VELOCITÀ IPERSONORA*

CARLO FERRARI

SUMMARIUM. — Disputat Auctor de nonnullis problematibus circa motum fluidorum compressibilium cum velocitate ipersonora, et commonstrat recentiores investigationum exitus.

La tendenza moderna di rendere sempre più notevole e più rapido l'incremento della massima velocità degli aeroplani e la necessità di elevare la quota di volo per poter raggiungere detta velocità senza un dispendio inammissibile di potenza hanno provocato un aumento del numero di *Mach* della corrente fluida relativa all'aeroplano tale da rendere fin d'ora di notevole interesse anche per l'aeronautica una serie di problemi che fino a pochi anni or sono appartenevano essenzialmente al campo della balistica.

Il primo e fondamentale di questi problemi è *la determinazione della forza che una corrente gassosa uniforme di velocità ipersonora esercita sopra l'ostacolo in essa immerso*: com'è noto, tale forza non è diretta normalmente al vento relativo, anche nell'ipotesi di fluido perfetto, come per il fluido a velocità ipersonora, ma ammette anche una componente nella direzione del vento stesso, la così detta « resistenza d'onda », che per i corpi, che presentano maggiore interesse nelle applicazioni, costituisce una gran parte della loro resistenza effettiva. Ne deriva che la considerazione del fluido come perfetto per le correnti ipersonore consente una schematizzazione del fenomeno assai più prossima alla realtà, e pertanto conduce a risultati assai più attendibili, che nei movimenti a velocità inferiore a quella del suono, nei quali

* Nota presentata dall'Accademico Pontificio Modesto Panetti.

la viscosità ha sulla configurazione della corrente un effetto assai maggiore di quello della compressibilità.

La determinazione della forza sull'ostacolo richiede il calcolo della velocità del fluido a contatto del corpo stesso: nei limiti entro i quali l'ipotesi della esistenza della funzione potenziale può essere accettata la soluzione del problema fu data da PRANDTL e da BUSEMANN per il caso più semplice di moto piano. Il procedimento seguito si basa sul metodo delle « caratteristiche » della equazione differenziale, che è del tipo di Monge-Ampère, che definisce la funzione potenziale Φ , e la soluzione risulta particolarmente semplice perchè ciascuno dei due sistemi di caratteristiche dell'equazione stessa ammette una combinazione integrabile. Un procedimento analogo è stato da me usato per la determinazione del campo di velocità attorno a un solido di rivoluzione a prora acuminata nel caso più generale in cui la direzione della corrente forma un angolo piccolo con quella del suo asse. L'equazione che definisce la Φ è ora

$$[1] \quad \left(1 - \frac{u^2}{V_s^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{v^2}{V_s^2}\right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{w^2}{V_s^2}\right) \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} - \\ - \frac{2uv}{V_s^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - \frac{2uw}{V_s^2} \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial x} - \frac{2vw}{V_s^2} \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial y} + \frac{v}{y} = 0$$

nella quale x (coincidente coll'asse del corpo), y e φ sono le coordinate cilindriche di riferimento, mentre u , v , w sono le corrispondenti componenti della velocità, e V_s è la velocità del suono. Le superficie caratteristiche della (1) sono le superficie involuppo dei coni di Mach che hanno i vertici nei punti in corrispondenza dei quali comincia a propagarsi in seno al fluido una perturbazione del campo di velocità, e che separano la regione del campo in cui la perturbazione stessa si propaga da quella che rimane indisturbata. Per ogni linea del campo contenuta in un piano normale all'asse x passano due schiere di superficie caratteristiche, le cui normali sono simmetricamente inclinate rispetto alla direzione della velocità. Se pertanto si intersecano le superficie stesse con un fascio di piani meridiani e con una schiera di piani perpendicolari ad x si vengono a determinare fra questi piani e dette superficie una serie di cellette elementari: note le velocità in quattro vertici della base di una di queste cellette è possibile procedendo lungo

gli spigoli di esse calcolare le velocità negli altri vertici, e così, passando da una celletta alla successiva, in tutto il campo.

Il procedimento esposto permette di determinare per un dato ostacolo la pressione che il fluido esercita sopra ogni punto della sua prora, e quindi il contributo sulla resistenza totale della forza che si esercita sopra la prua stessa (*resistenza d'ogiva*). Ora è ovvia la convenienza di ridurre tale resistenza al valor minimo possibile, e pertanto al problema ora esaminato si riconnette intimamente l'altra questione di *determinare la forma del solido a minima resistenza di prora a parità di sezione massima*. Dal punto di vista matematico il quesito si traduce nel problema « isoperimetrico » di trovare una funzione $y = f(x)$ che, fra tutte quelle per cui

$$[2] \quad \int_0^l \frac{dy}{dx} dx = \text{costante}$$

rende minimo

$$[3] \quad \int_0^l \Delta p \frac{dy}{dx} dx$$

per il moto piano, oppure

$$[4] \quad \int_0^l \Delta p y \frac{dy}{dx} dx$$

per quello simmetrico attorno all'asse x , avendo indicato con Δp la sovrappressione, rispetto alla pressione della corrente indisturbata, in corrispondenza dell'elemento ds di contorno del solido di ordinata y , mentre l è la distanza dal vertice di prora della sezione di massima ordinata D . Nel caso piano la soluzione è facile e dà come profilo del solido ottimo quello costituito da due segmenti di retta simmetricamente

inclinati sull'asse x dell'angolo la cui tangente è $\pm \frac{D}{l}$. Molto

più complesso è il problema per il corpo di rivoluzione; per questo KARMAN diede una soluzione approssimata servendosi dei risultati da lui ottenuti rendendo lineare l'equazione differenziale che definisce la funzione potenziale Φ , ed ottenne quale linea meridiana del solido ottimo *l'ellisse*.

Questo risultato non appare del tutto soddisfacente perchè non essendo la prora acuminata la teoria non risulta più applicabile; d'altra parte è importante osservare che non sembra che il risultato stesso sia una conseguenza delle semplificazioni apportate. Di fatto se si ammette di poter porre:

$$\Delta p = f \left(x, y, \frac{dy}{dx} \right)$$

e si indica:

$$F = fy \frac{dy}{dx} \quad ; \quad G = \frac{dy}{dx}$$

l'estremale dell'integrale [4] che soddisfa alla [2] è soluzione dell'equazione

$$[5] \quad \frac{\partial}{\partial y} (F - kG) - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} (F - kG) = 0$$

in cui è $y' = \frac{dy}{dx}$ e k è una costante.

Si ha pertanto

$$[6] \quad yy'' \left(2 f'_{y'} + f''_{y'y'} \right) + y'^2 f'_{y'} + yy'^2 f''_{yy'} + f'_x y + yy' f''_{xy'} = 0$$

Ora dalla [6] si riconosce che per $y = 0$, non potendo ovviamente essere la f e le sue derivate infinite, a meno che non sia contemporaneamente $y' = \infty$, e non considerando la soluzione $y' = 0$, che non può corrispondere fisicamente alla condizione di minimo, dev'essere infinita o la y'' o la y' : ma è facile vedere che se la y'' è infinita per $y = 0$ dello stesso grado di y , è pure infinita la y' . Si ha di fatto in questa ipotesi, nell'intorno di $y = 0$, $y'^2 = a \log y$. Appare pertanto da un lato la convenienza di rendere la prora dell'ostacolo la meno appuntita possibile, compatibilmente colla condizione che l'onda d'urto si formi a contatto della prora stessa, e dall'altro la necessità di porre il problema della ricerca della ogiva ottima sotto un'altra forma.

I medesimi metodi che permettono di calcolare le velocità e le pressioni sopra la prora di un ostacolo consentono di determinare le analoghe grandezze per la poppa, se questa, come la prora, è acuminata, o, in ogni caso, se la velocità della corrente è sufficientemente grande perchè la deviazione che la direzione della velocità del fluido riceverebbe sul contorno del solido, se il fluido stesso lo circuisse in modo completo, risulti maggiore di quella corrispondente alla espansione limite fino alla pressione nulla. In queste condizioni di fatto il gradiente di pressione sull'ostacolo è sempre negativo e di conseguenza non si può determinare nello strato limite alcuna corrente di regresso capace di produrre un distacco della vena dal corpo. Ma se la poppa è arrotondata o termina con una parete piana normale all'asse di simmetria del solido, e la velocità della corrente non ha il valore limite sopra definito, una circuitazione completa del contorno dell'ostacolo da parte del fluido non è possibile, perchè in tal caso verrebbero a confluire in un punto della poppa due vene fluide che una continua espansione ha portato a velocità sempre maggiori, e che dovrebbero pertanto, attraverso ad un'onda d'urto, ristabilire la loro pressione al valore asintotico corrispondente alla corrente indisturbata e deviare la loro velocità di 90° . Si è pertanto indotti ad ammettere che il fluido si distacchi dalla parete del corpo creando una superficie di discontinuità della velocità, contorno di una scia vorticoso: il problema della scia nei fluidi a velocità ipersonora offre un campo di ricerche, per le quali non esiste tuttora alcuno studio, neppure qualitativo; ed è appena necessario rilevare la grande importanza che esso presenterebbe per le indicazioni che potrebbero dare sul contributo dato dalla poppa sulla resistenza totale.

La validità dei risultati delle teorie cui sopra si è accennato è limitata dalla ipotesi della esistenza della funzione potenziale. Ora un recente importante studio di L. Crocco ha messo in evidenza, nell'ipotesi di moto permanente e di fluido isoenergetico, la dipendenza della rotazione delle particelle fluide dal gradiente di entropia, conseguenza dello stato non barotropico del fluido dopo l'onda d'urto; ed ha pure indicato come sia possibile costruire una teoria più generale sostituendo alla funzione potenziale una nuova funzione di corrente. Questa nuova via di ricerca, che sarà certo feconda di brillanti risultati, è però possibile, almeno per ora, soltanto per i moti permanenti piani o simme-

trici attorno ad un asse. Manca cioè nella teoria dei fluidi compressibili a velocità ipersonora una funzione corrispondente a quella che in idrodinamica è il *potenziale vettoriale* della velocità.

Le questioni a cui si è fatto cenno appartengono a problemi di moto permanente. Ma le scienze applicate richiedono alla dinamica dei gas la risoluzione di una serie di problemi inerenti anche al moto vario. Di fatto, ad esempio, le sezioni estreme delle pale d'elica negli aeroplani molto veloci hanno già velocità molto prossime, ed in qualche caso superiore, alla velocità del suono. La necessità di avere per i profili corrispondenti una efficienza aerodinamica sufficientemente elevata porta ad adottare profili molto sottili. Si presenta pertanto subito il pericolo di vibrazioni dei profili stessi e la necessità di dedurre col calcolo il loro comportamento aerodinamico nel fenomeno vibratorio sia per determinare l'influenza di questo sulle loro caratteristiche di portanza e di resistenza, sia per assicurare che il fenomeno aerodinamico non diventi esso stesso eccitatore delle vibrazioni. Nella ipotesi della esistenza della funzione potenziale e limitatamente al problema piano, la risoluzione di questo può essere tentata collo stesso metodo delle caratteristiche già indicato; il procedimento è però alquanto complesso in quanto, a parte la laboriosità dei calcoli, l'onda d'urto non ha più una configurazione fissa nello spazio, ma si sposta e varia di forma col tempo. D'altra parte la validità dei risultati che per tal via si potrebbero ottenere sarebbe ancor più che per i moti permanenti infirmato dalla ipotesi della irrotazionalità del movimento. Ora è possibile dal teorema di BYERKNES, la cui validità è affatto generale, dedurre anche per il problema ora in esame una relazione tra la variazione della rotazione delle particelle fluide del campo di moto ed il gradiente di entropia che si genera in conseguenza dell'evoluzione che l'aria compie attraversando l'onda d'urto; si ricava di fatto con semplici trasformazioni

$$\rho \operatorname{rot} \frac{d}{dt} \mathbf{V} = A \operatorname{grad} p \wedge \operatorname{grad} s$$

in cui \mathbf{V} è la velocità del fluido, p la sua pressione ed s l'entropia. Ma uno studio completo della questione si presenta così irto di difficoltà da far desiderare, almeno come primo orientamento, una soluzione approssimata del problema nelle condizioni particolarmente semplici

quali sono offerte dalla ipotesi di perturbazioni piccolissime introdotte dall'ostacolo nel suo moto vibratorio nel campo di moto, ipotesi che consente di rendere lineari le equazioni del movimento. È appena necessario però far rilevare la grande importanza che uno studio rigoroso presenterebbe non soltanto per l'aeronautica, ma anche per le ricerche sulla formazione e sulla propagazione dell'onda di detonazione nelle miscele esplosive, alle quali sono direttamente interessate la balistica e la teoria dei motori a combustione interna.

AN
INFINITE INTEGRAL INVOLVING BESSEL FUNCTION
AND SONINE'S POLYNOMIAL (*)

R. S. VARMA M. Sc.

(Christ Church College, Cawnpore, India)

SUMMARY. — Auctor, per usum symbolici calculi ab Heaviside introducti, valorem cuiusdam integralis dat, quod Bessolianam functionem una cum Sonineo polynomio continet.

1. It has been shown by B. M. WILSON (1) that the integral equation

$$[1.1] \quad f(x) = \lambda \int_0^\infty \sqrt{xy} J_m(xy) f(y) dy$$

wherein $R(m) > 1$, has characteristic numbers $\lambda = \pm 1$ and the corresponding solutions are

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{m+\frac{1}{2}} T_n^n(x^2) \quad [n = 0, 1, 2, \dots]$$

The object of this paper is to investigate an infinite integral involving BESSEL function and SONINE'S polynomial which gives as a particular case the above integral equation.

(*) Nota inviata da Pierre Humbert S. C. e presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini, il 31 marzo 1937.

(1) B. M. WILSON, *On an extension of Milne's integral equation*, «Messenger of Math.», 53 (1923-1924), 157-160.

2. We start with the following integral due to SONINE ⁽¹⁾:

$$\int_0^{\infty} e^{ky} e^{-y} y^m T_m^n(y) dy = \frac{k^n}{n! (1-k)^{m+n+1}} \quad [\mathbf{R}(k) < 1]$$

Putting $k = 1 - \alpha$, we obtain

$$[2.1] \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha y} y^m T_m^n(y) dy = \frac{(1-\alpha)^n}{n! \alpha^{m+n+1}} \quad [\mathbf{R}(\alpha) > 0]$$

Writing $\alpha = \beta + \frac{1}{p}$, this gives that

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-\beta y} e^{-\frac{y}{p}} \left(\frac{y}{p}\right)^m T_m^n(y) dy \\ &= \frac{p(1-\beta p-1)^n}{n!(p\beta+1)^{m+n+1}} \\ [2.2] \quad &= \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r (1-\beta)^{n-r}}{r!(n-r)!} \frac{p^{n-r+1}}{(p\beta+1)^{m+n+1}} \end{aligned}$$

Consider now p as a symbolic operator. By virtue of the known operational image ⁽²⁾

$$\left(\frac{y}{p}\right)^m e^{-\frac{y}{p}} \doteq (xy)^{\frac{1}{2}m} J_m(2\sqrt{xy}),$$

⁽¹⁾ N. SONINE, *Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en series*, « Math. Annalen », 16 (1865), 1-80.

⁽²⁾ B. VAN DER POL, *On the operational solution of linear differential equation and an investigation of the properties of these solutions*, « Phil. Mag. », VIII (1929), 861-898.

the original of the left hand side of [2.2] is

$$x^{\frac{1}{2}m} \int_0^{\infty} e^{-\beta y} y^{\frac{1}{2}m} J_m(2\sqrt{\alpha y}) T_m^n(y) dy$$

To find the original of the right hand side, we write the integral [2.1] in the form

$$\int_0^{\infty} e^{-px} x^m T_m^n(x) dx = \frac{(1-p)^n}{n! p^{m+n+1}},$$

which gives that

$$[2.3] \quad \frac{(1-p)^n}{n! p^{m+n}} \doteq x^m T_m^n(x) \quad [R(m) > -1]$$

Now we know from CARSON⁽¹⁾ that, if

$$\varphi(p) \doteq f(x),$$

then

$$[2.4] \quad \varphi\left(\frac{p}{s}\right) \doteq f(sx), \quad (s = \text{const} > 0)$$

and

$$[2.5] \quad \frac{p}{p+\alpha} \varphi(p+\alpha) \doteq e^{-\alpha x} f(x),$$

⁽¹⁾ CARSON, *Electric Circuit Theory and the operational calculus* (McGraw Hill, New York, 1926).

