

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

---

A C T A

VOLVMEN XIV



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

1950-1951-1952

## INDEX

|   |         |
|---|---------|
| I. Resoconto della Sessione Plenaria del XIII Anno accademico<br>(7 giugno 1949) . . . . .  | I-VIII  |
| 1. G. PLATONE, Teorema d'unicità per le equazioni integrali<br>non lineari ottenute da funzioni di composizione a nu-<br>cleo sommabile . . . . .   | I-8     |
| 2. M. BONI ed E. LAURICELLA, Note anatomo-fisiologiche sulle<br>vie di drenaggio della linfa uterina . . . . .  | 9-16    |
| 3. S. TEOFILATO, Configurazione di equilibrio del fondo mobile<br>in corso d'acqua (cum 2 fig.) . . . . .   | 17-32   |
| 4. P. TEOFILATO, Determinazione della corrente supersonica<br>tridimensionale col metodo delle caratteristiche . . . . .  | 33-44   |
| 5. E. FUNAIOLI, Sul calcolo di schiere alari di profili sottili<br>di curvatura non trascurabile (cum 2 fig.) . . . . .   | 45-56   |
| 6. D. B. SCOTT., On the fundamental theorem for point-<br>point correspondences with valency on an algebraic<br>surface . . . . .   | 57-62   |
| 7. F. CEDRANGOLO, E. LEONE e D. ZOMMARINO, Azione della<br>streptomicina sulla sintesi della clorofilla nell' <i>Hordeum</i><br>vulgare . . . . .   | 63-70   |
| 8. P. DRUMAUX, La mouvement de récession des nébuleuses<br>extra-galactiques (2 <sup>e</sup> Partie) . . . . .  | 71-86   |
| 9. M. PANETTI, Il problema statico e costruttivo del complesso<br>di due tubi fra loro ortogonali, soggetti a sopraffessione<br>e depressione interna, nelle gallerie aerodinamiche a<br>circuito chiuso (cum 5 fig.) . . . . . | 87-106  |
| 10. A. ANDREOTTI, Sopra le involuzioni appartenenti ad una<br>varietà di Picard . . . . .   | 107-116 |
| 11. F. RECCHIA e M. GHIRON, Sull'attività glicolitica in aéro-<br>biosi, in vitro, di preparazioni di fegato di maiale<br>(cum 2 fig.) . . . . .  | 117-128 |

12. M. GHIRON, *Sull'azione ipoglicemizzante di un estratto di fegato di maiale in conigli normali ed in conigli con diabete allossanico* . . . . . 129-142
13. F. SEVERI, *Una nuova visione della geometria sopra una curva* . . . . . 143-152
14. L. CATTANEO, *La struttura del bulbo olfattivo* (cum 6 fig.) 153-168
15. B. ZANOBIO, *Osservazioni sulla innervazione del fegato* (cum 6 fig.) . . . . . 169-174
16. C. CONCI, *Il genere archigoniodes Conci ed il suo generi-tipo (mallophaga)* (cum 1 fig.) . . . . . 175-180
17. A. TADDEI, *Controllo allo studio del canale alimentare in Lacerta* (cum 10 fig.) . . . . . 181-196
18. G. L. CORONA, *Rilievi sulla innervazione dell'epididimo* (cum 6 fig.) . . . . . 197-210
19. G. PROTTI, *Dispositivo per lo studio dinamico e cinetico del metabolismo cellulare (BL 98)* (cum 9 fig. et 6 graph.) 211-224

RESOCONTO  
DELLA SESSIONE PLENARIA  
DEL XIII ANNO ACCADEMICO

*(Martedì 7 giugno 1949)*

Presiede S.E. il Rev.mo Padre AGOSTINO GEMELLI O.F.M.

Sono presenti le LL. EE. gli Accademici Pontifici: AMALDI, ARMELLINI, BOLDRINI, COLONNETTI, GEMELLI, GHIGI, GIORDANI, GOLA, LEPRI, LOMBARDI, PANETTI, PENSA, PETRITSCH, RONDONI, TONIOLO, VALLAURI, VERCELLI, PIERANTONI, SEVERI, DE BLASI, RUZICKA, FLEMING; gli Accademici Pontifici Soprannumerari: STEIN, GATTERER, ALBAREDA, e il Cancelliere dell'Accademia Dott. SALVIUCCI.

*Ordine del giorno:* 1) Approvazione del Verbale della Prima Tornata del XII Anno Accademico - 2) Comunicazioni della Presidenza - 3) Comunicazioni scientifiche e presentazione di Note - 4) Varia.

La seduta è aperta alle ore 11,30.

Il Presidente GEMELLI prende subito la parola per dire che, ancora prima di dare corso ai vari punti dell'ordine del giorno, il primo pensiero di tutti i presenti, radunati nella Sede accademica, dopo aver ascoltato l'illuminata parola del Sommo Pontefice nell'Udienza di quella mattina, è un ringraziamento filiale per Lui che

ama in modo particolare l'Accademia e l'aiuta con ogni mezzo a realizzare i fini di studio e di ricerca che essa si propone.

Crede di rendersi interprete del pensiero di tutti nel proporre che sia inviato al Santo Padre un telegramma di profonda devozione nel quale siano espressi i sentimenti che in questo momento sgorgano più vivi per Lui dal cuore di ognuno dei presenti, e prega il Cancelliere di provvedere all'immediato invio.

Tutti applaudono in piedi all'indirizzo dell'Augusto Pontefice.

Si passa quindi ai vari punti dell'ordine del giorno.

Al primo punto si trova l'approvazione del verbale della precedente Tornata Ordinaria. Il verbale è stato pubblicato nel fascicolo contenente il Resoconto della Tornata stessa e si tratta quindi di approvare tale pubblicazione che ogni Accademico ha già avuto in visione.

Il Presidente GEMELLI pone ai voti l'approvazione.

L'Accademico AMALDI domanda come debba intendersi la nomina fatta dal Santo Padre del nuovo Consiglio Accademico senza la attribuzione delle cariche.

Il Presidente GEMELLI risponde che avendo sottoposto più volte al Santo Padre le difficoltà di carattere pratico incontratesi fin dall'inizio dell'Accademia nell'esercizio delle funzioni consigliari, Questi ha disposto che d'ora in avanti il Consiglio Accademico assuma collegialmente le competenze previste per i singoli incarichi. Conseguentemente il Presidente dell'Accademia ha affidato l'esecuzione delle deliberazioni del Consiglio al Cancelliere che ne è responsabile verso di lui.

Poichè nessuno presenta ulteriori osservazioni il verbale risulta approvato all'unanimità.

Si passa quindi al secondo punto dell'ordine del giorno.

Il Presidente GEMELLI compie il doloroso ufficio di comunicare all'Accademia la morte dell'Accademico Pontificio Filippo Silvestri avvenuta in Bevagna nella notte dall'1 al 2 giugno corrente.

Il Cancelliere SALVIUCCI legge i telegrammi con cui l'Accademia ha già espresso alla Famiglia, alla Università di Napoli ed alla Stazione Zoologica di Portici, di cui il Defunto era Direttore, le proprie vivissime condoglianze.

Il Presidente GEMELLI è poi lieto di dare, a nome di tutti, il benvenuto fra i Colleghi a S.E. SIR ALEXANDER FLEMING che partecipa oggi per la prima volta ad una seduta dell'Accademia ed augura, per lui personalmente e per i suoi studi, sempre nuovi e fecondi successi.

Il Cancelliere SALVIUCCI rimette quindi ufficialmente a S.E. FLEMING le insegne accademiche.

Il Presidente GEMELLI ricorda che, per quanto riguarda la vita dell'Accademia, l'esperienza degli anni trascorsi dalla Fondazione (1936) e soprattutto quelli precedenti la guerra hanno dimostrato l'impossibilità pratica di poter riunire gli Accademici Pontifici, che si trovano sparsi in tutte le parti del mondo, varie volte durante la stessa annata.

Questo importante argomento, rimesso nuovamente all'ordine del giorno, subito dopo la guerra, per una vitale ripresa dell'attività accademica, portò, con l'unanime parere degli Accademici allora presenti, al voto concorde del Consiglio Accademico di raggruppare insieme le varie Sedute (scientifiche, amministrative, per le elezioni, per i Premi, ecc.), durante il periodo di una « Sessione Plenaria » da tenersi una volta all'anno, preferibilmente nel tempo susseguente alla Pasqua, e facendo coincidere nella stessa epoca l'eventuale « Settimana di Studio ».

Il Santo Padre infine, nel dare la Sua sovrana approvazione per questa iniziativa, aveva anche paternamente assicurato il Presidente dell'Accademia del Suo augusto intervento alle Sessioni Plenarie con una Solenne Tornata Pontificia o con una Udienza Privata agli intervenuti, autorizzandolo in pari tempo a farne menzione nella comunicazione agli Accademici.

Il Presidente GEMELLI si dice lieto di presiedere per la prima volta una Sessione Plenaria, e precisamente una seduta della stessa che, come è già stato comunicato agli Accademici Pontifici, ha anche lo scopo di dare il benvenuto amichevole e fraterno



agli illustri Colleghi ed eminenti scienziati convenuti da ogni parte del mondo per la prima Settimana di Studio promossa dalla Pontificia Accademia delle Scienze, e che ha per titolo « Il problema biologico del cancro ».

Innanzitutto deve ringraziarli di aver accettato l'invito loro rivolto dall'Accademia e di averlo accettato con entusiasmo, tanto da abbandonare — sia pure per un breve periodo di tempo — i loro Istituti scientifici per radunarsi nella Sede della Accademia e discutere insieme e coordinare i risultati delle loro ricerche in modo di giungere ad una visione sempre più unitaria del grave problema prescelto.

Rivolge poi a loro l'augurio che sorge spontaneo dai cuori e che è nel desiderio di tutti: che cioè questo loro incontro riesca veramente fruttuoso per il progresso della scienza e per il sollievo di tanta umanità sofferente.

I « Partecipanti » alla Settimana di Studio, che hanno preso posto negli stessi banchi riservati agli Accademici Pontifici, ringraziano applaudendo alle parole del Presidente.

Gli scienziati specialisti invitati come « Partecipanti » alla Settimana di Studio sono i Professori: I. BERENBLUM, del « Sir William Dunn School of Pathology » dell'Università di Oxford; E. BOYLAND, Direttore del Reparto biochimico nel « Chester Beatty Research Institute », annesso al « Cancer Hospital » di Londra; E. V. COWDRY, Direttore della « Division of Cancer Research » della « Washington University » di Saint Louis, Mo.; I. P. GREENSTEIN, Direttore del « National Cancer Institute Department for Biochemistry » di Bethesda (Washington); J. KRETZ, Segretario Generale della « Oesterreichische Krebsgesellschaft »; A. LACASSAGNE, Direttore dei Laboratori dell'Istituto del Radio e Professore al « Collège de France » di Parigi; J. MAISIN, Direttore dell'Istituto del Cancro di Lovanio e Professore di Anatomia patologica in quella Università Cattolica; P. R. PEACOCK, Direttore dei Laboratori del « Royal Cancer Hospital » di Glasgow; F. PENTIMALLI, Direttore dell'Istituto di Patologia generale dell'Università di Napoli e dell'Istituto del Cancro di quella città; I. SANZ IBAÑEZ, Ordinario di anatomia patologica nell'Università di Madrid e Direttore dell'Istituto Nazionale Spagnolo del Cancro; H. R. SCHINZ, Direttore del « Radium und Roentgeninstitut » dell'Università di Zurigo; H. VON EULER, Premio Nobel, Direttore dell'Istituto di Chimica organica dell'Università di Stoccolma e del « Högskolas Vitamin Instituteten »; ai quali vanno aggiunti gli Accademici Pontifici le LL. EE.: A. FLEMING, Professore di Batteriologia nell'Università di Londra; P. RONDONI, Direttore dell'Istituto del Cancro di Milano e Direttore dell'Istituto di Patologia generale di quella Università, Presidente della Lega Italiana per la lotta contro i tumori; L. RUZICKA, Premio Nobel, Direttore del Laboratorio di Chimica organica del Politecnico di Zurigo.

Si passa quindi al terzo punto dell'ordine del giorno per le comunicazioni scientifiche e la presentazione di lavori originali.

L'Accademico GHIGI presenta la seguente Memoria:

- L. DI CAPORACCIO - *Aracnidi della colonia del Kenya raccolti da Toschi e Meneghetti negli anni 1944-1946.*
- A. DE TOGNI - *Su alcuni Parnassius Apollo L. del Parco Nazionale del Gran Paradiso.*
- S. LEGHISSA - *Ricerche anatomico-comparative sul sistema longitudinale mediale nella serie dei vertebrati. - II. Costituzione e rapporti del S. L. M. encefalico e spinale in Triton cristatus, taeniatus, axolot, e sua importanza funzionale.*

L'Accademico PENSA presenta le seguenti Note:

- G. PALUMBI - *Substrato morfologico dell'apparato contrattile del tubo genitale maschile di Ascaris megalocephala.*
- B. MAZZUCHELLI - *Osservazioni sulla struttura e sulla innervazione delle epifisi dei mammiferi.*

L'Accademico A. R. TONIOLO presenta la seguente Nota:

- G. TONIOLO - *L'esame radiografico del cranio di Santa Caterina da Siena.*

L'Accademico SEVERI presenta la seguente Nota:

- A. TONOLO - *Sulle varietà riemanniane normali a tre dimensioni.*

L'Accademico AMALDI presenta le seguenti Note:

- A. CHIELLINI - *Sui sistemi differenziali lineari ordinari e sui loro aggiunti di Lagrange. Nota prima.*

- A. CHIELLINI - *Sui sistemi differenziali lineari ordinari e sui loro aggiunti di Lagrange*. Nota seconda.

Il Cancelliere SALVIUCCI dà poi notizia degli altri lavori originali presentati da Accademici prima della presente seduta.

L'Accademico AMALDI ha presentato le seguenti Note:

- A. CHIELLINI - *La teoria invariantiva del sistema differenziale formato da due equazioni lineari di ordine qualunque*. Nota prima.
- A. CHIELLINI - *La teoria invariantiva del sistema differenziale formato da due equazioni lineari di ordine qualunque*. Nota seconda: *I sistemi riducibili a coefficienti costanti*.

L'Accademico GOLA ha presentato le seguenti Note:

- F. M. GEROLA - *Gli acidi nucleinici nella gametogenesi vegetale*.
- V. ZANON - *Diatomee del deposito quaternario di cristomatacee alle Tre Fontane presso Roma*.

L'Accademico QUAGLIARIELLO ha presentato la seguente Memoria:

- D. GIGANTE - *Ricerche polarografiche sui tumori*.

Di questa Memoria l'Accademico QUAGLIARIELLO ha inoltre presentato una Nota Preventiva per la immediata inserzione nelle pubblicazioni accademiche.

La seduta si chiude alle ore 13.

|   |         |
|---|---------|
| 1. Resoconto della Sessione Plenaria del XIII Anno accademico<br>(7 giugno 1949) . . . . .  | I-VIII  |
| 1. G. PLATONE, Teorema d'unicità per le equazioni integrali<br>non lineari ottenute da funzioni di composizione a nu-<br>cleo sommabile . . . . .   | 1-8     |
| 2. M. BONI ed E. LAURICELLA, Note anatomo-fisiologiche sulle<br>vie di drenaggio della linfa uterina . . . . .  | 9-16    |
| 3. S. TEOFILATO, Configurazione di equilibrio del fondo mobile<br>in corso d'acqua (cum 2 fig.) . . . . .   | 17-32   |
| 4. P. TEOFILATO, Determinazione della corrente supersonica<br>tridimensionale col metodo delle caratteristiche . . . . .  | 33-44   |
| 5. E. FUNAIOLI, Sul calcolo di schiere alari di profili sottili<br>di curvatura non trascurabile (cum 2 fig.) . . . . .   | 45-56   |
| 6. D. B. SCOTT., On the fundamental theorem for point-<br>point correspondences with valency on an algebraic<br>surface . . . . .   | 57-62   |
| 7. F. CEDRANGOLO, E. LEONE e D. ZOMMARINO, Azione della<br>streptomicina sulla sintesi della clorofilla nell' <i>Hordeum</i><br>vulgare . . . . .   | 63-70   |
| 8. P. DRUMAUX, La mouvement de récession des nébuleuses<br>extra-galactiques (2 <sup>e</sup> Partie) . . . . .  | 71-86   |
| 9. M. PANETTI, Il problema statico e costruttivo del complesso<br>di due tubi fra loro ortogonali, soggetti a soprapressione<br>e depressione interna, nelle gallerie aerodinamiche a<br>circuito chiuso (cum 5 fig.) . . . . . | 87-106  |
| 10. A. ANDREOTTI, Sopra le involuzioni appartenenti ad una<br>varietà di Picard . . . . .   | 107-116 |
| 11. F. RECCHIA e M. GHIRON, Sull'attività glicolitica in aero-<br>biosi, in vitro, di preparazioni di fegato di maiale<br>(cum 2 fig.) . . . . .  | 117-128 |

12. M. GHIRON, *Sull'azione ipoglicemizzante di un estratto di fegato di maiale in conigli normali ed in conigli con diabete allossanico* . . . . . 129-142
13. F. SEVERI, *Una nuova visione della geometria sopra una curva* . . . . . 143-152
14. L. CATTANEO, *La struttura del bulbo olfattivo* (cum 6 fig.) 153-168
15. B. ZANOBIO, *Osservazioni sulla innervazione del fegato* (cum 6 fig.) . . . . . 169-174
16. C. CONCI, *Il genere archigoniodes Conci ed il suo generitipo (mallophaga)* (cum 1 fig.) . . . . . 175-180
17. A. TADDEI, *Controllo allo studio del canale alimentare in Lacerta* (cum 10 fig.) . . . . . 181-196
18. G. L. CORONA, *Rilievi sulla innervazione dell'epididimo* (cum 6 fig.) . . . . . 197-210
19. G. PROTTI, *Dispositivo per lo studio dinamico e cinetico del metabolismo cellulare (BL 98)* (cum 9 fig. et 6 graph.) 211-224

## TEOREMA D'UNICITÀ PER LE EQUAZIONI INTEGRALI NON LINEARI OTTENUTE DA FUNZIONI DI COMPOSIZIONI A NUCLEO SOMMABILE (\*)

GIULIO PLATONE

SUMMARIVM. — Auctor demonstrat, in classe [L] functionum quae pseudo-limitatae dicuntur, theorema unicitatis quod attinet ad aequationes integrales non lineares huius generis

$$[1] \quad a_1 Y + \sum_r^{1, m} (P_r * \overset{\wedge}{Y}^r)_A = k_0 \quad \text{in quibus} \quad \begin{cases} 1 \leq m \leq +\infty \\ a_1 \neq 0 \end{cases}$$

quae obtineantur aequando functioni cognitae pseudo-limitatae  $k_0(x, y)$  functionem generalis compositionis (erga pondus  $A(y)$ , quod addi possit) alicuius functionis ignotae  $Y(x, y)$ .

### DEFINIZIONI, CONVENZIONI

1. — Sia:

a)  $E$  un lebesghiano, limitato o no, di misura finita sullo spazio euclideo  $S_r(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ;

b)  $A(x)$ , con  $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$  una funzione sommabile in  $E$ ;

c) [L] la classe delle funzioni pseudo limitate (1) nell'insieme  $E^{(2)} = (E^x \cdot E^y)$  dello spazio  $S_{2r} = (x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, \dots, y_r)$  e permutabili tra loro rispetto al peso  $A(y)$ ;

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi il 25 maggio 1950.

d)  $k_0(x, y), k_1(x, y), \dots, k_n(x, y)$ ,  $n+1$  funzioni di  $[U]$ ;

e)  $M$  un confine superiore dell'integrale, esteso ad  $E$ , di  $|A(y)|$ ;

$$[1] \quad \int_E |A(y)| dy \leq M;$$

f)  $l_s$  un pseudo confine superiore <sup>(3)</sup> di  $|k_s(x, y)|$  in  $E$  <sup>(2)</sup>;

$$[2] \quad |k_s(x, y)| \leq l_s \quad (s=1, 2, \dots, n)$$

g) Posto

$$[3] \quad \mathcal{S}_r(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n=0, s_r} a_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(r)} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n} \quad (r=1, 2, \dots, m)$$

la funzione delle  $n+2$  variabili complesse  $z, z_0, z_1, \dots, z_n$

$$[4] \quad F(z_1, z_2, \dots, z_n) = a_1 z + \sum_r^{1, m} \mathcal{S}_r(z_1, z_2, \dots, z_n) \cdot z^r - z_0, \\ a_1 \neq 0$$

sia olomorfa nell'intorno dell'origine  $z = z_0 = z_1 = \dots = z_n = 0$  <sup>(\*)</sup>.

OSSERVAZIONE: Siccome nella presente nota considero solo prodotti di composizione col peso  $A(y)$  per brevità rappresenterò tale operazione col simbolo  $f * \varphi$  della composizione ordinaria anzichè con  $(f * \varphi)_A$ . Conseguentemente scriverò  $f^{i_1} * \varphi^{i_2} * \psi^{i_3}$  al posto di  $[(f^{i_1} * \varphi^{i_2})_A * \psi^{i_3}]_A$  e così via.

#### PROPRIETÀ PRELIMINARI E POSIZIONE DEL PROBLEMA

2. - Premetto che nelle ipotesi poste si ricava facilmente, per i monomi di composizione col peso  $A(y)$ , la maggiorazione

$$[5] \quad \left| \overset{A}{k}_1^{i_1} * \overset{A}{k}_2^{i_2} * \dots * \overset{A}{k}_n^{i_n} \right| \leq \frac{1}{M} |M l_1|^{i_1} |M l_2|^{i_2} \dots |M l_n|^{i_n}$$

valida quasi ovunque in  $E$  <sup>(2)</sup>. Quindi, se si pone  $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$  e se

$$P(x, y, \lambda) = \sum_i^{0, s} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \overset{A}{k}_1^{i_1} * \overset{A}{k}_2^{i_2} * \dots * \overset{A}{k}_n^{i_n} \\ (0 \leq i \leq i_1 + i_2 + \dots + i_n \leq s \leq +\infty)$$

(\*) È chiaro che questa condizione è necessaria solo se  $m$  o qualche  $s_r$  è infinito.

rappresenta una serie multipla di composizione col peso  $\Lambda(y)$  <sup>(4)</sup>, risulta pure, quasi ovunque in  $E$  <sup>(2)</sup>,

$$[6] \quad |P(x, y, \lambda)| \leq |a_{0,0,\dots,0}| + \frac{1}{M} \sum_i^{0,s} |a_{i_1, i_2, \dots, i_n}| |\lambda_1 l_1 M|^{i_1} |\lambda_2 l_2 M|^{i_2} \dots |\lambda_n l_n M|^{i_n}$$

Se poi  $k_1(x, y)$  e  $k_2(x, y)$  sono due funzioni qualunque di  $[L]$  e  $d$  un pseudo confine superiore di  $|k_1(x, y) - k_2(x, y)|$  in  $E$  <sup>(2)</sup>, dalla relazione

$$\overset{\Lambda}{k_1}{}^r - \overset{\Lambda}{k_2}{}^r = (k_1 - k_2) * \overset{\Lambda}{k_2}{}^{r-1} + k_1 * (k_1 - k_2) * \overset{\Lambda}{k_1}{}^{r-2} + \dots + k_1{}^{r-1} * (k_1 - k_2)$$

di immediata verifica è valida anche per le funzioni non permutabili, maggiorando, risulta, quasi ovunque in  $E$ ,

$$[7] \quad \left| \overset{\Lambda}{k_1}{}^r - \overset{\Lambda}{k_2}{}^r \right| \leq d M^{r-1} S_r$$

avendo posto

$$S_1 = 1 \quad S_r = \sum_i^{0, r-1} |l_1|^{r-1-i} |l_2|^i \quad r > 1$$

3. - Ciò premesso dimostro che:

TEOREMA DI UNICITÀ. Se le funzioni

$$[8] \quad P_r(x, y, \lambda) = \sum_r^{0, s_r} a_{i_1 i_2 \dots i_n}^{(r)} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \overset{\Lambda}{k_1}{}^{i_1} * \overset{\Lambda}{k_2}{}^{i_2} * \dots * \overset{\Lambda}{k_n}{}^{i_n}$$

rappresentano serie multiple di composizione col peso  $\Lambda(y)$  delle  $n+1$  funzioni  $k_i(x, y)$  di  $[L]$ , l'equazione integrale non lineare <sup>(6)</sup>

$$[9] \quad a_1 Y(x, y; \lambda) + \sum_r^{1, m} \int_E A(\xi) P_r(x, \xi, \lambda) \overset{\Lambda}{Y}{}^r(\xi, y, \lambda) d\xi - k_0(x, y) = 0$$

con  $a_1 \neq 0$  (sotto condizioni abbastanza larghe e per  $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  in un conveniente e determinabile intorno dell'origine  $\lambda = 0$ ) ammette in  $[L]$ , una ed una sola soluzione.

Ritengo distinte due soluzioni quando in  $E$  <sup>(2)</sup> differiscono in un insieme di misura non nulla.



*Dimostrazione:* Dato che la serie multipla di composizione che figura al primo membro della [9] si ottiene dalla [4] mediante una trasformazione di VOLTERRA (\*) estesa, e siccome nell'origine  $z=z_0=z_1=$   
 $= \dots = z_n = 0$  è  $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = a_1 \neq 0$  l'equazione

$$[9'] \quad F(z, z_0, z_1, \dots, z_n) = 0$$

si trova nelle condizioni richieste per applicare il teorema fondamentale di VOLTERRA sulle equazioni integrali già esteso nel caso attuale nella memoria citata in [5] (?). Ne consegue, a norma del ricordato teorema, che la [8], per  $|\lambda| = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|$  convenientemente piccolo, ammette in [L] soluzione, soluzione che si ottiene sostituendo, nella funzione ottenuta risolvendo la [9'] rispetto alla  $z$ , al posto delle  $z_1, z_2, \dots, z_n$  rispettivamente le funzioni  $k_1(x, y), k_2(x, y), \dots, k_n(x, y)$  e considerando i loro prodotti e le loro potenze come prodotti e potenze di composizione col peso  $\Lambda(y)$ . Affermo che questa soluzione in [L] è unica.

4. - Esamino in un primo tempo, il caso abbastanza generale che le  $P_r(x, y, \lambda)$  siano nulle nell'origine  $\lambda = 0$  (\*) sicchè la funzione  $\sum_r^{1, m} P_r \cdot Y^r$ , che figura al primo membro della [9], oltre che a risultare olomorfe nelle  $\lambda_r$  si annulla per  $\lambda = 0$ .

So ora, per assurda ipotesi, la [9] ammettesse in [L] due soluzioni distinte  $Y_1(x, y)$  e  $Y_2(x, y)$  lo pseudo estremo superiore (5)  $d$  della funzione  $|Y_1 - Y_2|$  in  $E^{(2)}$  risulterebbe positivo e finito, e si avrebbe

$$[10] \quad |a_1| |Y_1 - Y_2| \leq \sum_r^{1, m} |P_r * (\bar{Y}_1^r - \bar{Y}_2^r)|$$

e la serie differenza  $\sum_r^{1, m} P_r * (\bar{Y}_1^r - \bar{Y}_2^r)$  risulterebbe anch'essa olomorfa nelle  $\lambda_r$  e nulla nell'origine  $\lambda = 0$ .