Applying first [2.5] and then [2.4] to [2.3], we get

$$\frac{(-1)^n}{n!} \frac{(p\beta)^{n+1}}{(p\beta+1)^{m+n+1}} \doteq e^{-\frac{y}{\beta}} \left(\frac{y}{\beta}\right)^m \mathbb{T}_m^n \left(\frac{y}{\beta}\right)$$

The original of the right hand side in [2.2] is, hence,

$$(-1)^n \sum_{r=0}^n \frac{(1-\beta)^{n-r}}{r! \beta^{n-r+1}} e^{-\frac{x}{\beta}} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{m+r} \mathbb{T}_{m+r}^{n-r} \left(\frac{x}{\beta}\right)$$

It follows therefore that

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\beta y} y^{\frac{1}{2}m} J_m(2\sqrt{xy}) \mathbb{T}^n(y) dy = \\ [2.6] \quad & = (-1)^n \sum_{r=0}^n \frac{(1-\beta)^{n-r}}{r! \beta^{m+n+1}} x^{\frac{1}{2}m+r} e^{-\frac{x}{\beta}} \mathbb{T}_{m+r}^{n-r} \left(\frac{x}{\beta}\right) \\ & \qquad \qquad \qquad [\mathbb{R}(m) > -1] \end{aligned}$$

3. To show that [2.6] gives as a particular case [1.1] we shall require the following

Lemma:

$$\sum_{r=0}^n \frac{x^r}{r!} \mathbb{T}_{m+r}^{n-r}(x) = \mathbb{T}_m^n(2x)$$

By the help of [2.3], we have

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^n \frac{x^{m+r}}{r!} \mathbb{T}_{m+r}^{n-r}(x) & \doteq \sum_{r=0}^n \frac{(1-p)^{n-r}}{r!(n-r)! p^{m+n}} \\ & = \frac{(2-p)^n}{n! p^{m+n}} \\ & \doteq x \mathbb{T}_m^n(2x) \end{aligned}$$

From this the lemma at once follows.

Not for $\beta = \frac{1}{2}$, [2.6] reduces to

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y} y^{\frac{1}{2}m} J(2\sqrt{xy}) T_m^n(y) dy$$

$$= (-1)^{n-m+1} 2^{\frac{1}{2}m} x^{-2n} e^{-2x} \sum_{r=0}^n \frac{(2x)^r}{r!} T_{m+r}^{n-r}(2x)$$

Using our lemma established above, it is easy to see that this result is equivalent to [1.1].

RICERCHE SULLA FISILOGIA
DELL'EMBRIONE DEI CEFALOPODI (*)

(Con due figure)

SILVIO RANZI

SUMMARIVM. — Breviter exponit Auctor ea omnia quae constant, de biochimica embrionalis evolutionis cephalopodorum.

In una serie di ricerche (¹), aiutato anche dall'opera di miei collaboratori (CORI, D'AMORA, STOLFI), ho preso in esame i rapporti tra embrioni di Cefalopodi e ambiente nel quale si sviluppano. Il primo quesito che mi sono posto, e che resta ancora alla base di tutte le ricerche, è quello della provenienza dell'acqua e delle sostanze minerali necessarie allo sviluppo dell'embrione. Nel corso del lavoro ho però considerato anche qualche altro aspetto della fisiologia embrionale.

In questa nota cerco di inquadrare i fatti, che ho reso di pubblica ragione, con le ricerche che ho in corso e con quanto è stato osservato da qualche altro autore al fine di prospettare lo stato delle nostre conoscenze su questo capitolo della embriologia dei Cefalopodi.

Le uova di *Sepia officinalis* L. e *Loligo vulgaris* Lam., durante lo sviluppo, assumono dal mare acqua e sostanze minerali. Questo si può direttamente osservare determinando: peso fresco, peso secco e peso delle ceneri delle uova non sgusciate all'inizio e alla fine dello sviluppo e dell'uovo p. d. appena depresso, liberato dai suoi involucri, e dell'embrione al momento della schiusa. Si vede allora nell'uovo non sgusciato

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio F. Bottazzi, il 10 marzo 1937.

(¹) Ricerche eseguite nella massima parte presso la Stazione Zoologica di Napoli.

aumentare nel corso dello sviluppo l'acqua e le sostanze minerali, ed aumento di acqua e sostanze minerali si osserva anche se si paragona la composizione dell'uovo sgusciato appena depresso, con quella dell'embrione pronto per la schiusa (tabelle I e II e figure 1 e 2).

TAB. I. — *Differenza tra composizione dell'uovo e composizione dell'embrione di Sepia officinalis* (1).

	Uovo mg.	EMBRIONE A TERMINE mg.	DIFFERENZA mg.	VARIAZIONI PER CENTO DI PESO INIZIALE
Peso fresco	76,91	132,80	+ 55,89	+ 72,7
Acqua	40,39	100,60	+ 60,21	+ 149,1
Sostanze organiche . . .	35,72	28,90	— 6,82	— 19,1
Protidi	23,64	20,40	— 3,24	— 13,7
Ceneri	0,80	3,80	+ 2,50	+ 312,5

TAB. II. — *Differenze tra composizione dell'uovo e composizione dell'embrione di Loligo vulgaris* (2).

	Uovo mg.	EMBRIONE A TERMINE mg.	DIFFERENZA mg.	VARIAZIONI PER CENTO DI PESO INIZIALE
Peso fresco	2,32	2,68	+ 0,36	+ 15,5
Acqua	1,325	1,91	+ 0,585	+ 44,2
Sostanze organiche . . .	0,955	0,711	— 0,244	— 25,5
Protidi	0,625	0,533	— 0,092	— 15,0
Lipidi	0,315	0,165	— 0,150	— 47,6
Ceneri	0,04	0,059	+ 0,019	+ 47,5

(1) S. RANZI, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei (Cl. Sc. fis. mat. e nat.) », serie 6^a, vol. 9, pag. 1171, 1929; « Arch. Entw. Mechan. », Bd. 121, pag. 345, 1930; M. CORI, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 15, pag. 368, 1936.

(2) G. STOLFI, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei (Cl. Sc. fis., mat. e nat.) », serie 6^a, vol. 18, pag. 516, 1933.

I dati di KAMACHI⁽¹⁾ che, indipendentemente da noi, ha studiato la composizione chimica delle uova e degli embrioni a termine del *Lo-*

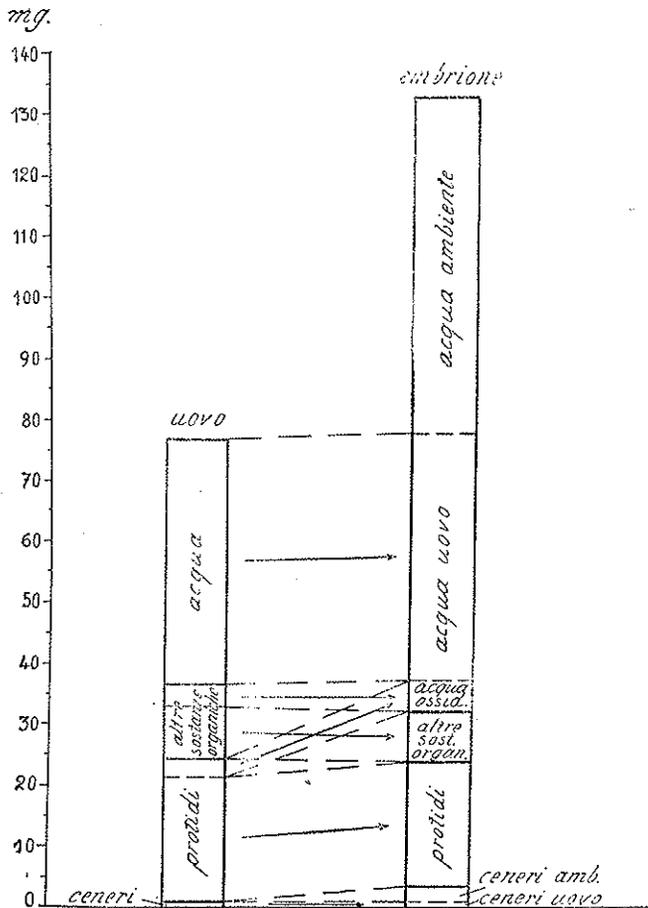


FIG. 1.

Composizione dell'uovo e dell'embrione a termine di
Sepia officinalis.

ligo bleekeri, dimostrano che le trasformazioni, che avvengono nel corso dello sviluppo, si accompagnano, anche in questa specie, ad assunzione di acqua e di sostanze minerali e a diminuzione dell'azoto totale.

(¹) T. KAMACKI, «Zeit. Physiol. Chem.», Bd. 238, pag. 91, 1936.

Durante lo sviluppo di *Sepia officinalis* e *Loligo vulgaris* aumentano anche l'acqua e le sostanze minerali negli involucri dell'uovo considerati isolatamente. JECKLIN⁽¹⁾, che ha studiato anche il *Loligo vulgaris* confermando le osservazioni di STOLFI, dimostra che questo fenomeno si osserva anche in *Sepietta oweniana* e *Sepiola robusta*. Nel *Loligo bleekeri*, invece, stando ai dati di KAMACKI, acqua e sostanze minerali contenute negli involucri delle uova diminuirebbero nel corso dello sviluppo e questa diminuzione sarebbe sufficiente a sopperire ai bisogni degli embrioni.

È bene far notare che, nel corso dello sviluppo, vi è una reale presa di acqua dall'ambiente e che l'acqua, formata in forza dei processi di ossidazione non è sufficiente a coprire i bisogni dell'embrione. Così dai dati della tabella I si può calcolare che, nel corso dello sviluppo della *Sepia officinalis*, si formano da 3,21 a 5,26 milligrammi di acqua di ossidazione, e cioè meno di un decimo della richiesta di acqua per parte dell'embrione in via di sviluppo. Dalla tabella II si calcola che, nel corso dello sviluppo di *Loligo vulgaris*, si formano 0,200 milligrammi di acqua di ossidazione e cioè il 34 % dell'acqua richiesta dall'embrione per potersi sviluppare.

Le variazioni delle ceneri delle quali finora si è detto riguardano Na, K, Mg, Ca. NEEDHAM, NEEDHAM, YUDKIN e BALDWIN⁽²⁾ hanno però dimostrato che anche il P aumenta durante lo sviluppo embrionale della *Sepia officinalis*. Sempre sulla *Sepia officinalis*, con metodo spettrografico, dimostrai⁽³⁾ che aumentano, nel corso dello sviluppo e vengono presi dal mare, i seguenti elementi: Cu, Fe, Mn, V, B, Li, Sr. L'aumento di Ca, Mg, e verisimilmente di Sr, è più che altro in rapporto alla formazione del guscio. L'aumento di Na e K alle funzioni che questi elementi esplicano nel protoplasma e nei liquidi dell'organismo nei quali hanno importanza anche per i fenomeni osmotici. L'assunzione del P, secondo NEEDHAM e collaboratori, sarebbe in rapporto alla sintesi dell'acido argininfosforico, che si forma con lo sviluppo del tessuto mu-

(1) L. JECKLIN, «Rev. Suisse Zool.», vol. 41, pag. 593, 1934.

(2) J. NEEDHAM, D. M. NEEDHAM, J. YUDKIN and E. BALDWIN, «Journ. exp. Biol.», vol. 9, pag. 212, 1932.

(3) S. RANZI, «Rend. R. Acc. Naz. Lincei (Cl. Sc. fis. mat. e nat.)», serie 6^a, vol. 22, pag. 605, 1935.

scolare. Il Cu è il metallo del pigmento respiratorio del sangue (emocianina). Il Fe è tra i componenti fondamentali del protoplasma, basta

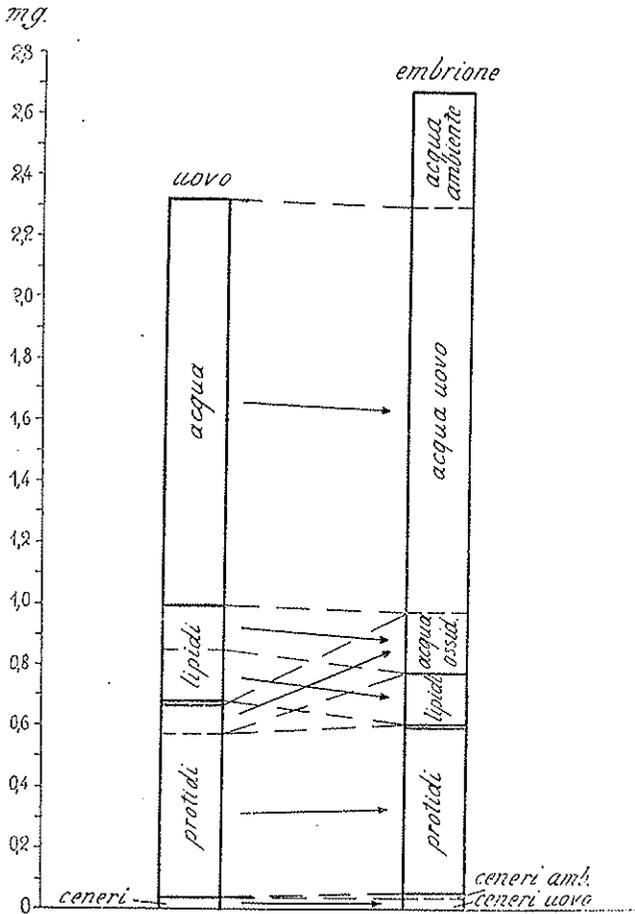


FIG. 2.

Composizione dell'uovo e dell'embrione a termine di
Loligo vulgaris.

pensare al pigmento respiratorio di Warburg. Mn e V hanno probabilmente importanza in fenomeni enzimatici. Il B è segnalato con frequenza in animali marini.

Studiando, a mezzo del fotometro di Moll, l'intensità della emissione delle diverse linee dello spettro di spettrogrammi ottenuti con lo spettrografo E3 di Hilger e con gli accorgimenti tecnici del precedente lavoro, ho visto aumentare, durante lo sviluppo degli embrioni di *Sepia officinalis* parecchi altri elementi e tra essi: Ag (aumento per λ 2816,15), ⁽¹⁾; Al (aumento per λ 3082,162); Ba (aumento per λ 4934,10); Mo (leggerissimo aumento per λ 2816,15); Ni (aumento per λ 3414,771); Zn (aumento per λ 3344,5).

Con questo gli ioni che, direttamente o indirettamente, si sono visti aumentare nel corpo dell'embrione durante lo sviluppo di *Sepia officinalis* sono i seguenti: Ag, Al, B, Ba, Ca, Cu, Fe, H, K, Li, Mg, Mn, Mo, Na, Ni, O, P, Sr, V, Zn.

Ricerche, ancora in corso, permettono già di concludere che la pressione osmotica degli embrioni di *Sepia officinalis* resta sensibilmente costante durante lo sviluppo. È ben noto che il valore del Δ della poltiglia di embrioni aumenta nel corso dello sviluppo embrionale della rana e del pollo ⁽²⁾. Nei Cefalopodi invece, animali pecilosmotici nel senso di BOTTAZZI ⁽³⁾, il Δ della poltiglia di embrioni in tutti gli stadi dello sviluppo, coincide abbastanza bene col Δ dell'acqua di mare.

Volendo analizzare il meccanismo della assunzione di acqua bisogna tener conto che, anche le uova morte, presentano, col tempo, un leggero aumento della idratazione del tuorlo. Nel normale sviluppo, l'inizio dell'assorbimento dell'acqua e sostanze minerali dall'ambiente si accompagna alla formazione di un liquido perivitellino, che cresce man mano che l'embrione si sviluppa, accumulandosi nello spazio tra l'embrione e gli involucri. È verisimile, sebbene alla dimostrazione di questa supposizione ancora non sia giunto, che l'embrione versi degli acidi organici nello spazio tra il suo corpo e le pareti del guscio. Questa secrezione determinerebbe, per forze osmotiche, l'assorbimento di acqua dal mare per parte del liquido perivitellino, e, poichè l'uovo non può concepirsi come una macchina capace di distillare l'acqua del mare, con

⁽¹⁾ Le lunghezze d'onda sono prese da H. KAYSER e W. F. MEGGERS, *International Critical Tables*, vol. 5, pag. 276, 322, « Nat. Res. Council U. S. A. », 1929.

⁽²⁾ E. L. BACKMANN und G. RUNNSTROM, « Bioch. Zeit », Bd. 22, pag. 290, 1909; K. BIALASZEWICZ, « Arch. Entw. Mech. », Bd. 34, pag. 486, 1912.

⁽³⁾ F. BOTTAZZI, « Arch. Fisiol. », vol. 3, pag. 416, 1906.

quest'acqua entrerebbero dei cationi, che verrebbero trattiene abbassando il pH del liquido perivitellino. Nel successivo processo di assunzione di acqua dal liquido perivitellino per parte dell'embrione, non sarebbero estranei processi di trasformazione dei rapporti fisico-chimici tra i protidi e le sostanze minerali, secondo quanto ripetutamente ho avuto occasione di esporre (1).

Il liquido perivitellino, durante queste trasformazioni, è tenuto in movimento dalle ciglia vibratili dell'ectoderma embrionale e, verso la fine dello sviluppo, da piccoli movimenti delle pinne e del margine del mantello dell'embrione (2). Le correnti ciliari regolano il movimento in maniera che, nel *Loligo* durante tutto lo sviluppo e nella *Sepia* negli stadi giovani, una corrente di liquido perivitellino, proveniente dalla faccia interna degli involucri dell'uovo, giunge al centro dell'abbozzo embrionale. A questo stadio tutto l'ectoderma dell'embrione, studiato col metodo ideato da SPIRITO (3), contiene perossidasi. In stadi posteriori le attività perossidasiche si localizzano nel sangue, che nel frattempo si è sviluppato, e nella *Sepia* la corrente del liquido perivitellino dalla faccia interna degli involucri, raggiunge direttamente le branchie dell'embrione.

(1) S. RANZI, « Atti Pontif. Acc. Sc. », vol. 86, pag. 86, 1933; « C. R. XII Congr. Inter. Zool. Lisbonne », 1935, pag. 242, 1936.

(2) S. RANZI, « Boll. Soc. Naturalisti Napoli », vol. 38, pag. 99, 1926.

(3) A. SPIRITO, « Arch. Sc. Biol. », vol. 20, pag. 442, 1934.

LE
PROPRIETÀ OSSIDANTI DELL'ACQUA DI FIUGGI

(Con due figure)

N. PARRAVANO, *Accademico Pontificio*

E M. GIORDANI

(Istituto Chimico della R. Università di Roma)

SUMMARIVM. — Disceptant Auctores de oxydatione acidı urici, quam oxygenio in aquis insito agente fieri demonstrant. Ostendunt insuper substantias catalysantes adesse in aqua fontis prope Anticolim (Fiuggi), quae oxydationem ipsam magnopere accelerant.

L'indiscusso valore terapeutico dell'acqua di Fiuggi, noto fin dai tempi di Bonifacio VIII, ha formato oggetto di numerose indagini di carattere clinico, fisiologico e chimico-fisico. Ciò malgrado non si possiede ancora nessuna indicazione che possa fare intravedere il meccanismo con cui essa agisce tanto efficacemente nel trattamento della diatesi urica.

Ai principi del secolo un chimico-clinico romano, il REM-PROCI⁽¹⁾, mettendo a contatto acido urico con acqua di Fiuggi e con acqua distillata pose in evidenza il maggiore potere dissolvente della prima rispetto alla seconda; inoltre egli somministrò in vivo la Fiuggi e trovò che essa provoca aumento notevole di azoto urinario e anche di acido urico. SILVESTRI⁽²⁾ ha recentemente confermato questi risultati dimostrando che l'acqua di Fiuggi « ha una vera azione dissolvente e mobilizzatrice dell'acido urico dei tessuti ».

⁽¹⁾ Comunicazione al Congresso di Idrologia tenuto a Venezia nel 1905.

⁽²⁾ *Le acque di Fiuggi: azione e indicazioni cliniche*. Roma, A. Marzi, 1934.

Noi abbiamo cercato di chiarire questo comportamento caratteristico dell'acqua di Fiuggi rispetto all'acido urico, e con una serie di delicate esperienze eseguite con varie acque minerali e con acqua distillata, abbiamo potuto mettere in evidenza fenomeni di ossidazione finora insospettati da parte dell'ossigeno disciolto nell'acqua e sui quali riferiamo qui brevemente.

Abbiamo messo acido urico in eccesso a contatto con le diverse acque, e con le modalità comunemente adoperate per le misure di solubilità abbiamo determinato come varia col tempo la concentrazione dell'acido nel liquido al quale si trova mescolato. Le misure sono state eseguite a 37°, e la determinazione dell'acido urico nelle soluzioni è stata fatta colorimetricamente col metodo di BENEDICT.

I risultati sono riprodotti nelle curve della figura 1.

Da essa risulta evidente:

1° che le diverse acque portano in soluzione quantità diverse di acido urico;

2° che non con tutte le acque si raggiunge un valore costante di solubilità.

Alcune acque hanno un potere solubilizzante superiore a quello della Fiuggi, e tra esse figura l'acqua Marcia alla quale nessuno certo ha mai voluto attribuire un valore terapeutico nella diatesi urica.

Si potrebbe pensare che il potere solubilizzante possa essere legato al valore della concentrazione degli joni (H^+) del liquido, ma così non è perchè, ad esempio, la Lancisiana che ha un pH 5,76 quasi identico a quello della Fiuggi, scioglie più acido urico. Il fenomeno in questo caso può forse attribuirsi a reazioni di scambio fra acido urico e bicarbonati alcalini dei quali essa è ricca ⁽¹⁾, essendo, com'è noto, le costanti di dissociazione dell'acido urico più elevate di quelle dell'acido carbonico ⁽²⁾. Allo stesso modo potrebbe interpretarsi l'elevato potere solvente dell'acqua Marcia, la quale, pur avendo una minore durezza temporanea (20°) non contiene, come la Lancisiana, quelle tracce di acido fosforico libero, che devono pur esercitare un'azione deprimente sulla dissociazione dell'acido urico.

⁽¹⁾ La Lancisiana ha una durezza temporanea di 30° francesi.

⁽²⁾ Acido urico $K_1 = 2,10^{-6}$; $K_2 = 2,10^{-9}$. Acido carbonico $K_1 = 3,10^{-7}$; $K_2 = 6,10^{-11}$.

Per le acque Amerino ed Evian-Cachat potrebbe ritenersi che la più ricca mineralizzazione, rispetto alla Fiuggi, e quindi un elevato *effetto sale*, tenda ad aumentare in esse l'attività del solvente.

Il fatto però che in molti dei casi da noi studiati non si raggiunge un valore costante di solubilità neanche dopo tempi lunghi di contatto

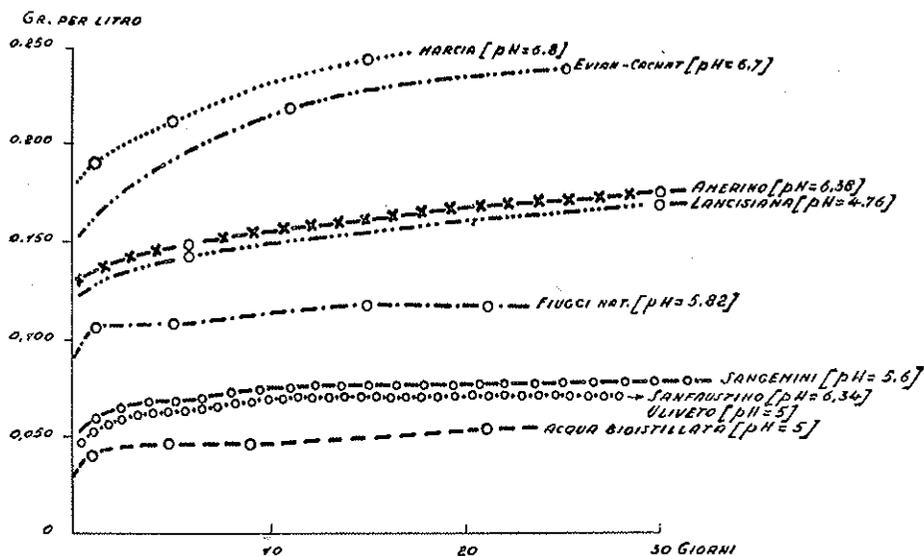


FIG. 1.

col corpo di fondo lascia supporre l'intervento di altri fenomeni accanto a quello di semplice passaggio dell'acido in soluzione.

* * *

L'acido urico in soluzioni alcaline, a $\text{pH} > 8$, viene ossidato dall'ossigeno elementare e a seconda delle condizioni, si formano allantoina ed acido ossonico, o anidride carbonica ed acqua. La velocità con cui l'ossigeno viene assorbito cresce del 35-40% in presenza di tracce di ferro o di manganese (rispettivamente $\frac{1}{870}$ e $\frac{1}{800}$ di atomo per mole-

cola di acido urico). Il rame, nella proporzione di un atomo per 450 molecole di acido urico, raddoppia la quantità di ossigeno assorbita nell'unità di tempo.

Da esperienze da noi eseguite, operando in modo da garantirsi da eventuali contaminazioni batteriche, è risultato che la ossidazione non è limitata alle soluzioni alcaline, ma si verifica anche in soluzioni neutre o lievemente acide ($\text{pH} < 6,5$), e cioè si compie anche in condizioni di acidità attuale identiche a quelle che si riscontrano nel nostro organismo.

Soluzioni di acido urico in acqua distillata, perfettamente deareata, conservate nel vuoto o in ambiente di azoto privato da ogni traccia di ossigeno, mantengono inalterato il loro contenuto di acido urico, anche per dieci giorni; basta però la quantità di ossigeno normalmente disciolto nell'acqua per farlo sparire in qualche giorno.

L'assenza di trasformazione in ambiente privo di ossigeno lascia pertanto supporre che si sia in presenza di una ossidazione dell'acido urico.

Dalle curve della figura 2 si rileva che la scomparsa dell'acido urico si compie con velocità diversa nelle diverse acque, e che la velocità è massima nel caso della Fiuggi. Evidentemente il fenomeno è dovuto alla particolare composizione di essa.

Sembra logico che non si possa attribuire la ^{*}maggiore velocità di ossidazione ai sali che costituiscono la mineralizzazione principale dell'acqua, ma che debba ricercarsene la ragione in quei componenti che vi sono contenuti in tracce piccolissime e che ne costituiscono la *mineralizzazione secondaria*. La Fiuggi contiene infatti tracce di numerosi elementi, quali: titanio, vanadio, bario, cromo, ferro, manganese. Questi, su supporto di silice colloidale, presente nell'acqua, possono costituire vere e proprie ossidasi molto attive.

Non è il caso di richiamare qui le numerose reazioni biologiche promosse ed attivate da catalizzatori inorganici. Ma il meccanismo di azione dell'acqua di Fiuggi potrebbe anche essere di semplice natura colloidale: i calcoli renali e vescicali sono infatti concrezioni colloidali ed hanno perciò le caratteristiche ed il comportamento proprii dello stato colloidale.

È noto che l'aggiunta di piccole quantità di elettroliti ad una sospensione colloidale può determinare la flocculazione del colloide. L'ordine di grandezza delle quantità di elettrolita necessarie è spesso trascurabile rispetto a quello della massa colloidale; per esempio, un grammo di ammoniaca floccula più di 1800 grammi di idrato ferrico.

ACQUE DECARBONATE.

I numeri tra parentesi indicano dopo quanti giorni
la reazione dell'ac. urico è ancora nettamente positiva

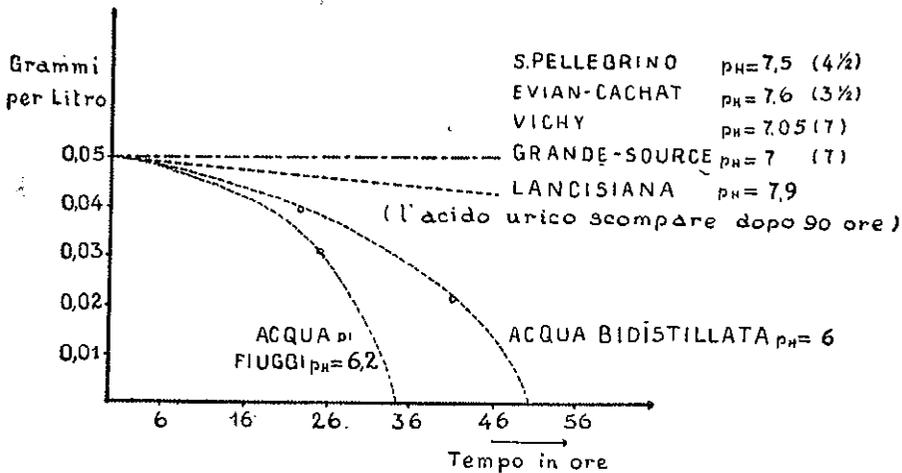


Fig. 2.

Il flocculato, o coagulo che si ottiene, può essere peptizzato per mezzo di un acido o di un alcali, secondo che si tratta di un colloide positivo o negativo, o a mezzo di altri colloidi metallici o di ossidi metallici, i quali potrebbero pertanto diminuire la stabilità delle concrezioni di urati, determinandone il graduale ritorno in soluzione.

Ma l'acqua di Fiuggi ha ancora una caratteristica, forse preziosa, dovuta alla natura dei terreni umiferi che essa traversa: un notevole contenuto di acidi crenico ed apocrenico. Questi colloidi organici fun-

zionano da attivissime ossidasi e non è escluso che determinino o cooperino a determinare il potere urolitico dell'acqua.

Queste ricerche vengono proseguite.

Esse si prospettano attraenti, ma sono difficili e lunghe per la esigua quantità di residuo con cui si ha a che fare, per la estrema sensibilità dei catalizzatori colloidali all'azione del calore e forse della luce, e per la necessità di garantirsi da eventuali azioni batteriche senza alterare la composizione dell'acqua.

SULLA TEORIA DELLE ALI SOTTILI (*)

(Con quattro figure)

E. PISTOLESI

Accademico Pontificio

SYMMARIUM. — Demonstrat Auctor quomodo iam cognita alarum subtilium theoria compleri possit, ut alarum crassitudinis, quamvis parvae, ratio habeatur.

Tale assequitur Auctor propositum non tantum vortices, ut in veteri theoria, sed etiam fontes aut duplices fontes (quae italice «doppiette» dicuntur) distributas in chordis alarum apte disponendo.

Velocitatum campus circa alas earumque crassitudinis effectus in indefiniti biplani problemate reperiuntur.

Postremo breviter demonstrat Auctor quomodo proposita methodus in studio alarum magnae curvaturae adhiberi possit.

È nota la teoria delle ali sottili, elaborata con metodi diversi, ma con risultati concordanti, da BIRNBAUM, da MUNK e da GLAUERT; in essa si suppone sostituita l'ala da uno strato vorticoso (superficie di discontinuità per la velocità) disteso sulla porzione da $-l$ ad l dell'asse delle x , dal quale asse la linea del profilo si suppone pochissimo discosta. Le velocità indotte dai vortici dello strato si suppongono piccolissime rispetto alla velocità asintotica della corrente (che si suppone diretta secondo l'asse x o facente un piccolo angolo con esso) e la forma del profilo viene ad essere definita dalla direzione della tangente in ogni punto, quest'ultima essendo data dal quoziente della velocità verticale indotta v e della velocità asintotica V :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{V} ,$$

(*) Nota presentata il 29 aprile 1937.

In queste teorie il profilo alare è supposto infinitamente sottile. Ora in alcuni problemi tale supposizione conduce a risultati assai discosti dalla realtà, com'è accaduto allo scrivente di rilevare nello studio del problema della schiera alare obliqua; è opportuno pertanto mostrare come si possa senza difficoltà estendere le teorie suddette in modo da tener conto anche di uno spessore finito, sebbene piccolissimo, del profilo.

L'estensione che esporremo si riattacca al procedimento di GLAUERT, che è il più conveniente per la sua eleganza e semplicità.

1. - Si supponga che alla distribuzione di vortici sia associata, sul tratto da $-l$ a l dell'asse x , una distribuzione di sorgenti. Si indichi con $\gamma(x)$ la legge di distribuzione della vorticità, con $\varepsilon(x)$ la legge della distribuzione di sorgenti. Si supponga l'asse y rivolto verso il basso e l'asse x verso destra.

Posto:

$$\frac{x}{l} = -\cos \theta$$

si ponga, secondo GLAUERT:

$$\gamma = V \left(a_0 \cos \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \operatorname{sen} n\theta \right)$$

e, in modo analogo:

$$\varepsilon = V \left(b_0 \cos \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\theta \right).$$

La componente v secondo l'asse y della velocità indotta, ha in ogni punto del tratto considerato dell'asse x , una discontinuità, in quanto la sorgente εdx localizzata sul tratto dx induce una velocità $\frac{\varepsilon}{2}$ dalla parte delle y positive e una velocità $-\frac{\varepsilon}{2}$ dalla parte delle y negative. A queste si aggiunge la velocità indotta dai vortici, e mentre

questa definisce la forma dello « scheletro » o « linea media » del profilo, le velocità $\pm \frac{\varepsilon}{2}$ definiscono lo spessore di essa. Se indichiamo con y_1 e y_2 le ordinate del ventre e del dorso del profilo, con y l'ordinata della linea media, con v' la velocità indotta dai soli vortici, e si trascuri la velocità orizzontale indotta u rispetto a V , avremo:

$$[1] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{V} \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{v}{V} + \frac{\varepsilon}{2V} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{v}{V} - \frac{\varepsilon}{2V}$$

Se la V è inclinata dell'angolo α sull'asse x , si dovrà aggiungere α a $\frac{v}{V}$.

La distribuzione di sorgenti ε non può essere arbitraria, giacchè il contorno del profilo deve essere chiuso e ciò richiede che sia soddisfatta la relazione (1):

$$\int_{-l}^l \varepsilon dx = 0$$

relazione che si trasforma facilmente nella seguente:

$$\int_0^\pi \left(b_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_1^\infty b_n \operatorname{sen} n\theta \right) \operatorname{sen} \theta d\theta = 0$$

ossia:

$$[2] \quad b_0 + \frac{b_1}{2} = 0$$

Se si suppone $\gamma = 0$, si ha il profilo a linea media rettilinea e senza incidenza. Il γ è responsabile dell'incidenza e della curvatura, mentre, come già si è detto, lo spessore dipende semplicemente da ε .

(1) Sarebbe forse interessante studiare il caso $\int \varepsilon dx \neq 0$ come rappresentazione del fenomeno del distacco.