(\*) È chiaro che le  $P_r(x, y, \lambda)$  si annullano per  $\lambda = 0$  se e solo se i coefficienti  $a_{00\dots 0}^{(r)}$  sono nulli, ossia se nelle serie  $P_r(x, y, \lambda)$  è sempre  $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n \geq 1$ , sicchè i sommatori che figurano nelle [8] andranno estesi da 1 a  $s_r$ , anzichè da 0 a  $s_r$ .

Conseguirebbe allora che prefissato ad arbitrio un numero positivo  $\delta < d$ , in un intorno completo e sufficientemente piccolo di  $\lambda=0$ , e quasi ovunque in  $E^{(2)}$ , sarebbe

$$\sum_r^{1, m} |P_{r,*} (\overset{\Lambda}{Y}_1^r - \overset{\Lambda}{Y}_2^r)| \leq |a_1| \delta$$

e quindi per la [10]

$$|Y_1 - Y_2| < \delta < d$$

quasi ovunque in  $E^{(2)}$ , il che è assurdo, in quanto si è supposto che lo pseudo esterno superiore di  $|Y_1 - Y_2|$  in  $E^{(2)}$  fosse  $d > \delta$ . Si conclude che:

*Se tutti i coefficienti  $a_{00}^{(r)} \dots 0$  sono nulli l'equazione integrale non lineare [9], nelle ipotesi abbastanza generali di cui alle lettere a), b), ... g) e per  $|\lambda|$  convenientemente piccolo, ammette nella classe [l] una ed una sola soluzione.*

In particolare l'equazione integrale omogenea

$$a_1 Y + \sum_r^{1, m} P_{r,*} \overset{\Lambda}{Y}^r = 0$$

ammette, nella classe [l] una sola soluzione o precisamente quella quasi ovunque nulla in  $E^{(2)}$ .

OSSERVAZIONE: È manifesto che, se il termine noto  $k_0$  è una funzione pseudo limitata della sola  $x$  in  $E$ , le soluzioni della [9] andranno cercate nella classe delle funzioni della sola  $x$ , pseudo limitate in  $E$  e permutabili con le  $k_r(x, y)$  rispetto al peso  $\Lambda(y)$ , ed in questa classe, vale il teorema di unicità pocanzi dimostrato.

5. - Nell'eventualità precedentemente esclusa, che non tutte le  $P_r(x, y; \lambda)$  siano nulle per  $\lambda=0$  riesco a dimostrare il teorema di unicità non in [l] ma nella classe delle funzioni equi-pseudo limitate da un prefissato numero positivo  $\bar{l}$  e ciò purchè sia soddisfatta la maggioranza

$$h) \quad |a_1| > \sum_r^{1, m} r |a_{00}^{(r)} \dots 0| M^r \bar{l}^{r-1}.$$

Infatti anche se qualche coefficiente  $a_{00\dots 0}^{(r)}$  è  $\neq 0$ , se la [9] ammettesse due soluzioni distinte  $Y_1$  e  $Y_2$  di [1] la differenza  $\sum_r^{1,m} P_{r,*} (\overset{\Delta}{Y}_1^r - \overset{\Delta}{Y}_2^r)$  rappresenterebbe ancora, nell'intorno completo dell'origine  $\lambda = 0$ , e quasi ovunque in  $E^{(2)}$ , una funzione olomorfa delle  $\lambda_r$ . Ma mentre al n. 4 questa differenza era infinitesima con  $|\lambda|$  ora essa (che è una serie multipla delle  $\lambda_r$ , uniformemente ed assolutamente convergente nell'intorno di  $\lambda = 0$ ) tenderebbe uniformemente a  $\sum_r^{1,m} a_{00\dots 0}^{(r)} * (\overset{\Delta}{Y}_1^r - \overset{\Delta}{Y}_2^r)$  per  $\lambda \rightarrow 0$ . Pertanto, prefissato ad arbitrio un numero positivo  $\varepsilon$ , comunque piccolo, esisterebbe in corrispondenza un intorno completo e sufficientemente ristretto dell'origine  $\lambda = 0$ , e sia  $J_\varepsilon$ , tale che per  $\lambda$  in  $J_\varepsilon$  e quasi ovunque in  $E^{(2)}$ , risulterebbe

$$[11] \quad \sum_r^{1,m} |P_{r,*} (\overset{\Delta}{Y}_1^r - \overset{\Delta}{Y}_2^r)| < \sum_r^{1,m} |a_{00\dots 0}^{(r)} * (\overset{\Delta}{Y}_1^r - \overset{\Delta}{Y}_2^r)| + \varepsilon.$$

Ma per la [7], e sempre rappresentando  $d$  lo pseudo estremo superiore di  $|Y_1 - Y_2|$  in  $E^{(2)}$ , e

$$[12] \quad \left| \overset{\Delta}{Y}_1^r - \overset{\Delta}{Y}_2^r \right| \leq r d (M\bar{l})^{r-1}$$

dove  $\bar{l}$  è il prefissato comune modulo di limitatezza delle eventuali soluzioni  $Y$  della [10]. Pertanto maggiorando il secondo membro della [10] con la [11] e la [12] risulterebbe, quasi ovunque in  $E^{(2)}$ , e per  $\lambda$  contenuto in  $J_\varepsilon$

$$|a_1| |Y_1 - Y_2| \leq d \sum_r^{1,m} r |a_{00\dots 0}^{(r)}| M^r l^{r-1}$$

e quindi

$$|Y_1 - Y_2| \leq \frac{\sum_r^{1,m} r |a_{00\dots 0}^{(r)}| M^r l^{r-1}}{|a_1|} d$$

il che, tenuta presente la condizione  $h$ ), è assurdo. Si conclude che:

*Nell'eventualità che non tutti i coefficienti  $a_{00\dots 0}^{(r)}$  delle [8] siano nulli, la [9] - una volta soddisfatte le condizioni a) ... h) - ammette,*

nella classe delle funzioni equi pseudo limitate dal numero  $\bar{l} > 0$  e per  $|\lambda|$  sufficientemente piccolo una ed una sola soluzione.

Vale anche in questo caso l'osservazione fatta alla fine del n. 4.

6. - Le deduzioni di cui sopra ed altre ancora si potrebbero ottenere considerando l'equazione (1) come una trasformazione funzionale di insieme  $[L]$  e di coinsieme contenuto in  $[L]$ . Ma di ciò mi occuperò in una nota successiva.

(<sup>1</sup>) Una funzione  $f(x, y)$  si dirà col PICONI pseudo limitata in un insieme  $E$  se è ivi quasi continua secondo TONELLI e se esiste un numero positivo  $L < +\infty$  tale che risulti, quasi ovunque in  $E$ ,  $|f(x, y)| < L$ . Vedi: M. PICONI, *Fondamenti analisi funzionale lineare*, libreria dell'Università di Roma, 1943, pag. 200.

(<sup>2</sup>) Ricordo che per prodotto di composizione col peso  $A(y)$ , sommabile in  $E$ , di due funzioni  $f(x, y)$  e  $\varphi(x, y)$ , pseudo limitate in  $E$  (<sup>2</sup>), intendo l'espressione  $\int_E A(\xi) f(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi$  che altrove ho rappresentato col simbolo  $(f * \varphi)_A$ .

Nell'ipotesi poste l'integrale ora scritto ha senso. Se risulta  $(f * \varphi) = (\varphi * f)_A$  le due funzioni si diranno permutabili fra loro col peso  $A(y)$ . Ciò posto si definisce il prodotto (associativo) di composizione di più funzioni e quindi, con la posizione  $f^r = (f^{r-1} * f)_A = (f * f^{r-1})_A$  ( $r > 1$ ) la potenza di composizione col peso  $A(y)$  ed infine i polinomi e le serie di composizione col peso  $A(y)$  che risultano tutte funzioni di  $[L]$ . Per maggiori ragguagli vedi la mia memoria di cui in (<sup>5</sup>).

(<sup>3</sup>) Cioè un numero  $L_s$  tale che risulti quasi ovunque in  $E$  (<sup>2</sup>)  $|K_s(x, y)| \leq L_s$ .

(<sup>4</sup>) Dove il sommatorio va esteso a tutte le permutazioni con ripetizioni degli interi non negativi  $i_1, i_2, \dots, i_n$  la cui somma  $i$  è compresa tra 0 e  $s$ .

Osservo inoltre che, detto  $R = \lim'' |a_{i_1 i_2 \dots i_n}| \frac{1}{i_1 + i_2 + \dots + i_n}$  il raggio ristretto

di convergenza della serie  $\sum_i^{0, s} a_{i_1 i_2 \dots i_n} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n}$ , la  $P(x, y, \lambda)$  è una funzione

olomorfa delle  $\lambda_r$  nell'intorno  $\lambda_r \leq \frac{R}{L_r M}$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) dell'origine  $\lambda=0$ .

(<sup>5</sup>) Che si risolve con le considerazioni da me fatte nella memoria *Teoria della composizione col peso A(y) sommabile nella classe delle funzioni pseudo limitate ecc.* negli «Atti del congresso della Soc. Italiana Progresso Scienze», del 1949 a Roma. In corso di stampa.

(<sup>6</sup>) V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Leçons sur la composition ecc.* Gauthier-Villars, Paris, pag. 24 e seg.

(<sup>7</sup>) In questa memoria il teorema in questione è stato esteso al caso della composizione col peso  $A(y)$  di funzioni di classe  $[L]$  ed alla composizione ordinaria delle funzioni di classe  $[L_\lambda]$ , ossia del tipo  $A(y) k(x, y)$ , con  $A(y)$  somma-

bile in  $E$  ed  $k(x, y)$  in  $[l]$ . Confrontare anche: G. PLATONE, *Sul passaggio di certe equazioni algebrico funzionali a quelle integro-funzionali ecc.* in « Acta, Pontificia Academia Scientiarum », Vol. IX, n. 22, 1946.

(<sup>8</sup>) Per pseudo-estremo superiore di una funzione  $f(x, y)$  in un insieme  $C$  di misura non nulla su  $S_{2n}^{x, y}$  intendo l'estremo inferiore  $d$  dei numeri  $l$  per cui avvengono, quasi ovunque in  $C$ ,  $|f(x, y)| \leq l$ . Esso è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1)  $|f(x, y)| \leq d$ , quasi ovunque in  $C$ .

2) Prefissato ad arbitrio un numero positivo  $\delta < d$  risulta positiva la misura dell'insieme  $U(|f|, d - \delta)$  dei punti di  $C$  in cui è  $|f(x, y)| > d - \delta$ .

NOTE ANATOMO-FISIOLOGICHE  
SULLE VIE DI DRENAGGIO  
DELLA LINFA UTERINA (\*)

MARIO BONI ED EMANUELE LAURIGELLA

*SYMMARIUM.* — Auctores lymphatica uteri vasa investigarunt, praesertim quod ad eorum physiologiam attinet, determinantes qua ratione operentur viae quibus lymphae, ab unaquaque uteri regione proveniens, defluit.

Dopo le fondamentali ricerche di MASCAGNI, una numerosa schiera di studiosi (CRUIKSHANK, HAASE, CRUVEILHIER, LUCAS CHAMPIONNIÈRE, SAPPEY, MORAUX, BRUHNS, CUNÉO e MARCILLE, BARTELS, ecc.) ha cercato di precisare il decorso e la posizione dei tronchi linfatici uterini e dei linfonodi corrispondenti.

Recentemente LEVEUF e GODARD e CANELA LAZARO, della scuola del ROUVIÈRE, hanno riesaminato i dati degli AA. precedenti mediante indagini condotte con criterio prevalentemente clinico.

Di fronte all'importanza dell'argomento e alle incertezze ancora esistenti su alcuni aspetti del problema, abbiamo ritenuto utile intraprendere una serie di ricerche con un indirizzo non puramente morfologico, ma principalmente funzionale.

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Dante De Blasi il 3 agosto 1950.

Il lavoro è stato eseguito in stretta collaborazione nell'Istituto di Anatomia Umana Normale dell'Università di Roma, diretto dal Prof. Vincenzo Virno, e nell'Istituto di Clinica Ostetrica e Ginecologica della medesima Università, diretto dal Prof. Luigi Cattaneo.

Le nostre indagini sono state condotte su feti a termine che non rivelavano apparentemente vizi o malformazioni congenite.

Quale massa d'iniezione è stata utilizzata la massa modificata di GEROTA, accuratamente filtrata al momento dell'uso.

Nel tentativo di raggiungere una migliore documentazione sono state effettuate anche iniezioni a carattere orientativo allo scopo di eliminare ogni possibile causa di errore da imperfezione di tecnica: è noto infatti che le manualità tecniche rivestono un'importanza preponderante nella riuscita di esperimenti sulle vie linfatiche.

Dalla statistica riportata sono state escluse tutte quelle iniezioni nelle quali si erano verificati scollamenti del peritoneo, stravasi e diffusioni, nella parete dell'organo, della massa iniettata.

Per poter seguire il comportamento della linfa nelle differenti zone dell'utero, abbiamo effettuato iniezioni separatamente sul fondo, nella metà superiore del corpo, nella metà inferiore del corpo (comprendendo in questi casi inevitabilmente anche la parte più alta del collo) e nella porzione del collo immediatamente sopra l'inserzione vaginale.

Prima di discutere i risultati è necessario premettere due osservazioni. La prima riguarda l'attenzione particolare che si deve portare per riconoscere i vasi linfatici. Noi abbiamo preso in considerazione infatti solamente quei vasi che presentavano l'aspetto classico dei linfatici e che erano colorati insieme ai loro linfonodi (le cosiddette *vie con iniezione di linfonodi*) e quelli in cui la colorazione si arrestava in tutta prossimità dei linfonodi (le cosiddette *vie abbozzate*); inoltre abbiamo cercato di distinguere i linfonodi *veri* da quelli *falsi* nel senso di OTTAVIANI.

La seconda osservazione, che a nostro parere riveste un'importanza fondamentale e spiega in parte le incertezze riscontrate nella letteratura, riguarda la validità di trasferire con rigido schematismo alla donna adulta le conclusioni desunte da esperimenti condotti sulla neonata. Infatti le notevoli differenze che esistono nel volume o nei rapporti reciproci dei vari organi addominali e pelvici tra la neonata e l'adulta, necessariamente si ripercuotono sulla disposizione del sistema linfatico.

| Sedo dell'iniezione   | Numero delle iniezioni effettuate | Via di drenaggio latero-uterina |        | Peduncolo iliaco-esterno |                         | Peduncolo ipogastrico |                         | Peduncolo utero-ovarico |                         |
|---|-----------------------------------|---------------------------------|--------|--------------------------|-------------------------|-----------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
|   |                                   | abbozzato                       | intera | abbozzato                | con iniez. di linfonodi | abbozzato             | con iniez. di linfonodi | abbozzato               | con iniez. di linfonodi |
| Fondo . . . . .   | 7                                 | 4                               | 1      | —                        | —                       | —                     | —                       | —                       | 7                       |
| Metà superiore del corpo . .                                    | 12                                | 1                               | 11     | 6                        | 5                       | 3                     | 3                       | 5                       | 7                       |
| Metà inferiore del corpo e parte alta del collo                 | 15                                | —                               | 15     | 3                        | 12                      | 5                     | 6                       | 6                       | —                       |
| Porzione del collo subito sopra l'inserzione vaginale . . . . . | 8                                 | —                               | 8      | 1                        | 7                       | 3                     | 3                       | —                       | —                       |

Nella tabella vengono riportati i casi relativi a 42 iniezioni risultate tecnicamente perfette tra le numerose effettuate.

È necessario anzitutto precisare il significato della *via di drenaggio latero-uterina*. Questa è rappresentata da alcuni vasi che, originatisi sotto il fondo uterino, discendono lungo i margini laterali dell'organo portandosi in basso fin poco al di sopra dell'inserzione vaginale; di qui essi si inflettono lateralmente, e seguendo i vasi uterini, arrivano fin sopra l'uretere. Questi vasi raccolgono, come risulta dallo schema, la maggior parte della linfa proveniente dall'organo.

Questa via già disegnata in una delle tavole di MASCAGNI, in seguito era stata segnalata dal POIRIER, LEVREUR e GODARD, ROUVIÈRE, CANELA LAZARO, come un semplice sistema anastomotico tra corpo e collo, mentre a nostro avviso dal punto di vista funzionale essa rappresenta il collettore principale della linfa.

Dopo essere entrati in rapporto con l'uretere i vasi della via di drenaggio latero-uterina possono portarsi verso le linfoghiandole iliache esterne (peduncolo iliaco esterno) o verso le linfoghiandole ipogastriche (peduncolo ipogastrico).



Per quanto riguarda le vie seguite dalla linfa per raggiungere le stazioni linfonodali molti AA. descrivono tre peduncoli per il corpo (peduncolo principale utero-ovarico o lombare, peduncolo accessorio trasversale o iliaco esterno, peduncolo anteriore o del legamento rotondo) e tre peduncoli per il collo (peduncolo anteriore o iliaco esterno, peduncolo ipogastrico o retro-ureterale, peduncolo posteriore o sacrale).

È più esatto suddividere le vie linfatiche dell'utero in peduncoli principali e peduncoli accessori.

I *peduncoli principali* sono:

1) il *peduncolo lombare* o *via utero-ovarica*, i cui vasi dopo essere decorsi nello spessore della mesosalpinge salgono in alto per raggiungere il polo inferiore del rene e terminare quindi nelle linfoghiandole lomboaortiche;

2) il *peduncolo iliaco esterno* che, facendo seguito alla via di drenaggio latero-uterina, passa al di sopra dell'arteria ombelicale e raggiunge il gruppo delle linfoghiandole iliache esterne. In queste linfoghiandole il primo linfonodo raggiunto (linfonodo chiamato « ganglio principale » da LEVEUF e GODARD) nei nostri casi è posto al davanti dell'arteria iliaca esterna in 5 casi su 24, in posizione prevenosa in 7 casi su 24, medialmente alla vena iliaca esterna in 4 casi su 24, ed in posizione otturatoria, cioè sottovenosa, in 8 casi su 24.

3) il *peduncolo ipogastrico*, formato da vasellini che passando il più delle volte posteriormente all'uretere e decorrendo lungo le vene uterine raggiungono i linfonodi ipogastrici.

I *peduncoli accessori* sono rappresentati da peduncoli non costanti e descritti solo da una parte degli AA.

Di tali peduncoli è stato messo in evidenza nelle nostre esperienze soltanto il *peduncolo posteriore o sacrale* che è risultato iniettato qualche volta anche fino alle linfoghiandole sacrali laterali o a quelle del promontorio. Le nostre esperienze non hanno dimostrato l'esistenza degli altri due peduncoli (*peduncolo accessorio trasversale o iliaco esterno o laterale del corpo* e *peduncolo del legamento rotondo*) descritti in alcuni casi dai precedenti AA.

In base al deflusso della linfa l'utero può essere diviso in due zone: parte alta (corrispondente al fondo e alla parte alta del corpo) e parte bassa (corrispondente alla parte bassa del corpo e al collo).

La linfa che proviene dalla parte alta segue principalmente la via utero-ovarica o collateralmente la via di drenaggio latero-uterina; quella della parte bassa segue principalmente la via di drenaggio latero-uterina e secondariamente la via utero-ovarica.

Questo fatto è dimostrato dal seguente schema, ricavabile dalla tabella:

a) a livello del fondo la linfa segue sempre la via utero-ovarica, ma può scendere lungo la via di drenaggio latero-uterina che risulta iniettata per intero nel 14% dei casi, e abbozzata nel 59%;

b) a livello della metà superiore del corpo la linfa può seguire la via utero-ovarica, raggiungendo i linfonodi lombo-aortici nel 58% dei casi, mentre la via resta semplicemente abbozzata nel 42% dei casi. La via di drenaggio latero-uterina è riempita a questo livello per intero nel 92% dei casi e abbozzata nell'8%. Il peduncolo iliaco esterno è iniettato completamente nel 42% dei casi e abbozzato nel 50%; il peduncolo ipogastrico è iniettato completamente nel 25% dei casi, ed è abbozzato nel 25%.

c) a livello della metà inferiore del corpo e della parte alta del collo la via utero-ovarica risulta abbozzata nel 40% dei casi e mai riempita completamente, mentre la via di drenaggio latero-uterina è sempre iniettata per intero. Il peduncolo iliaco esterno è iniettato fino ai linfonodi nell'80% dei casi e abbozzato nel 20%. Il peduncolo ipogastrico è iniettato per intero nel 40% dei casi e abbozzato nel 33% dei casi;

d) a livello del collo la linfa non si è mai diffusa nel peduncolo utero-ovarico, ma ha sempre seguito la via latero-uterina. Il peduncolo iliaco esterno è iniettato per intero nell'88% dei casi e abbozzato nel 12%; il peduncolo ipogastrico è riempito totalmente nel 38% dei casi e abbozzato nel 38%.

È da notare infine che lungo il decorso dei vasi linfatici è possibile incontrare piccoli linfonodi chiamati intercalari (da ROUVIÈRE) o interruttori (da STAHR).

Un linfonodo intercalare era già stato visto da alcuni AA. (ganglio iuxta-cervicale di LUCAS CHAMPIONNIÈRE, ganglio utero-vaginale di SAPPEY ecc.) ma altri AA. ad esempio TESTUT-LATARJET ne hanno negata l'esistenza sostenendo che al massimo si trattava in quei punti di gomitoli di vasi linfatici.

Nelle nostre iniezioni abbiamo trovato in cinque casi un esempio di questi noduli intercalari: un piccolo linfonodo in posizione iuxta-ureterale. In altri due casi abbiamo osservato una formazione costituita da un piccolo gomitollo di vasi linfatici, facilmente distinguibile, all'aspetto esterno, da un linfonodo.

Pur non essendo in grado di precisare il significato di tali gomitoli o formazioni plessiformi noi riteniamo che essi siano formazioni differenti e non confondibili con il linfonodo iuxta-ureterale il quale, come è stato detto, è presente con relativa frequenza.

---

Per la Bibliografia vedi:

BONI M. e LAURICELLA E., *Arch. di Ostetricia e Ginecologia*. Vol. 55, fasc. 5, anno 1950.

## CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO DEL FONDO MOBILE DI UN CORSO D'ACQUA (\*)

(Con due figure)

STEFANO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Perpenso aequilibrio unius particulae in fluvii alveo mobili, Auctor determinat quam aequatione differentiali, quam autem aequatione finita exprimi possit figura, quam exhibet imus alveus, qui a variis hydraulicis et mechanicis viribus sollicitetur.

Elencare le varie circostanze dalle quali dipende l'erosione di un alveo non è semplice. Poche ricerche sistematiche esistono in questo campo e la maggior parte si riferiscono a casi particolari.

Il VERONESE<sup>(1)</sup>, nella premessa ad alcune sue esperienze, ha espresso il convincimento che sull'escavo dovuto ad erosione influiscano le condizioni idrauliche determinanti il flusso dell'acqua ed il peso specifico del materiale di fondo, e che esso prevalentemente prenda origine dagli urti e dalla conseguente formazione di vortici i quali producono sia impulsi verticali, di sollevamento, sia orizzontali, di trascinamento. In proposito è mia opinione che la intuizione del VERONESE circa la formazione di vortici trovi la sua esauriente spiegazione nella teoria dello strato limite, che è lo strato nel quale, nel caso idraulico, a partire dalla parete di fondo, il gradiente della velocità, preso normalmente ad essa, è molto grande, ed il cui spessore è determinabile con la legge di Blasius.

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini il 12 ottobre 1950.

(1) A. VERONESE, *Erosioni di fondo a valle di uno scarico*. «Annali LL. PP.», F. 9, 1937.

È noto infatti, dalla teoria svolta dal PRANDTL<sup>(1)</sup>, che nell'interno dello strato limite, ad una certa distanza verso valle, dipendente dalla natura e forma della parete investita dalla corrente, questa subisce una inversione. Invero, poichè lo strato di liquido infimo aderisce alla parete, allora lo strato immediatamente superiore, trattenuto da quello sottostante, rallenta e, diminuendo la sua velocità di avanzamento, provoca più a valle, in base al principio di BERNOULLI, un aumento di pressione. A questo aumento segue, allora un richiamo di fluido verso la regione di minore pressione, formando così una controcorrente verso monte. Questa controcorrente, accoppiandosi con quella principale, dà luogo alla formazione del vortice, la cui energia rotatoria, assorbita a spese di quella cinetica posseduta dalla corrente principale, fornisce il lavoro necessario all'escavo; il vortice opera così a modo di macchina escavatrice.

Il fenomeno dell'erosione continuerà fintanto che il fondo non assume quella tale configurazione, la quale consenta l'equilibrio tra le forze dovute alla natura dissipativa dell'attrito, alla viscosità e alle forze di massa.

Nel presente lavoro, basandomi sull'ipotesi di un siffatto equilibrio e, compatibilmente con le condizioni che si verificano nella pratica, schematizzando al massimo il problema, al fine di evitare gravi complicazioni analitiche, sono riuscito a determinare ed integrare l'equazione che permette di tracciare la configurazione assunta dall'escavo, in funzione delle varie caratteristiche della corrente e del materiale dell'alveo.

Lo schema adottato è naturalmente suscettibile di perfezionamenti, in ogni modo mi è sembrato già abbastanza interessante esibire questo primo saggio a carattere esclusivamente teorico, del quale, in una successiva nota, potrà darsi la verifica attraverso apposite esperienze attualmente in preparazione presso il Laboratorio di Idraulica dell'Università di Roma.