Supponiamo che nella serie di ε ci siano soltanto i primi due termini, legati naturalmente dalla [2]. Si ha allora:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{b_0}{2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} - 2 \operatorname{sen} \theta \right) = \frac{b_0}{2} \frac{\cos 2\theta + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

e $\frac{dy_1}{dx}$ è ∞ per $\theta = 0$, cioè al lembo d'attacco, mentre $\frac{dy_1}{dx} = 0$ per $\theta = \pi$, cioè al lembo d'uscita. Integrando si ottiene:

$$[3] \quad y_1 = \frac{b_0}{2} l \left[\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + \operatorname{sen} \theta \right] = \frac{b_0}{2} l \operatorname{sen} \theta (1 + \cos \theta) .$$

È facile verificare che questo è il profilo JOUKOWSKI sottile simmetrico. In effetti questo è dato dalla trasformazione:

$$z = \frac{1}{2} \left\{ \zeta + \frac{l^2 (1 - k)^2}{\zeta} \right\}$$

dove $-kl$ è la distanza (piccolissima) fra l'origine e il centro del cerchio, essendo:

$$\zeta + kl = -le^{-i\theta} .$$

Sostituendo si ha:

$$z = -\frac{l}{2} \left\{ k + e^{-i\theta} + \frac{(1 - k)^2}{k + e^{-i\theta}} \right\}$$

e con facili trasformazioni, attesa la piccolezza di k :

$$z = -l \left\{ \cos \theta - ke^{i\theta} (1 + i \operatorname{sen} \theta) \right\}$$

da cui:

$$x = -l \left\{ \cos \theta - k (\cos \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \right\}$$

$$y = kl \operatorname{sen} \theta (1 + \cos \theta)$$

ovvero:

$$\begin{aligned}x + kl &= -l \cos \theta [1 - k(1 + \cos \theta)] = \infty - l \cos \theta \\y &= kl \operatorname{sen} \theta (1 + \cos \theta).\end{aligned}$$

Si avrà pertanto la coincidenza col profilo definito dalla [3] ponendo $b_0 = 2k$.

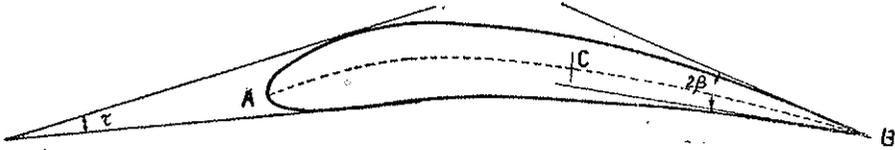


FIG. 1.

Il termine in $\operatorname{sen} 2\theta$ fornisce:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{b_2}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

da cui:

$$y_1 = \frac{b_2}{4} l \left(\operatorname{sen} \theta - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\theta \right)$$

e analoghe formule forniscono gli altri termini della serie.

In generale si avrà:

$$[4] \quad b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_1}{dx} \operatorname{sen} n\theta \, d\theta .$$

* Se indichiamo con τ (fig. 1) l'angolo (piccolo) che formano fra loro le tangenti in due punti corrispondenti dell'intradosso e dell'estradosso del profilo (positivo per vertice a sinistra), potremo scrivere:

$$[5] \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tau \operatorname{sen} n\theta \, d\theta .$$

2. - Si osservi che se lo sviluppo di ε ha un numero finito di termini, si ha sempre $\frac{dy_1}{dx} = 0$ per $\theta = \pi$, ossia $x = l$ (lembo d'uscita).

Se si vuole ivi avere un angolo $-\tau_b = 2\beta$ diverso da zero, senza far ricorso ad uno sviluppo infinito, basterà porre:

$$[6] \quad \varepsilon = 2V\beta \cos \theta .$$

La forma del profilo che vi è corrispondente è data da:

$$\frac{dy_1}{dx} = \beta \cos \theta$$

$$[7] \quad y_1 = \frac{1}{2} l\beta \sin^2 \theta .$$

Trattasi, com'è chiaro, di un profilo parabolico, che, data la piccola freccia, si confonde con l'arco di cerchio. Si ottengono così i profili di KÁRMÁN-TREFFTZ.

3. - In pratica potrà essere sufficiente porre:

$$[8] \quad \varepsilon = V \left\{ b_0 \left(\cot \frac{\theta}{2} - 2 \sin \theta \right) + 2\beta \cos \theta \right\}$$

dove il valore di β è fornito dall'angolo al vertice posteriore del profilo e b_0 si determina in base al valore τ_c dell'angolo τ nel mezzo del profilo mediante la formula:

$$[9] \quad b_0 = -\tau_c .$$

Si può quindi scrivere in definitiva:

$$[10] \quad \varepsilon = -V \left\{ \tau_c \left(\cos \frac{\theta}{2} - 2 \sin \theta \right) + \tau_b \cos \theta \right\} .$$

4. - La velocità orizzontale indotta dalle sorgenti in corrispondenza del tratto dell'asse x occupato dal profilo potrebbe calcolarsi esattamente nello stesso modo in cui si calcola la velocità verticale indotta dai vortici; ma la cosa non presenta, almeno per il momento, se non scarso interesse. La u infatti non fa che variare, in maniera, date le premesse, trascurabile, la distribuzione della portanza; mentre il valore complessivo di questa è sempre dato da:

$$P = \rho V \Gamma$$

essendo $\Gamma = \int \gamma dx$, e quindi indipendente dalla distribuzione della sorgente.

Altrettanto dicasi per quanto riguarda il momento.

Interessa invece conoscere l'andamento della velocità all'esterno del profilo.

Per quanto riguarda i vortici, posto $w = u - iv$, si ha:

$$w' = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\gamma dx'}{z - x'}$$

Per quanto riguarda le sorgenti:

$$w'' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\varepsilon dx'}{z - x'}$$

La presenza delle sorgenti equivale a dare a γ un valore complesso:

$$[11] \quad \bar{\gamma} = \gamma + i\varepsilon = V \left(c_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} c_n \operatorname{sen} n\theta \right)$$

con i c_n complessi. Si ha così:

$$w = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\bar{\gamma} dx'}{z - x'}$$

od anche, posto

$$[12] \quad z = -l \cos \theta$$

con θ complesso:

$$w = -\frac{i}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\bar{\gamma} \operatorname{sen} \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}$$

dove il punto θ non fa parte della linea percorsa da θ' , così che il denominatore non si annulla.

Ora vale in questo caso la formula:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = -\frac{i\pi}{\operatorname{sen} \theta} e^{in\theta}$$

(dove θ deve essere determinato per continuità, variando da 0 a π sulla faccia positiva del profilo, da π a 2π sulla faccia negativa).

Si ha allora:

$$w = -\frac{iV}{2\pi} \left\{ c_0 (I_0 + I_1) + \frac{1}{2} \sum_1^\infty c_n (I_{n-1} - I_{n+1}) \right\}$$

$$[13] \quad w = \frac{V}{2} \left\{ -c_0 \left(\cot \frac{\theta}{2} + i \right) + i \sum c_n e^{in\theta} \right\}$$

da cui, posto

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2$$

si ricava, con facili calcoli (ricordando che $w = u - iv$):

$$u = \frac{V}{2} \left\{ -a_0 \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} + b_0 \left(1 - \frac{\operatorname{senh} \theta_2}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} \right) - \sum_1^\infty (a_n \operatorname{sen} n\theta_1 + b_n \cos n\theta_1) e^{-n\theta_2} \right\}$$

$$[14] \quad v = \frac{V}{2} \left\{ a_0 \left(1 - \frac{\operatorname{senh} \theta_2}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} \right) + b_0 \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} - \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta_1 - b_n \operatorname{sen} n\theta_1) e^{-n\theta_2} \right\}.$$

Queste formule permettono di calcolare la velocità in un punto esterno al profilo ed in particolare di studiare il problema della mutua induzione dei multiplani.

A questo scopo occorre determinare il valore di θ che corrisponde ad un punto z . Si ha:

$$\frac{x + iy}{l} = -\cos \theta_1 \cosh \theta_2 + i \sin \theta_1 \sinh \theta_2$$

da cui:

$$\frac{x}{l} = -\cos \theta_1 \cosh \theta_2 \quad \frac{y}{l} = \sin \theta_1 \sinh \theta_2 .$$

Le linee $\theta_1 = \text{cost.}$ sono caratterizzate dall'equazione:

$$[15] \quad \frac{x^2}{l^2 \cos^2 \theta_1} - \frac{y^2}{l^2 \sin^2 \theta_1} = 1$$

e le linee $\theta_2 = \text{cost.}$ da:

$$[16] \quad \frac{x^2}{l^2 \cosh^2 \theta_2} + \frac{y^2}{l^2 \sinh^2 \theta_2} = 1 .$$

Tracciata la rete delle iperbole e delle ellissi omofocali definite dalla [15] e dalla [16], risultano determinati per ogni punto del piano il θ_1 e il θ_2 .

Anche senza il tracciamento materiale delle curve, si ha, valendosi delle proprietà dell'ellisse e dell'iperbole (fig. 2):

$$\begin{aligned} \rho_2 - \rho_1 &= 2l \cos \theta_1 \\ \rho_2 + \rho_1 &= 2l \cosh \theta_2 . \end{aligned}$$

Così, ad esempio, per un punto dell'asse x alla destra dell'estremo B è $\cos \theta_1 = -1$ e $\cosh \theta_2 = \frac{x}{l}$; per un punto a sinistra di A: $\cos \theta_1 = 1$ e $\cosh \theta_2 = -\frac{x}{l}$.

Per bene individuare i due parametri θ_1 e θ_2 osserviamo che supponendo il piano tagliato lungo AB, le iperbole $\theta_1 = \text{cost.}$ sono spezzate dal taglio; perciò le mezze iperbole situate nel semipiano positivo corrispondono a valori di θ_1 fra 0 e π ; quelle nel semipiano negativo a valori di θ_1 fra π e 2π . Le ellissi $\theta_2 = \text{cost.}$ sono invece continue e ogni ellisse corrisponde ad un determinato valore di θ_2 , che assumiamo positivo.

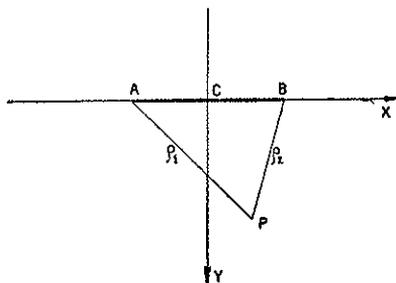


FIG. 2.

4. - È facile adesso vedere come possiamo utilizzare le cose precedenti per il calcolo approssimato dei biplani. Il procedimento ha analogie con quelli di BIRNBAUM, di FERRARI e di THEODORSEN, ma ne differisce per la considerazione dello spessore del profilo.

Ci varremo dei primi tre termini dello sviluppo di γ e di uno sviluppo di ϵ dato dalla [10].

A questo scopo è necessario prima determinare la velocità indotta dalla distribuzione di ϵ corrispondente al coseno:

$$\epsilon = V \cos \theta .$$

Si ha:

$$w = \frac{V}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}$$

$$w = \frac{V}{2} \left[\frac{2}{\pi} \left(1 - \cos \theta \ln \cot \frac{\theta}{2} \right) - i \cos \theta \right]$$

da cui, con complesso ma facile calcolo:

$$u = \frac{V}{2} \left\{ \frac{2}{\pi} \left(1 - \cos \theta_1 \cosh \theta_2 \ln \frac{\cosh \theta_2 + \cos \theta_1}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{senh} \theta_2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{senh} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} \right) \right\}$$

$$v = \frac{V}{2} \left\{ \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{senh} \theta_2 \ln \frac{\cosh \theta_2 + \cos \theta_1}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} + \right. \\ \left. + \cos \theta_1 \cosh \theta_2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{senh} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} \right) \right\} .$$

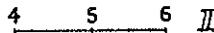


FIG. 3.

Ciò premesso, si potrà indicare con α''_{n1} ($n=1, 2, \dots, 6$) la velocità v indotta nel punto v (fig. 3) per a_{n1} (dell'ala inducente I) uguale ad 1 e $V=1$; in modo analogo si definisce α''_{nII} .

Ciò posto, se le ali sono sottili, ossia è trascurabile la distribuzione di sorgenti, e si indica con α_r l'incidenza « locale » nel punto r , si hanno le sei equazioni:

$$[17] \quad \alpha_r = \alpha''_{0I} a_{0I} + \alpha''_{1I} a_{1I} + \alpha''_{2I} a_{2I} + \alpha''_{0II} a_{0II} + \alpha''_{1II} a_{1II} + \alpha''_{2II} a_{2II} .$$

Queste sei equazioni permettono di determinare le sei incognite $a_{0I}, a_{1I}, a_{2I}, a_{0II}, a_{1II}, a_{2II}$.

Ma se le ali hanno un profilo, le cui caratteristiche supporremo semplicemente definite dagli angoli τ_{cI} , τ_{bI} , τ_{cII} , τ_{bII} e si indicano con β^r_{nI} e β^r_{nII} le velocità indotte nei punti r per $b_{nI} = 1$, $b_{nII} = 1$ e $V = 1$; con c^r_I , c^r_{II} le velocità indotte nei punti r da una distribuzione $\cos \theta$ sulle ali I e II rispettivamente, si avrà:

$$\begin{aligned}
 [18] \quad \alpha_r &= \dots (\beta^r_{0II} - 2\beta^r_{1II}) \tau_{cII} - c^r_{II} \tau_{bII} & (r = 1, 2, 3) \\
 \alpha_r &= \dots (\beta^r_{0I} - 2\beta^r_{1I}) \tau_{cI} - c^r_I \tau_{bI} & (r = 4, 5, 6)
 \end{aligned}$$

dove i puntini stanno a indicare i termini già scritti a secondo membro della [17] e le α_r si riferiscono alla linea media dei profili. In altre parole alle α_r dovremo, nelle [17] sostituire le somme che si ottengono portando al primo membro i termini scritti a secondo membro delle [18].

Poichè le circolazioni Γ_I e Γ_{II} dipendono dai coefficienti a_{nI} e a_{nII} , se ne deduce che lo spessore dei profili esercita un'influenza non trascurabile sulle caratteristiche del biplano.

Tralasciamo per brevità gli sviluppi interessanti a cui il metodo accennato potrebbe condurre.

5. - Il procedimento di GLAUERT può essere esteso anche in altro senso; e cioè al caso in cui la linea media dell'ala è fortemente curvata.

Indichiamo con $2l$ la corda del profilo e poniamo

$$\frac{z'}{l} = -\cos \theta \quad (\theta \text{ complesso})$$

essendo z' la coordinata complessa di un punto del profilo.

Posto

$$[19] \quad \bar{\gamma} = V \left(c_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} c_n \operatorname{sen} n\theta \right)$$

e

$$[20] \quad w = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\bar{\gamma} dz'}{z - z'} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\bar{\gamma} \operatorname{sen} \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}$$

si ottiene in corrispondenza del profilo (essendo l'integrazione effettuata lungo il profilo):

$$[21] \quad w = -\frac{iV}{2} \left(c_0 - \sum_1^{\infty} c_n \cos n\theta \right).$$

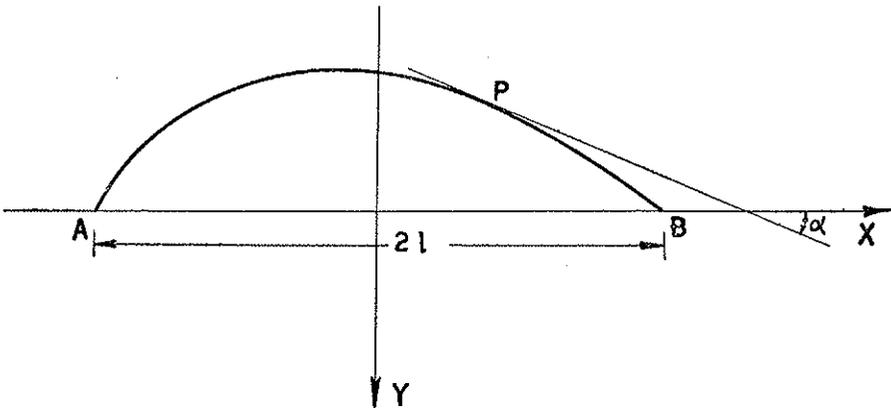


FIG. 4.

L'aver posto $\bar{\gamma} dz'$ come valore della singolarità inducente nel tratto considerato porta ad un valore $(\gamma + i\varepsilon) ds$ definito da:

$$\bar{\gamma} \frac{dx + i dy}{ds} = \gamma + i\varepsilon$$

ossia (fig. 4):

$$\bar{\gamma} (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = \gamma + i\varepsilon$$

e posto $\bar{\gamma} = \gamma_1 + i\gamma_2$:

$$\gamma_1 \cos \alpha - \gamma_2 \operatorname{sen} \alpha = \gamma$$

$$\gamma_1 \operatorname{sen} \alpha + \gamma_2 \cos \alpha = \varepsilon.$$

Se, ad esempio, vogliamo considerare il caso della semplice linea vorticoso, dovrà essere $\varepsilon = 0$, e quindi

$$\bar{\gamma} e^{i\alpha} = \gamma \qquad \bar{\gamma} = \gamma e^{-i\alpha} .$$

Dalla [21] si potranno dedurre le componenti u e v della velocità e allora il profilo sarà definito dalla relazione

$$[22] \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = - \frac{v}{V + u}$$

relazione che potrà permettere di calcolare i coefficienti della serie [19]. Praticamente converrà limitare la serie ad un numero finito di termini, imponendo che la [22] sia soddisfatta in un corrispondente numero di punti del profilo dato.

6. - Occorre finalmente mostrare come lo studio del profilo sottile permetta di risolvere il problema di determinare le caratteristiche aerodinamiche di un profilo dato arbitrariamente.

Se il profilo non è sottile, ci si può ridurre a questo mediante una conveniente rappresentazione conforme. Infatti, secondo un procedimento adoperato da tutti gli autori che hanno studiato questo problema, si può, con una trasformazione inversa di quella di Joukowski, passare dal profilo ad una quasi-circonferenza e da questa, mediante un'altra trasformazione di Joukowski, ad un profilo quasi rettilineo e sottilissimo. A questo può allora senz'altro applicarsi il metodo esposto in questa Nota.

7. - Una presentazione, leggermente diversa dalla precedente dal punto di vista formale, ma sostanzialmente identica, del problema trattato è la seguente.