§ 1. - EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PROFILO DI EQUILIBRIO. - Si tratti di studiare il fenomeno dell'erosione quando il moto dell'acqua sia in condizioni di regime, per il quale cioè non si veri-

---

(1) PRANDTL & TIELTIENS, « *Hydro* » und *Aeromechanik*, II Bd, pag. 80.

fichino più variazioni, né di livelli, né di velocità. Immagineremo il primo strato del fondo dell'alveo, quello immediatamente a contatto con la corrente, come costituito di particelle disposte a formare, da monte a valle, una successione di cilindri ad asse orizzontale, di diametro  $\mathcal{D}$ , eguale a quello medio che le singole particelle hanno nella realtà, e lunghezza eguale alla larghezza dell'alveo considerato. Lo schema, valido per tutto il corso d'acqua, varrà anche per il tratto

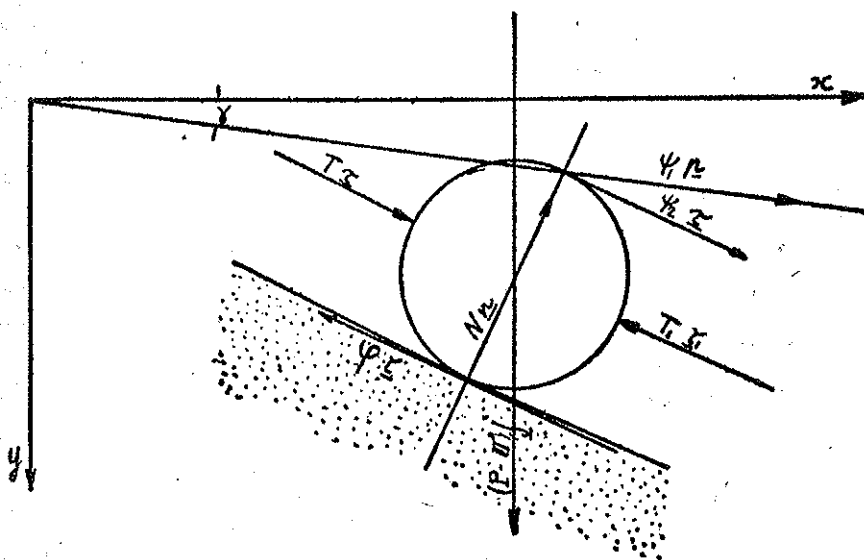


FIG. 1.

nel quale si verifica l'escavo, dove i grani del materiale di fondo si considereranno dunque come solidi adagiati sulle generatrici del cilindroide costituente lo scavo stesso. Lo schema indicato permetterà di concepire il moto del materiale come un moto piano, almeno nel piano longitudinale verticale, della mezzeria dell'alveo.

Supporremo anche che nessuna azione dei materiali leganti, di natura in prevalenza argillosa, venga svolta in modo da modificare le conclusioni del presente studio sull'erosione, poichè essi certamente vengono eliminati dall'azione dilavatrice della corrente, prima che si inizi la formazione dell'escavo. Così i cilindri, nei quali si è schematizzato il fondo, si possono considerare appoggiati l'uno all'altro

e capaci di muoversi strisciando e rotolando rispetto allo strato di fondo immediatamente sottostante a quello in movimento.

Siano al solito  $\rho_a, \rho_s$  rispettivamente la massa specifica dell'acqua e del materiale solido di fondo; siano  $\underline{j}, \underline{\tau}, \underline{n}$ , rispettivamente i versori della verticale (rivolta verso il basso), della tangente (nella figura diretta da sinistra verso destra), e della normale (diretta dal fondo verso la corrente), questi ultimi due versori, tangente e normale, appartengono alla linea  $s$  che rappresenta il profilo del fondo in equilibrio con le azioni della corrente. Infine sia  $\underline{p}$  il versore della linea che rappresenta il pelo libero dell'acqua. Riferendosi alla disposizione del sistema di forze raffigurato nella fig. 1, si dovranno prendere in considerazione le seguenti grandezze:

a) La forza di trascinamento, che si ritiene eguale alla somma vettoriale delle due seguenti azioni distinte: quella derivante dal moto dell'acqua e che risulta agire sul fondo anche in assenza dell'escavo e quella derivante dal moto dell'acqua nello spessore dello strato limite, nel quale si manifestano le azioni della viscosità, in immediato contatto con le singole particelle delle quali si ricerca la legge di equilibrio. Sarà cioè:

$$[1] \quad \underline{\psi} = \psi_1 \underline{p} + \psi_2 \underline{\tau}$$

nella quale  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono rispettivamente le intensità dei due vettori che rappresentano le due distinte azioni, ambedue quantità costanti. La prima azione di trascinamento, quella di intensità  $\psi_1$ , potrà ritenersi proporzionale alla pendenza piezometrica del corso d'acqua: questa legge, di carattere *macroscopico*, si deduce dalle equazioni globali del movimento (1). Perciò la  $\psi_1$ , che eguaglia il prodotto  $\psi_1 \underline{p}$ , è da ritenersi nel nostro caso costante in media, prescindendo quindi dalle variazioni di pelo libero che possono riscontrarsi nel corso d'acqua allorchè si forma lo scavo. La seconda azione di trascinamento, quella dovuta alla viscosità, può rappresentarsi mediante la seguente espressione:

$$\underline{\psi}_2 = \int_{\sigma} \mu \frac{dV}{dn} d\sigma \cdot \underline{t} = \psi_2 \underline{\tau}$$

(1) G. DI RICCO, *Lezioni di Idraulica*.

nella quale con  $\sigma$  si è indicata la superficie della particella solida rivolta verso la corrente e perciò lambita dallo strato limite, nel quale l'acqua ha la velocità  $V$ , alla distanza  $n$ , presa normale alla  $\sigma$ , e con  $\underline{t}$  il versore della tangente in un generico punto di  $\sigma$ . Il terzo membro della precedente espressione si potrà scrivere considerando che la media dei vettori diretti secondo  $\underline{t}$  nella  $\sigma$  può ritenersi diretto secondo il versore  $\underline{\tau}$ , della tangente al profilo di equilibrio  $s$ , nel punto ove la particella si appoggia al fondo.

In base a quanto si è esposto, si deve concludere che il valore della azione di trascinamento  $\underline{\psi}$  dipende sia dalla velocità della corrente e perciò dalla scala del modello usato per le esperienze, sia dallo spessore dello strato limite e perciò dal numero di Reynolds che si riesce a realizzare nel modello stesso.

b) Siano ancora  $T$  e  $T_1$  le forze dovute alle pressioni esercitate dai cilindri contigui, rispettivamente a monte e a valle, su quello considerato. Tali forze dipendono ovviamente dalle condizioni secondo le quali avviene il primo urto della corrente sull'alveo mobile (efflusso da bocca a battente, da stramazzo, ecc.). Ad ogni modo l'urto dell'acqua da sempre luogo alla trasformazione dell'energia cinetica in energia di pressione, perciò la pressione iniziale, esercitata sul fondo dell'alveo, potrà ritenersi dipendente dalla pressione di ristagno che compete alla corrente.

c) Siano  $P$  e  $\Pi$  rispettivamente il peso e la spinta idrostatica della particella in esame; sia  $N$  la reazione perpendicolare all'appoggio, azione esercitata dal fondo contro la particella.

d) Infine siano presenti nello studio dell'equilibrio le azioni dovute agli attriti al moto: la forza  $\varphi$ , esercitata dal fondo sulla particella, la quale si oppone al moto di strisciamento, e la coppia  $M_a = N\epsilon$ , di attrito al rotolamento, nella quale  $\epsilon$  è talvolta chiamata « spostamento del contatto ».

Le condizioni alle quali soddisfa l'equilibrio della particella si ottengono in primo luogo annullando il momento risultante del sistema di forze rispetto al punto di appoggio, così si ha:

$$[2] \quad \mathcal{D}(\psi_1 \cos \hat{p} \underline{\tau} + \psi_2) + \frac{\mathcal{D}}{2}(P - \Pi) \cos \hat{j} \underline{\tau} + N\epsilon = 0$$



A questa relazione dovrà aggiungersi l'equazione vettoriale che esprime l'annullarsi del risultante del sistema di forze:

$$[3] \quad \psi_1 \underline{p} + (\psi_2 - \varphi) \underline{\tau} + (T \underline{\tau} - T_1 \underline{\tau}_1) + (P - \Pi) \underline{j} + N \underline{n} = 0$$

Assumeremo l'asse delle ascisse  $x$  orizzontale e quello delle ordinate  $y$  verticale e diretto verso il basso. Considerando escavi poco profondi ed ad andamento molto graduale, potrà ritenersi il rapporto  $dy/dx$  quantità piccolissima rispetto all'unità, sicchè il quadrato di esso sia da considerare quantità trascurabile. Allora, dalla espressione dell'elemento lineare:  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , risulta:

$$[4] \quad \frac{ds}{dx} = \left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \dots \cong 1$$

mentre la curvatura del profilo di equilibrio,  $1/R$ , tenendo conto di quanto ora si è detto, è data da:

$$[5] \quad \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} : \left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2} \cong \frac{d^2y}{dx^2}$$

Inoltre la variazione delle forze di compressione può scriversi:

$$[6] \quad T \underline{\tau} - T_1 \underline{\tau}_1 = -\Delta(T \underline{\tau}) = - \left\{ \Delta s \frac{d(T \underline{\tau})}{ds} \right\} = - \left\{ \Delta s \frac{dT}{ds} \underline{\tau} + \Delta s \frac{T}{R} \underline{n} \right\}$$

Sostituendo poi all'elemento di linea  $\Delta s$ , per la sua piccolezza, la dimensione  $\mathcal{D}$  del diametro medio del materiale di fondo, e tenendo conto delle [4], [5] e [6] si ottiene, dalla [3]:

$$[7] \quad \psi_1 \underline{p} + (\psi_2 - \varphi) \underline{\tau} - \mathcal{D} \frac{dT}{dx} \underline{\tau} - \mathcal{D} T \frac{d^2y}{dx^2} \underline{n} + (P - \Pi) \underline{j} + N \underline{n} = 0$$

Per passare dall'equazione vettoriale ora scritta a quelle scalari è necessario eseguire i prodotti tra i versori delle direzioni lungo le quali agiscono le varie forze e quelli della tangente e della normale al profilo  $s$  di equilibrio del fondo. In questo calcolo, senza commettere apprezzabile errore, si confonderà il seno dell'angolo tra il pelo libero dell'acqua e l'orizzontale, con l'arco, indicato con  $\gamma$  nella figura 1. Allora dalla [7], proiettando dapprima sulla tangente e poi

sulla normale, si otterranno rispettivamente le due seguenti equazioni scalari:

$$[8] \quad \frac{dy}{dx} [\psi_1 \gamma + (P - \Pi)] - \mathcal{D} \frac{dT}{dx} + (\psi_1 + \psi_2 - \varphi) = 0$$

e

$$[9] \quad -\mathcal{D} T \frac{d^2 y}{dx^2} - \psi_1 \frac{dy}{dx} + [\psi_1 \gamma + N - (P - \Pi)] = 0$$

Mentre dalla [2] si ricava:

$$[10] \quad -\frac{\mathcal{D}}{\varepsilon} \left\{ \left( \psi_1 \gamma + \frac{P - \Pi}{2} \right) \frac{dy}{dx} + \psi_1 + \psi_2 \right\} = N$$

Eseguita la integrazione della [8], introducendovi la costante di integrazione  $C_0$ , si giunge alla seguente espressione:

$$[11] \quad \mathcal{D} T = (\psi_1 + \psi_2 - \varphi) x + [\psi_1 \gamma + (P - \Pi)] y + C_0$$

la quale con più semplici notazioni, si scrive anche:

$$[11a] \quad -\mathcal{D} T = Ax + By - C_0$$

Eliminando  $T$  ed  $N$  fra la [9], [10] e [11a], risulta:

$$[12] \quad (Ax + By - C_0) \frac{d^2 y}{dx^2} - \left\{ \psi_1 + \frac{\mathcal{D}}{\varepsilon} \left( \psi_1 \gamma + \frac{P - \Pi}{2} \right) \right\} \frac{dy}{dx} - \frac{\mathcal{D}}{\varepsilon} (\psi_1 + \psi_2) - (P - \Pi) + \psi_1 \gamma = 0$$

La quale, più semplicemente, con evidente significato dei nuovi simboli si scrive così:

$$[12a] \quad (Ax + By - C_0) \frac{d^2 y}{dx^2} + D \frac{dy}{dx} + F = 0$$

Che è l'equazione differenziale del profilo di equilibrio assunto dell'escavo.

§ 2. - INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PROFILO DI EQUILIBRIO. - Posto allora:

$$[13] \quad Ax + By - C_0 = \eta$$

la [12a] può esprimersi così:

$$[14] \quad \frac{d}{dx} \left( \eta \frac{d\eta}{dx} \right) + A^2 + (D - 2A) \frac{d\eta}{dx} - DA + FB = 0$$

da cui, integrando:

$$[15] \quad \eta \frac{d\eta}{dx} + (D - 2A)\eta + (A^2 - DA + FB)x - C_1 = 0$$

nella quale  $C_1$  rappresenta una costante integrazione. La [15], con più semplici notazioni, può scriversi:

$$[15a] \quad \eta \frac{d\eta}{dx} + H\eta + Kx - C_1 = 0$$

Assunte le nuove variabili  $z$  e  $\xi$  date da:

$$[16] \quad z = \frac{\eta}{\xi}; \quad \xi = Kx - C_1;$$

la [15a] diventa:

$$[17] \quad \frac{z dz}{z^2 + \frac{H}{K}z + \frac{1}{K}} = \frac{-d\xi}{\xi}$$

Ora esistono due tipi di soluzioni del problema in esame, a seconda che le radici  $z_1$  e  $z_2$  della espressione a denominatore del primo membro della [17], che è un polinomio di secondo grado in  $z$ , sono reali o complesse.

a) *Prima soluzione.*

Ammettiamo dapprima che le radici  $z_1$  e  $z_2$  sopra indicate siano reali; allora dalla [17], integrando, si ottiene la seguente espressione:

$$[18] \quad \xi(z) = \left\{ \frac{|z - z_1|}{|z_0 - z_1|} \right\}^{z_1/(z_2 - z_1)} \left\{ \frac{|z_0 - z_2|}{|z - z_2|} \right\}^{z_2/(z_2 - z_1)} \cdot \xi_0$$

da cui, per le [13] e [16], discendono:

$$[19] \quad x = \frac{1}{K} \{ \xi(z) + C_1 \}; \quad y = \frac{1}{B} \left\{ C_0 - \frac{A C_1}{K} + \xi(z) \left( z - \frac{A}{K} \right) \right\}$$

che insieme forniscono, tramite il parametro  $z$  e la funzione  $\xi(z)$  data dalla [18], la rappresentazione del profilo di equilibrio del fondo.

b) *Seconda soluzione.*

Se invece le radici  $z_1$  e  $z_2$  sono complesse, cioè date da:

$$[20] \quad z_1, z_2 = \frac{-H \pm i\sqrt{4K - H^2}}{2K} = a \mp ib,$$

allora, integrando la [17], si ottiene:

$$[21] \quad \xi(z) = \xi_0 e^{\left(\frac{a}{b}\right) \left( \operatorname{arctg} \frac{z_0 - a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{z - a}{b} \right)} \sqrt{\frac{(z_0 - a)^2 + b^2}{(z - a)^2 + b^2}}$$

la quale prende il posto della [18].

c) *Osservazione.*

Anzitutto si osservi che dalla prima delle [16], tenendo conto della [13], si ha:

$$[22] \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{B} \left( A + H - \frac{1}{z} \right)$$

che si annulla per il valore di  $z = z_+$ :

$$[23] \quad z_+ = \frac{-1}{A + H}$$

Dunque l'annullarsi della derivata  $\frac{dy}{dx}$  si verifica per un solo valore del parametro  $z = z_+$ , valore che dipende soltanto dalle grandezze fisiche del problema, come sono l'attrito, la viscosità, la dimensione dei grani, il loro peso specifico e non dipende affatto dalle condizioni estremali.

d) *Determinazione delle costanti di integrazione.*

Il profilo dell'escavo, quale risulta nella realtà, ha un andamento che può generalmente schematizzarsi con quello rappresentato nella figura 2. Così, riferendosi a tale rappresentazione, a partire dalla progressiva  $x=0$ , l'approfondimento dell'alveo dal valore iniziale nullo,  $y=0$ , cresce fino a raggiungere un valore massimo, di qui esso torna a diminuire fino a raggiungere, in un certo punto di ascissa  $x=l$ , la retta  $r$  che costituisce il fondo del canale prima dell'escavo.

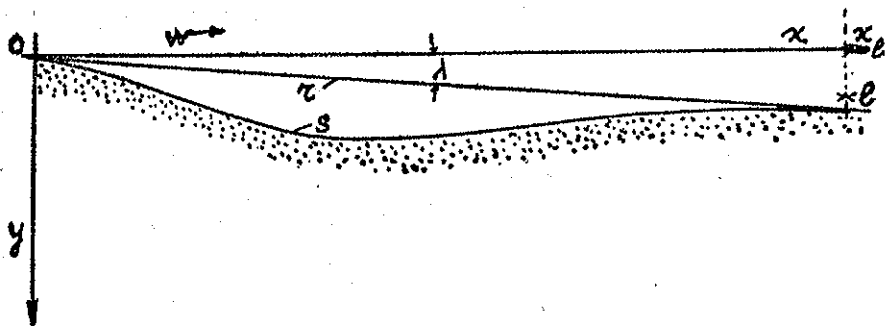


FIG. 2.

In questo punto sarà  $y=0$  se l'inclinazione iniziale,  $\lambda$ , del fondo rispetto all'orizzontale è molto piccola e lo scavo di lunghezza limitata, mentre nello stesso punto, secondo l'esperienza, il profilo risulta tangente alla linea  $r$ .

In questa ipotesi, dunque, di scavo di lunghezza limitata e piccola inclinazione iniziale del fondo, segue allora dalla seconda delle [16], per  $x=0$ :

$$[24] \quad \xi_0 = -C_1$$

mentre dalla seconda delle [19], ponendovi  $x=0$ ,  $y=0$ , tenendo conto della precedente relazione [24] e assunto  $z_0$  corrispondente ad  $x=0$ , si ha:

$$[25] \quad C_0 - C_1 z_0 = 0$$

sempre dalla seconda delle [16] per  $x=l$ ; segue, indicando con  $\xi_l$  il valore assunto da  $\xi$  in corrispondenza:

$$[26] \quad \xi_l + C_1 = Kl$$

siccome poi per  $x=l$  si deve avere  $\frac{dy}{dx} = \lambda$ , dove  $\lambda$  è l'inclinazione iniziale del fondo, allora dalla [22] segue:

$$[27] \quad \lambda = \frac{-1}{B} \left( A + H - \frac{1}{z_1} \right)$$

dove  $z_1$  è legata a  $\xi_1$  dalla [26] dalla funzionalità espressa da  $\xi = \xi(z)$  secondo la [18] o [21].

In conclusione il sistema di equazioni formato dalle [24], [25], [26], [27] cui si aggiungerà la [18] oppure la [21], a seconda che trattasi di soluzioni reali o complesse del polinomio di secondo grado in  $z$  a denominatore del primo membro della [17], stabilisce i legami intercorrenti tra le grandezze  $C_0, C_1; z_0, \xi_0, z_1, \xi_1$ , e sufficienti alla loro determinazione.

§ 3. - CRITICA DEI RISULTATI ANALITICI. - Dalla descrizione dell'andamento del profilo dell'escavo si nota che per inclinazioni del fondo trascurabili, cioè per  $\lambda \cong 0$ , in due punti di tale profilo si deve verificare l'annullarsi della derivata  $\frac{dy}{dx}$ , mentre per quanto si è detto nella osservazione del precedente paragrafo (lettera c), il valore del parametro  $z$  che rende nulla tale derivata è unico, dipendente dalle sole quantità fisiche del problema e non dalle sue condizioni estremali. Per soddisfare allora alle esigenze della rappresentazione del profilo in parola segue che la funzione  $\xi(z)$ , mediante la quale si esprime il legame esistente tra il parametro stesso  $z$  e la progressiva  $x$ , dovrà risultare una funzione reale a più valori.

Ciò è solamente possibile qualora sussista la [21] anziché la [18]. Difatti nella [21] figura la quantità:

$$[28] \quad e^{-\frac{a}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z-a}{b}}$$

e posto:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z-a}{b} = \Theta$$

si conclude che i valori di  $\xi$  che si ottengono dalla [21] formano una progressione geometrica la cui ragione è data da:

$$[29] \quad e^{-\frac{a}{b}\pi}$$

poichè i valori del fattore [28] si ottengono aggiungendo a  $\Theta$  multipli di  $\pi$ .

Ora resta da verificare se, attese le varie condizioni fisiche alle quali è soggetto il fenomeno dell'escavo dovuto ad erosione dell'alveo, nella realtà sussista o meno la possibilità che le radici  $z_1$  e  $z_2$  siano quantità complesse.

Perchè ciò sia verificato dovrà risultare positiva e non nulla la quantità sotto il segno del radicale nella [20], che, tenendo conto delle varie posizioni fatte, si può scrivere:

$$[30] \quad 4K - H^2 = 4FB - D^2 > 0,$$

questa rappresenta in forma sintetica la diseuguaglianza:

$$4(P - \Pi)^2 + 4\frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon}(\psi_1 + \psi_2)(\psi_1\gamma + P - \Pi) - 4(\psi_1\gamma)^2 - \left[\psi_1 + \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon}\left(\psi_1\gamma + \frac{P - \Pi}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Delle grandezze che figurano in questa espressione si può dire che è noto il diametro  $\mathfrak{D}$  del grano di sabbia del fondo; che la  $\psi_1$  può essere data in funzione della profondità dell'acqua, quando si conosca la pendenza di pelo libero del corso d'acqua; mentre la  $P$  e  $\Pi$  possono determinarsi a priori facilmente. Grande incertezza invece permane nella scelta del valore da attribuire alla  $\varepsilon$ . Nei trattati specifici essa ha il valore compreso tra 0,5 e 0,05 mm., nel caso di rotolamento sia di legno su legno, sia di ferro su ferro.

Così assumendo il diametro del materiale che costituisce l'alveo del corso d'acqua eguale in media a 2 mm, il suo peso specifico eguale a 2500 Kg/m<sup>3</sup> e facendo variare la grandezza  $\varepsilon$  nel campo compreso tra 0,05 e 0,5 mm, si è determinato per tre differenti valori della pendenza del pelo libero:  $\gamma = 0,0005$ ,  $\gamma = 0,0010$  e  $\gamma = 0,0015$ , l'intervallo,  $h_1, h_2$ , delle profondità della corrente, nel quale esistono le radici complesse del polinomio di secondo grado in  $z$ , a denominatore della [17].

Nella seguente tabellina si riportano i risultati della applicazione numerica eseguita:

| $\epsilon$<br>(m)   | $\gamma = 0,0005$ |              | $\gamma = 0,0010$ |              | $\gamma = 0,0015$ |              |
|---------------------|-------------------|--------------|-------------------|--------------|-------------------|--------------|
|                     | $h_1$<br>(m)      | $h_2$<br>(m) | $h_1$<br>(m)      | $h_2$<br>(m) | $h_1$<br>(m)      | $h_2$<br>(m) |
| $0,5 \cdot 10^{-4}$ | 36,9              | 569,5        | 8,1               | 244,4        | 5,4               | 201,5        |
| $2,0 \cdot 10^{-4}$ | 3,6               | 131,0        | 1,7               | 70,3         | 1,1               | 47,2         |
| $3,5 \cdot 10^{-4}$ | 1,2               | 79,3         | 0,6               | 40,1         | 0,4               | 26,9         |
| $5,0 \cdot 10^{-4}$ | 0                 | 57,8         | 0                 | 28,6         | 0                 | 19,1         |

Dai risultati ora esposti, che sono validi per alvei con inclinazione di fondo, prima che in essi si manifestino gli effetti della erosione, trascurabile o nulla, cioè per i quali  $\lambda \cong 0$ , si trae che all'aumentare della pendenza di pelo libero, a parità del valore di  $\epsilon$ , lo intervallo  $h_2 - h_1$  diminuisce di ampiezza, abbassandosi anche il valore assunto dall'estremo  $h_1$ .

Inoltre a parità di pendenza di pelo libero, aumentando il valore della grandezza  $\epsilon$ , la profondità  $h_1$ , che limita inferiormente il campo di esistenza delle radici complesse della [17], diminuisce assai rapidamente e tende ad annullarsi.

In conclusione, le soluzioni analitiche derivanti dalla [18], per la esistenza delle quali è condizione necessaria la possibilità di ottenere radici complesse dalla [17], individuano, per gli alvei a fondo inizialmente orizzontale, o assai lievemente inclinati, la configurazione di equilibrio assunta dal materiale mobile che li costituisce.

Ciò, infine si dovrebbe verificare tanto più facilmente quanto più elevato è l'attrito al rotolamento delle particelle, poichè il limite inferiore dell'intervallo di profondità,  $h_1$ , entro il quale si hanno radici complesse della [17], tende a zero, qualunque sia la pendenza del pelo libero del corso d'acqua, al crescere di  $\epsilon$ .

La possibilità di ottenere soluzioni analitiche che si identificano con la configurazione ondulata di fondo, sempre per alvei orizzontali o a lieve pendio, esiste anche per altri campi di profondità della corrente, il cui limite inferiore,  $h_1$ , è tanto più piccolo quanto maggiore è la pendenza del pelo libero, per qualsiasi valore assunto dalla grandezza  $\epsilon$ .



## BIBLIOGRAFIA

- H. ROTH, *Kolk-erfahrungen und ihre Berücksichtigung bei der Ausbildung beweglicher Wehre.* «Schweiz. Bauz.», Bd. LXX, 1917.
- M. E. GRUSSER, E. D. LOCHER, *Mitteilungen über Versuche zur Verhütung von Kolkten an Wehren.* «Schweiz. Bauz.», Bd. LXXI, 1918.
- B. GENTILINI, *L'erosione a valle di traverse, esperienze comparative su modelli.* «Memorie ecc. Politecnico di Milano Ist. Idraulica», f. 92, 1938.
- G. NEBBIA, *Sui fenomeni di escavazione di fondo a valle di luci a battente e a Stramazzo.* «Acqua e Gas», aprile 1938.
- E. SCIMEMI, *Sulla relazione che intercede tra gli scavi osservati nelle opere idrauliche originali e nei modelli.* «Energia Elettrica», vol. XVI, f. XI, 1939.
- G. DE MARCHI, G. FILIPPELLI, *Esperienze sull'erosioni di alveo a valle di traverse.* «Memorie ecc. Politecnico di Milano, Ist. Idraulica», f. 51, 1942.

# DETERMINAZIONE DELLA CORRENTE SUPERSONICA TRIDIMENSIONALE COL METODO DELLE CARATTERISTICHE (\*)

(GENERALIZZAZIONE DEL PROBLEMA)

PIETRO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Methodus, quae «characterum» dicitur, in supersonicis currentibus investigandis adhibita est utiliter in duobus tantum casibus: cum de motu plano agitur et cum de motu axiali symmetria praedito.

Cum autem adhuc videretur non posse ea methodus adhiberi quod attinet ad missilia, quae ita volent ut incidentia non sit nulla, de hac re investigatum est, idque magno cum labore, motum tridimensionalem reducendo ad complexionem quamdam motuum axialem symmetriam habentium. Auctor autem efficit ut methodo «characterum» investigari directo iam possit circa currentem tridimensionalem supersonicam.

§ 1. ESTENSIONE DEL METODO DELLE CARATTERISTICHE. — Si consideri un'equazione differenziale a derivate parziali del secondo ordine, lineare, i cui coefficienti siano funzioni olomorfe qualsiasi, tanto delle  $n$  variabili indipendenti, quanto delle derivate prime della funzione. Nel presente lavoro noi esporremo un metodo di integrazione al passo della suddetta equazione, supponendo note le derivate prime sopra una varietà ad  $n-1$  dimensioni dello spazio ad  $n$  dimensioni. Il metodo è applicabile quando nello spazio ora nominato od in una sua parte (in tal caso limitatamente a questa) esistano varietà caratteristiche reali, ad  $n-1$  dimensioni, nel senso di LEVI-CIVITA (<sup>1</sup>).

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini nella riunione del 5 dicembre 1950.

(<sup>1</sup>) LEVI CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*. Zanichelli 1931.

La trattazione che segue è condotta per tre sole variabili perchè questo è il caso che interessa l'Aerodinamica ultrasonica, come appunto avviene per un proietto il quale voli ad incidenza non nulla. Il campo tridimensionale relativo ad una corrente supersonica soddisfa infatti una equazione come quella poco sopra accennata, la quale ammette varietà caratteristiche reali.

I calcoli richiesti nel problema tridimensionale sono necessariamente alquanto più complicati di quelli del problema bidimensionale, studiato dal FERRARI<sup>(1)</sup> e successivamente dal FERRI<sup>(2)</sup>; la maggior complessità è da imputare soltanto alla natura delle cose, e non al procedimento adottato.

Quando poi non esistono varietà caratteristiche, come avviene nel moto subsonico, l'integrazione può ancora eseguirsi ma, a prezzo di calcoli più laboriosi. Esiste in proposito il metodo di CAUCHY.

§ 2. LE VARIETÀ CARATTERISTICHE. — Si abbia l'equazione in  $\varphi$ :

$$[1] \quad \sum A_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + \theta = 0$$

$$(A_{ij} = A_{ji}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n)$$

con  $A_{ij}$  e  $\theta$  olomorfe nelle variabili  $x_1 x_2 \dots x_n$  e nelle derivate prime  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ . La condizione di *normalità* secondo il LEVI CIVITA, rispetto ad un altro sistema di variabili  $z_1 z_2 \dots z_n$ , porta alla ricerca delle varietà caratteristiche.

Se  $z_1(x_1 x_2 \dots x_n) = \text{costante}$ , deve essere una caratteristica, occorre che sia nullo il coefficiente di  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}$ . Ora, nelle nuove variabili, la [1] diventa:

$$[2] \quad \sum_{i,j} A_{ij} \sum_{r,s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_r \partial z_s} \frac{\partial z_r}{\partial x_i} \frac{\partial z_s}{\partial x_j} + \theta = 0$$

(1) C. FERRARI, *Campi di corrente ipersonora attorno a solidi di rivoluzione*, 1937, Giugno « L'Aerotecnica ».

(2) A. FERRI, *Application on the method of characteristics to supersonic rotational flow*, N. A. C. A., Rep. 841, 1946.

e perciò  $z = \text{costante}$  sarà una caratteristica se:

$$[3] \quad \sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \frac{\partial z_j}{\partial x_j} = 0, \quad (A_{ij} = A_{ji}).$$

Supponiamo di conoscere in un punto  $M(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  il valore delle derivate prime della funzione  $\varphi$ ; risulteranno allora noti i valori  $A_{ij}^0$  delle  $A_{ij}$  in quel punto, e l'equazione differenziale [3], nell'intorno infinitesimo del punto  $M$ , si ridurrà a:

$$[4] \quad \sum_{i,j} A_{ij}^0 \frac{\partial z_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial x_j} = 0$$

e nel suddetto intorno si potrà porre:

$$[5] \quad z_i = \sum_{i=1}^n \mu_i (x_i - x_i^0),$$

purchè le  $\mu_i$  soddisfacciano, a causa della [4], alla condizione:

$$[6] \quad \sum A_{ij}^0 \mu_i \mu_j = 0.$$

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di varietà caratteristiche è che il primo membro della [6] sia una forma quadratica *non* definita, altrimenti tutte le  $\mu_i$  della [6] risulterebbero nulle e quindi l'equazione [5] della caratteristica diverrebbe illusoria.

Limitiamo per semplicità le considerazioni allo spazio tridimensionale infinitesimo di  $M$  e chiamiamone  $x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, x_3 - x_3^0$  le coordinate cartesiane. Queste stesse, con l'aggiunta di una quarta coordinata nulla, possono considerarsi come coordinate omogenee di un punto all'infinito, mentre  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = 1$  possono considerarsi come coordinate omogenee di piano, per modo che la [5], assunto  $z_i = 0$ , oltre a dare l'equazione di un elemento di superficie caratteristica, cioè:

$$[7] \quad \mu_1(x_1 - x_1^0) + \mu_2(x_2 - x_2^0) + \mu_3(x_3 - x_3^0) = 0,$$

darà anche l'equazione del su accennato punto all'infinito in coordinate omogenee di piano. Allora la [6] rappresenta un involuppo di piani del secondo ordine. I piani involupperanno un cono (*varietà caratteristica*) del secondo ordine, la cui equazione in coordinate di punto attesa la polarità definita dal cono, avrà per coefficienti i complementi algebrici  $\alpha_{rs}$  degli elementi  $A_{rs}$  della matrice  $\|A_{rs}\|$ , e sarà dunque:

$$[8] \quad \sum \alpha_{rs} (x_r - x_r^0) (x_s - x_s^0) = 0.$$

Nel caso di due sole variabili, poichè nella matrice  $\|A_{rs}\|$  il complemento algebrico di  $A_{rs}$  è  $A_{sr}$ , col segno più o meno secondo che  $r+s$  è pari o dispari, la [8] si riduce semplicemente a:

$$[9] \quad A_{11} dx_2^2 - 2A_{12} dx_1 dx_2 + A_{22} dx_1^2 = 0,$$

la quale è la ben nota equazione delle linee caratteristiche connesse alla equazione:

$$A_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1^2} + 2A_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} + A_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2^2} + \theta = 0, \quad (1)$$

con  $A_{ij}$  funzione delle  $x_r$  e delle  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_r}$ . Esse sono linee di indeterminazione e, se reali, non permettono l'applicazione del metodo di CAUCHY.

§ 3. IL PROBLEMA BIDIMENSIONALE. — L'integrazione al passo col metodo delle caratteristiche nel campo bidimensionale è stato adottato dal FERRARI e dal FERRI<sup>(2)</sup>. Torna però utile dare qui una esposizione su traccia del tutto diversa, tale che renda possibile il passaggio da due a tre e più dimensioni. Siano  $a' a''$  le proiezioni sugli assi  $x_1 x_2$  di un elemento MN spiccato dal punto  $M(x_1^0 x_2^0)$  e denotino  $\varphi_1(P), \varphi_2(P)$  le derivate prime di  $\varphi$  rispetto ad  $x_1$  ed  $x_2$  prese nel generico punto P, ed  $(1MN), (2MN)$  le espressioni relative ai punti M ed N così formate:

$$[10] \quad (1MN) = \varphi_1(N) - \varphi_1(M), \quad (2MN) = \varphi_2(N) - \varphi_2(M).$$

Per N infinitamente vicino ad M, indicando con  $\varphi_{rs}$  la derivata seconda di  $\varphi$  rispetto ad  $x_r x_s$  e prendendo tanto le  $A_{rs}$  che  $\theta$  e le  $\varphi_{rs}$  nel punto M, si avrà dalle [10]:

$$[11] \quad \begin{aligned} (1MN) &= \varphi_{11} a' + \varphi_{12} a'' \\ (2MN) &= \varphi_{12} a' + \varphi_{22} a'' \\ -\theta &= \varphi_{11} A_{12} + \varphi_{12} (2A_{12}) + \varphi_{22} A_{22}. \end{aligned}$$

(1) FRANK-MISES, *Differentialgleichungen der Physik*. 1930, pag. 682.

(2) *Loc. cit.*

La matrice dei coefficienti delle  $\varphi_{rs}$  è

$$[12] \quad \|D\| = \begin{vmatrix} a' & a'' & 0 \\ 0 & a' & a'' \\ A_{11} & 2A_{12} & A_{22} \end{vmatrix}$$

e pertanto nell'ipotesi di  $D \neq 0$ , indicando per brevità i primi membri delle [11] rispettivamente con  $c_1 c_2 c_3$ , cioè:

$$[13] \quad c_1 = (1MN), \quad c_2 = (2MN), \quad c_3 = -0$$

e indicando infine con  $D_y$  i complementi algebrici degli elementi della matrice  $\|D\|$ , si avrà secondo la regola di CRAMER:

$$\varphi_{11} = \left[ \sum_{i=1}^3 D_{i1} c_i \right] : D, \quad \varphi_{12} = \left[ \sum_{i=1}^3 D_{i2} c_i \right] : D, \quad \varphi_{22} = \left[ \sum_{i=1}^3 D_{i3} c_i \right] : D$$

Evidentemente, se si scelgono  $a' a''$  in modo da soddisfare la condizione:

$$[15] \quad D \equiv A_{22} a'^2 - 2A_{12} a' a'' + A_{11} a''^2 = 0$$

di necessità, essendo per ipotesi le  $\varphi_{rs}$  finite, devono risultare nulle le espressioni in parentesi quadra che figurano nelle [14], e si ha allora un sistema di tre equazioni lineari omogenee nelle  $c_1 c_2 c_3$ , che effettivamente si riducono ad una sola, perchè l'annullarsi di  $D$  porta che i complementi algebrici di una linea o colonna siano proporzionali a quelli di ogni altra. Sceglieremo allora una soltanto come indipendente dalle altre e precisamente per semplicità la seconda, la quale, essendo per la [12]:

$$[15 \text{ bis}] \quad D_{12} = a'' A_{11}, \quad D_{22} = a' A_{22}, \quad D_{32} = -a' a''$$

ed essendo le  $c_i$  date dalla [13], si scriverà:

$$[16] \quad [\varphi_1(N) - \varphi_1(M)] a'' A_{11} + [\varphi_2(N) - \varphi_2(M)] a' A_{22} + a' a'' \theta = 0.$$

Analogamente, per un punto  $P$  teoricamente infinitamente vicino ad  $M$ , dette  $\bar{a}' \bar{a}''$  le proiezioni di  $MP$ , avremo:

$$[16 \text{ bis}] \quad [\varphi_1(N) - \varphi_1(P)] \bar{a}'' A_{11} + [\varphi_2(N) - \varphi_2(P)] \bar{a}' A_{22} + \bar{a}' \bar{a}'' \theta = 0$$

dove  $\bar{a}' \bar{a}''$  soddisfano ancora alla [15]. È facile vedere che la [16] e [16 bis] coincidono con le formole del FERRARI<sup>(1)</sup>. Infatti, indicando

il quoziente  $a'' : a'$  con  $\lambda$ , e denotando con  $\lambda_1, \lambda_2$  i due valori di  $\lambda$  soddisfacenti alla [15], si ha:  $\lambda_1 \lambda_2 = \Delta_{11} : \Delta_{22}$ , per modo che la [16] si riduce all'equazione del FERRARI:

$$[17] \quad d\varphi_1 + \lambda_2 d\varphi_2 + \frac{\theta}{\Delta_{11}} a' = 0$$

nella quale i differenziali sono presi nella direzione di  $\lambda_1$ .

La [16] e [16 bis] costituiscono un sistema di equazioni algebriche di primo grado in  $\varphi_1(N), \varphi_2(N)$ . Così dalla conoscenza delle  $\varphi_r$  in M e P si passa a quella delle  $\varphi_r$  in N, punto intersezione della retta di direzione ( $a' a''$ ) spiccata da M con l'altra di direzione ( $\bar{a}' \bar{a}''$ ) spiccata da P; e si è così proceduto nella integrazione al passo.

§ 4. IL PROBLEMA TRIDIMENSIONALE. — Indicheremo, analogamente a quanto sopra, le differenze  $\varphi_r(Y) - \varphi_r(X)$  con  $(r X Y)$ , dove però adesso è  $r = 1, 2, 3$ .

Siano  $a' a'' a'''$  le proiezioni sugli assi  $x_1 x_2 x_3$  di MN, e  $b' b'' b'''$  quelle di MP, dove MNP sono tre punti infinitamente vicini nei quali sono noti i valori delle derivate prime della funzione  $\varphi$  soddisfacente alla [1]. Si hanno allora in totale per le sei derivate seconde, prese nel punto M, le sette equazioni seguenti.

$$\begin{aligned}
 (1MN) &= \varphi_{11} a' + \varphi_{12} a'' + \varphi_{13} a''' \\
 (1MP) &= \varphi_{11} b' + \varphi_{12} b'' + \varphi_{13} b''' \\
 (2MN) &= \varphi_{12} a' + \varphi_{22} a'' + \varphi_{23} a''' \\
 [18] \quad (2MP) &= \varphi_{12} b' + \varphi_{22} b'' + \varphi_{23} b''' \\
 (3MN) &= \varphi_{13} a' + \varphi_{23} a'' + \varphi_{33} a''' \\
 (3MP) &= \varphi_{13} b' + \varphi_{23} b'' + \varphi_{33} b''' \\
 -\theta &= \varphi_{11} \Delta_{11} + \varphi_{12} (2\Delta_{12}) + \varphi_{13} (2\Delta_{13}) + \varphi_{22} \Delta_{22} + \varphi_{23} (2\Delta_{23}) + \varphi_{33} \Delta_{33}
 \end{aligned}$$

Anzitutto si osservi che comunque si scelgano i punti MNP (purchè vicini) le prime sei delle [18] non sono indipendenti; sussiste infatti la relazione:

$$[19] \quad -b'(1MN) + a'(1MP) - b''(2MN) + a''(2MP) - b'''(3MN) + a'''(3MP) = 0$$

se le  $\varphi_{rs}$ , come abbiamo supposto, esistono nei punti MNP e sono derivabili nel punto M. Possiamo allora scartare dalle [18] la sesta

equazione, che è combinazione lineare delle prime cinque e ricavare le  $\varphi_{rs}$  dalle [18] restanti, purchè il determinante:

$$[20] \quad D \equiv \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' & . & . & . \\ b' & b'' & b''' & . & . & . \\ . & a' & . & a'' & a''' & . \\ . & b' & . & b'' & b''' & . \\ . & . & a' & . & a'' & a''' \\ A_{11} & 2A_{12} & 2A_{13} & A_{22} & 2A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero. Ricavate così le  $\varphi_{rs}$  in  $M$ , si possono conoscere le derivate prime (componenti di velocità, se  $\varphi$  è il potenziale di velocità) in tutto un intorno (teoricamente infinitesimo) del punto  $M$ , e si avvia così la integrazione al passo (caso del moto potenziale subsonico).

Vi sono però casi nei quali è  $D=0$  (cioè accade per alcune direzioni spiccate da  $M$ , nel moto potenziale supersonico). Ora, posto:

$$[21] \quad \alpha_1 = a''b''' - a'''b'', \quad \alpha_2 = a'''b' - a'b''', \quad \alpha_3 = a'b'' - a''b',$$

$$[22] \quad \sigma \equiv \sum_{r,s=1}^3 A_{rs} \alpha_r \alpha_s$$

si trova facilmente essere:

$$[23] \quad D = -a''' \sigma.$$

Sicchè, nell'ulteriore ipotesi che specificheremo meglio appresso, di  $D=0$ , le direzioni  $a'a''a'''$ ,  $b'b''b'''$  dovranno scegliersi in modo da soddisfare:

$$[24] \quad \sigma \equiv \sum A_{rs} \alpha_r \alpha_s = 0,$$

dove la forma quadratica, nel caso supersonico soltanto, non è definita.

Con tale assunzione le  $\varphi_{rs}$  risulteranno finite se, e solo se, saranno nulli i sei determinanti che si ottengono rispettivamente sostituendo ad una delle sei colonne di  $D$  la colonna formata dai termini noti delle [18], toltovi beninteso (3MP), avendo messo da parte la sesta equazione [18]. Le sei equazioni che si ottengono annullando questi sei determinanti, quando al posto di:

$$[25] \quad (1MN), (1MP), (2MN), (2MP), (3MN), -\theta$$



si ponga rispettivamente:

$$[26] \quad c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6$$

e quando con  $D_{ij}$  si indichino i complementi algebrici degli elementi del determinante  $\|D\|$ , si scrivono:

$$[27] \quad \sum_{i=1}^6 D_{ij} c_i = 0, \quad (j=1, 2, 3, \dots, 6).$$

Però, a causa dell'annullarsi del determinante  $D$  in virtù delle [23] e [24], i minori  $D_{ij}$  di una colonna di  $\|D\|$  sono proporzionali a quelli di un'altra colonna e perciò le sei equazioni [27] si riducono ad una sola. Sceglieremo la seconda perchè di più facile sviluppo, trascrivendola qui sotto insieme con l'altra indicata nella [19]:

$$[28] \quad \begin{aligned} (1MN)D_{42} + (2MN)D_{32} + (3MN)D_{52} &= -0D_{62} - (1MP)D_{22} - (2MP)D_{42} \\ (1MN)b' + (2MN)b'' + (3MN)b''' &= (1MP)a' + (2MP)a'' + (3MP)a''' \end{aligned}$$

le quali costituiscono un sistema di due equazioni nelle tre incognite ( $rMN$ ), essendo conosciute le  $\varphi_r$  nei punti  $M$  e  $P$ .

Per procurarci la terza equazione occorrente alla determinazione delle  $\varphi_r(N)$ , dovremo valerci ancora di un terzo punto  $Q$  della varietà da cui si parte per eseguire l'integrazione della [1]. Indicheremo allora con  $q' q'' q'''$  le proiezioni infinitesime di  $Q$   $M$ , e scambieremo nelle precedenti considerazioni l'ufficio di  $P$  con quello di  $Q$ , fermo restando l'ufficio di  $M$ . Di conseguenza, dovremo nella [28] sostituire  $Q$  a  $P$  e  $q' q'' q'''$  alle  $b' b'' b'''$ , ed avremo:

$$[29] \quad (1MN)q' + (2MN)q'' + (3MN)q''' = (1MQ)a' + (2MQ)a'' + (3MQ)a'''$$

Con le due [28] e la [29] abbiamo tante equazioni quante incognite e possiamo quindi estendere la cognizione del campo di velocità, se  $\varphi$  ne è il potenziale, al punto  $N$  che giace fuori della superficie su cui stanno  $M$   $P$   $Q$ .

§ 5. DETERMINAZIONE DEL PUNTO  $N$  OUI SI ESTENDE LA CONOSCENZA DEL CAMPO. — Dobbiamo ricordare che le componenti  $a' a'' a'''$  di  $MN$  e le componenti  $b' b'' b'''$  di  $MP$  devono soddisfare, per il tramite delle  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  date dalle [21], alla [24], la quale si può pensare come equa-

zione di un cono  $C$  del secondo ordine, avente per generatrici le direzioni  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ . D'altra parte, atteso il significato delle  $\alpha_r$ , espresse dalle [21], le due direzioni  $a' a'' a'''$  e  $b' b'' b'''$  giacciono in un piano  $\gamma$  perpendicolare ad una generatrice del cono  $C$  individuato dalla [24]; ed altrettanto dicasi per il piano formato dalle direzioni  $a' a'' a'''$  e  $q' q'' q'''$ .

I piani  $\gamma$ , rispettivamente perpendicolari alle generatrici del cono  $C$ , a loro volta involuppano un cono  $\Gamma$ , che, come vedremo tra poco, è anch'esso del secondo ordine; quindi il piano  $MNP$  è perfettamente determinato perchè tangente al cono  $\Gamma$  e passante per la retta  $MP$ , che è data. Analogamente il piano  $MNQ$  è determinato perchè tangente allo stesso cono  $\Gamma$  e passante per la retta data  $MQ$ . L'intersezione di questi due piani fornisce la retta  $MN$  e quindi sopra di essa si assumerà il punto  $N$  al quale si estende la cognizione del campo di velocità, a partire da  $M, P, Q$ . Alla determinazione geometrica di  $N$  facciamo ora seguire quella analitica.

Siano  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4$  le coordinate omogenee di piano ed  $\alpha_r - \alpha_r^0$ , ( $r=1, 2, 3, 4$ ) quelle di punto; la condizione di ortogonalità tra la direzione  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 0)$  ed il piano suddetto è espressa da:

$$[30] \quad \mu_i = \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

così che la [24] darà:

$$[31] \quad \sum_{r,s=1}^3 A_{rs} \mu_r \mu_s = 0$$

che sarà l'equazione del cono  $\Gamma$  in coordinate omogenee di piano.

Non è poi fuor di luogo osservare che, in coordinate omogenee di punto, dalla [31] si passa alla [8].

Le coordinate  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4$  del piano  $MNP$  soddisferanno alla condizione:

$$[32] \quad \mu_1 b' + \mu_2 b'' + \mu_3 b''' = 0$$

Per risolvere il sistema [31] [32] che deve fornire i mutui rapporti delle  $\mu_r$ , individuanti la direzione della normale al piano  $MNP$ , conviene anzitutto soddisfare la [32] ponendo ad esempio:

$$[33] \quad \mu_1 = b'', \quad \mu_2 = b''' t - b', \quad \mu_3 = -b'' t,$$

oppure mettendo  $\mu_r$  nelle forme che si ottengono dalle [33] con permutazione circolare degli apici e degli indici.

Sostituendo le [33] in [31] si ha l'equazione di secondo grado in  $t$ :

$$[34] \quad t^2 [A_{22} b'''' - 2A_{23} b'' b''' + A_{33} b''^2] + 2t + \\ + [A_{12} b'' b''' - A_{22} b' b''' - A_{13} b''^2 + A_{23} b'' b'] + [A_{14} b''^2 - 2A_{12} b' b'' + A_{22} b'^2] = 0$$

Ricavato  $t$ , lo sostituirà nelle [33] e si avranno le  $\mu_r$ , cioè i valori proporzionali ai coseni della normale al piano MNP.

Per passare al piano MNQ, le cui tre prime delle coordinate omogenee sono  $\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3$ , basterà applicare lo stesso procedimento di sopra, considerando in luogo del sistema [31] [33], l'altro analogo:

$$[35] \quad \sum A_{rs} \bar{\mu}_r \bar{\mu}_s = 0$$

$$[36] \quad \bar{\mu}_1 = q'', \quad \bar{\mu}_2 = q'' t - q', \quad \bar{\mu}_3 = -q'' t$$

Invece della [34] avremo:

$$[37] \quad \bar{t}^2 [A_{22} q'''' - 2A_{23} q'' q''' + A_{33} q''^2] + 2\bar{t} + \\ + [A_{12} q'' q''' - A_{22} q' q''' - A_{13} q''^2 + A_{23} q'' q'] + [A_{14} q''^2 - 2A_{12} q' q'' + A_{22} q'^2] = 0$$

Da questa si ricaverà  $\bar{t}$  e si sostituirà nelle [36]; si avranno così i valori  $\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 \bar{\mu}_3$  proporzionali ai coseni direttori della normale al piano MNQ.

La direzione MN di proiezioni  $a' a'' a'''$  che andiamo cercando si otterrà assumendo  $a' a'' a'''$  proporzionali ai minori che, col proprio segno si estracono dalla matrice:

$$[38] \quad \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_3 \end{vmatrix}$$

§ 6. SCHEMA DEI CALCOLI. - Sia data l'equazione [1] e si conoscano le tre derivate prime  $\varphi_r$   $[x_1 x_2 x_3]$  in ciascuno dei punti:

$$M[x_1^0 x_2^0 x_3^0], P[x_1^0 + b', x_2^0 + b'', x_3^0 + b'''], Q[x_1^0 + q', x_2^0 + q'', x_3^0 + q''']$$

con le  $b$  e le  $q$  sufficientemente piccole, tanto da potersi considerare i tre punti suddetti come vicini tra loro.

Anzitutto si calcoleranno le  $A_{rs}$  e  $\theta$  nel punto  $M$ ; indi si costruiranno le due equazioni di secondo grado [34] e [37]; risolte, daranno rispettivamente  $t$  e  $\bar{t}$ . Assunto a piacere un fattore di proporzionalità  $k$ , lo si applicherà ai minori della matrice [38], ottenendo così in virtù di [33] e [36]:

$$\begin{aligned}
 [39] \quad a' &= k \{ t \bar{t} (b'' q - b''' q'') + (b' q'' \bar{t} - b'' q' t) \} \\
 a'' &= k b'' q'' (\bar{t} - t) \\
 a''' &= k \{ (b'' q''' \bar{t} - b''' q' t) + (b' q'' - b'' q') \}
 \end{aligned}$$

Naturalmente  $k$  si sceglierà tale che il segmento  $MN$  di proiezioni  $a' a'' a'''$  risulti nell'ordine di  $MP$  ed  $MQ$ . Le coordinate di  $N$  saranno:  $x_1^0 + a'$ ,  $x_2^0 + a''$ ,  $x_3^0 + a'''$ .

Trovati  $a' a'' a'''$ , si è in grado di costruire i complementi algebrici della seconda colonna della matrice  $\|D\|$ , i quali figurano nella prima delle equazioni [28]. Essi sono:

$$\begin{aligned}
 [40] \quad D_{12} &= \alpha_1 (A_{41} a''' b''' - 2 A_{13} a''' b' + A_{33} a' b') \\
 D_{22} &= -\alpha_1 (A_{33} a'^2 - 2 A_{13} a' a''' + A_{41} a'''^2) \\
 D_{32} &= -\alpha_2 (A_{33} a'' b'' - 2 A_{22} a'' b'' + A_{22} a''' b''') \\
 D_{42} &= \alpha_2 (A_{33} a'''^2 - 2 A_{23} a'' a''' + A_{22} a'''^3) \\
 D_{52} &= \alpha_1 \alpha_2 A_{33} \\
 D_{62} &= \alpha_1 \alpha_2 a'''
 \end{aligned}$$

dove le  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  sono esplicitate nelle [21].

Si formeranno quindi le sei differenze  $\varphi_r(P) - \varphi_r(M)$ ,  $\varphi_r(Q) - \varphi_r(M)$ , per  $r = 1, 2, 3$ , cioè le differenze che abbiamo indicato con  $(rMP)$   $(rMQ)$  che figurano nei termini noti delle [28] e [29], e si passerà infine a risolvere il sistema delle tre equazioni algebriche lineari [28] e [29]. Dalle differenze  $(rMN)$  che così si ricaveranno, si dedurranno immediatamente le  $\varphi_r(N)$  ossia le tre derivate prime di  $\varphi$  nel punto  $N$ . In questo modo nella integrazione, siamo passati dai punti  $MPQ$  al punto  $N$ .

§ 7. CONFRONTO CON I CALCOLI NELLE DUE DIMENSIONI. - Nel campo bidimensionale i calcoli devono di necessità risultare più semplici. Anzitutto, i coefficienti della [1] sono tre, invece di sei. In secondo luogo, invece di due equazioni di secondo grado [34] e [37], se ne ha una

sola, la [15]. Terzo: i complementi algebrici  $D_{12}$  sono tre (come dalla [15 bis]), invece di sei come nelle [40], e sono estratti da un determinante  $D$  di terzo ordine anzichè di sesto. Quarto: le derivate prime incognite sono due invece di tre, e pertanto occorrono due sole equazioni per determinarle, invece di tre.

Naturalmente più cresce il numero delle dimensioni e più complicati riescono i calcoli, ed è fatale che ciò accada. Qui, siccome abbiamo calcolato la falsariga che abbiamo prima ideato per le due dimensioni, e che ha dato, come si è visto, gli stessi risultati del Ferrari, non potevamo, nel passaggio alle tre dimensioni introdurre semplificazioni ulteriori.