L'espressione della velocità indotta dal sistema di sorgenti

$$w'' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\varepsilon dx'}{z - x'}$$

può trasformarsi, mediante integrazione per parti, nella seguente:

$$w'' = -\frac{1}{2\pi} \left[E(x') \frac{1}{z-x'} \right]_{-l}^l + \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{E(x') dx'}{(z-x')^2}$$

dove si è posto

$$E(x') = -\int_{-l}^{x'} \varepsilon dx' = \int_{x'}^l \varepsilon dx'$$

ossia $E(x')$ rappresenta il valore totale della sorgente distribuita sul tratto dell'asse x compreso fra il punto generico x' e l'estremo posteriore l .

Con le consuete convenzioni sul calcolo dell'integrale, poichè $E(x')$ è zero per $x'=l$, segue:

$$w'' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{E(x') dx'}{(z-x')^2}.$$

Il secondo membro rappresenta le velocità indotta da una distribuzione di doppiette con intensità di ripartizione E . Si può dunque, in luogo della distribuzione di sorgenti, supporre una distribuzione di doppiette. Oltre a ciò, dalle [1] si ricava, per quanto riguarda lo spessore s del profilo:

$$[23] \quad \frac{ds}{dx} = \frac{\varepsilon}{V}$$

da cui immediatamente:

$$[24] \quad s = -\frac{E}{V}$$

ossia lo spessore s è direttamente proporzionale alla intensità della distribuzione di doppiette in corrispondenza dell'ascissa considerata. Ciò permette di fare riferimento, nelle formule, allo spessore del profilo, anzichè all'angolo delle tangenti.

Al termine $b_0 \left(\cot \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{sen} \theta \right)$ corrisponde una distribuzione di doppiette

$$E_0 + E_1 = -V b_0 l \left(\operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right)$$

corrispondente alla [3].

Al termine generico $b_n \operatorname{sen} n\theta$ corrisponde una distribuzione di doppiette

$$E_n = -\frac{V}{2} b_n l \left[\frac{\operatorname{sen} (n-1)\theta}{n-1} - \frac{\operatorname{sen} (n+1)\theta}{n+1} \right].$$

Infine alla distribuzione $2V\beta \cos \theta$ di sorgenti corrisponde una distribuzione di doppiette $-V\beta l \operatorname{sen}^2 \theta$, corrispondente alla [7].

In conclusione, potremmo adottare per la distribuzione di doppiette, una serie del tipo

$$[25] \quad E = -Vl [\Sigma B_n \operatorname{sen} n\theta + \beta \operatorname{sen}^2 \theta].$$

(Il termine in $\operatorname{sen}^2 \theta$ occorre ogni volta che si vuole avere un angolo β non nullo al bordo di uscita senza ricorrere ad una serie infinita).

Quanto al calcolo della velocità indotta da una doppietta proporzionale a $\operatorname{sen} n\theta$, basterà osservare (come si vede mediante un'integrazione per parti) che

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = -\frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} n\theta' \operatorname{sen} \theta' d\theta'}{(\cos \theta' - \cos \theta)^2}$$

e perciò

$$w''_n = \frac{V}{2\pi} n B_n I_n.$$

Omettiamo per brevità gli ulteriori sviluppi che potrebbero facilmente trarsi da quanto detto.

Pisa, aprile 1937.

SU ALCUNE PROPRIETÀ
DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE
DEI CAMPI VETTORIALI (*)

F. ODONE

SUMMARIVM. — Demonstrantur duae proprietates geometriae differentialis validae: prima, de qualibet congruentia linearum; altera, de omni complexu rectilineo.

Denique notatur possibilitas determinandi aequationem geodeticam cuiuslibet et universae superficiei.

I. — ENUNCIAZIONE DELLE PROPRIETÀ
CHE SI VOGLIONO DIMOSTRARE.

Si abbia un campo vettoriale qualunque, definito da un vettore \mathbf{u} funzione nota del punto generico P dello spazio. Si possono associare al campo i seguenti due elementi geometrici:

1° il sistema delle sue linee di forza, cioè la congruenza di linee definita da

$$\mathbf{u} \wedge dP = 0 ;$$

2° l'insieme delle rette ottenute conducendo per ogni punto P la retta parallela al vettore \mathbf{u} .

È chiaro che questi due elementi geometrici rimangono gli stessi se invece del vettore \mathbf{u} si considera il vettore $l\mathbf{u}$, essendo l un numero

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi, il 10 aprile 1937.

qualunque funzione di P ⁽¹⁾, e che per averli entrambi basta considerare il vettore unitario $\mathbf{u}/\text{mod } \mathbf{u}$, vettore che nel seguito indicheremo sempre con \mathbf{t} .

Ciò posto, supponiamo di saper esprimere, com'è effettivamente sempre possibile, $\mathbf{t} = \mathbf{u}/\text{mod } \mathbf{u}$ nella forma seguente:

$$\mathbf{t} = \text{grad } m + \lambda \text{ grad } \psi ,$$

essendo m , λ , ψ dei numeri funzioni di P ⁽²⁾.

Vogliamo allora dimostrare che valgono le due proprietà seguenti:

1° sia \mathbf{t} , \mathbf{u} , \mathbf{b} il triedro principale in ogni punto delle linee di forza $\mathbf{u} \wedge dP = 0$, ed $1/\rho$ la 1ª curvatura in questo stesso punto; si ha

$$\text{rot } \mathbf{t} = \text{grad } m \times \text{grad } \lambda \wedge \text{grad } \psi \cdot \mathbf{t} + 1/\rho \cdot \mathbf{b}$$

e quindi il vettore $\text{rot } \mathbf{t}$ sta nel piano rettificante delle linee di forza $\mathbf{u} \wedge dP = 0$;

2° supponiamo che l'insieme delle rette, ottenute conducendo per ogni punto P la retta parallela al vettore \mathbf{u} in questo stesso punto, formi un complesso; diciamo che da questo complesso si possono ricavare delle congruenze *normali* di rette (problema di TRANSON generalizzato) ⁽³⁾; e precisamente, essendo M il punto che descrive una superficie $\psi = \text{costante}$ (superficie vorticoso rispetto al vettore \mathbf{t}) si ha che il punto Q , dato da

$$Q = M + [h(\psi) - m] \cdot \mathbf{t} ,$$

dove $h(\psi)$ è un numero funzione qualunque della sola ψ e dove i valori delle varie quantità sono calcolati in corrispondenza della posizione

⁽¹⁾ Quest'osservazione prova, com'è noto, che campi anche tra loro assai diversi possono avere le stesse linee di forza, le quali quindi non sono un elemento intrinseco del campo.

⁽²⁾ C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Analisi Vettoriale Generale*, vol. I: *Trasformazioni lineari*, pag. 258, Bologna, Zanichelli, 1929. Nel seguito indicheremo tale opera col richiamo *A. V. G.*, I; indicheremo il volume II: *Geometria differenziale* (a cura di P. BURGATTI, T. BOGGIO, C. BURALI-FORTI) col richiamo *A. V. G.*, II.

⁽³⁾ Si veda P. APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, tomo 3°, pag. 463, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

di M , descrive una superficie perpendicolare alle rette $M\mathbf{u}$; così pure, essendo M il punto che descrive una superficie $\lambda = \text{costante}$ (superficie vorticoso rispetto al vettore \mathbf{t}), si ha che il punto Q , dato da

$$Q = M + [g(\lambda) - (m + \lambda\psi)] \cdot \mathbf{t} ,$$

dove $g(\lambda)$ è un numero funzione qualunque della sola λ e dove i valori delle varie quantità sono calcolati in corrispondenza della posizione di M , descrive una superficie perpendicolare delle rette $M\mathbf{u}$.

Le due proprietà ora enunciate si semplificano se si ha $\text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$ e quindi anche $\text{rot } \mathbf{t} \times \mathbf{t} = 0$ (caso esaminato dal prof. CALDONAZZO) ⁽¹⁾; ovvero se si ha $\text{rot } \mathbf{t} = 0$ (caso esaminato dal prof. BURALI-FORTI) ⁽²⁾.

Ma prima di fare la dimostrazione di quanto abbiamo enunciato, conviene richiamare alcune note proprietà delle superfici vorticoso rispetto a un vettore, proprietà di cui ci serviremo più avanti.

II. — RICHIAMO

DI ALCUNE NOTE PROPRIETÀ DELLE SUPERFICI VORTICOSE RISPETTO A UN VETTORE.

Sia f un numero funzione del punto generico P dello spazio. Nel seguito indicheremo con d_r un differenziale corrispondente ad uno spostamento qualunque *tangente* alla superficie $f = \text{costante}$ ⁽³⁾; avremo quindi in particolare $\text{grad } f \times d_r P = 0$. Sia poi \mathbf{u} un vettore funzione di P . Se è soddisfatta la condizione

$$\text{grad } f \times \text{rot } \mathbf{u} = 0 ,$$

si dice che le superfici $f = \text{costante}$ sono superfici vorticoso rispetto ad \mathbf{u} .

⁽¹⁾ B. CALDONAZZO, *Sulla geometria differenziale di superficie ecc.*, «Rend. Acc. Lincei», vol. XXXIII, serie 5^a, 1924.

⁽²⁾ C. BURALI-FORTI, *Fondamenti di geometria differenziale ecc.*, «Rend. Circ. Matem. di Palermo», tomo 83, 1911.

⁽³⁾ Esso non è altro che il *differenziale superficiale* nel senso di BOGGIO (*A. V. G.*, II, pag. 177).

Valgono allora le due note proprietà seguenti ⁽¹⁾:

1° Su una superficie $f = \text{costante}$, vorticoso rispetto ad \mathbf{u} , l'espressione $\mathbf{u} \times d_f P$ è un differenziale esatto in due variabili;

2° Posto, come è sempre possibile,

$$\mathbf{u} = \text{grad } m + \lambda \text{ grad } \psi ,$$

con m, λ, ψ , numeri funzioni di P , si ha che le superfici $\lambda = \text{costante}$, $\psi = \text{costante}$ sono superfici vorticoso rispetto ad \mathbf{u} , cioè risulta

$$\text{rot } \mathbf{u} \times \text{grad } \lambda = 0 , \quad \text{rot } \mathbf{u} \times \text{grad } \psi = 0 ,$$

e risulta pure

$$\mathbf{u} \times d_m P = \lambda d_m \psi ,$$

$$\mathbf{u} \times d_\psi P = d_\psi m ,$$

$$\mathbf{u} \times d_\lambda P = d_\lambda m + \lambda d_\lambda \psi = d_\lambda (m + \lambda \psi) .$$

III. — DIMOSTRAZIONE DELLE PROPRIETÀ ENUNCIATE.

Sia \mathbf{u} un vettore qualunque e supponiamo di saper porre $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{u}}{\text{mod } \mathbf{u}}$ sotto la forma

$$\mathbf{t} = \text{grad } m + \lambda \text{ grad } \psi .$$

Vogliamo allora dimostrare le due proprietà sopra enunciate.

1° *proprietà.* — Sia $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{b}$ il triedro principale in un punto qualunque delle linee di forza $\mathbf{u} \wedge dP = 0$ ed $1/\rho$ la 1ª curvatura in questo stesso punto; si ha allora

$$\text{rot } \mathbf{t} = \text{grad } m \times \text{grad } \lambda \wedge \text{grad } \psi \cdot \mathbf{t} + 1/\rho \cdot \mathbf{b}$$

⁽¹⁾ A. V. G., I, pag. 250 e 253.

Dimostrazione. - Poniamo

$$\text{rot } \mathbf{t} = x \mathbf{t} + y \mathbf{n} + z \mathbf{b} .$$

Da $\mathbf{t} = \text{grad } m + \lambda \text{ grad } \psi$ si ha

$$\text{rot } \mathbf{t} = \text{grad } \lambda \wedge \text{grad } \psi$$

e quindi

$$x = \text{rot } \mathbf{t} \times \mathbf{t} = \text{grad } m \times \text{grad } \lambda \wedge \text{grad } \psi .$$

Si ha poi, per le formule di FRENET,

$$\frac{d \mathbf{t}}{dP} \mathbf{t} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n} .$$

Da $\frac{d \mathbf{t}}{dP} = K \frac{d \mathbf{t}}{dP} + \text{rot } \mathbf{t} \wedge$ e da $K \frac{d \mathbf{t}}{dP} \mathbf{t} = 0$, si ha pure

$$\frac{d \mathbf{t}}{dP} \mathbf{t} = \text{rot } \mathbf{t} \wedge \mathbf{t} .$$

E poichè

$$\text{rot } \mathbf{t} \wedge \mathbf{t} = z \mathbf{n} - y \mathbf{t} ,$$

risulta

$$z \mathbf{n} - y \mathbf{t} = 1/\rho \cdot \mathbf{n}$$

e quindi

$$y = 0 \quad , \quad z = 1/\rho .$$

2ª proprietà. - Sia M il punto che descrive una superficie $\psi =$ costante (superficie vorticoso rispetto al vettore $\mathbf{t} = \text{grad } m + \lambda \text{ grad } \psi$); si ha allora che il punto Q, dato da

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M} + [h(\psi) - m] \cdot \mathbf{t} ,$$

dove $h(\psi)$ è una funzione della sola ψ , descrive una superficie perpendicolare alla congruenza di rette $M\mathbf{u}$.

Così pure, sia M il punto che descrive una superficie $\lambda = \text{costante}$ (superficie vorticoso rispetto al vettore $\mathbf{t} = \mathbf{u}/\text{mod } \mathbf{u}$); si ha allora che il punto Q , dato da

$$Q = M + [g(\lambda) - (m + \lambda \psi)] \cdot \mathbf{t} ,$$

dove $g(\lambda)$ è una funzione della sola λ , descrive una superficie perpendicolare alla congruenza di rette $M\mathbf{u}$.

Dimostrazione. - La verifica dell'enunciato è immediata. Infatti si ha:

$$dQ = dM + d[h(\psi) - m] \cdot \mathbf{t} + [h(\psi) - m] \cdot d\mathbf{t} ,$$

$$dQ \times \mathbf{t} = dM \times \mathbf{t} + d[h(\psi) - m] ,$$

e quindi, per $\psi = \text{costante}$,

$$d_{\psi} Q \times \mathbf{t} = d_{\psi} M \times \mathbf{t} - d_{\psi} m = d_{\psi} m - d_{\psi} m = 0 .$$

Allo stesso modo si ha:

$$dQ \times \mathbf{t} = dM \times \mathbf{t} + d[g(\lambda) - (m + \lambda \psi)]$$

e quindi, per $\lambda = \text{costante}$,

$$d_{\lambda} Q \times \mathbf{t} = d_{\lambda} M \times \mathbf{t} - d_{\lambda} (m + \lambda \psi) = d_{\lambda} (m + \lambda \psi) - d_{\lambda} (m + \lambda \psi) = 0 .$$

La proprietà è così verificata. Ma vogliamo anche far la dimostrazione in modo da giustificare più diffusamente l'origine del risultato ottenuto. Per questo, sia \mathbf{u} un vettore qualunque funzione del punto generico P dello spazio. Poniamo

$$R = P + l\mathbf{u} ,$$

e vediamo se è possibile far muovere P su una superficie $\psi = \text{costante}$

e se è possibile determinare il numero l , in funzione di P , in modo che R descriva una superficie perpendicolare alla congruenza di rette Pu , il punto P appartenendo alla superficie $\psi = \text{costante}$. Si può intanto scrivere:

$$R = P + l u = P + l \text{ mod } u \cdot u / \text{mod } u = P + l_1 u_1 ,$$

essendo $l_1 = l \text{ mod } u$, $u_1 = u / \text{mod } u$.

Si ha in generale;

$$dR = dP + d(l_1 u_1) = dP + \frac{d(l_1 u_1)}{dP} dP$$

e quindi

$$\begin{aligned} dR \times u_1 &= u_1 \times dP + \frac{d(l_1 u_1)}{dP} dP \times u_1 = \\ &= \left[u_1 + K \frac{d(l_1 u_1)}{dP} u_1 \right] \times dP = \\ &= \left[u_1 + \frac{1}{l_1} K \frac{d(l_1 u_1)}{dP} (l_1 u_1) \right] \times dP = \\ &= \left[u_1 + \frac{1}{2l_1} \text{grad} (l_1^2 u_1^2) \right] \times dP = \\ &= \left[u_1 + \text{mod } u_1 \cdot \text{grad} (l_1 \text{ mod } u_1) \right] \times dP . \end{aligned}$$

Questo risultato vale qualunque sia il valore di $\text{mod } u_1$; ma se $\text{mod } u_1 = 1$, si ha

$$dR \times u_1 = (u_1 + \text{grad } l_1) \times dP .$$

Se vogliamo che, muovendosi P su una superficie $\psi = \text{costante}$, risulti $d_\psi R \times u_1 = 0$, dovrà essere

$$[1] \quad (u_1 + \text{grad } l_1) \times d_\psi P = 0 .$$

E poichè $\text{grad } l_1 \times d_\psi P = d_\psi l_1$ è un differenziale esatto in due variabili, anche $\mathbf{u}_1 \times d_\psi P$ dovrà essere un differenziale esatto in due variabili, e quindi $\psi = \text{costante}$ dev'essere una *superficie vorticoso* rispetto ad \mathbf{u}_1 , ossia si deve avere

$$[2] \quad \text{grad } \psi \times \text{rot } \mathbf{u}_1 = 0 .$$

Poichè $\mathbf{u}_1 \times d_\psi P$ è un differenziale esatto, avremo

$$[3] \quad \mathbf{u}_1 \times d_\psi P = d_\psi m .$$

Ed allora, per [2] e [3] sarà necessariamente

$$\mathbf{u}_1 = \text{grad } m + \lambda \text{ grad } \psi ,$$

ovvero

$$\mathbf{u}_1 = \text{grad } m + \psi \text{ grad } \chi .$$

La [1] diventa così

$$d_\psi m + d_\psi l_1 = 0 ,$$

ovvero

$$d_\psi (m + \psi \chi) + d_\psi l_1 = 0 ;$$

e da queste si ricava

$$l_1 = h(\psi) - m$$

con $h(\psi)$ funzione della sola ψ , ovvero

$$l_1 = g(\psi) - (m + \psi \chi) ,$$

con $g(\psi)$ funzione della sola ψ .