SUL CALCOLO DI SCHIERE ALARI  
DI PROFILI SOTTILI  
DI CURVATURA NON TRASCURABILE (\*)

(Con due figure)

ETTORE FUNAIOLI

SVMMARIVM. — Ad alarum agmina, quae parvae sint crassitudinis neque minimae curvaturae, computanda, rationem vero proximam Auctor exprimit. Primum alam solam curvatam observat, eandem secutus rationem, qua GLAUBERT usus est ad alam minimae curvaturae computandam; deinde Auctor alas in agmine perpendit, ratione a BETZ reperta usus, cuius fundamentum suppositionis vortices sunt. Ratio, quam supra diximus, apta est alis quarum curvamen non multum sit circuli arcui dissimile.

1. — Consideriamo dapprima un profilo isolato privo di spessore ed avente la forma di arco di circonferenza. Effettuiamo sul profilo una distribuzione di vorticità e determiniamo la legge di questa distribuzione con la condizione che la corrente risulti tangente al profilo in ogni suo punto. Per questa determinazione conviene procedere a mezzo della trasformazione conforme.

Più precisamente consideriamo la corrente attorno al profilo come la trasformata, mediante una trasformazione Joukowski, della corrente attorno ad un cerchio. Indicando con  $\zeta$  il piano del cerchio e con  $z$  il piano del profilo suo trasformato, applichiamo la trasformazione

$$z = \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \right)$$

con il che, come è noto, un punto P del profilo viene a trovarsi (vedi fig. 1) sul punto medio del segmento P' P'' essendo P' P'' punti corrispondenti sul cerchio, ossia punti di intersezione del cerchio con

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Enrico Pistolesi nella riunione del 5 Dicembre 1950.

raggi uscenti dall'origine delle coordinate simmetricamente disposti rispetto all'asse delle ascisse. L'arco di circonferenza trasformato del cerchio viene a passare per il centro del cerchio ed ha i suoi estremi nei punti C e C' intersezioni del cerchio con l'asse delle ascisse.

La distribuzione di vorticità sull'arco di circonferenza costituente il profilo, dovuta ad una velocità asintotica di componenti U e V secondo gli assi  $x$  ed  $y$ , può facilmente trovarsi determinando la differenza di potenziale sull'arco di circonferenza e derivando lungo l'arco l'espressione di detta differenza di potenziale.

Riferendoci per i simboli alla fig. 1, indichiamo in particolare con  $\alpha$  l'angolo che la congiungente il punto M con il punto P forma con l'asse delle ordinate, con  $\alpha_1$  il valore di  $\alpha$  per P coincidente con C. Come verso positivo di  $\alpha$  prendiamo il verso antiorario. Poniamo inoltre:

$$\operatorname{tag} \alpha = \delta; \quad \operatorname{tag} \alpha_1 = \Delta; \quad \cos \varphi = \frac{\delta}{\Delta}$$

Questa ultima relazione fa corrispondere ad ogni punto P del profilo un valore di  $\varphi$  ed ha una interpretazione geometrica molto semplice che risulta chiara dall'esame della fig. 1.

Con le posizioni precedenti, e prendendo per verso positivo della circolazione il verso antiorario, ad una velocità U diretta secondo l'asse  $x$  corrisponde sul profilo una distribuzione di vorticità

$$\gamma_u = -2U \frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta^2}} \frac{1 - (2+\Delta^2) \cos^2 \varphi}{\operatorname{sen} \varphi (1+\Delta^2 \cos^2 \varphi)}$$

Analogamente, ad una velocità V diretta secondo l'asse  $y$  corrisponde una distribuzione di vorticità:

$$\gamma_v = -2V \frac{\cot \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} \frac{1+\Delta^2 (2 - \cos^2 \varphi)}{1+\Delta^2 \cos^2 \varphi}$$

Per regolarizzare la corrente allo spigolo (per  $\varphi = \pi$ ), occorre sovrapporre alla corrente di componenti U e V una circolazione  $\Gamma$  a cui corrisponde una distribuzione di vorticità sul profilo:

$$\gamma_\Gamma = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{\sqrt{1+\Delta^2}}{\Delta \operatorname{sen} \varphi}$$

essendo  $\Gamma$  dato dalla espressione:

$$\Gamma = -4\pi R \frac{\Delta}{1+\Delta^2} (V + \Delta U)$$

valore determinato con la condizione che, per  $\varphi = \pi$ , risulti:

$$\gamma = \gamma_u + \gamma_v + \gamma_r = 0.$$

Pertanto la distribuzione di vorticità dovuta ad una corrente indisturbata, di velocità  $V_0$  e di incidenza  $\beta$  rispetto alla corda del profilo, ha la espressione:

$$[1] \quad \gamma = -\frac{2 V_0}{\sqrt{1+\Delta^2}} \left[ 2 \cos \beta \frac{\Delta \sin \varphi}{1+\Delta^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\sin \beta}{\sin \varphi} \left( \frac{1+\Delta^2(2-\cos^2 \varphi)}{1+\Delta^2 \cos^2 \varphi} \cos \varphi + 1 \right) \right]$$

2. - Se il profilo non è un arco di circonferenza, ma si discosta poco da un arco di circonferenza, si può determinare la distribuzione di vorticità con un metodo perfettamente analogo al metodo del Glauert per profili poco curvi<sup>(1)</sup>. Il concetto è ancora quello di effettuare una distribuzione di vorticità non sul profilo, ma su di una curva di forma più semplice che si discosti poco dal profilo<sup>(2)</sup>. In questo modo la velocità indotta da una distribuzione di vorticità in un punto della curva su cui essa è distribuita, può ritenersi coincidente con la velocità indotta nel punto corrispondente del profilo effettivo dalla stessa vorticità distribuita sul profilo effettivo. Nel caso attuale la distribuzione di vorticità viene effettuata su di un arco di circonferenza che abbia la medesima corda del profilo e che poco si discosti da esso. Inoltre si considerano punti corrispondenti sul profilo e sull'arco di circonferenza i punti che appartengono al medesimo raggio dell'arco di circonferenza.

La distribuzione di vorticità può, in questo caso, considerarsi come somma della distribuzione corrispondente al profilo circolare

(1) GLAUERT, *A Theory of Thin Airfoils*, «A.R.C. Rep. and Mem.», 910.

(2) Su questo concetto si basa il metodo proposto dal Prof. FERRARI in «L'Aerotecnica», Dicembre 1947: *Sulla determinazione del flusso attraverso ad una schiera di profili alari di curvatura non trascurabile*.



(sia essa  $\gamma_0$ ) data dalla [1] e di una distribuzione correttiva  $\gamma_c$ , per la quale è conveniente scegliere una espressione del tipo:

$$[2] \quad \gamma_c = V_0 (1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi) \left( a_0 \cot \frac{\varphi}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \operatorname{sen} n \varphi \right)$$

A queste distribuzioni di vorticità corrispondono, su ogni punto dell'arco di circonferenza, delle velocità indotte di cui è, di solito, opportuno considerare le componenti radiale e tangenziale. Dette componenti possono essere facilmente determinate tenendo presente che, in generale, per una distribuzione di vorticità  $\gamma$  si ha:

$$[3] \quad v_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1 + \Delta^2 \cos \varphi \cos \varphi'}{(\cos \varphi - \cos \varphi') (1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi)} \gamma \operatorname{sen} \varphi d\varphi$$

$$[4] \quad v_t = \frac{\Delta}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi} \gamma d\varphi$$

dove  $\varphi'$  è l'angolo che definisce la posizione del punto per il quale si cercano i valori di  $v_r$  e  $v_t$  e dove  $v_r$  è positiva se diretta verso l'esterno dell'arco di circonferenza, mentre  $v_t$  è positiva se percorre l'arco in senso antiorario. Interessa osservare che, come risulta dalla [4],  $v_t$  è costante su tutto l'arco di circonferenza.

Se indichiamo con  $v_{r,c}$  la velocità radiale indotta dalla distribuzione di vorticità correttiva  $\gamma_c$ , con  $v_{t,0}$  la velocità tangenziale indotta dalla distribuzione di vorticità fondamentale  $\gamma_0$ , con  $\delta$  l'angolo che formano tra loro le tangenti al profilo ed all'arco di circonferenza in punti corrispondenti, la condizione di tangenza della corrente al profilo è data da:

$$[5] \quad \frac{v_{r,c}}{-V_0 \cos(\beta - 2\alpha) + v_{t,0}} = \operatorname{tag} \delta$$

essendo  $\delta$  positivo se, misurato a partire dalla tangente all'arco di circonferenza, ruota in senso orario.

Sostituendo la [2] nella [3] ed integrando si ha:

$$[6] \quad v_{r,c} = \frac{V_0}{2} \left\{ a_0 \left[ 1 + \Delta^2 \left( \frac{1}{2} + \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \right] + a_1 \frac{\Delta^2}{2} \cos \varphi - \right. \\ \left. - (1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi) \sum_1^{\infty} a_n \cos n\varphi \right\}$$

Introducendo, poi, la [1] nella [4] ed integrando si ha:

$$[7] \quad v_{10} = - \frac{V_0 \Delta}{1 + \Delta^2} (\Delta \cos \beta + \operatorname{sen} \beta)$$

Imponendo che la [5] sia soddisfatta in  $n$  punti del profilo, possono determinarsi  $n$  coefficienti ( $a_0 \dots a_{n-1}$ ) della  $\gamma_0$  la quale, sommata alla [1], fornisce la distribuzione di vorticità sul profilo, evidentemente con tanta maggiore approssimazione quanto più elevato è il numero  $n$  di condizioni imposte per la determinazione dei coefficienti della [2]. In pratica può essere sufficiente determinare i coefficienti  $a_0, a_1, a_2$ , imponendo ad es. la tangenza della corrente al profilo nei punti  $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi$ .

Qualunque sia il numero dei coefficienti dello sviluppo di  $\gamma_0$  presi in considerazione, la circolazione complessiva sul profilo ha l'espressione:

$$[8] \quad \Gamma = \int_{-S}^S \gamma ds = 2 R \Delta \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi} \gamma d\varphi =$$

$$= -4 \pi R V_0 \frac{\Delta}{1 + \Delta^2} (\Delta \cos \beta + \operatorname{sen} \beta) + 2 \pi R V_0 \Delta \left( a_0 + \frac{a_1}{2} \right)$$

3. - Quotora il profilo, pur sempre sottile, non possa più considerarsi infinitamente sottile, si potrà effettuare sull'arco di circonferenza una distribuzione di sorgenti capace di conferire al profilo il dovuto spessore <sup>(1)</sup>. Il valore della distribuzione di sorgenti su di un arco  $ds$  si determina mediante la condizione di continuità: si impone, cioè, che la variazione di portata tra due sezioni del profilo distanti  $2R d\alpha$  sia uguale alla portata della distribuzione di sorgenti tra le sezioni stesse. Si considera come portata attraverso ad una sezione del profilo quella dovuta alla velocità media sulla sezione stessa e si assume per velocità media la somma della proiezione della velocità indisturbata sulla tangente all'arco di circonferenza in corrispondenza della sezione considerata e della velocità tangenziale indotta dai vor-

<sup>(1)</sup> PISTOLESI, *Sulla teoria della ali sottili*. « Acta, Pont. Acad. Scientiarum », anno I, vol. I, n. 8, 1937.

tici aderenti (1). La velocità tangenziale indotta dai vortici, come risulta dalla [4], è costante lungo l'arco di circonferenza. Per questo, chiamando con  $\sigma$  lo spessore del profilo e con  $\varepsilon$  la distribuzione delle sorgenti per l'arco di lunghezza unitaria, si ha:

$$2\varepsilon R d\alpha = \sigma V_0 \cos(\beta - 2\alpha) - \sigma v_i - \\ - \left( \sigma + \frac{d\sigma}{d\alpha} d\alpha \right) V_0 \cos(\beta - 2\alpha + 2d\alpha) + v_i \left( \sigma + \frac{d\sigma}{d\alpha} d\alpha \right)$$

da cui:

$$[9] \quad \sigma_s = \frac{1}{v_i - V_0 \cos(\beta - 2\alpha_s)} \int_{-s}^s \varepsilon ds$$

Inoltre, se indichiamo con  $\tau$  l'angolo che formano tra loro le tangenti in due punti corrispondenti sul ventre e sul dorso del profilo (vedi fig. 2, essendo  $\tau$  positivo se ha il vertice a sinistra), si ha:

$$[10] \quad \tau = - \frac{d\sigma}{2R d\alpha}$$

Per la distribuzione di sorgenti prendiamo una espressione del tipo:

$$\varepsilon = V_0 \left( b_0 \cot \frac{\varphi}{2} + \sum b_n \sin n\varphi \right)$$

È anche qui opportuno limitare lo sviluppo di  $\varepsilon$  ad un numero piccolo di termini. Volendo, in questo caso, avere un angolo  $\tau$ , tra le tangenti al profilo al bordo di uscita, diverso da zero, basta introdurre nello sviluppo di  $\varepsilon$  un termine nel coseno di  $\varphi$  (vedi PISTOLESI *op. cit.*). In pratica può essere sufficiente limitare lo sviluppo di  $\varepsilon$  ai termini:

$$[11] \quad \varepsilon = V_0 \left( b_0 \cot \frac{\varphi}{2} + b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + b_3 \cos \varphi \right)$$

Per la determinazione dei coefficienti dello sviluppo [11] occorrono quattro condizioni, una delle quali deriva dalla considerazione

(1) Tenendo conto della variazione della velocità lungo il raggio, in corrispondenza di una sezione del profilo, si perviene, nella determinazione dello spessore, ad un risultato che differisce dal risultato trovato prescindendo da questa variazione per termini del secondo ordine che, per spessori sottili quali quelli considerati, possono essere senz'altro trascurati.

che il contorno del profilo è una linea chiusa, e si traduce nella relazione  $\int_{-S}^S \varepsilon ds = 0$ , un'altra è determinata dal valore  $\tau_b$  (negativo) allo spigolo, mentre le altre due si possono ad es. determinare fissando il valore dello spessore del profilo  $\sigma_c$  e dell'angolo  $\tau_c$  al centro del profilo, ossia per  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

In definitiva si ottengono, in questo caso, per i coefficienti dello sviluppo di  $\varepsilon$  le espressioni seguenti:

$$b_0 = -\tau_c \left( \cos \beta - \frac{v_t}{V_0} \right) \sqrt{1 + \Delta^2}$$

$$b_1 = \tau_c \left( \cos \beta - \frac{v_t}{V_0} \right) (1 + \sqrt{1 + \Delta^2})$$

$$b_2 = \frac{1}{4} \frac{\Delta \left( \cos \beta - \frac{v_t}{V_0} \right) \left( \frac{\sigma_c}{R} + \tau_c \ln \frac{\sqrt{1 + \Delta^2} + \Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2} - \Delta} \right) + \left[ \cos(\beta + 2\alpha_1) - \frac{v_t}{V_0} \right] \tau_b \ln(1 + \Delta^2)}{\frac{\sqrt{1 + \Delta^2}}{2\Delta} \ln \frac{\sqrt{1 + \Delta^2} + \Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2} - \Delta} - 1}$$

$$b_3 = -\tau_b \left[ \cos(\beta + 2\alpha_1) - \frac{v_t}{V_0} \right]$$

essendo, per le [4] [8]:

$$[12] \quad v_t = \frac{\Gamma}{4\pi R} = -V_0 \frac{\Delta}{1 + \Delta^2} (\Delta \cos \beta + \sin \beta) + V_0 \frac{\Delta}{2} \left( a_0 + \frac{a_1}{2} \right)$$

4. - Possiamo applicare le considerazioni precedenti al calcolo della distribuzione di vorticità sul profilo in schiera. In quanto segue indichiamo, per brevità, con profilo centrale della schiera il profilo di riferimento, con profili laterali i rimanenti profili della schiera.

Consideriamo dapprima il profilo privo di spessore. La distribuzione di vorticità su di esso, ossia sull'arco di circonferenza che lo sostituisce, può essere considerata come somma della distribuzione di vorticità  $\gamma_0$  sul profilo circolare isolato, data dalla [1], e di una distribuzione correttiva, che poniamo ancora sotto la forma [2], che tenga conto sia del fatto che il profilo non è isolato, ma in schiera, sia del fatto che esso non è in generale un arco di circonferenza.

La distribuzione correttiva può essere determinata imponendo la condizione di tangenza al profilo della velocità risultante della velocità indisturbata, della velocità indotta dalla vorticità distribuita sul profilo stesso e della velocità indotta dalla vorticità distribuita sui profili laterali.

Indichiamo con  $v_{rc}$  e  $v_{lc}$  rispettivamente le velocità radiale e tangenziale indotte sul profilo dalla vorticità correttiva distribuita sul profilo stesso, con  $v_{i0}$  la velocità indotta sul profilo dalla distribuzione principale  $\gamma_0$  distribuita sul profilo stesso, con  $v'_{rc}$ ,  $v'_{lc}$ ,  $v'_{i0}$  le corrispondenti velocità indotte dalla vorticità distribuita sui profili laterali, con  $v'_{r0}$  la velocità radiale indotta da  $\gamma_0$  distribuita sui profili laterali. La relazione di tangenza può allora essere posta sotto la forma:

$$[13] \quad \frac{v_{rc} + v'_{rc} + v'_{r0}}{-V_0 \cos(\beta - 2\alpha) + v_{lc} + v_{i0} + v'_{lc} + v'_{i0}} = \tan \delta$$

Imponendo che questa relazione sia soddisfatta in  $n$  punti del profilo, possono determinarsi  $n$  coefficienti dello sviluppo [2] della vorticità correttiva. Infatti  $v_{rc}$ ,  $v'_{rc}$ ,  $v_{lc}$ ,  $v'_{lc}$  sono funzioni dei coefficienti dello sviluppo [2]. Precisamente  $v_{rc}$  è ancora data dalla [6], o da espressioni più semplici ottenute limitando opportunamente lo sviluppo [6], mentre  $v_{lc}$  è data dal secondo termine del secondo membro della [12]. I valori di  $v'_{rc}$ ,  $v'_{lc}$  (e lo stesso dicasi per  $v'_{r0}$  e  $v'_{i0}$ ) possono essere determinati, in via approssimata, sostituendo alla distribuzione continua di vorticità sui profili laterali più vortici concentrati equivalenti, seguendo un metodo già indicato dal BETZ <sup>(1)</sup> e successivamente impiegato da altri autori <sup>(2)</sup>, <sup>(3)</sup>. È, anzi, conveniente utilizzare alcuni diagrammi tracciati dal BETZ (vedi BETZ *op. cit.*), nei quali sono rappresentati i campi delle velocità indotte, secondo l'asse della schiera e secondo la perpendicolare a questo asse, da una schiera di vortici unitari dalla quale sia stato sottratto il profilo centrale.

<sup>(1)</sup> BETZ, *Diagramme zur Berechnung von Flügelreihen*, «Ingenieur Archiv», vol. II, 1931, pag. 359.

<sup>(2)</sup> FERRARI, *Un metodo rapido approssimato di calcolo delle caratteristiche aerodinamiche delle schiere di profili alari*. «Atti Accad. Scienze Torino», 1947, pag. 264.

<sup>(3)</sup> KATZOFF, FINN, LAURENCE, *Interference Method for obtaining the Potential Flow past an arbitrary Cascade of Airfoils*. «N.A.C.A.» Rep. 879, 1947.

Per ottenere risultati di buona approssimazione, nella determinazione delle velocità indotte dai profili laterali, è generalmente sufficiente limitare a quattro o cinque il numero dei vortici che su ogni profilo sostituiscono la distribuzione continua di vorticità. Ciascun vortice si può ritenere applicato nel punto medio dell'arco di cui sostituisce la vorticità, chè nella suddivisione del profilo in più archetti i baricentrid ella vorticità, nei quali dovrebbero esser posti i vortici, vengono praticamente a coincidere con detti punti medi (1). L'intensità del vortice  $i$ -esimo, che sostituisce la distribuzione continua di vorticità tra la sezione  $(i-1)$ -esima e la sezione  $i$ -esima, è data da:

$$\Gamma_i = -4R V_0 \frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta^2}} \left\{ \Delta \cos \beta \left( -\frac{\operatorname{tg} \varphi}{1+\Delta^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2}} \operatorname{artg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{sen} \beta \left( \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1+\Delta^2 \cos^2 \varphi} + \frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2}} \operatorname{artg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} \right) - \frac{\sqrt{1+\Delta^2}}{2} \left[ a_0 (\varphi + \operatorname{sen} \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + a_1 \left( \frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left( \frac{\operatorname{sen} (n-1)\varphi}{n-1} - \frac{\operatorname{sen} (n+1)\varphi}{n+1} \right) \right] \right\}_{\varphi_{i-1}}$$

5 - Se i profili della schiera hanno spessore non nullo, si effettua sugli archi di circonferenza che li sostituiscono la distribuzione di sorgenti già esaminata nel caso del profilo isolato e si procede in maniera analoga a quanto già veduto per la distribuzione di vorticità.

Si osservi peraltro che, nei limiti di approssimazione del presente metodo, si può ritenere che la distribuzione di sorgenti non vari nel passaggio dal profilo isolato al profilo in schiera. Si può inoltre trascurare la velocità tangenziale indotta sul profilo dalle sorgenti distribuite sul profilo stesso, chè essa ha il solo effetto di variare in maniera trascurabile la distribuzione della portanza, ma non il valore della circolazione totale. Infine la velocità radiale indotta dalle sorgenti distribuite sul profilo centrale è nulla su tutto l'arco di circon-

(1) Se fosse necessaria una più accurata indagine, una volta determinata la distribuzione della vorticità in prima approssimazione, si potrebbe ottenere una più approssimata distribuzione della vorticità collocando i vortici di sostituzione nel baricentro della vorticità di prima approssimazione.

ferenza relativo allo stesso profilo; infatti, dovendo il contorno del profilo essere una linea chiusa, deve essere  $\int_{-s}^s ds = 0$ ; d'altra parte la velocità radiale indotta in un punto dell'arco di circonferenza di raggio  $R$  da una distribuzione di sorgenti effettuata sull'arco stesso ha la espressione:  $v_r = \frac{1}{4\pi R} \int_{-s}^s ds$ ; perciò si ha  $v_r = 0$ .

Di solito è opportuno limitare a tre o quattro il numero delle sorgenti di sostituzione. I punti di sostituzione dovrebbero essere alquanto ravvicinati nella porzione anteriore del profilo, ove esso varia rapidamente di spessore. L'intensità della sorgente  $i$ -esima, che sostituisce la distribuzione continua di sorgenti tra la sezione  $(i-1)$ -esima e la sezione  $i$ -esima, è data dalla espressione:

$$\varepsilon_i = 2RV_0 \Delta \left\{ b_0 \left( \frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2}} \operatorname{artg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} + \frac{1}{2\Delta\sqrt{1+\Delta^2}} \ln \frac{\sqrt{1+\Delta^2} + \Delta \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2} - \Delta \operatorname{sen} \varphi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{b_1}{\Delta^2} \left( \sqrt{\Delta^2+1} \operatorname{artg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} - \varphi \right) - \left( b_2 + \frac{b_3}{2} \right) \frac{1}{\Delta^2} \ln \frac{1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi}{\Delta^2} \right\}_{\varphi_{i-1}}$$

In questa espressione, come si è detto, i coefficienti  $b_n$  hanno i valori già determinati per il profilo isolato. Per questo il tener conto dello spessore dei profili non viene ad accrescere il numero delle incognite del sistema delle equazioni [13], restando ancora come incognite i soli coefficienti dello sviluppo della vorticità correttiva.

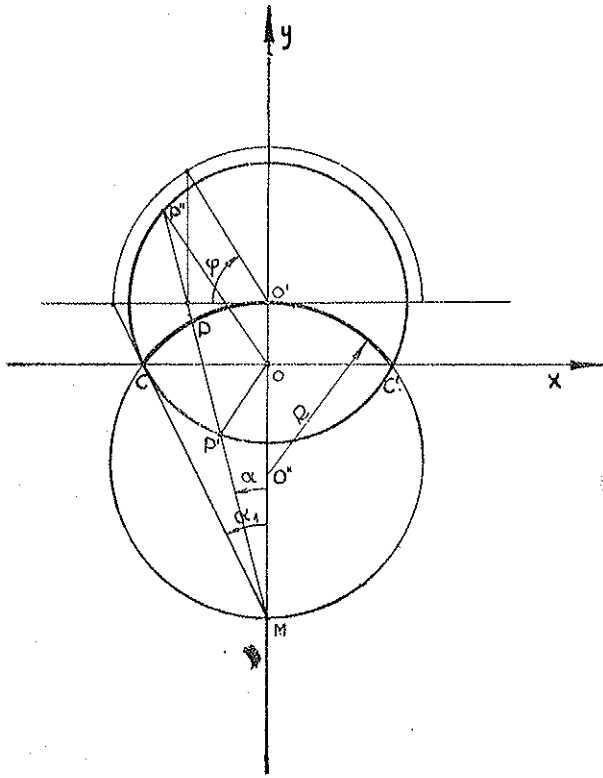


FIG. 1.

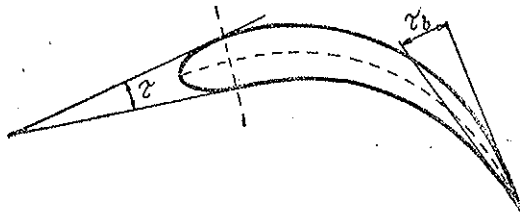


FIG. 2.





## ON THE FUNDAMENTAL THEOREM FOR POINT-POINT CORRESPONDENCES WITH VALENCY ON AN ALGEBRAIC SURFACE (\*)

D. B. SCOTT

**SUMMARIVM.** — Auctor exemplum exhibet, quo correspondentia algebraica  $\infty^2$ , non reducibilis neque degener, super algebraicam superficiem, valentiam habeat quae non sit nulla (iuxta verborum notionem a SEVERI vel ab ALBANESE constitutam), cum inversa correspondentia non eandem sed aliam valentiam habeat. Id (quod rarissime accidit, si valentia iuxta Severianam notionem accipiatur) tunc tantum evenire potest, cum geometricum superficiei genus est nullum.

The fundamental theorem that if we have a correspondence of valency  $v$  on an algebraic curve, then the inverse correspondence is also of valency  $v$  is well known. For point-point ( $\infty^2$ ) correspondences between surfaces the corresponding result is less simple. It has certainly been shown [1,7] that for irreducible non-degenerate correspondences of valency zero in Albanese's sense (and hence also for correspondences in Severi's sense), the inverse correspondence is also of valency zero. The extension of this theorem to correspondences of arbitrary valency  $v$  contains however an important gap, and it is the purpose of this note to demonstrate by an example that the theorem is false even for irreducible and non-degenerate correspondences. The general theoretical grounds for disbelieving the fundamental theorem, which lead in the most natural manner to the example which follows, will not be discussed here: they derive partly from a result of HODGE on the existence of algebraic correspondences [2] and partly from the author's work on the intersections of point-curve correspondences on an algebraic surface, which is to be published in a separate paper [4]. In

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi nella riunione del 5 dicembre 1950.

that paper we shall show that under various conditions the intersection of two point-curve correspondences is a point-point correspondence with valencies in each direction in Albanese's sense, and that these valencies may well be distinct. In particular, the intersection of two point-curve correspondences with valency (in the sense of the author's paper [3]) is always a correspondence with Albanese valencies. (It is perhaps worth remarking here that for point-curve correspondences with valency the fundamental theorem holds).