In questo modo abbiamo ottenuto la proprietà sopra verificata.

IV. — ESAME DI DUE CASI PARTICOLARI.

1° caso. — Supponiamo che sia

$$\mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 .$$

Posto $\mathbf{t} = \mathbf{u}/\operatorname{mod} \mathbf{u}$, risulta pure

$$\operatorname{rot} \mathbf{t} \times \mathbf{t} = 0 .$$

Infatti si ha:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{u}}{\operatorname{mod} \mathbf{u}} \right) = \frac{1}{\operatorname{mod} \mathbf{u}} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\operatorname{mod} \mathbf{u}} \right) \wedge \mathbf{u}$$

e quindi

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\mathbf{u}}{\operatorname{mod} \mathbf{u}} \right) \times \mathbf{u} = \frac{1}{\operatorname{mod} \mathbf{u}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} \times \mathbf{u} .$$

Ma in tal caso si ha ⁽¹⁾

$$\mathbf{u} = \lambda \operatorname{grad} \psi$$

e quindi

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{u}}{\operatorname{mod} \mathbf{u}} = \frac{\lambda \operatorname{grad} \psi}{\operatorname{mod} (\lambda \operatorname{grad} \psi)}$$

Le linee di forza $\mathbf{u} \wedge dP = 0$ costituiscono una congruenza normale di linee, e precisamente esse sono le traiettorie ortogonali delle superfici $\psi = \text{costante}$.

⁽¹⁾ A. V. G., 1, pag. 251.

Si ottengono le proprietà corrispondenti a quelle esaminate nel caso generale facendo $m = 0$. In particolare si ha ⁽¹⁾:

$$\text{rot } \mathbf{t} = 1/\rho \cdot \mathbf{b} .$$

2° caso. - Supponiamo che sia

$$\text{rot } \mathbf{t} = 0 .$$

In tal caso si ha ⁽²⁾

$$\mathbf{t} = \mathbf{u}/\text{mod } \mathbf{u} = \text{grad } \psi \quad \text{con} \quad \text{mod grad } \psi = 1 .$$

Le superfici $\psi = \text{costante}$ sono superfici parallele e quindi le linee $\mathbf{u} \wedge dP = 0$ costituiscono una congruenza normale di rette, precisamente la congruenza di rette normale alle superfici $\psi = \text{costante}$.

V. — OSSERVAZIONI.

Se $\varphi(P) = \text{costante}$ è l'equazione di una superficie, il vettore unitario $\text{grad } \varphi / (\text{mod grad } \varphi)$ è normale alla superficie ed è soddisfatta la condizione

$$\text{rot} \left(\frac{\text{grad } \varphi}{\text{mod grad } \varphi} \right) \times \text{grad } \varphi = 0 .$$

D'altra parte, affinchè un vettore unitario \mathbf{n} possa essere considerato come vettore normale ad una superficie dev'essere, com'è ben noto, $\text{rot } \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$; ma in tal caso si ha

$$\mathbf{n} = \frac{\text{grad } \varphi}{\text{mod grad } \varphi} .$$

⁽¹⁾ B. CALDONAZZO, *loc. cit.*

⁽²⁾ A. V. G., I, pag. 254.

Si conclude quindi che una superficie *qualunque*, avente normale definita in ogni suo punto, è *sempre* individuabile nella forma $\varphi(P) = \text{costante}$. In altri termini: non solo $\varphi(P) = \text{costante}$ rappresenta una superficie, ma una *qualunque* superficie può sempre essere individuata da $\varphi(P) = \text{costante}$, essendo $\varphi(P)$ un numero funzione del punto P.

Ma si può dire qualcosa di più. Si abbia una superficie qualunque. A questa superficie associamo il sistema delle superfici ad essa geodeticamente parallele ⁽¹⁾ e sia \mathbf{n} il vettore unitario normale a queste superfici. Si ha:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dP} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad K \frac{d\mathbf{n}}{dP} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

e perciò, essendo $\frac{d\mathbf{n}}{dP} = K \frac{d\mathbf{n}}{dP} + \text{rot } \mathbf{n} \wedge$, risulta

$$\text{rot } \mathbf{n} \wedge \mathbf{n} = 0.$$

Ma è pure

$$\text{rot } \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$$

e quindi si ha

$$\text{rot } \mathbf{n} = 0.$$

Ne viene

$$\mathbf{n} = \text{grad } \psi, \quad \text{con} \quad \text{mod grad } \psi = 1.$$

Ciò significa che non solo una superficie qualunque può essere individuata da $\psi(P) = \text{costante}$, ma che inoltre il numero ψ si può *sempre, qualunque* sia la superficie, scegliere in modo che risulti

$$\text{mod grad } \psi = 1.$$

(1) A. V. G., II, pag. 174.

Quando una superficie sia data da $\psi(P) = \text{costante}$ con $\text{mod grad } \psi = 1$, diremo che si conosce l'espressione geodetica della superficie stessa, e ciò perchè il sistema di superfici $\psi(P) = \text{costante}$ è formato da superfici fra loro geodeticamente parallele (¹).

Novembre 1936.

(¹) Tanto il mio indimenticabile Maestro, il prof. BURALI-FORTI, nella nota già citata, quanto il prof. BURGATTI nell'opera *Analisi Vettoriale Generale*, vol. II, parte 1^a, suppongono di conoscere l'espressione geodetica di una qualunque superficie. Infatti il prof. BURALI-FORTI fa esplicitamente l'ipotesi $\text{rot}_s \mathbf{n} = 0$. Il prof. BURGATTI suppone $\frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{n} = 0$ e dimostra che dev'essere $\text{rot}_s \mathbf{n} = 0$ (si veda *A. V. G.*, II, pag. 29); ma essendo $\text{rot}_s \mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{n} - \mathbf{n} \wedge \frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{n}$ (si veda *A. V. G.*, I, pag. 226), da $\text{rot}_s \mathbf{n} = 0$ e $\frac{d\mathbf{n}}{dP} \mathbf{n} = 0$ segue pure $\text{rot } \mathbf{n} = 0$. L'ipotesi, sempre possibile, $\text{rot } \mathbf{n} = 0$ serve a semplificare lo studio delle proprietà delle superfici, perchè con questa ipotesi l'omografia $\frac{d\mathbf{n}}{dP}$ risulta una dilatazione.

THE DISTRIBUTION OF THE STARS
IN THE CEPHEUS-LACERTA REGION (*)

(With three figures and two tables)

M. TIBOR S. I.

(Specola Vaticana, Castel Gandolfo)

SUMMARIVM. — Fere trium millium stellarum regionis Cephei-Lacertae distributio in superficie coeli et in spatio ope analysis spectralis investigatur, speciali diligentia adhibita stellarum luce debiliorum, quae in constructione systematis localis atque totalis maximi sunt momenti.

In recent years our knowledge of the local system has been much advanced especially as a result of the Spectral Durchmusterung of the KAPTEYN fields carried out at BERGENDORF and POTSDAM. Our work contains a tentative extension of the Spectral Durchmusterung for some selected fields of the MILKY WAY. The purpose of our investigation is to determine the surface and the space distribution of the stars in these regions paying special attention to the fainter stars.

The present paper gives the results of our work on one of the fields, which lies in the Cepheus-Lacerta region. The available material being too small we do not intend to give all the details of our work and we do not as yet draw from it any definite conclusion. Our only purpose is to suggest how far we can get in such investigations and what results may be hoped for from them.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Soprannumerario P. Johan Stein S. I., il 1° settembre 1937.

The method we followed is that used in Potsdam especially described in the last papers of F. BECKER⁽¹⁾ and H. BRÜCK⁽²⁾.

The centre of the Cepheus-Lacerta field coincides with the star BD 52° 3167: 22^h 14^m 16^s, + 53° 30' 21" (1900). Its galactic coordinates are: $\lambda = 69^{\circ}.3$; $\beta = -2^{\circ}.5$.

The spectra and the direct plates were taken with the Zeiss astrograph of the Vatican Observatory, its aperture being 40 cm, focal ratio $\frac{4}{5}$. With the four-lenses object-glass plates could be taken of a field of about 75 square degrees, but for the classification only four square degrees of its central part were used.

To derive the stellar magnitudes, following the method of Potsdam, we photographed one of the KAPTEYN fields, viz. the 18th, with the same exposure (10 minutes). Spectra were obtained with the objective prism of 4° refracting angle focussed at H γ ; exposure 4 hours. The scale of the original spectra is approximately 63 A/mm at H γ .

The classification of the spectra was carried out in the HARVARD system combined with the empirical method of POTSDAM. In spectral classification we went on to the 14th magnitude inclusive, i. e. two classes further than in previous investigations. The number of the stars which were studied is 2996, but of these only 2189 (73 %) were classifiable. This latter number gives the totality of classifiable stars up to the 14th magnitude. The remaining 807 (27 %) stars we had to omit from the spectral classification. The most usual impediment to the classification was the mutual blending of the spectra. This obstacle is quite obvious in our field, for the Cepheus-Lacerta region is very rich in stars. Of course the frequency of the blendings was increasing as fainter stars were reached and beyond the 14th magnitude we got such an amount of blendings that the further classification was practically impossible. For this reason, it is our opinion, that the investigation by spectral analysis of stars beyond the 14th magnitude in the MILKY WAY is not feasible. Figure 1 shows the increasing of the blendings in different magnitude classes.

⁽¹⁾ « Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissenschaft. », 1932, p. 86.

⁽²⁾ « Z. S. f. Astrophys. », 1937, Bd. 13, H. 4.

To compute the surface distribution the stars were divided into six groups following the method of POTSDAM. The first and the last group were omitted on account of the small number of stars belonging

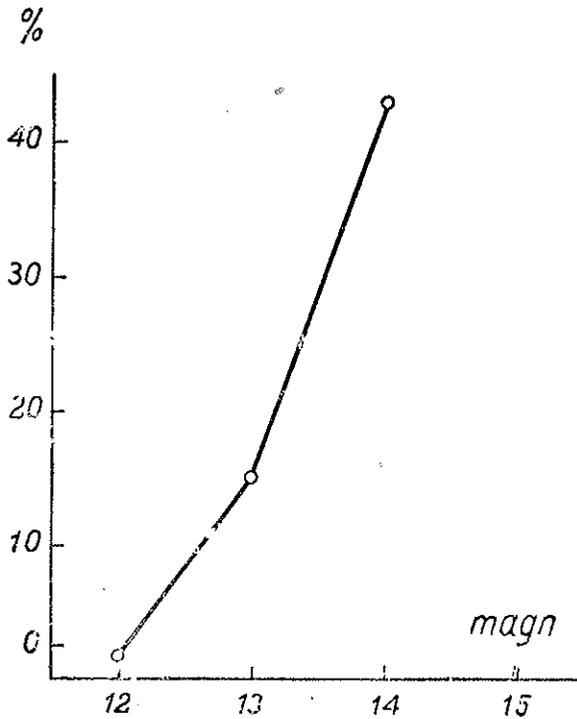


FIG. 1.

The increasing of the blendings in different magnitude classes.

to them. Practically, therefore, the partition was made in four groups which correspond roughly to the A, F, G and K classes of the HARVARD classification. In accordance with this division table I was constructed which gives the surface distribution of the stars expressed in numbers and in percentages.

TABLE I. — *The surface distribution of stars in the Cepheus-Lacerta field expressed in numbers and in percentages.*

Magn. Spectra	0 ^m .0-9 ^m .0		9 ^m .1-10 ^m .0		10 ^m .1-11 ^m .0		11 ^m .1-12 ^m .0		12 ^m .1-13 ^m .0		13 ^m .1-14 ^m .0	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
B8-A4	9	33	16	59	79	65	195	55	363	45	291	34
A5-F1	5	19	2	7	8	6	37	11	110	14	175	21
F2-G4	13	48	8	30	29	24	91	26	263	33	328	38
G5-X4			1	4	6	5	29	8	69	8	62	7
S	27		27		122		352		805		856	
B1	1		1		1		7	2	142	15	655	43
Σ	28		28		123		359		947		1511	

S number of classified stars

B1 number of blended stars

Σ number of classified and blended stars.

The results which we obtained from the investigation of the stars brighter than the 14th magnitude in the main agree with the results obtained hitherto by studying the stars brighter than the 12th magnitude, namely that even in lower galactic latitude the maximum percentage of stars is shifting up from the A type to the G type according as the apparent magnitudes diminish.

The change of the maximum from A type is very slight in the area studied by us. The A type predominates up to the 13th magnitude inclusive. Only at the 14th does it show a small decrease and then for the first time its maximum is but slight. In the work of other investigators, this change of maximum from A type to G type is very noticeable even at the 11th magnitude. In figure 2 we juxtapose our results with those of H. BRÜCK⁽¹⁾ and A. SCHWASSMANN⁽²⁾.

(1) «Z. S. f. Astrophys.», Bd. 13, page 285.

(2) «Bergedorfer Spektral-Durchm.», 1935.

At the same time it becomes clear, that the numbers of the stars are very different in various parts of the MILKY WAY.

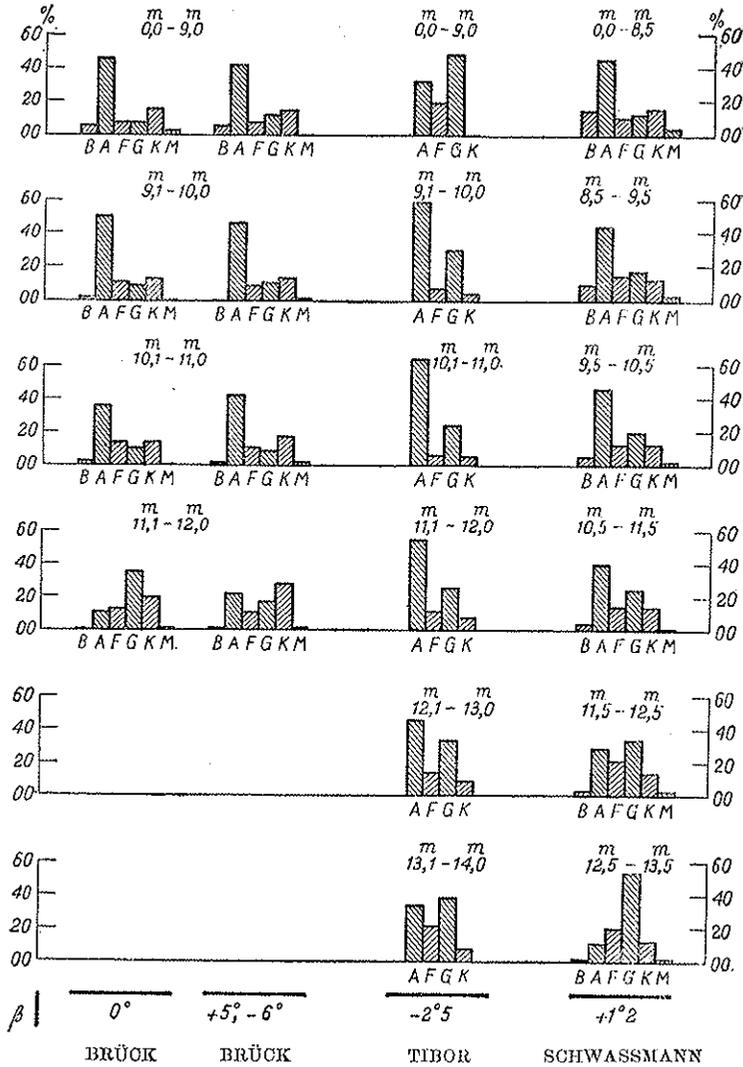


FIG. 2.

Comparison of surface distribution of stars for different regions of the Milky Way.

TABLE II. — *The mean distances, the mean volumes and the space densities computed for the stars of the Cepheus-Lacerta field.*

Spectra	Apparent magnitudes	Log of mean dist. in parsecs	Mean volumes in 10^4 cubic parsecs	Num. of stars per square degree	Log D(r)
F9-G4	10 ^m .1-11 ^m .0	1.96	0.01	2	2.18
	11 .1-12 .0	2.16	0.04	8	2.26
	12 .1-13 .0	2.36	0.19	17	1.96
	13 .1-14 .0	2.56	0.74	16	1.32
F2-F8	9 .1-11 .0	2.02	0.02	2	2.00
	10 .1-11 .0	2.22	0.07	7	2.02
	11 .1-12 .0	2.42	0.27	23	1.93
	12 .1-13 .0	2.62	1.06	66	1.79
	13 .1-14 .0	2.82	4.38	82	1.28
A5-F1	8 .1- 9 .0	2.18	0.05	1	1.40
	9 .1-10 .0	2.38	0.20	1	0.40
	10 .1-11 .0	2.58	0.82	2	0.36
	11 .1-12 .0	2.78	3.34	9	0.45
	12 .1-13 .0	2.98	13.80	28	0.30
	13 .1-14 .0	3.18	52.40	44	9.90
B3-A4	8 .1- 9 .0	2.50	0.49	2	0.71
	9 .1-10 .0	2.70	1.89	4	0.32
	10 .1-11 .0	2.90	8.26	10	0.38
	11 .1-12 .0	3.10	31.50	49	0.20
	12 .1-13 .0	3.30	170.00	91	9.70
	13 .1-14 .0	3.50	491.00	73	9.18

The variation of the other types i. e. of the F type and K type is very gradual and agrees almost completely with the most recent results of H. BRÜCK.