The author is greatly indebted to Prof. B. SEGRE for some informal discussion on this subject which led to the production of the particular example we give here, and also to Prof. F. SEVERI and Dr. J. A. TODD for their interest in, and comment on, this work.

The fundamental theorem that, if  $T$  is a point-point correspondence of valency  $v$  on a surface  $F$  so also is  $T^{-1}$ , is usually derived from the special case  $v=0$  in some such manner as the following.

$T$  is of valency  $v$ , and therefore, if  $I$  is the identical correspondence,  $T+vI$  is of valency zero.

Hence its inverse  $(T+vI)^{-1} = T^{-1}+vI$  is also of valency zero, so that  $T^{-1}$  is of valency  $v$ .

Now for correspondences in Albanese's sense the theorem for  $v=0$  is true, as we have remarked above, only if the correspondence is irreducible and non-degenerate.  $T+vI$  is, of course, not an irreducible correspondence, nor can we be sure that the homology class on the Riemannian of the product  $F \times F'$  (where  $F'$  is a copy of  $F$ ) to which it belongs contains some irreducible and non-degenerate correspondence. (If it did the argument above could be made valid). For correspondences in Severi's sense the difficulties appear to lie very much deeper, since the proof of the theorem for  $v=0$  [5] does not appear to require that the correspondence be irreducible. Special difficulties arise in the case of surfaces with geometric genus zero (i.e. without transcendental 2-cycles), since on such surfaces, and only on such surfaces, the two definitions of valency are apparently not essentially distinct.

The example we consider is as follows.  $F$  is a ruled surface of order  $n > 3$  and genus  $g$  in ordinary space, which is a generic projection of a non-singular ruled surface  $F^*$  in higher space. We

shall consider correspondences on  $F$ , although to avoid any apparent difficulty caused by the singular locus on  $F$ , we can imagine the discussion to apply throughout, not to points of  $F$ , but to the points of  $F^*$  which correspond to them. Let  $P$  be a plane section of  $F$  and  $G$  a generator.

Consider the point-curve correspondence  $T_1$  on  $F$  in which every point on  $F$  corresponds to the generator through it.  $T_1$  is then a symmetrical correspondence, which we call the *generator correspondence*, and, as we shall show in [4], it is a valency correspondence in the sense of [3]. We have,  $x$  being a generic point of  $F$ ,

$$T_1(x) = T_1^{-1}(x) \sim G$$

(the  $=$  representing ordinary equality and the  $\sim$  algebraic or topological equivalence).

Now consider the point-curve correspondence  $T_2$  defined as follows.  $T_2(x)$  consists of the intersection of  $F$ , residual to the generator through  $x$ , with the polar quadric of  $x$ .  $T_2^{-1}(x)$  will consist therefore of the intersection of  $F$ , residual to the generator, with the second polar of  $x$ .

$$\text{Thus } T_2(x) \sim 2P - G, \quad T_2^{-1}(x) \sim (n-2)P - G.$$

Let now  $\bar{S}$  be the point-point correspondence on  $F$  defined by the *intersection* of  $T_1$  and  $T_2$ . The indices of  $\bar{S}$  are respectively  $[T_1(x) \cdot T_2^{-1}(x)] = n-2$  and  $[T_1(x) \cdot T_2(x)] = 2$ .  $\bar{S}$  is a reducible correspondence since it contains the identical correspondence  $I$  simply as a part. [For  $T_1(x)$  and  $T_2(x)$  intersect simply at  $x$ ]. Consider however the correspondence  $S = \bar{S} - I$ . This is of indices  $(n-3, 1)$ . We remark that  $S$  is irreducible (since one index is unity) and it is not degenerate. We assert that  $S$  is of valency  $-1$  and  $S^{-1}$  of valency  $3-n$  in the senses of both Albanese and Severi: these valencies are certainly unequal if  $n \neq 4$ .

The explanation of the valencies is very easy. A complete continuous system  $\{D\}$  of curves of  $F$  consists of the sets of  $q$  generators. Now for any generator  $G$ ,  $S(G) = G$  and  $S^{-1}(G) = (n-3)G$ .

Hence

$$\begin{aligned} S(G) - G &= 0 & , & & S^{-1}(G) + (3-n)G &= 0 \\ \text{or } S(D) - D &= 0 & , & & S^{-1}(D) + (3-n)D &= 0 \end{aligned}$$

Thus for any curve  $D$  of  $\{D\}$ ,  $S(D) - D$  belongs to a fixed (null) linear system, so that  $S$  is of Albanese valency  $-1$ . In the same way  $S^{-1}$  is of Albanese valency  $3 - n$ .

That the valencies are also valencies in Severi's sense is immediate.  $S(x) - x$  is a virtual set of points equivalent, on the generator through  $x$ , to the zero set, and thus belongs to the null series of equivalence on  $F$ . Thus  $S$  is also of Severi valency  $-1$ , and similarly  $S^{-1}$  is of Severi valency  $3 - n$ .

Thus this very simple example, which springs naturally from our general theory, is apparently a gegenbeispiel to the Fundamental Theorem. In fact it is clear that if we have a correspondence on  $F$  which is made up of  $(\alpha, \beta)$  correspondences on every generator, irreducible on the generic generator, and with  $\alpha \neq \beta$  then we must necessarily have an  $\infty^2$  correspondence with unequal valencies  $-\beta, -\alpha$ . The following simple method of obtaining such correspondences is due to J. A. TODD and F. SEVERI.

Let  $C$  be a non singular curve of genus  $p > 0$  lying in  $[r]$ . Consider the Segre variety  $[r] \times [1]$  containing  $\infty^1 [r]$ 's and  $\infty^r$  lines mapping these projectively on each other. Let  $F$  be the ruled surface formed by the generating lines of the Segre variety which meet  $C$ . Then the  $\infty^1 [r]$ 's cut out on  $F$  a linear pencil of curves of genus  $p$  (free from base points). Consider an  $(\alpha, \beta)$  correspondence  $U$  between the  $[r]$ 's of  $[r] \times [1]$  with  $\alpha \neq \beta$ . Let  $T$  be the point-curve correspondence on  $F$  which associates with any point  $x$  of  $F$  the  $\beta$  curves  $C$  cut out by the  $[r]$ 's which correspond in  $U$  to the  $[r]$  through  $x$ . The intersection of  $T$  with the generator correspondence clearly has unequal valencies.

It is perhaps worth remarking that all our examples provide correspondences with negative valencies, and it may well be asked whether it is possible to find correspondences with unequal positive Albanese valencies. Such a correspondence can be obtained as the product of a correspondence with unequal negative valencies and one with equal positive valencies. It is easily seen, by considering the effect of the correspondence on the transcendental 2-cycles, that a correspondence and its inverse cannot have distinct Severi valencies, except on surfaces with geometric genus zero [5,6].

## REFERENCES

- [1] ALBANESE, « Ann. Scu. norm. sup. Pisa » (2), 3 (1934), 1-26 and 149 - 82
- [2] HODGE, « Proc. London Math. Soc. » (2), 44 (1938), 226 - 42.
- [3] SCOTT, « Proc. Cambridge Phil. Soc. » 45 (1949), 342 - 53.
- [4] SCOTT, To be published.
- [5] SEVERI, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. » (6), 17 (1933), 759 - 64.
- [6] SEVERI, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. », (6) 24 (1936), 493-97; (6) 25 (1937), 3-9.
- [7] TODD, « Annals of Math. » 36 (1935), 325 - 35.

AZIONE DELLA STREPTOMICINA  
SULLA SINTESI DELLA CLOROFILLA  
NELL'*HORDEUM VULGARE* (\*)

FRANCESCO CEDRANGOLO,  
ENZO LEONE e DOMENICO ZIMMARINO

*SYMMARIUM.* — Confirmant Auctores ea quae EULERIUS significavit de inhibitione streptomycinae vi in chlorophyllae synthesisim.

Animadvertunt autem chlorophyllae deminutionem, quae a streptomycina efficitur, eandem permanere etsi prolina vel amyloacida inferantur, quae cum streptomycina biologice connectantur. Ex quo nonnulla coniciuntur de ratione quo prolinae polycyclum ovenit.

È merito di EULER [1] l'aver segnalato un'azione caratteristica della streptomicina sulla sintesi della clorofilla: tale azione consiste nella inibizione, cospicua e irreversibile, che la streptomicina provoca sulla sintesi della clorofilla, per cui pianticine cresciute da semi germogliati in presenza dell'antibiotico presentano foglie con clorofilla in quantità notevolmente inferiore a quelle di piante normali controllo. Il « difetto di clorofilla » prodotto dalla streptomicina sarebbe specifico: questo antibiotico infatti sarebbe l'unico a causarlo, mentre gli altri fenomeni di inibizione, per esempio sulla crescita delle radici, sono provocati anche da altre sostanze quali la colchicina, la penicillina, i sulfamidici, l'istidina ecc.

EULER e coll. [2-3] hanno, d'altra parte, dimostrato che gli acidi nucleinici (sia ribo- che deossiribo-nucleinici), in analogia con quanto avviene nel regno animale (EULER e PENJE [2]), posseggono la proprietà di promuovere anche lo sviluppo delle piante e che se si aggiungono tali acidi a semi di cui si è inibito lo sviluppo con colchicina

(\*) Nota presentata da S. E. l'Accademico Pontificio G. Quagliarello nella riunione 5 dicembre 1950.

si vede che l'inibizione è del tutto rimossa per effetto di tale aggiunta. Si riporta in proposito una tabella di v. EULER (*loc. cit.* [1]).

| Soluzione   | Grado di sviluppo relativo |
|---|----------------------------|
| Acqua senza aggiunta . . . . .                        | 10                         |
| Colchicina 0,05% . . . . .                            | 3                          |
| Ac. ribonucleinico 0,05% . . . . .                    | 12                         |
| Colchicina 0,05% + ac. ribonucleinico 0,05% . . . . . | 10                         |

In base a questi risultati sembrerebbe doversi ammettere la possibilità che « la colchicina inibisca delle sintesi, che si possono ripristinare per mezzo di sostanze promotrici dello sviluppo (Wuchsstoffe) (EULER [4]).

Di tipo diverso appare invece l'azione della streptomicina: 1) perchè si osservano, nelle piante sviluppate da semi, ai quali si è aggiunto l'antibiotico, ispessimento del coleottilo e formazione di foglioline contenenti clorofilla *solo nel quarto superiore*; 2) perchè questo « difetto di clorofilla », poi non è rimosso per aggiunta di sostanze promotrici dello sviluppo, come ad esempio ac. nucleinici. Da tali risultati all'autore svedese sembra possibile la conclusione che la streptomicina inattiva un sistema enzimatico interessato nella sintesi della clorofilla » (*loc. cit.* [1]).

Ci è parso perciò interessante sviluppare le indagini nella direzione dell'identificazione del sistema enzimatico interessato e in primo luogo abbiamo eseguito la ricerca, che qui si riporta, che ha avuto lo scopo di *studiare l'effetto dell'aggiunta di aminoacidi contenenti l'anello pirrolico o, comunque in relazione biologica con il detto anello, a sistemi costituiti da semi in via di sviluppo in presenza ed in assenza di streptomicina.*

Le modalità delle esperienze e i risultati sono appresso descritti.

TECNICA SPERIMENTALE. — Semi di *Hordeum vulgare*, tenuti in acqua corrente per 18-24 ore, erano successivamente secondo la tecnica di EULER e PERJE [3] e di EULER [5] portati su carta da filtro in capsule di vetro (abbiamo usato capsule di Petri dal diametro di cm. 15 circa), in numero di 50 per ogni capsula. Le capsule erano tenute a temperatura ambiente e, per le prime 48 ore, al riparo della luce. Sulla carta da filtro sottostante ai semi si poneva H<sub>2</sub>O contenente le varie sostanze nelle proporzioni appresso indicate, misurando accuratamente la rea-

zione del liquido. Ogni 12 ore si aggiungeva acqua alle capsule in modo che il livello dell'acqua fosse mantenuto costantemente a circa 3 mm. dal fondo.

La composizione delle singole prove era la seguente:

TAB. II. - *Aggiunte in mg a semi in via di sviluppo* (n. 50 semi per capsula di Petri + 15 cc. H<sub>2</sub>O).

| Capsula n. |     | Acido         |            |          |         |
|------------|-----|---------------|------------|----------|---------|
|            |     | Streptomycina | glutammico | Ornitina | Prolina |
| 1          | A   | —             | —          | —        | —       |
| »          | 1 B | 20            | —          | —        | —       |
| »          | 2 A | —             | —          | —        | —       |
| »          | 2 B | 20            | —          | —        | —       |
| »          | 3 A | —             | 20         | —        | —       |
| »          | 3 B | 20            | 20         | —        | —       |
| »          | 4 A | —             | —          | 20       | —       |
| »          | 4 B | 20            | —          | 20       | —       |
| »          | 5 A | —             | —          | —        | 20      |
| »          | 5 B | 20            | —          | —        | 20      |

Tutti i composti erano sciolti in piccolo volume di H<sub>2</sub>O e accuratamente neutralizzati con NaOH o HCl secondo i casi. Onde assicurare una pressione osmotica il più possibile uniforme furono, inoltre, poste nelle varie capsule quantità variabili di soluzioni NaCl e CaCl<sub>2</sub>, opportunamente calcolate per raggiungere tale scopo.

Dall'inizio delle esperienze, le prove furono seguite fino al germoglio dei semi ed allo sviluppo della pianticina. Le esperienze furono poi interrotte ad epoche varie dall'inizio, mai però prima del 7° o dopo il 12° giorno. Durante le esperienze si effettuavano frequenti determinazioni del pH dei liquidi delle capsule, eventualmente si correggevano lievi differenze. Al termine di ogni esperienza si procedeva nel modo seguente. Prelevate le singole pianticine dalle capsule si dividevano nelle seguenti parti: radici, coleottila, fogliolina. Le radici erano pesate così come pure le foglioline. La fogliolina era misurata nella lunghezza, indi divisa in due parti, separando quella bianca dalla verde, e di questa ultima si misurava la lunghezza.

I risultati sono qui appresso riassunti: per semplicità ci riferiamo ai dati quantitativi medi relativi ad una singola esperienza della Serie, i cui risultati sono peraltro perfettamente sovrapponibili a quelli delle altre esperienze (8 in tutto).



Dividiamo il complesso delle nostre osservazioni in 2 gruppi: quelle riguardanti le prove senza streptomycina, per ricavare l'effetto provocato dall'aggiunta dei vari aminoacidi sullo sviluppo dei semi, e quelle riguardanti le prove con streptomycina, per ricavare l'eventuale azione modificatrice degli aminoacidi sui fenomeni di inibizione provocati dalla streptomycina.

Da un'analisi dei risultati appare:

A) Riguardo all'azione delle varie aggiunte, comparativamente, in assenza di streptomycina:

1) che la prolina e, in grado minore, anche l'ornitina e l'ac. glutammico provocano in genere un aumento del peso della fogliolina (colla prolina l'aumento è di circa il 30 %; cfr. colonna *a* con colonna *d*);

2) che le aggiunte producono, sempre, un aumento nel rapporto parte verde-parte bianca della fogliolina. Più attivi al riguardo appaiono ornitina e ac. glutammico (cfr. colonna *a* con colonne *b* e *c*);

3) che la prolina provoca un costante aumento della lunghezza totale delle foglioline (cfr. colonna *a* con colonna *d*).

B) Riguardo all'interazione tra streptomycina e gli aminoacidi aggiunti:

1. *peso delle foglioline.* - L'aggiunta della streptomycina fa diminuire notevolmente il peso delle foglioline (cfr. colonna *a* con colonna *e*). Tale diminuzione di peso provocata dalla streptomycina persiste se si confrontano le piantine, alle quali si è aggiunto ac. glutammico o prolina, colle piantine, alle quali, oltre le dette aggiunte, si è aggiunto anche la streptomycina (cfr. colonne *b* e *d* con colonne *f* ed *h*). Le piantine, cresciute in presenza di ornitina, mostrano invece un peso pressochè identico a quello delle piantine cresciute in presenza di ornitina e di streptomycina (cfr. colonna *c* colla colonna *g*);

2. *peso e lunghezza delle radici.* - Tali grandezze figurano notevolmente abbassate per azione della streptomycina (cfr. colonna *a* con colonna *e*). L'aggiunta di ac. glutammico, ornitina o prolina non modifica sostanzialmente il quadro provocato dall'antibiotico (cfr. colonne *a-d* con colonne *e-h*);

3. *rapporto parte verde/parte bianca.* - Tale rapporto ci dà un indice, sia pure grossolano, della quantità di clorofilla delle piantine. Risulta, anzitutto, perfettamente confermata l'osservazione di EULER

(*loc. cit.* [1]) a proposito dell'azione inibitrice, esercitata dalla streptomina sulla sintesi della clorofilla. *Grosso modo* si può dire che nelle prove con streptomina la parte verde della fogliolina era considerevolmente ridotta, limitandosi per lo più, al suo quarto superiore (cfr. colonna *a* con colonna *e*). Risulta, inoltre, il fatto molto importante che l'aggiunta di streptomina ha per effetto una diminuzione della quantità di clorofilla, che è praticamente sempre la stessa se si paragonano le piantine cresciute in sola acqua con quelle cresciute in acqua + streptomina, le piantine cresciute in acqua + ac. glutammico con quelle cresciute in acqua + ac. glutammico + streptomina ecc. (cfr. colonne *a-d* con colonne *e-h*).

4. *lunghezza totale foglioline.* - Riguardo infine alla lunghezza totale delle foglioline, si nota che la streptomina determina sempre una diminuzione di tale grandezza, senza notevoli variazioni tra prove con e senza aggiunta di aminoacidi (cfr. colonna *a-d* con colonne *e-h*).

I risultati ottenuti si prestano ad un breve commento.

La cosa più importante da noi osservata è certamente il fatto che la diminuita formazione della clorofilla per azione della streptomina non risente alcun beneficio dall'aggiunta della prolina come degli aminoacidi con essa biologicamente correlati (ac. glutammico e ornitina: vedi CEDRANGOLO e coll. [6]). Questo potrebbe significare che il sistema enzimatico, cointeressato nella formazione della clorofilla, che risente dell'azione della streptomina, deve operare una qualche reazione, che è oltre la formazione dell'anello pirrolico, vale a dire, in altre parole, che il blocco determinato dall'antibiotico deve cadere su un punto della via per la quale dall'anello pirrolico si arriva alla porfina della clorofilla (se infatti il blocco cadesse nella fase della sintesi dell'anello pirrolico, l'aggiunta di prolina dovrebbe essere efficace nel rimuovere l'inibizione esercitata dalla streptomina). In altre parole, anche, possiamo dire che le nostre ricerche, conformemente al modo di ragionare di EULER (*loc. cit.* [1]), darebbero la dimostrazione che gli enzimi vegetali interessati nella sintesi del nucleo pirrolico certamente sono streptomina-insensibili e che se un qualche enzima, connesso colla sintesi della clorofilla, rappresenta il punto sensibile che risente dell'azione dell'antibiotico, questo enzima deve essere operante ad uno stadio superiore alla detta sintesi, vale a dire in una di quelle fasi, in cui i 4 anelli pirrolici si organizzano nella costruzione del policiclo della porfina.

D'altra parte è da tener presente che il policiclo della porfina si potrebbe organizzare *d'emblée* da composti molto semplici (per es. glicina, ac. acetico ecc. vedi SHEMIN e RITTENBERG [7]; WITTENBERG e SHEMIN [8]; MUIR e NEUBERGER [9] senza che si passi per lo stadio di prolina (e forse anche per quello di un qualsiasi composto pirrolico monociclico). È evidente allora che se le cose stanno così, quale che sia l'enzima sensibile alla streptomycina, nè l'aggiunta di prolina nè quella di aminoacidi biologicamente correlati ad essa, potrebbe essere efficace nel rimuovere l'inibizione esercitata dall'antibiotico.

Infine un'ultima considerazione. EULER e BRACCO [10] hanno dimostrato *in vitro* che la streptomycina precipita i cloroplasti per formazione di prodotti insolubili cogli ac. nucleinici di questi ultimi. A tale osservazione per il momento non si può dare ancora alcun valore fisiologico. Tuttavia dobbiamo rilevare che ove con essa si riuscisse a spiegare anche « il difetto di clorofilla » che l'antibiotico provoca *in vivo*, risulterebbe pure facilmente comprensibile il risultato da noi ottenuto, relativo all'inefficacia della prolina e degli aminoacidi ad essa correlati a neutralizzare tale difetto.

*Sviluppo di semi di Hordeum vulgare in presenza e in assenza di streptomycina e di aminoacidi* (1).

|                                       | Senza streptomycina   |                       |               |              | Con streptomycina     |                       |               |                   |
|---------------------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------|--------------|-----------------------|-----------------------|---------------|-------------------|
|                                       | H <sub>2</sub> O<br>a | acido glutammico<br>b | ornitina<br>c | prolina<br>d | H <sub>2</sub> O<br>e | acido glutammico<br>f | ornitina<br>g | prolina<br>h<br>i |
| Peso foglioline (*) . . . . .         | 1,122                 | 1,475                 | 1,343         | 1,580        | 0,873                 | 1,150                 | 1,332         | 1,397             |
| Lunghezza totale foglioline . . . . . | 9,94                  | 10,86                 | 10,76         | 11,25        | 8,42                  | 8,64                  | 9,36          | 8,79              |
| Lunghezza coleottili . . . . .        | 4,8                   | 3,94                  | 3,89          | 3,80         | 3,68                  | 3,6                   | 3,41          | 3,72              |
| Peso radici . . . . .                 | 1,29                  | 1,38                  | 1,24          | 1,37         | 0,83                  | 0,93                  | 0,97          | 0,98              |
| Lunghezza radici . . . . .            | 4,3                   | 5,1                   | 4,8           | 4,6          | 3,1                   | 2,8                   | 3,1           | 2,9               |
| Clorofilla (verde %) . . . . .        | 56                    | 68                    | 74            | 67           | 42                    | 53                    | 50            | 52                |
| % semi non germogliati . . . . .      | 3                     | 2,5                   | 3,1           | 3,8          | 6,1                   | 5,8                   | 4,3           | 7,3               |

(1) I dati si riferiscono a pianticine dell'età di 7 giorni. I pesi sono espressi in g e riferiti a gruppi di n. 50 pianticine, le lunghezze in cm. per ogni pianticina. Prolina racemica; ornitina ed ac. glutammico naturali.

(2) Pianticine senza radici e coleottili.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] EULER, « Ark. Kemi, Min. o. Geol. », 1943, 25 A, n. 8.
- [2] EULER e RÖNNSTAM, cit. in n. 1.
- [3] EULER e PERJE, Ibidem 1945, 20 A, n. 2.
- [4] EULER, « Sv. Kem. Tidskr. », 1946, 58, 180.
- [5] EULER, « Ark. f. Kemi », 1946, 22 A, n. 14.
- [6] F. CEDRANGOLO, E. LEONE e D. GUERRITORE, « Arch. Soc. Biol. », 1949, 33, 503.
- [7] SHEMIN e RITTENBERG, « J. Biol. Chem. », 1946, 166, 621.
- [8] WITTENBERG e SHEMIN, Ibidem, 1950, 185, 103.
- [9] MUIR e NEUBERGER, « Bioch. Journ. », 1950, 47, 97.
- [10] EULER e BRACCO, « Kemiska Arbeten », 1948, Marsch 10.

## LE MOUVEMENT DE RÉCESSION DES NÉBULEUSES EXTRA-GALACTIQUES (\*)

2° PARTIE (1)

P. DRUMAUX

**SUMMARY.** — Determinatio velocitatum transversalium et orbitalium nebularam ope observationum astronomicarum redderetur facilius utendo nebulis in eadem directione sitis. Per istum procedendi modum insuper notae fierent differentiae inter magnitudines absolutas. At in metiendis magnae difficultates superandae essent ob summam praecisionem, quam exigit parvitas effecti Dopplerii transversalis.

Nous résumerons d'abord brièvement notre précédent travail sur la récession des nébuleuses. Pour éclairer le sujet, préalablement à son examen mathématique, nous commencerons par donner un aperçu de la question.

A cette fin disons avant tout que les nébuleuses sont comme toutes les masses cosmiques soumises à la gravitation. Dans le cas des nébuleuses on a affaire au problème d'un très grand nombre de corps et l'ensemble des masses en jeu, comprenant non seulement les nébuleuses accessibles au télescope mais en outre les masses dont on peut dès-à-présent affirmer l'existence au delà de la région cosmique explorée,

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Soprannumerario Rev.mo P. Johan Stein S. I. il 20 aprile 1950.

(1) Pour la 1<sup>ère</sup> partie voir « Commentationes », Vol. XI, N. 12, pag. 721-750

représente une énorme quantité de matière. Or d'après la loi de gravitation les différences de potentiel gravifique sont proportionnelles aux masses qui les engendrent. L'espace cosmique est donc le siège de très grandes différences de potentiel, lesquelles sont capables de produire des vitesses élevées et l'on doit s'attendre à ce que celles-ci soient comparables à la vitesse de la lumière, ce qui implique l'intervention des effets de relativité.

Le problème se pose dès lors de déterminer non seulement ces vitesses mais aussi les trajectoires des nébuleuses. Si on cherche à le résoudre par une solution mathématique parfaitement rigoureuse on peut dire que le problème est insoluble, mais il peut au contraire être résolu si l'on procède par approximations successives en se limitant à la recherche des trajectoires osculatrices. On trouve alors en première approximation une loi linéaire pour les vitesses en recourant à des potentiels gravifiques osculateurs ayant un contact du 3<sup>e</sup> ordre avec les potentiels réels. Pour les trajectoires on trouve, également en première approximation, soit des spirales gauches elliptiques soit des courbes exponentielles apériodiques.

Au point de vue mathématique le calcul se fait en partant des équations générales tensorielles de la gravitation où les potentiels gravifiques  $g_{\mu\nu}$  sont remplacés par les potentiels osculateurs susdits. On obtient ainsi la loi des vitesses dont l'intégration livre les équations des trajectoires. Bien que la considération des potentiels osculateurs ait nécessité l'introduction d'un grand nombre de constantes laissées indéterminées pour ne pas préjuger de la configuration du champ gravifique, il ne reste néanmoins à la fin du calcul que 9 paramètres inconnus dont dépendront tous les mouvements des nébuleuses.

Si l'on pousse l'approximation plus loin en considérant des potentiels osculateurs du 4<sup>e</sup> ordre, la loi des vitesses devient quadratique par l'adjonction de termes de correction et les trajectoires sont alors plus compliquées, mais dans le présent état de la science cette seconde approximation n'offre pas d'intérêt immédiat parce qu'elle couvre des domaines cosmiques actuellement inaccessibles. La première approximation implique d'ailleurs déjà de très grandes difficultés au point de vue de la haute précision qui serait requise dans les observations astronomiques pour pouvoir déterminer les 9 paramètres dont question ci-dessus.