Computing the space densities we used the same values of the absolute magnitudes for given groups as in POTSDAM. The mean dis-

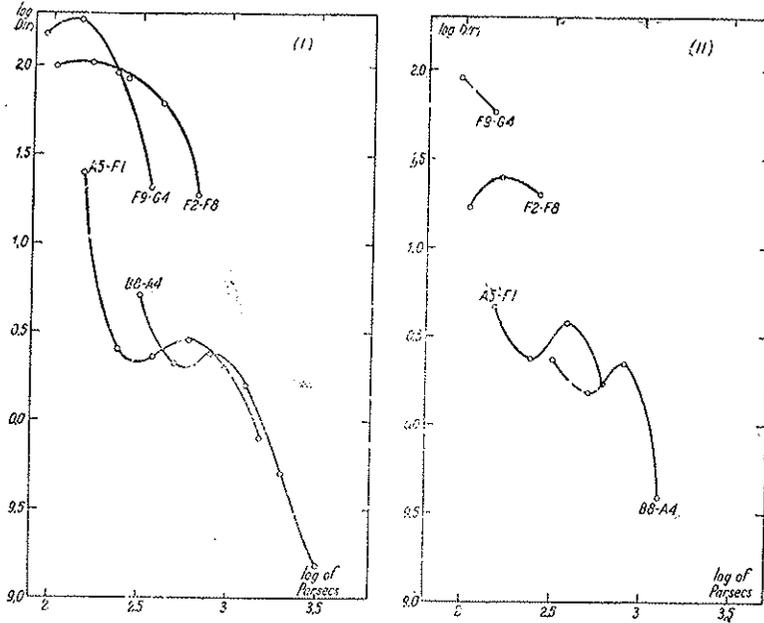


FIG. 3.

The density function of the Cephens-Lacerta field (I) compared with the results of H. BRÜCK obtained in the region of Scorpius (II).

tances, the mean volumes and the space densities were calculated in the same way. Table II contains the data used in density computation and the final results of the space densities.

To make the results more easily understood we repeat these results in figure 3, and compare them with the final results of H. BRÜCK (1).

(1) Z. S. f. Astrophys. (1937), Bd. 13, p. 291.

The similarity is very striking especially in the curves of the B8-A4 and A5-F1 types. The trend of the curves is very similar in both cases. With regard to this character of the density function H. BRÜCK suggests that the result found in the Scorpio region is probably not a real density decrease, but may be due to an effect of a local interstellar absorption. The curves, however, of the Cepheus-Lacerta field show a noticeable and continuous diminution even after the 12th magnitude. It seems possible, therefore, that this general drop indicates a real density decrease.

At present we refrain from making any assumptions, waiting till the results can be confirmed by those of the other fields. The only conclusion we make is, that our first results corroborate and complete those previously obtained by Spectral Durchmusterung and we venture to hope that our further investigations will render useful data to enlarge our knowledge of the stellar system.

Grateful acknowledgment is made to Dr. H. BRÜCK for his helpful advice and valuable suggestions during his stay at Castel Gandolfo.

L'AZIONE AERODINAMICA
SUL PROFILO OSCILLANTE ALLE VELOCITÀ
ULTRASONORE (*)

(Con sette figure)

CAMILLO POSSIO

(Laboratorio di Aeronautica del R. Politecnico di Torino)

SUMMARY. — Inquit Auctor, adhibita methodo linearizationis aequationis continuitatis, in motibus oscillationis subtilis laminae, quos currens uniformis hypersonora constantis velocitatis aggreditur. Coefficientia portantiae et momenti, quae vocantur, sub forma evolutionum per series exprimuntur.

La presente ricerca ha lo scopo di determinare l'azione aerodinamica su un profilo indefinito, che oscilla attorno ad un'asse parallelo alle sue generatrici: ci limitiamo quindi al moto piano. Supporremo inoltre che il profilo sia sottile e poco curvo, e che le oscillazioni siano tali che l'incidenza del profilo sia sempre piccola, sì da poter ammettere che la perturbazione che esso introduce nel campo di velocità si possa trattare come un infinitesimo. Con queste limitazioni, è trascurabile la vorticità che si produce per il fatto che l'onda d'urto non è rettilinea: è pertanto giustificata una trattazione a mezzo della funzione potenziale.

1. — Indichiamo con p , ρ , V , V_s i valori della pressione, della velocità del fluido, e di quella del suono; con u e v le componenti secondo

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Modesto Panetti, il 24 febbraio 1937.

gli assi x e y della velocità V : indichiamo coll'indice 1 i valori (costanti) delle varie grandezze relativi alla corrente indisturbata. Per le ipotesi fatte, se poniamo l'asse x coincidente con la direzione di V_1 (fig. 1), possiamo a u , v , V_s , sostituire nell'equazione di continuità i valori V_{1x} , 0 , V_{s1} : rendiamo cioè lineare l'equazione stessa.

Prendiamo come unità di misura del tempo quello in cui è percorsa la corda alare alla velocità del suono, e come unità di lunghezza la corda alare stessa: la velocità del suono sarà 1, quella della corrente indisturbata $\lambda = \frac{V_1}{V_s}$.

Lo studio è limitato al caso delle velocità ultrasonore, cioè è $\lambda > 1$; escluderemo anzi senz'altro che λ sia molto prossimo a 1, poichè in questo caso, com'è noto, i risultati che si ottengono col metodo della linearizzazione dell'equazione di continuità sono di scarsa approssimazione.

Nelle nostre unità di misura, l'equazione di continuità linearizzata assume la forma, indicando con φ il potenziale di velocità:

$$[1] \quad (1 - \lambda^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2\lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Un suo integrale particolare è:

$$[2] \quad \frac{f(\xi, \eta, T)}{\sqrt{(t - T)^2 - (x - \xi - \lambda \{t - T\})^2 - (y - \eta)^2}}$$

dove x , y , t , sono le coordinate correnti, ξ , η , T dei valori arbitrari, ma fissi, f il simbolo di una funzione arbitraria. La [2] si può considerare, in un certo senso, come l'azione, nel punto di coordinate xy e all'istante t , di una perturbazione di intensità f creata nel punto $\xi\eta$ all'istante T . Disporremo queste sorgenti di perturbazione nei punti occupati dal profilo, cioè nei punti dell'asse x compresi fra $x=0$ e $x=1$: dobbiamo quindi porre nella [2] $\eta=0$. Alla [1] soddisfa pure l'integrale dell'espressione [2] esteso ad una superficie qualunque Σ del

piano ξT ; purchè Σ sia invariabile al variare di x, y, t . Consideriamo allora l'espressione (fatto $x - \xi = X$ ⁽¹⁾, $t - T = \tau$):

$$[3] \quad \varphi(x, y, t) = \iint_S \frac{f(x - X, t - \tau) dX d\tau}{\sqrt{\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2 - y^2}}$$

in cui l'integrazione è estesa a quella porzione S della striscia Σ_1 del piano ξT compresa fra $\xi = 0$ e $\xi = 1$, per cui il radicale è reale: φ non è altro che la parte reale dell'integrale estesa a Σ_1 e quindi soddisfa alla [1].

Eseguiamo l'integrazione, prima rispetto a τ , poi rispetto a X ; i limiti sono: rispetto a τ , i due valori g_1 e g_2 (entrambi positivi) che annullano il radicale e che sono funzione di X e y , rispetto a X , $y\sqrt{\lambda^2 - 1}$ come limite inferiore, x come limite superiore. Eseguito l'integrazione rispetto a τ si trova, come espressione del potenziale prodotto da una sorgente di intensità $\text{sen } \omega t$:

$$\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \text{sen } \omega \left(t - \frac{\lambda X}{\lambda^2 - 1} \right) \cdot J \left(\frac{\omega X}{\lambda^2 - 1} \right)$$

dove J è la funzione cilindrica di prima specie, o di BESSEL, di ordine 0.

2. - La funzione f è determinata dalla conoscenza della velocità $v(x, t)$ in corrispondenza dei punti del profilo, cioè per $y = 0$.

Consideriamo che la velocità prodotta in un punto dell'asse x dalla funzione potenziale [2], per $y = \eta = 0$, ha componente nulla secondo l'asse y : ciò vuol dire che all'espressione di $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0}$ contribuiscono solo i valori della f presi nell'intorno di $X = 0$. D'altra parte, quando X

(1) Poichè alle velocità ultrasonore le perturbazioni non si propagano a monte del punto in cui sono state create, è sempre $X > 0$.

tende a 0, essendo $\lambda \neq 1$, anche g_1 e g_2 tendono a 0. Potremo quindi scrivere:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = f(x, t) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\iint_S \frac{dX d\tau}{V\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2 - y^2} \right)_{y=0}$$

Eseguiamo la derivazione come limite nell'intorno positivo di $y=0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(\dots)_{y=0} &= \lim_{y=0} \frac{1}{y} \left[\int_{y\sqrt{\lambda^2-1}}^x dX \int_{g_1}^{g_2} \frac{d\tau}{V\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2 - y^2} - \int_0^x dX \int_{g'_1}^{g'_2} \frac{d\tau}{V\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2} \right] \\ &= \lim_{y=0} \frac{1}{y} \left[\int_{y\sqrt{\lambda^2-1}}^x dX \left\{ \int_{g_1}^{g_2} - \int_{g'_1}^{g'_2} \right\} - \int_0^{y\sqrt{\lambda^2-1}} dX \int_{g'_1}^{g'_2} \right] = -\pi \end{aligned}$$

La derivata nell'intorno negativo di $y = 0$ ha valore eguale e contrario.

Si ottiene cioè la relazione cercata nella forma semplicissima (relativa al semipiano $y > 0$):

$$[4] \quad f(x, t) = -\frac{1}{\pi} v(x, t)$$

L'espressione relativa al semipiano $y < 0$ ha segno contrario: ciò vuol dire che l'azione aerodinamica è la stessa sulle due facce: considereremo quindi l'azione sulla sola faccia superiore, e moltiplicheremo poi per due.

Per il calcolo dell'azione aerodinamica è sufficiente conoscere le derivate di φ per $y=0$: basta quindi, dato che la derivata rispetto a y è nota *a priori*, conoscere il valore $\varphi(x, 0, t)$ del potenziale dei punti dell'asse x , valore che nel seguito indicheremo senz'altro con $\varphi(x, t)$. È ovvio che φ è il potenziale del moto di perturbazione: il potenziale del campo di moto sarà $\varphi + \lambda x$.

Indichiamo (fig. 1) con $\alpha(t)$ l'incidenza della corda alare AB, con $\gamma(x)$ l'inclinazione del profilo sulla corda, con $\eta(t)$ l'ordinata di A. Gli angoli α e γ sono molto piccoli, e perciò la velocità v in corrispondenza

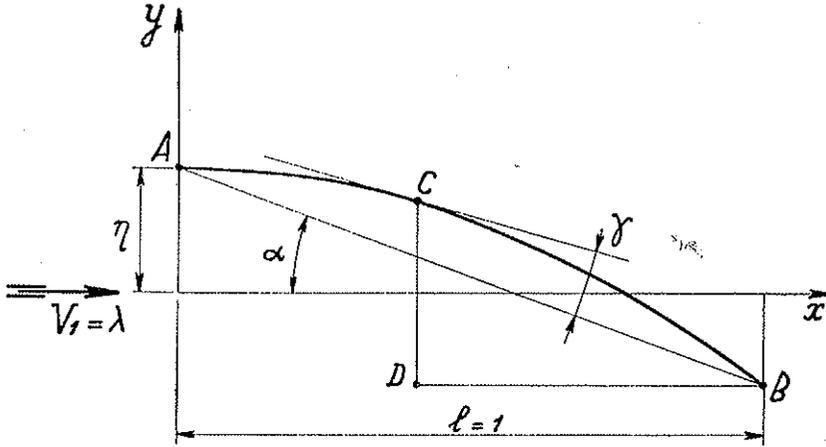


FIG. 1.

denza del profilo si può scrivere nella solita forma approssimata:

$$v = -\lambda(\alpha - \gamma) + \frac{d\eta}{dt} - x \frac{d\alpha}{dt}$$

Riferiamo le vibrazioni ad una incidenza « media » α_0 (questo ha senso preciso solo se si tratta di moto periodico: in caso contrario si fissi arbitrariamente α_0) ponendo $\alpha(t) = \alpha_0 + \beta(t)$. Possiamo considerare v come somma di un termine costante rispetto al tempo: $-\lambda(\alpha_0 - \gamma)$, e di un altro, variabile, che ha valore medio nullo nel caso di moto periodico. Per la linearità della [1], l'azione aerodinamica è la somma dell'azione costante che si esercita sul profilo fisso nella sua posizione media, e di un'azione variabile, che è quella che si esercita su una lamina piana la cui posizione è definita dall'incidenza $\beta(t)$ e dell'ordinata $\eta(t)$ del bordo d'attacco.

3. - L'azione costante si determina, com'è noto, per altra via: vogliamo soltanto mostrare come dalle [3-4] si raggiungano immediatamente risultati noti. Nel nostro caso è:

$$\varphi(x, t) = \int_0^{\omega} dX \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \alpha_0 - \gamma(x - X) \right\} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2}}$$

Dall'equazione di BERNOULLI si ricava, trattando come infinitesimi le differenze tra i valori variabili delle varie grandezze e i valori corrispondenti della corrente indisturbata,

$$p - p_1 = -\rho \left(\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

da cui, considerando la portanza $P = c_p \rho l V^2$ positiva verso l'alto

$$[5] \quad c_p = \frac{2}{\lambda^2} \left(\int_0^1 \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx \right)$$

Nel nostro caso si ottiene il noto risultato (approssimato):

$$c_p = \frac{2(\alpha_0 - \gamma(x))}{\sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

4. - Supponiamo che il moto del profilo sia oscillatorio periodico: per la linearità della [1] è ovvio che basterà studiare separatamente i due moti:

$$[6] \quad \eta = a \operatorname{sen} \omega t \quad \beta = 0$$

$$[7] \quad \eta = 0 \quad \beta = b \operatorname{sen} \omega t$$

dove ω è il valore della pulsazione nelle nostre unità di misura; se Ω è il valore in unità generiche, è $\omega = \frac{\Omega l}{V_s}$.

5. - Consideriamo il solo moto [6]; sarà:

$$\varphi(x, t) = \iint \frac{-\frac{a\omega}{\pi} \cos \omega(t - \tau) dX d\tau}{\sqrt{\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2}}$$

Sviluppiamo $\cos(\omega t - \omega\tau)$ ed eseguiamo l'integrazione, prima rispetto a τ , poi rispetto a X . Si ricava l'espressione (1);

$$c_p = -\frac{2a\omega}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}} \operatorname{sen} \omega t \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda E_{2n+1} - E_{2n})}{(2n+2)!} \omega^{2n+1} -$$

$$-\frac{2a\omega}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}} \operatorname{cos} \omega t \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda E_{2n} - E_{2n-1})}{(2n+1)!} \omega^{2n}$$

Prendiamo i momenti rispetto al bordo d'attacco, e consideriamo positivi i momenti picchianti: l'espressione di c_m si ricava da quella di c_p , sostituendo al fattoriale generico $m!$ il valore $\frac{(m+1)!}{m}$; si ha cioè che l'azione aerodinamica elementare relativa a ω^n è applicata in un punto della corda alare compreso fra il punto di mezzo e il bordo d'uscita, e spostato tanto più all'indietro quanto più elevato è n .

Se λ non è molto prossimo a 1, e ω resta nei limiti pratici ($\omega=0,5$ già un valore molto elevato) possiamo considerare soltanto i termini

(1) L'espressione di E_n è:

$$E_n = \frac{1}{(\lambda+1)^n} \cdot \frac{\sum_0^n a_{ni} \lambda^i}{\sum_0^n a_{ni}} \quad \mu = \frac{\lambda+1}{\lambda-1}$$

$$a_{ni} = \binom{n}{i} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot 2i+1}{(2n-1)(2n-3) \cdot \dots \cdot (2i+1)} \text{ per } i \neq n; \quad a_{nn} = 1;$$

$$\text{per } n < 0 \text{ è } E_n = 0; \quad E_0 = 1; \quad E_1 = \frac{\lambda}{\lambda^2 - 1} \cdot \dots$$

in ω e ω^2 : l'azione aerodinamica risulta allora la somma delle due forze espresse in unità di misure generiche:

$$[8] \quad F_1 = -\rho l V_1^2 \frac{2}{\lambda \sqrt{\lambda^2 - 1}} \cdot \frac{d\eta}{dt} \frac{1}{V_s}; \quad F_2 = \rho l V_1^2 \frac{1}{\lambda^2 (\lambda^2 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{d^2\eta}{dt^2} \frac{l}{V_s^2}$$

applicate rispettivamente nel punto di mezzo e a due terzi del profilo verso il lembo posteriore.