Il doit être entendu que notre étude ne porte nullement sur la structure de tout l'Univers mais se limite au domaine cosmique qui nous entoure, c'est-à-dire que nous nous bornons à envisager la région extra-galactique en la considérant à une échelle qui n'est que d'un rang supérieur à celle envisagée jusqu'à présent en Astronomie. Cela signifie évidemment un saut important mais néanmoins limité dans l'échelle des grandeurs, tout comme par exemple le saut correspondant au passage de l'ordre de grandeur du système solaire à celui de la voie lactée.

Considérée à cette nouvelle échelle, la région extra-galactique qui nous environne se révèle ne pas être conforme à ce que l'on s'était imaginé. C'est uniquement la gravitation qui régit le cours des nébuleuses, avec cette particularité que les effets de relativité causés par les grandes vitesses interviennent puissamment. Du fait qu'à l'échelle en question on a affaire à des masses énormes la gravitation engendre des effets dynamiques en proportion des masses. C'est ainsi que le calcul montre que la voie lactée doit se mouvoir à une vitesse de l'ordre de 100 000 km/sec. ce qui paraît bien paradoxal mais n'est en réalité pas surprenant si l'on se place à l'échelle voulue pour les masses en jeu. Il faut en effet bien se dire que si dans un système physique on pousse à l'extrême l'un des facteurs en jeu, on aboutit nécessairement à des effets nouveaux insoupçonnés. Les exemples en sont nombreux en Physique, notamment les courants et radiations à très haute fréquence. Dans notre problème c'est le facteur masse qui est poussé à l'extrême et qui engendre dès lors des vitesses très grandes pour toute les nébuleuses extra-galactiques y compris la voie lactée, mais comme nous sommes emportés avec celle-ci nous n'observons que les vitesses relatives des nébuleuses par rapport à la galaxie et nous ne percevons d'ailleurs que la composante radiale de ces vitesses relatives parce que l'effet Doppler transversal est du 2<sup>d</sup> ordre par rapport à l'effet longitudinal.

\* \* \*

Ayant ainsi donné un bref aperçu de la question résumons maintenant les calculs exposés dans notre précédent travail.

En partant des équations de la gravitation d'Einstein on obtient la loi linéaire suivante pour la vitesse des nébuleuses :

En adoptant des axes coordonnés trirectangulaires à leur origine  $O$  située en permanence sur la voie lactée et en désignant par  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  les coordonnées d'une nébuleuse  $N$ , on obtient pour les composantes  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  de la vitesse les relations :

$$\begin{aligned}
 [1] \quad v_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\
 v_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\
 v_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3
 \end{aligned}$$

où les constantes  $a_{\mu\nu}$  représentent les 9 paramètres mentionnés plus haut.

On en déduit aisément que la vitesse radiale  $v_r$  est proportionnelle à la distance  $r$ , conformément à la loi de Hubble.

Il suffit d'exprimer les coordonnées en fonction de la distance et des cosinus directeurs correspondant à la direction de la nébuleuse  $N$ .

On lit aussi sur les équations [1] que l'amplitude  $v$  de la vitesse est également proportionnelle à la distance, le coefficient de proportionnalité  $K$  dépendant de la direction envisagée.

On voit en outre que l'angle  $\varphi$  que le vecteur de la vitesse fait avec le rayon vecteur  $ON$  de la nébuleuse est le même pour toutes les nébuleuses situées dans une même direction.

Si d'autre part on considère toutes les nébuleuses situées à une même distance  $r$  de la voie lactée et si à partir d'un point fixe on mène un vecteur égal et parallèle à la vitesse  $\bar{v}$  de chaque nébuleuse, on obtient un ellipsoïde.

Si enfin on intègre les équations [1] on obtient les équations des trajectoires dont nous avons plus haut rappelé la forme.

Ces divers résultats dépendront des valeurs numériques des 9 paramètres  $a_{\mu\nu}$  qui régissent tous les mouvements des nébuleuses.

Le problème se pose dès lors de déterminer ces paramètres par des observations astronomiques.

La voie proposée à cette fin est la suivante :

On peut déduire des équations [1] que si l'on mesure des effets DOPPLER de deux nébuleuses situées approximativement dans la même direction ainsi que le rapport des distances de ces deux nébuleuses, il est possible de déterminer les composantes radiale et transversale de la vitesse.



Dans un précédent travail <sup>(1)</sup> nous avons montré que si l'on répète ces mesures sur six paires de nébuleuses, chaque paire correspondant à une direction différente, on peut atteindre les paramètres  $a_{\mu\nu}$  et par conséquent déterminer les trajectoires.

Le calcul des erreurs auxquelles il faut s'attendre dans ces déterminations montre qu'une haute précision est indispensable dans les mesures des effets Doppler et des distances. Il en résulte que de grandes difficultés sont à surmonter pour ces mesures, particulièrement en ce qui concerne les distances dont la détermination comporte actuellement de l'incertitude.

Nous nous proposons dans la présente étude de rechercher la voie à suivre pour surmonter ces difficultés.

\* \* \*

Le principal obstacle réside dans l'imprécision des magnitudes absolues. Examinons dès lors comment il pourrait être surmonté.

A cette fin considérons deux nébuleuses  $N_1$  et  $N_2$  situées approximativement dans la même direction et envisageons le rapport  $r_1/r_2$  de leurs distances à la voie lactée. En vertu de la relation

$$[2] \quad \log r = 0,2 (m - M) + 1$$

où  $m$  est la magnitude apparente,  $M$  la magnitude absolue et  $r$  la distance en parsecs, on aura :

$$[3] \quad \log \frac{r_1}{r_2} = 0,2 [(m_1 - m_2) - (M_1 - M_2)]$$

ce qui montre que la mesure de  $r_1/r_2$  n'exige pas la connaissance des magnitudes absolues elles-mêmes mais simplement celle de leur différence.

Considérons ensuite l'effet Doppler dû à la récession. D'après la relativité il est donné par la relation :

$$[4] \quad \frac{\lambda^1}{\lambda} = \frac{1 + \frac{v \cos \varphi}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

<sup>(1)</sup> *La récession des nébuleuses extra-galactiques* (3<sup>e</sup> partie). « Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles », série I, tome LXII, 1948, p. 83.

où  $\lambda$  est la longueur d'onde lorsque la source est au repos par rapport à l'observateur et  $\lambda'$  la longueur d'onde lorsqu'elle est animée d'une vitesse  $v$  faisant un angle  $\varphi$  avec la direction dans laquelle se trouve la source, cet angle étant mesuré dans le système d'axes de référence lié à l'observateur.

En développant en série l'inverse du radical et en négligeant les termes à partir du 3<sup>e</sup> ordre on obtient pour l'effet Doppler D :

$$[5] \quad D \equiv \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v \cos \varphi}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Or pour des nébuleuses situées dans la même direction la vitesse  $v$  est d'après les équations [1] proportionnelle à la distance  $r$  et l'angle  $\varphi$  est constant pour cette direction. On aura donc en posant  $v = Kr$

$$[6] \quad D = \frac{K \cos \varphi}{c} r + \frac{1}{2} \frac{K^2}{c^2} r^2$$

où le coefficient  $K$  et  $\cos \varphi$  ne dépendent que de la direction choisie.

Il en résulte que deux nébuleuses situées dans une même direction et ayant même effet Doppler sont à égale distance de la voie lactée.

Par conséquent d'après [3] on aura  $M_1 - M_2 = m_1 - m_2$  et la mesure des magnitudes apparentes fera connaître la différence dans les magnitudes absolues.

Considérons ensuite le cas où les deux nébuleuses situées dans la même direction ont des effets Doppler différents.

Les équations [2] et [6] donnent :

$$[7] \quad D = \frac{K \cos \varphi}{c} 10^{0,2(m-M)+1} + \frac{1}{2} \frac{K^2}{c^2} 10^{0,4(m-M)+2}$$

Faisons d'abord quelques remarques au sujet de cette relation.

Pour des valeurs données de  $K$ ,  $\cos \varphi$  et  $M$ , l'effet Doppler  $D$  n'est fonction que de  $m$ .

Pour la clarté de l'exposé considérons une représentation graphique de cette fonction au moyen d'un diagramme où  $m$  est porté en abscisse et  $D$  en ordonnée et en donnant à  $M$ ,  $\cos \varphi$  et  $K$  des valeurs fixes conventionnelles, à savoir  $M = -15$ ,  $\cos \varphi = 1$  et pour  $K$  la valeur  $K_0$  du coefficient de la loi de Hubble concernant la proportionalité entre

la vitesse radiale et la distance, à savoir  $K_0 = 5,2 \cdot 10^{-4}$  km/sec par parsec.

La courbe conventionnelle figurant ainsi D en fonction de  $m$ , tracée disons depuis la 12<sup>e</sup> jusqu'à la 22<sup>e</sup> magnitude, est du genre exponentiel. Son gradient, très faible au début, s'accroît progressivement pour devenir très escarpé au delà de la 19<sup>e</sup> magnitude.

L'équation [7] montre alors que la forme de la courbe est indépendante de la valeur choisie pour M, c'est-à-dire que si on adopte une autre valeur pour M la courbe ne fait que se déplacer parallèlement à l'axe des abscisses sans changement de forme attendu que D est fonction de  $(m - M)$ .

Il en est de même si l'on modifie la valeur de K :

En posant en effet  $\mu \equiv \frac{\log \frac{K}{c}}{0,2}$  on aura :

$$[8] \quad D = \cos \varphi \cdot 10^{0,2(m-M+\mu)+1} + \frac{1}{2} 10^{0,4(m-M+\mu)+2}$$

c'est-à-dire que D est fonction de  $(m + \mu)$ , de sorte que la forme de la courbe reste de nouveau inchangée et glisse simplement suivant l'axe des  $m$  si on choisit une autre valeur de K.

Ce n'est que si l'on modifie  $\cos \varphi$  que la courbe change de forme.

En effet en posant  $v \equiv \frac{\log \cos \varphi}{0,2}$  le 1<sup>er</sup> terme du 2<sup>d</sup> membre de [8] devient :  $10^{0,2(m-M+\mu+v)+1}$  et ne causerait en l'absence du 2<sup>d</sup> terme qu'un glissement de la courbe sans changement de forme. La présence du 2<sup>d</sup> terme entraîne toutefois un changement de forme, lequel ne sera sensible que lorsque ce second terme ne sera plus négligeable vis-à-vis du premier, c'est-à-dire pour les grandes vitesses et donc pour les nébuleuses lointaines correspondant aux magnitudes élevées.

Pour donner une idée de ce changement de forme considérons d'une part la courbe conventionnelle pour  $M = -15$ ,  $K = K_0$  et  $\cos \varphi = 1$  et d'autre part la courbe correspondant à  $\cos \varphi = 0,707$  ( $\varphi = 45^\circ$ ).

Pour les tronçons de ces deux courbes compris entre les points d'ordonnée  $D_1 = 0,5$  (ce qui correspond pour  $M = -15$ ,  $K = K_0$  et  $\cos \varphi = 1$  à une magnitude apparente  $m_1 = 21,9$ ) et les points d'ordonnée  $D_2 = 0,01$  (ce qui correspond pour les mêmes valeurs de M, K

et  $\cos \varphi$  à une magnitude apparente  $m_2 = 13,8$ ) la différence de forme se traduit par un quart de magnitude.

On voit que pour une forte variation de  $\cos \varphi$  et un grand saut dans l'effet Doppler la différence de forme devient sensible.

Comme pour la direction choisie les valeurs de  $K$  et  $\cos \varphi$  sont inconnues et qu'il faut pouvoir opérer avec grande précision dans la mesure des rapports de distance dont question plus haut en vue d'atteindre les vitesses transversales et les trajectoires, la courbe conventionnelle ne peut pas être employée et il emporte de connaître pour chaque direction la vraie courbe à lui substituer. Ce n'est que pour de petits écarts dans les effets Doppler que la courbe conventionnelle est utilisable.

Voyons dès lors comment on pourrait pour une direction choisie déterminer la vraie courbe à substituer à la courbe conventionnelle malgré que l'on ignore les valeurs de  $K$  et de  $\cos \varphi$  correspondant à cette direction.

\* \* \*

Pour éclairer le sujet rappelons d'abord que la détermination des trajectoires dépend de la possibilité de mesurer avec une précision suffisante le rapport des distances de deux nébuleuses situées dans la même direction et que d'après [3] ce rapport dépend de la mesure d'une différence dans les magnitudes absolues.

Avant de parler de la détermination de la vraie courbe appartenant à la direction choisie montrons d'abord comment la connaissance de cette courbe permettrait la mesure de la différence des magnitudes absolues. Nous passerons ensuite à la question de la détermination de la courbe.

Considérons donc deux nébuleuses  $N_1$  et  $N_2$  situées dans la même direction, la première lointaine, la seconde rapprochée, et ayant des magnitudes absolues différentes  $M_1$  et  $M_2$ . Soient  $m_1$  et  $m_2$  leurs magnitudes apparentes,  $D_1$  et  $D_2$  leurs effets Doppler.

Recourons comme plus haut à un diagramme où ces nébuleuses seraient figurées par les points  $N_1$  et  $N_2$  dont les coordonnées seraient d'une part  $m_1$  et  $D_1$  pour  $N_1$  et d'autre part  $m_2$  et  $D_2$  pour  $N_2$ .

Supposons que l'on connaisse la forme de la courbe susdite de variation de  $D$  en fonction de  $m$ , bien qu'on ignore en réalité les valeurs de  $K$  et de  $\cos \varphi$  appartenant à la direction choisie.

Cela étant, si par le point  $N_1$  on trace la courbe en question jusqu'à un point  $N'_2$  ayant même ordonnée  $D_2$  que  $N_2$ , la différence entre les abscisses  $m'_2$  de  $N'_2$  et  $m_2$  de  $N_2$  sera égale à la différence  $M_1 - M_2$ . En effet le point  $N'_2$  correspondra à une nébuleuse ayant même magnitude absolue que  $N_1$  et même effet Doppler que  $N_2$ .

Cette nébuleuse  $N'_2$  sera donc d'après [6] à égale distance de la voie lactée que  $N_2$  et dès lors la différence de leurs magnitudes apparentes  $m'_2 - m_2$  sera égale à la différence des magnitudes absolues  $M_1 - M_2$ .

D'après [3] on aura dès lors :

$$[9] \quad \log \frac{r_1}{r_2} = 0,2[(m_1 - m_2) - (m'_2 - m_2)] = 0,2(m_1 - m'_2)$$

c'est-à-dire que la mesure du rapport des distances n'exige pas la connaissance des magnitudes absolues.

Remarquons que la même construction graphique pourrait se faire au moyen de la courbe conventionnelle à condition que les effets Doppler diffèrent relativement peu.

Pour un écart de 10% dans les effets Doppler l'erreur sur  $M_1 - M_2$  causée par la substitution de la courbe conventionnelle à la vraie courbe est inférieure à cinq millièmes de magnitude lorsque  $\varphi = 45^\circ$  et lorsque les nébuleuses ont une magnitude apparente voisine de 18. L'erreur est d'environ un centième de magnitude pour  $\varphi = 45^\circ$  et  $m$  voisin de 20.

Le procédé graphique en question peut s'interpréter comme une réduction au même effet Doppler ou à la même distance et cette réduction peut donc s'opérer par la courbe conventionnelle lorsque l'écart entre les effect Doppler est minime.

Il reste à montrer comment on pourrait déterminer la courbe de  $D$  en fonction de  $m$  correspondant aux vraies valeurs de  $K$  et de  $\cos \varphi$  appartenant à la direction choisie.

\* \* \*

Pour cela il est auparavant encore nécessaire d'examiner la question des corrections à opérer sur les magnitudes apparentes du fait de la vitesse des nébuleuses et de l'absorption sélective causée par l'atmosphère terrestre, le télescope et le récepteur.

On sait qu'une correction des magnitudes est nécessaire à cause du mouvement des nébuleuses, l'échelle des magnitudes présupposant des sources au repos.

Si  $I$  est l'intensité lumineuse d'une radiation monochromatique qui serait reçue d'une nébuleuse supposée au repos par rapport à l'observateur et  $I'$  l'intensité lorsque la vitesse par rapport à celui-ci est  $v$ , la relativité donne

$$[10] \quad \frac{I'}{I} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi\right)^2}$$

où  $\varphi$  a la même signification que dans l'équation [4].

Il faut en outre tenir compte du décalage global du spectre vers le rouge ainsi que du changement qui en résulte dans l'effet sélectif d'absorption causé par l'atmosphère terrestre, le télescope et le récepteur. Soit  $A$  le facteur d'affaiblissement résultant de l'effet combiné du décalage et du changement causé par ce décalage dans les diverses absorptions sélectives. On aura en désignant par  $E'$  l'énergie réellement reçue par le récepteur et par  $E$  celle qui aurait été reçue si la nébuleuse avait été au repos:

$$[11] \quad \frac{E'}{E} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi\right)^2} A$$

En traduisant  $E'$  et  $E$  en magnitudes  $m'$  et  $m$  on a:

$$[12] \quad m' - m = 2,5 \log \frac{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) A}$$

Or d'après [4] on a:

$$[13] \quad D + 1 = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

D'où

$$[14] \quad m' - m = 5 \log (D + 1) + 2,5 \log \frac{1}{A}$$

Cette formule est analogue à celle donnée par HUBBLE <sup>(1)</sup> où le terme  $2,5 \log 1/A$  est exprimé en magnitudes et désigné par  $K$ .

A cause de l'imprécision attachée à la détermination de ce terme il importe de rechercher des conditions favorables à son évaluation. Comme le coefficient  $A$  dépend de la répartition de l'intensité lumineuse dans le spectre ainsi que de l'effet Doppler sa détermination sera moins laborieuse si l'on opère sur des nébuleuses de même type spectral.

Cela étant supposons que l'on soit parvenu à identifier un certain nombre de nébuleuses toutes situées approximativement dans la même direction, disons dans un angle de 5 degrés d'ouverture et couvrant donc une vingtaine de degrés carrés, et ayant des spectres similaires. Leurs magnitudes apparentes et leurs effets Doppler pourront varier dans de larges limites selon la magnitude absolue, la distance et la vitesse.

Représentons ces nébuleuses par des points figuratifs  $N$  sur un diagramme  $(D, m)$  déjà envisagé plus haut où les ordonnées correspondent aux effets Doppler  $D$  et les abscisses aux magnitudes apparentes corrigées  $m$ , à savoir d'après [14]:

$$[15] \quad m = m' - 5 \log (D + 1) - 2,5 \log \frac{1}{A}$$

la détermination de  $A$  ne devant se faire que pour le type spectral choisi et pour les divers effets Doppler.

On obtiendra ainsi sur le diagramme une série de points s'échelonnant entre certaines limites pour les magnitudes apparentes et pour les effets Doppler et la courbe se rapprochant le plus de ces divers points figurera la vraie courbe de  $D$  en fonction de  $m$  à substituer à la courbe conventionnelle envisagée plus haut, car elle correspondra aux valeurs de  $K$  et de  $\cos \varphi$  appartenant à la direction choisie.

(1) *The realm of the nebulae*, p. 195.

Ce qui précède présuppose, il est vrai, que la répartition des magnitudes absolues entre les nébuleuses est indépendante de leur distance à la voie lactée.

A cet égard rappelons, comme nous l'avons expliqué dans nos précédentes publications <sup>(1)</sup>, que le mouvement des nébuleuses de la région cosmique explorée, rapporté à des axes coordonnés solidaires des énormes masses lointaines engendrant le champ gravifique dans lequel les nébuleuses extra-galactiques sont plongées, est très différent de leur mouvement rapporté à des axes liés à la voie lactée. Tandis que dans ces derniers axes les trajectoires divergent en tous sens à partir de la voie lactée jouant le rôle de point asymptotique, au contraire dans les premiers axes les trajectoires sont très peu divergentes. Dans ceux-ci on a affaire à un mouvement général d'entraînement de l'ensemble des nébuleuses, y compris la voie lactée, tout le système étant emporté à grande vitesse dans le champ gravifique auquel il est soumis.

Cela étant, le calcul renseigne sur la loi de répartition macroscopique des nébuleuses <sup>(2)</sup> mais n'apprend rien au sujet de la répartition des magnitudes absolues, laquelle est donc à considérer comme inconnue. Mais comme les équations [1] ne sont valables qu'en première approximation notre étude ne s'applique qu'endéans des distances limitées à partir de la voie lactée de l'ordre de quelques centaines de millions d'années-lumière. Or à l'échelle du mouvement d'ensemble des nébuleuses et surtout de l'étendue du champ gravifique dans lequel elles se meuvent, la limite susdite est à considérer comme relativement petite vis-à-vis de l'immensité du domaine englobant toutes les masses en jeu. Bien que la répartition macroscopique des magnitudes absolues soit inconnue dans ce domaine on peut donc néanmoins la considérer comme uniforme si l'on se borne à une partie relative-

---

<sup>(1)</sup> *La récession des nébuleuses extra-galactiques.* « Annales de la Soc. scientifique de Bruxelles », série I, tome LXII, 1948, p. 27; série I, tome LXIII, 1949, p. 46.

<sup>(2)</sup> *La répartition macroscopique des nébuleuses extra-galactiques.* « Ibidem » T. LX (1940-1946), série I, 3<sup>e</sup> fascicule, Juillet 1946, p. 115; *La récession des nébuleuses extra-galactiques et leur répartition macroscopique* « Ibidem », 4<sup>e</sup> fascicule, Décembre 1946, p. 213.



ment petite de ce domaine. En d'autres termes si l'on suppose qu'à grande échelle il y ait une variation de la répartition des magnitudes absolues, cette variation est minime endéans les limites de validité des équations [1].

Ayant ainsi obtenu la vraie courbe de  $D$  en fonction de  $m$ , il deviendra alors possible de déterminer au moyen de l'équation [9] le rapport des distances  $r_1/r_2$  de deux nébuleuses choisies dans le groupe, ce qui fera connaître les vitesses transversales, lesquelles conduiront finalement aux trajectoires.

Le procédé implique évidemment de grandes difficultés notamment pour s'assurer de la similitude des spectres, mais il faut bien se dire que le mouvement des nébuleuses ne peut être atteint que par la voie spectrométrique, leur déplacement angulaire n'étant que de l'ordre d'un centième de seconde d'arc par siècle. La détermination des vitesses transversales et des trajectoires est donc nécessairement liée aux progrès à réaliser dans les mesures spectroscopiques.

\* \* \*

La méthode envisagée permettrait de mesurer les écarts dans les magnitudes absolues sans devoir déterminer l'affaiblissement  $A$  dû à l'effet combiné de décalage du spectre et d'absorption sélective, à condition que les effets Doppler des nébuleuses envisagées diffèrent relativement peu entre eux.

Nous avons vu plus haut que dans ce cas on peut opérer une réduction au même effet Doppler au moyen de la courbe conventionnelle dont question précédemment.

Or pour deux nébuleuses réduites au même effet Doppler et ayant des spectres similaires le coefficient  $A$  sera le même malgré l'écart entre les magnitudes absolues de sorte que le terme de correction  $2,5 \log 1/A$  sera également le même.

D'autre part l'autre terme de correction  $5 \log (D + 1)$  aura aussi même valeur pour ces deux nébuleuses. Ces termes vont donc s'éliminer dans la différence  $m_1 - m_2$  des magnitudes apparentes, c'est-à-dire qu'on aura d'après [15]:

$$[16] \quad m_1 - m_2 = m'_1 - m'_2$$

Comme les nébuleuses réduites au même effet Doppler seront à égale distance de la voie lactée on en aura

$$[17] \quad M_1 - M_2 = m_1 - m_2 = m'_1 - m'_2$$

c'est-à-dire que l'écart dans les magnitudes absolues sera égal à celui des magnitudes apparentes non corrigées.

On serait ainsi directement renseigné sur la variation de la magnitude absolue et on pourrait notamment reconnaître les nébuleuses de luminosité anormale. Celles-ci correspondront d'ailleurs sur le diagramme considéré ci-dessus à des points figuratifs situés en dehors de la traînée des points dessinant globalement l'allure de la variation de  $D$  en fonction de  $m$ .

\* \* \*

Pour la clarté de l'exposé nous avons fait appel à des diagrammes mais le calcul correspondant aux représentations graphiques donnerait plus d'exactitudes.

D'autre part l'étude étant d'un caractère macroscopique il importerait de multiplier autant que possible les observations faites dans une même direction ainsi que le nombre de directions choisies.

Les difficultés auxquelles nous faisons allusion plus haut se trouvent accrues du fait qu'il faut pouvoir opérer sur des nébuleuses suffisamment éloignées pour que l'effet Doppler transversal se manifeste. Comme cet effet est du second ordre, une grande précision est nécessaire pour le séparer de l'effet longitudinal. Il est bien vrai que l'astronomie est essentiellement une science de précision mais dans le cas présent le degré d'exactitude à atteindre est particulièrement élevé.

En conclusion on peut dire que dans cette question de la récession on a affaire à de la gravitation à grande échelle avec des effets en proportion. La gravitation étant un phénomène fondamental de la Nature, les nébuleuses n'y sont pas soustraites et c'est elle seule qui régit tous leurs mouvements.

---

Le calcul permet de prévoir les lois de ces mouvements mais le problème de leur détermination expérimentale est hérissé de difficultés. Les progrès incessants réalisés dans le domaine de l'observation astronomique font néanmoins espérer que celles-ci pourront être progressivement surmontées en opérant sur des nébuleuses situées dans une même direction.

IL PROBLEMA STATICO E COSTRUTTIVO DEL COMPLESSO  
DI DUE TUBI FRA LORO ORTOGONALI, SOGGETTI A  
SOPRAPRESSIONE E DEPRESSIONE INTERNA, NELLE  
GALLERIE AERODINAMICHE A CIRCUITO CHIUSO (\*)

(Con cinque figure)

MODESTO PANETTI  
*Accademico Pontificio*

SVMMARIVM. — In aërodynamicis cuniculis interiori pressui obnoxiiis, quorum circuitus sit clausus et quattuor latera habeat, et in quorum angulis palulae exstant quae fluxionem deflectant, duae quaestiones expediendae sunt: altera statica, altera autem aedificatoria.

De utraque agit Auctor.

Priorem tractat, computans sollicitationem qua subiciuntur anuli elliptici quibus finitima segmenta inter se connectuntur, quique habentur ut fulera totam structuram sustinentia.

Ad alteram quaestionem solvendam, A. ad armatum caementum, quod antea compressum sit, attendit, sumens cuniculum consistere debere etiamsi interior pressus nimius sit vel nimis parvus, et armaturarum genera diversae formae diversaeque materiae singillatim perpendens.