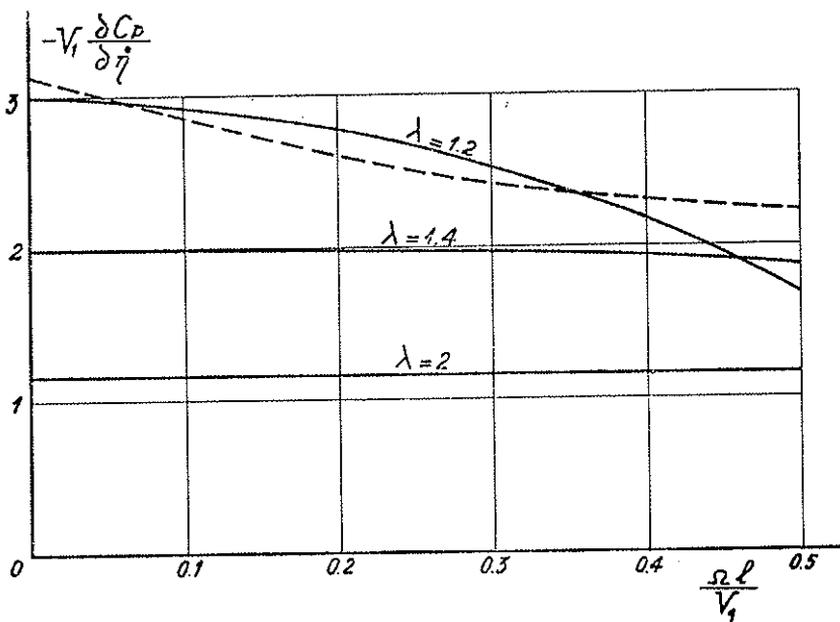


FIG. 2.

Si può notare che F_1 per λ abbastanza grande è pressochè indipendente dalla velocità assintotica, e inoltre ha segno contrario a $\frac{d\eta}{dt}$, sicchè presenta un effetto smorzante sulle oscillazioni. F_2 è trascurabile: è però interessante osservare che ha lo stesso segno dell'accelerazione. Ne segue che la massa apparente addizionale è negativa: lo

stesso risultato si ha per il fluido incompressibile, limitatamente al campo di frequenza $\frac{\Omega l}{2V_1} < 0,34$ (1).

Siccome il moto è sinoidale, si potrà sempre mettere il coefficiente di portanza sotto la forma:

$$[9] \quad c_p = l \frac{\partial c_p}{\partial \eta} \cdot \frac{\dot{\eta}}{l} + V_1 \frac{\partial c_p}{\partial \dot{\eta}} \cdot \frac{\dot{\eta}}{V_1} \quad \left(\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt} \right)$$

Nella figura 2 si sono riportati alcuni valori del coefficiente adimensionale $V_1 \frac{\partial c_p}{\partial \dot{\eta}}$ in funzione di $\frac{\omega}{\lambda}$: nella linea a tratti si sono riportati i valori relativi al fluido incompressibile, valori che con questi riferimenti risultano indipendenti dalla velocità V_1 . Dalla figura si rileva come per $\lambda > 1,4$, $V_1 \frac{\partial c_p}{\partial \dot{\eta}}$ sia pressocchè indipendente dalla frequenza: lo stesso si ha per $l \frac{\partial c_p}{\partial \eta}$. Ora, questi due coefficienti coincidono, per $\omega \rightarrow 0$, coi valori che si ricavano dalle [8], e quindi è giustificata l'espressione dell'azione aerodinamica a mezzo delle [8]: praticamente anzi, basta considerare la sola F_1 .

6. - Studiamo ora il moto [7]; è:

$$\varphi(x, t) = \frac{b}{\pi} \iint \frac{\lambda \operatorname{sen} \omega(t - \tau) + \omega(x - X) \cos \omega(t - \tau)}{\sqrt{\tau^2 - (X - \lambda\tau)^2}} dX d\tau$$

Procedendo nello stesso modo indicato nel paragrafo precedente, si giunge all'espressione:

$$c_p = \frac{2b}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}} \operatorname{sen} \omega t \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (E_{2n} \lambda^2 - 2E_{2n-1} \lambda + E_{2n-2}) \omega^{2n} +$$

$$+ \frac{2b}{\lambda^2 \sqrt{\lambda^2 - 1}} \cos \omega t \cdot \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} (E_{2n+1} \lambda^2 - 2E_{2n} \lambda + E_{2n-1}) \omega^{2n+1}$$

(1) Cfr. CICALA, *L'azione aerodinamica ecc.*, « Memorie Acc. Sc. Torino », 1935, figura 7, diagramma a.

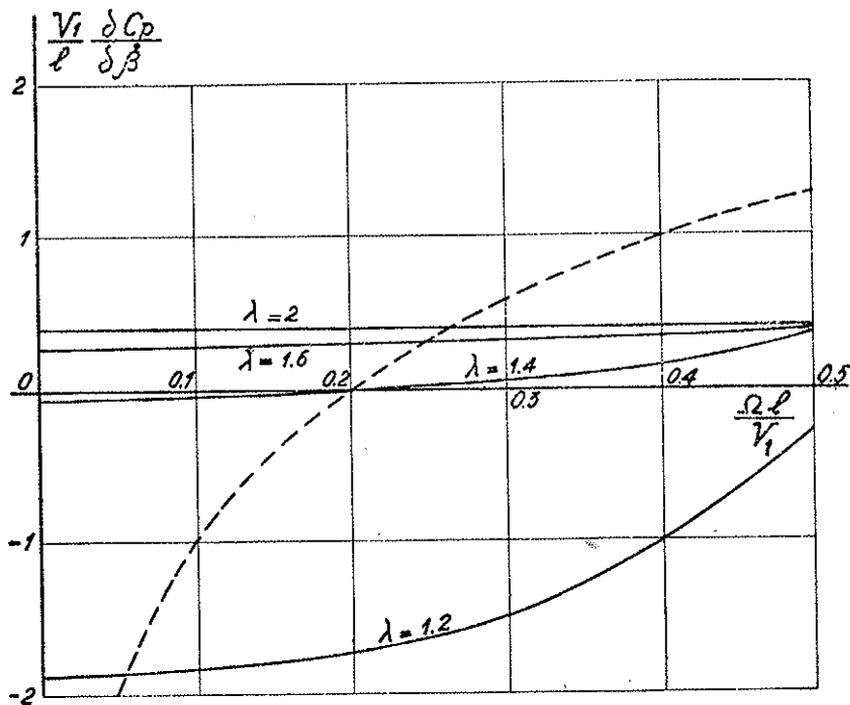


FIG. 3.

Si ricava c_m nel modo indicato al n. 5.

Negli stessi limiti sopra considerati, possiamo trascurare i termini in ω di ordine superiore al primo; l'azione aerodinamica risulta allora la somma delle forze:

$$[10] \quad F_1 = \rho l V_1^2 \frac{2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \beta ; \quad F_2 = \rho l V_1^2 \frac{\lambda^2 - 2}{\lambda (\lambda^2 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{l}{V_s} \frac{d\beta}{dt}$$

applicate rispettivamente sul punto di mezzo e a due terzi del profilo.

Poniamo ora c_p e c_m (riferito quest'ultimo al punto di mezzo del profilo) sotto una forma analoga alla [9]. I valori di $\frac{\partial c_p}{\partial \beta}$ sono molto

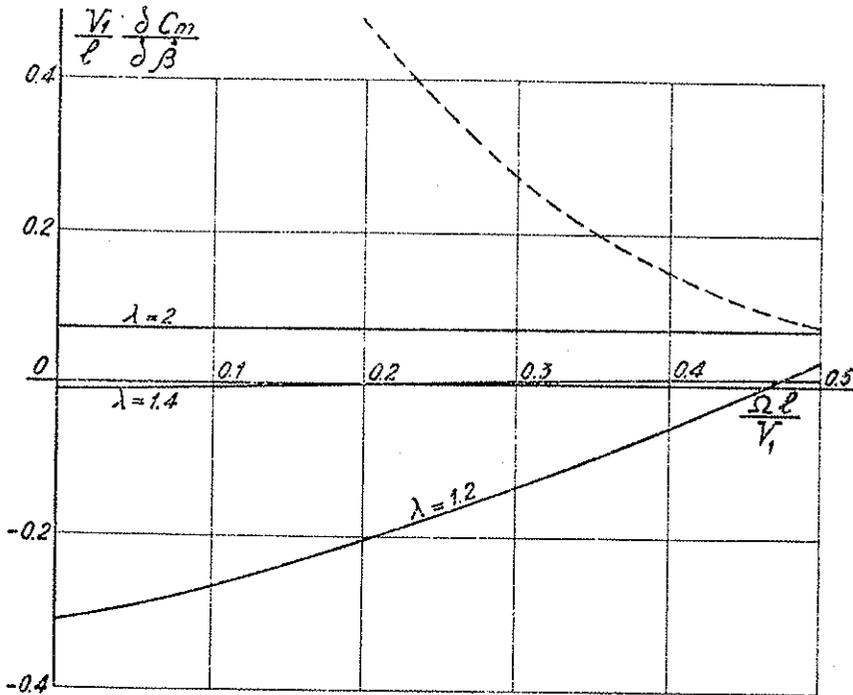


FIG. 4.

(Il momento è preso rispetto al punto di mezzo del profilo).

prossimi a quelli di $V_i \frac{\partial c_p}{\partial \eta}$ (fig. 2); $\frac{\partial c_m}{\partial \beta}$ è trascurabile. Nelle figure 3 e 4 si sono riportati alcuni valori di $\frac{V_i}{l} \frac{\partial c_p}{\partial \beta}$ e $\frac{V_i}{l} \frac{\partial c_m}{\partial \beta}$ e, al solito, nella linea a tratti i diagrammi relativi al fluido incompressibile. Dalle figure risulta come i due coefficienti presentino un andamento completamente differente da quello che si ha per il caso del fluido incompressibile.

7. - Supponiamo ora che l'espressione di η e β abbia una forma qualsiasi, non periodica: il potenziale si otterrà nello stesso modo usato per l'espressione sinoidale, cioè sviluppando $\eta(t - \tau)$ e $\beta(t - \tau)$ in serie

di potenza di τ . Notiamo che nell'integrazione è sempre $\tau < \frac{1}{\lambda - 1}$: per la ragione già spiegata, non consideriamo mai valori di $\lambda - 1$ troppo piccoli e d'altra parte l'unità di tempo è dell'ordine di grandezza di millesimi di secondo, sicchè τ è sempre piccolissimo. Una prima conseguenza è che basta che lo sviluppo in serie abbia un campo di convergenza molto ristretto; una seconda è che, escludendo il caso eccezionale di vibrazioni estremamente rapide, possiamo con buona approssimazione considerare soltanto i primi due termini degli sviluppi in serie.

È ovvio che i coefficienti delle derivate d'ordine $2n$ e $2n + 1$ non sono altro che i coefficienti di $(-1)^n \omega^{2n} \sin \omega t$ e $(-1)^n \omega^{2n+1} \cos \omega t$ nelle espressioni relative dei nn. 5 e 6.

Considerando soltanto i termini relativi agli spostamenti e alle loro derivate prime, l'azione aerodinamica è rappresentata dalle tre forze: F_1 [8], F_1 e F_2 [10].

8. - Sia il profilo costituito da due parti mobili l'una rispetto all'altra (fig. 5). L'azione aerodinamica su AB non è influenzata dalla presenza di BC: per la linearità della [1] l'azione su BC è la somma di quella che si avrebbe se non esistesse AB, e di quella che il moto di AB esercita su BC considerato fisso nella posizione $B_1 C_1$. Per determinare quest'azione è sufficiente conoscere l'espressione del potenziale relativo al moto di AB nei punti di $B_1 C_1$: i limiti d'integrazione rispetto a X saranno perciò $x - 1$ e x (l'unità di misura è sempre la corda AB).

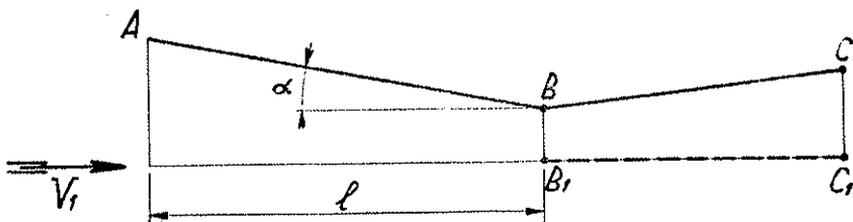


FIG. 5.

Considerando, come sopra, i soli due primi termini degli sviluppi, si ha una portanza applicata nel punto di mezzo di B_1C_1 :

$$c_p = - \frac{2}{\lambda(\lambda^2 - 1)^{3/2}} \cdot \frac{l}{V_s} \frac{d\alpha}{dt}$$

9. - Supponiamo che il profilo possa oscillare attorno al punto O dell'asse x (fig. 6) e che esista un'azione elastica che cerca di trattenerlo in una data posizione. È ovvio che, come conseguenza della linearità delle azioni aerodinamiche ed elastiche, basta considerare il caso della lamina piana, la cui posizione d'equilibrio sia nella giacitura della corrente assintotica.

Lo studio del moto del profilo risulta assai semplice se assumiamo per l'azione aerodinamica l'espressione approssimata, data da F_1 [8] e $F_1 F_2$ [10], e si trascurano le azioni smorzanti di natura dissipativa.

È immediato che l'equilibrio è instabile, già dal punto di vista statico, se è $a > 1/2$ (asse d'oscillazione situato posteriormente al punto di mezzo del profilo) e contemporaneamente l'azione elastica è incapace a contrastare l'azione aerodinamica.

Escluso questo caso, si trova nel modo approssimato suaccennato, che per $a > 2/3$ il moto è smorzato se $\lambda > \lambda_c$, esaltato se $\lambda < \lambda_c$: λ_c è funzione di a , e assume il suo valore massimo 1,58 per $a = 1/3$.

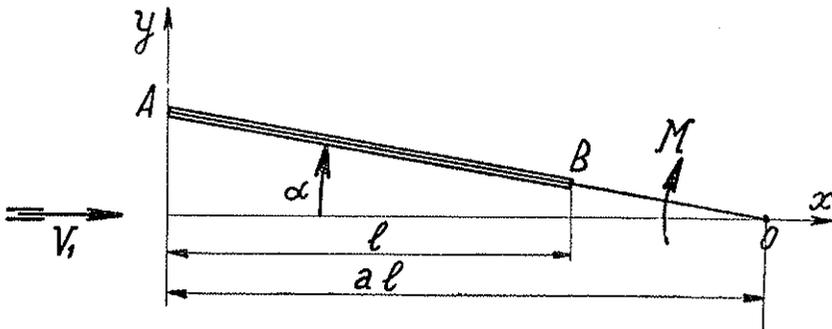


FIG. 6.

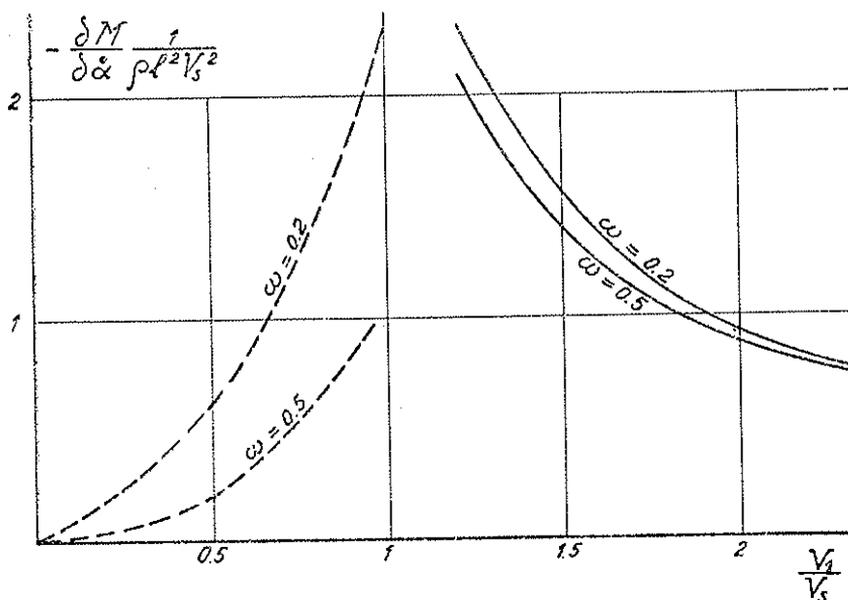


FIG. 7.

Per avere un confronto fra i risultati relativi al fluido compressibile a velocità ipersonora e quelli relativi al fluido incompressibile, si sono riportati nella figura 7, per il caso di $\alpha = 1$, cioè di oscillazioni attorno al bordo d'uscita, i valori ⁽¹⁾ del momento aerodinamico proporzionale alla velocità $\frac{dx}{dt}$ (momento smorzante).

Dalla figura si rileva che, mentre nel caso del fluido incompressibile lo smorzamento cresce colla velocità V_1 con una legge di tipo parabolico, per il fluido compressibile lo smorzamento diminuisce tendendo ad un valore assintotico. Nel caso della figura questo valore è due terzi ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Calcolati in base alle espressioni esatte di c_p e c_m .

⁽²⁾ Si deve notare che il coefficiente considerato ha le dimensioni di un tempo: l'unità è il tempo in cui è percorsa la corda alare alla velocità del suono.