PARTE PRIMA

PROBLEMA STATICO DELL'ANELLO ELLITTICO DI INTERSEZIONE

Il problema si presenta nei canali del vento, con circuito chiuso secondo i lati di un rettangolo, costituenti le gallerie aerodinamiche per le prove su modelli, in quanto per esse non si adottano raccordi fra i tronchi quasi cilindrici ad angolo retto, percorsi dalla corrente. La soprapressione è adottata come mezzo per elevare il numero di REYNOLDS corrispondente alle dimensioni del modello ed alla velocità della corrente. Si riduce così il divario fra le condizioni della prova e quelle di esercizio dell'aeromobile in vera grandezza.

---

(\*) Nota presentata il 6 marzo 1951.

POSIZIONE GEOMETRICA DEL PROBLEMA. — Riferito il gomito a 3 assi  $x$  ed  $y$ , coincidenti con gli assi dei corpi cilindrici di raggio  $R$  saldati insieme, e  $z$  normale ad essi, la linea intersezione è una ellisse di semiassi  $R$ , parallelo a  $z$ , ed  $R\sqrt{2}$  parallelo ad  $u$  a  $45^\circ$  con  $x$  e con  $y$  (fig. 1).

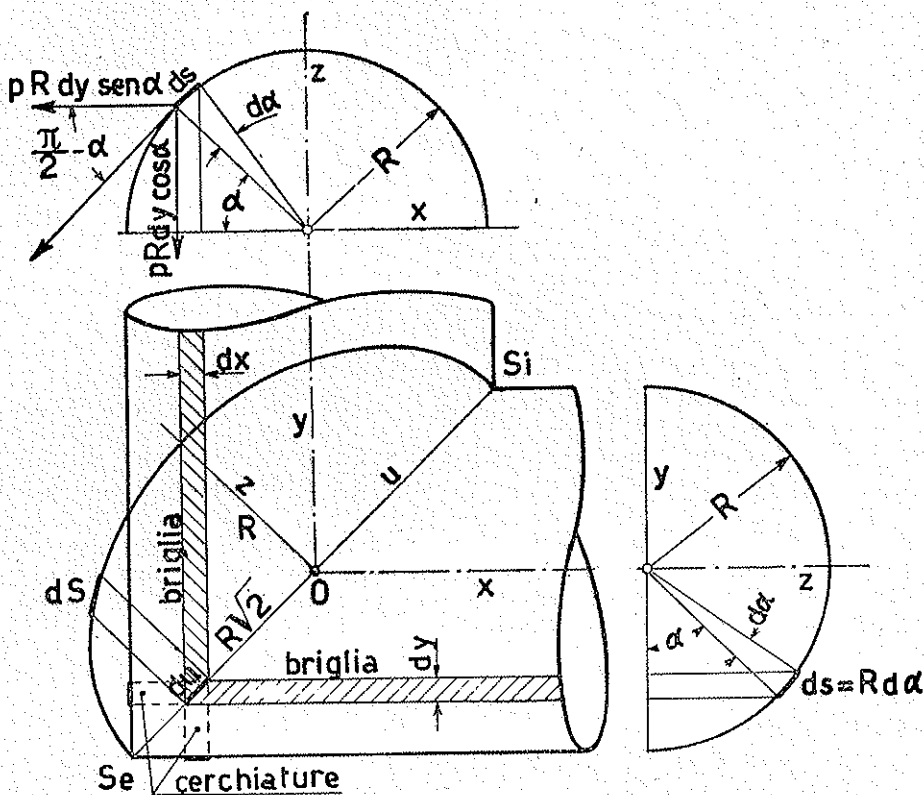


FIG. 1.

La sua equazione è quindi:

$$[1] \quad z^2 + \frac{1}{2} u^2 = R^2$$

e si può assumere come equazione dell'asse geometrico dell'anello  $S_e S_i$  ellittico di collegamento dei due tronchi cilindrici, nella ipotesi di pareti sottilissime.

Tale anello è sostegno dei perni delle pale deviatrici della corrente nel canale, la cui azione di irrigidimento dell'anello, viene, in un primo tempo, trascurata.

Assumiamo come parametro di posizione l'angolo  $\alpha$  che, in ciascuna delle due sezioni circolari di raggio  $R$ , i piani diametrali dei due corpi cilindrici, contenenti le generatrici che si tagliano nei punti dell'ellisse, formano col piano  $xy$  di riferimento.

Per il cilindro di asse  $x$  l'angolo  $\alpha$  si conta dalla direzione  $-y$ ; per quello di asse  $y$  dalla direzione  $-x$ . Quindi l'angolo  $\alpha$  cresce per entrambi i cilindri da zero a  $\pi$ , passando dallo spigolo esterno allo interno del gomito.

Gli elementi corrispondenti delle circonferenze sezioni dei corpi cilindrici sono dunque

$$ds = R d\alpha;$$

quello dell'ellisse è

$$[2] \quad dS = ds \sqrt{1 + \operatorname{sen}^2 \alpha},$$

come si deduce subito osservando che i due elementi hanno la stessa proiezione verticale  $dz$ , mentre alla proiezione orizzontale  $dx$  dell'elemento  $ds$  corrisponde la  $du = \sqrt{2} dx$  dell'elemento  $dS$ .

Se ora sulla parete del gomito isoliamo la striscia compresa fra due piani paralleli al piano  $xz$  distanti fra loro  $dy$ , tale striscia risulterà di 2 parti; l'una appartenente al cilindro di asse  $x$  e di raggio  $R$ , per la quale si ha

$$[3] \quad dy = R d\alpha \operatorname{sen} \alpha$$

l'altra appartenente al cilindro di asse  $y$  con direttrice circolare limitata all'arco di angolo al centro  $2\alpha$  sinmetrico rispetto al piano  $xy$ .

Tale striscia presenta in generale un punto angoloso in corrispondenza della saldatura fra l'elemento ad asse rettilineo del cilindro  $x$  e quello circolare del cilindro  $y$ , il quale ha nel suddetto punto la tangente inclinata dell'angolo  $\pi/2 - \alpha$  rispetto all'asse  $x$ . Per  $\alpha = \pi/2$  i due tronchi della striscia si saldano con tangente comune, parallela ad  $x$ .

Una analoga striscia si può isolare con due piani vicinissimi, paralleli al piano  $zy$  e distanti  $dx$ .

Diremo *corrispondenti* le striscie che si incrociano sullo stesso elemento  $dS$  della ellisse intersezione.

POSIZIONE STATICA DEL PROBLEMA. — Materializziamo la coppia di striscie sopra definite come elementi della parete resistente del gomito. Ciascuno di essi risulterà di due *briglie* coincidenti coi tronchi rettilinei e due *cerchiature* coincidenti coi tronchi ad arco di cerchio, che si incrociano e si saldano sull'anello ellittico. Supporremo uniforme lungo il perimetro  $2\pi R$  la ripartizione della spinta  $\pi R^2 p$  del corrispondente cilindro, indicando con  $p$  l'eccesso della pressione interna sulla esterna. Ne risulta la tensione per unità di lunghezza  $pR/2$ , e quindi, per l'arco elementare  $R d\alpha = dy/\text{sen } \alpha$ , la forza

$$[4] \quad \frac{pR}{2 \text{sen } \alpha} dy ,$$

diretta secondo la briglia, nel senso del semiasse  $+x$ .

Contemporaneamente l'elemento arcato della striscia (cerchiatura) sarà soggetto alla tensione assiale  $pR dy$ , essendo la circonferenza di raggio  $R$  la curva funicolare della pressione  $p$  normale ad essa.

Tale tensione nel punto di ancoramento sull'anello ellittico si seompona nelle componenti

$$[5] \quad pR dy \text{sen } \alpha \quad pR dy \text{cos } \alpha$$

rispettivamente parallela e normale alla [4].

La [4] e la prima delle [5] sono in opposizione e quindi la loro differenza

$$[6] \quad pR dy \left( \frac{1}{2 \text{sen } \alpha} - \text{sen } \alpha \right) = pR^2 d\alpha \left( \frac{1}{2} - \text{sen}^2 \alpha \right)$$

è la forza applicata ad ogni elemento  $dS$  dell'anello nella direzione di ciascun cilindro, positiva verso l'interno del gomito.

La somma delle [6] eseguita per il mezzo anello, limitato al piano diametrale  $xy$ , integrando da  $\alpha=0$  ad  $\alpha=\pi$ , è uguale a zero, cioè il mezzo anello ellittico è in equilibrio, poichè la spinta verso l'esterno del gomito trasmessa dalle cerchiature di ritenuta dell'unghia cilindrica di asse  $y$  è compensata dalla trazione delle briglie, che tappezzano la superficie cilindrica di asse  $x$ , come deve essere, per il fatto che le briglie o le cerchiature sostituiscono il fasciame del canale, in equilibrio.

Ma poichè una forza identica alla [6] è distribuita con la medesima legge nella direzione  $y$ , ed entrambe sono inclinate di  $45^\circ$  sul

piano dell'anello, se ne deduce che nel suo piano in direzione parallela all'asse maggiore, opera il carico orizzontale risultante

$$[7] \quad pR^2 \sqrt{2} \left( \frac{1}{2} - \operatorname{sen}^2 \alpha \right) d\alpha = pR^2 \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{2}} d\alpha .$$

Riferendo il carico verticale espresso dalla seconda delle [5] all'asse  $u$  e quello orizzontale dato dalla [7] all'asse  $z$ , si deducono le due espressioni seguenti

$$\frac{dU}{dz} \frac{pu}{2} \quad \frac{dZ}{du} = pR \sqrt{2} \cdot \frac{\frac{1}{2} - \frac{z^2}{R^2}}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{R^2}}}$$

che si vedono rappresentate nelle figure 2 e 3.

Il sistema delle forze fin qui considerate operanti sull'anello giace nel suo piano.

Sommando le [7] parallele ad  $u$  a partire da  $\alpha = 0$ , si ottiene

$$[8] \quad U = 0,353 pR^2 \operatorname{sen} 2\alpha$$

come espressione della risultante relativa alla sezione che corrisponde ad un valore generico di  $\alpha$ .

Scrivendo le [7] per il valore  $\alpha_1$  del parametro, intermedio fra zero ed  $\alpha$ , moltiplicandola per  $z - z_1 = R(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \alpha_1)$ , e integrando rispetto ad  $\alpha_1$  da zero ad  $\alpha$ , si deduce

$$[9] \quad M_{au} = \frac{pR^3 \sqrt{2}}{6} (1 - \cos^3 \alpha) ,$$

momento del carico orizzontale fra l'origine e la sezione di parametro  $\alpha$  dell'anello rispetto al baricentro della sezione.

Al tempo stesso la seconda delle [5], normale all'asse maggiore, si somma con altra identica trasmessa dalle cerchiature di ritenuta dell'altra unghia cilindrica, dando il carico verticale sul semianello

$$[10] \quad 2pR^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha d\alpha ,$$

diretto nel senso di  $-z$  operante cioè in modo di schiacciare l'anello nella porzione esterna del gomito ( $\alpha < \pi/2$ ) e dilatarlo nella interna ( $\alpha > \pi/2$ ).



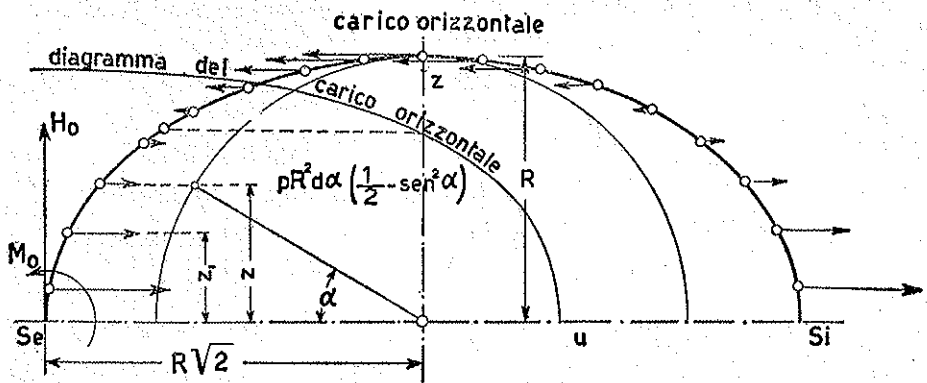


FIG. 2.

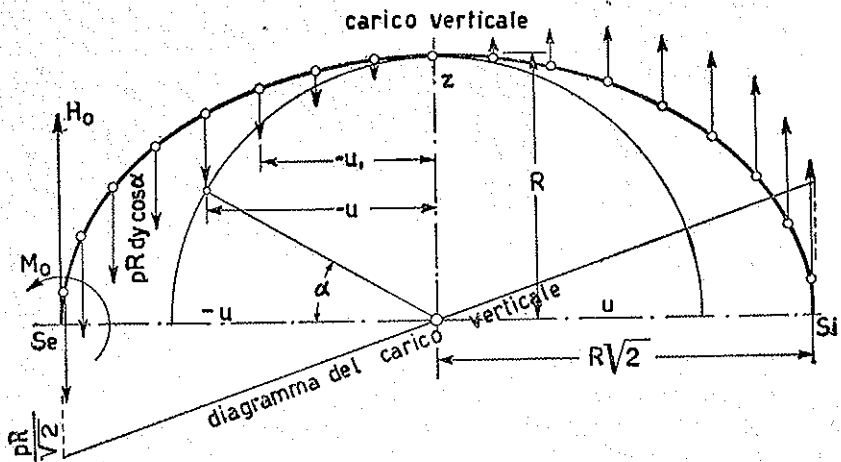


FIG. 3.

Sommando rispetto ad  $\alpha$  sempre a partire da zero si ha

$$[11] \quad Z = -p R^2 \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

risultante del carico verticale relativo alla sezione generica. Essa pure si annulla per  $\alpha = \pi$ .

Scrivendo la [10] per il valore  $\alpha_1$  del parametro compreso fra zero ed  $\alpha$ , moltiplicandola per

$$u - u_1 = R \sqrt{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha)$$

ed integrando rispetto ad  $\alpha$ , da zero ad  $\alpha$ , si deduce

$$[12] \quad M_{\alpha z} = \frac{pR^3\sqrt{2}}{3} [2 + \cos^3 \alpha - \cos \alpha]$$

momento di carico verticale fra l'origine e la sezione di parametרו  $\alpha$  dell'anello rispetto al baricentro della sezione.

CALCOLO DELLE IPERSTATICHE. - Il calcolo delle sollecitazioni dell'anello dipende da due iperstatiche: il momento di incastro  $M_0$  nella sezione di origine ( $\alpha=0$ ) e lo sforzo assiale  $H_0$  di compressione nella stessa sezione, trasmesso dal semianello inferiore al superiore. La simmetria dei carichi e quella geometrica ci assicurano che la terza iperstatica, cioè la componente secondo l'asse maggiore, è nulla.

Le equazioni risolvanti, considerando soltanto le deformazioni dovute al momento flettente  $M$  lungo il semianello, sono dunque

$$[13] \quad \int_0^\pi M dS = 0 \quad \int_0^\pi M(R\sqrt{2} - u) dS = 0$$

supposto costante il momento d'inerzia della sezione dell'anello. Esse dicono che la sezione terminale (corrispondente ad  $\alpha = \pi$ ) non ruota, nè si sposta in direzione normale al semiasse maggiore dell'ellisse, se la sezione iniziale è fissa.

Supposta soddisfatta la prima delle [13] la seconda, tenuto presente il valore di  $u$ , si riduce a

$$\int_0^\pi M \cos \alpha dS = 0 .$$

Sostituito a  $dS$  il suo valore [2] le equazioni di condizione diventano

$$[14] \quad \int_0^\pi M \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \cdot d\alpha = 0 \quad \int_0^\pi M \cos \alpha \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} d\alpha = 0 .$$

Per dare la soluzione delle [14] occorre esprimere il momento flettente  $M$  in funzione delle iperstatiche  $M_0$  ed  $H$  e dei momenti relativi al baricentro della sezione generica dell'anello, dovuti ai carichi orizzontali e verticali, indicato coi simboli  $M_{\alpha u}$  ed  $M_{\alpha z}$  (formole [9] e [12]).

Si ha

$$M = M_0 - H_0(R\sqrt{2} + u) + M_{\alpha u} + M_{\alpha z} ,$$

supposti sempre positivi i momenti di verso anti orario.

Fatte le sostituzioni e posto

$$M = mpR^3\sqrt{2} \quad M_0 = m_0pR^3\sqrt{2} \quad H_0 = h_0pR^2$$

si deduce

$$[15] \quad m = m_0 - h_0(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{6}(1 - \cos^3 \alpha) + \frac{1}{3}(2 + \cos^3 \alpha) - \cos \alpha .$$

Sostituendo nella prima delle [14] dopo averla divisa per  $pR^3\sqrt{2}$  si ottiene

$$\left(m_0 - h_0 + \frac{5}{6}\right) \int_0^\pi \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \, d\alpha + (h_0 - 1) \int_0^\pi \cos \alpha \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \, d\alpha + \\ + \frac{1}{6} \int_0^\pi \cos^3 \alpha \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \, d\alpha = 0 .$$

Ora il 2° ed il 3° integrale sono nulli, mentre il 1° è diverso da zero; si ha quindi

$$[16] \quad h_0 - m_0 = \frac{5}{6} .$$

Dalla seconda delle [14] si deduce

$$(h_0 - 1) \int_0^\pi \cos^2 \alpha \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \, d\alpha + \frac{1}{6} \int_0^\pi \cos^4 \alpha \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} \, d\alpha = 0 .$$

Detotti i valori numerici dei due integrali della precedente formula, rispettivamente uguali ad 1,748 ed 1,269 <sup>(1)</sup>, si ricava  $h_0 = 0,879$  e dalla [16]  $m_0 = 0,046$ , risolvendo così l'iperstaticità del problema.

CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI. - Dalla [15] combinata con la [16] si deduce l'espressione del momento flettente in funzione del parametro  $\alpha$

$$[17] \quad m = \frac{M}{pR^3\sqrt{2}} = (h_0 - 1) \cos \alpha + \frac{1}{6} \cos^3 \alpha .$$

(1) L'Istituto per le applicazioni del calcolo del C. N. R. ha cortesemente segnalato allo scrivente che i tre integrali delle formole risolventi si esprimono per mezzo degli integrali ellittici completi di 1ª e di 2ª specie, dandone i valori numerici.

Finalmente, sommando  $h_0$  con  $\frac{Z}{pR^2}$  dato dalla [11], si deduce il valore della componente verticale della risultante relativa alle diverse sezioni

$$[18] \quad h = h_0 - \text{sen}^2 \alpha ,$$

mentre la [8] ne dà la componente orizzontale

$$[19] \quad t = \frac{U}{pR^2} = 0,353 \text{ sen } 2\alpha .$$

Il seguente prospetto riassume i valori adimensionali delle due componenti  $h$  e  $t$  della risultante e del momento flettente  $m$  nelle sezioni dell'anello

|                |       |      |      |      |      |       |
|----------------|-------|------|------|------|------|-------|
| per $\alpha =$ | 0°    | 10°  | 20°  | 30°  | 40°  | 45°   |
| 100 $h =$      | 88    | 85   | 76   | 63   | 47   | 38    |
| 100 $t =$      | 0     | 12   | 23   | 31   | 35   | 35    |
| 100 $m =$      | 4,6   | 4,0  | 2,4  | 0,31 | -1,8 | -2,66 |
| per $\alpha =$ | 50°   | 60°  | 70°  | 80°  | 90°  |       |
| 100 $h =$      | 29    | 13   | 0    | -9   | -12  |       |
| 100 $t =$      | 35    | 31   | 23   | 12   | 0    |       |
| 100 $m =$      | -3,35 | -4,0 | -3,5 | -2,0 | 0    |       |

Per gli angoli supplementari del 2° quadrante  $h$  ha i medesimi valori,  $t$  e  $m$  cambiano soltanto di segno.

La risultante relativa a ciascuna sezione taglia sull'orizzontale e sulla verticale, uscenti per il suo baricentro, i seguenti  $\frac{m}{h} R \sqrt{2}$  ed  $\frac{m}{t} R \sqrt{2}$ , a destra e sotto il baricentro, se positivi, nel riferimento adottato. Con essi si traccia la schiera delle successive rette di azione visualizzando il comportamento dell'anello (fig. 4).

È facile vedere che per diametri ragguardevoli del raggio  $R$  e per soprapressioni  $p$  di un certo valore il cimento a flessione dell'anello sarebbe gravissimo.

All'estremità dell'asse maggiore si ha di fatto

$$M_0 = 0,046 p R^3 \sqrt{2}$$

che, per  $R = m. 2,50$  e  $p = 2 \text{ kg/cm}^2$ , raggiunge il valore di 20000 kg.m.

Ma nei gomiti delle gallerie aerodinamiche si collocano le palette deviatrici per assicurare il deflusso regolare ed uniforme della corrente.

La schiera delle suddette pale allineate entro ciascuno degli anelli ellittici, costituisce una struttura capace di prendere su di sè la maggior parte delle sollecitazioni; in particolare il carico verticale che cimenta a compressione gli assi delle pale situati verso l'esterno

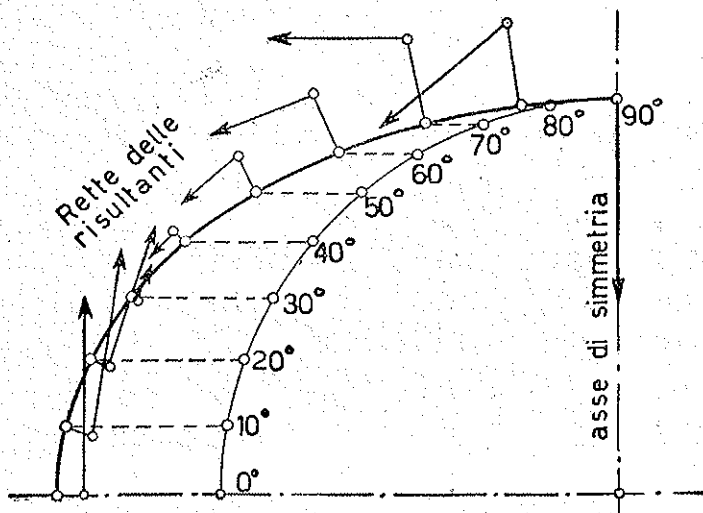


Fig. 4.

del gomito ed a trazione quelli collocati nella parte interna di esso. Il carico orizzontale simmetricamente distribuito rispetto all'asse minore, come risulta dalla [7], che non cambia sostituendo  $\pi - \alpha$  ad  $\alpha$  può facilmente essere sopportato se gli assi delle pale si incastrano nell'anello.

Naturalmente l'azione direttrice delle pale sulla corrente eccita per reazione un carico dinamico su ciascuna pala uguale alla variazione della quantità di moto, la quale, nella ipotesi della distribuzione uniforme del flusso, è proporzionale alla lunghezza di ciascuna pala cioè all'ordinata dell'ellisse di equazione [1] se le pale della schiera sono equidistanti.

## PARTE SECONDA

## ESECUZIONE DEL FASCIAME CON CEMENTO PRECOMPRESSO

La struttura resistente di parete, soggetta al cimento longitudinale e periferico espressi dalla [6] e dalla seconda delle [5] della parte prima rispettivamente, può essere costituita da due elementi collaboranti: il conglomerato cementizio ed il ferro dell'armatura. In tal caso è particolarmente raccomandabile l'uso del cemento precompresso per mezzo di un'armatura applicata con forzamento iniziale, ciò per limitare sollecitazioni a trazione nella massa cementizia.

L'effetto del forzamento è tanto più duraturo quanto maggiore è la stagionatura del getto cementizio, che verrà armato leggermente per sopportare le sollecitazioni secondarie del peso proprio.

Di queste non teniamo conto nella trattazione presente, come non conteggiamo le maggiori sollecitazioni che la deviazione della corrente nei gomiti induce nell'armatura longitudinale, e ciò per lasciare in piena luce il fenomeno principale.

Supporremo invece che il canale del vento debba essere utilizzato non solo per una soprapressione  $p$ , considerata nei precedenti calcoli, ma anche in depressione, espressa in valore assoluto da  $-p_1$ , potendo  $p_1$  accostarsi al valore limite di  $1 \text{ kg/cm}^2$ , che raggiungerebbe nel caso del vuoto.

L'uso delle gallerie in depressione può di fatto permettere la risoluzione di speciali problemi di aerodinamica, quali quelli che riguardano il volo ad alta quota.

In ogni caso esse costituiscono grandi serbatoi utilizzabili per produrre correnti intermittenti a velocità ipersoniche, utili allo studio di questi moti attraverso a tubi di Venturi, che mettano in comunicazione l'ambiente esterno a pressione atmosferica con la capacità del canale del vento, nel quale sia stato fatto preliminarmente il vuoto.

Il funzionamento in depressione, eccitando sollecitazioni a compressione nel fasciame, tanto in direzione longitudinale, quanto perifericamente, definisce il problema del forzamento, che avrebbe infinite soluzioni possibili, se impostato soltanto nel caso del canale in soprapressione.

CONDIZIONI DELLA RESISTENZA PERIFERICA. — Indicheremo con  $C$  e con  $F$  le sezioni resistenti del conglomerato cementizio e del ferro dell'armatura periferica di forzamento, entrambe per unità di lunghezza del tubo.

La  $C$  è senz'altro lo spessore del fasciame.

Daremo ad  $F$  il nome di *densità longitudinale della cerchiatura*.

Diremo *stato di coazione* del getto quello che in esso è provocato dal forzamento, effettuato dopo il suo ritiro di presa, regnando all'interno ed all'esterno del canale la stessa pressione atmosferica.

Dette  $\sigma$  le tensioni unitarie, contraddistinte con gli indici  $c$  ed  $f$  per i due materiali e con gli apici  $o$  nello stato di coazione, 1 nella sollecitazione con sopra pressione esterna, senza apice in quella con sopra pressione interna, si hanno le relazioni seguenti, nelle quali le  $\sigma$  positive corrispondono a sollecitazioni a trazione, e le negative a compressione.

$$[1] \quad \sigma_c^o C + \sigma_f^o F = 0 \qquad [2] \quad \sigma_c C + \sigma_f F = p R$$

$$[3] \quad \sigma_c' C + \sigma_f' F = p_1 R .$$

In oltre il passaggio dallo stato di riposo alla sollecitazione per eccesso di pressione interna, come a quella per eccesso di pressione esterna, deve avvenire in modo che le deformazioni provocate dai due passaggi anzidetti siano uguali in  $C$  ed  $F$ .

Detto quindi  $n = E_f/E_c$  (rapporto dei moduli di elasticità delle due strutture) deve essere

$$[4] \quad \sigma_f - \sigma_f^o = n(\sigma_c - \sigma_c^o) \qquad [5] \quad \sigma_f' - \sigma_f^o = n(\sigma_c' - \sigma_c^o)$$

Fra le precedenti equazioni si eliminano subito  $\sigma_f^o$  e  $\sigma_c^o$ , ottenendo

$$[6] \quad \sigma_f - \sigma_f' = n(\sigma_c - \sigma_c') ,$$

che del resto si può scrivere direttamente, applicando il principio sopra enunciato al passaggio diretto fra i due stati di sollecitazione.

La [6] permette di dedurre  $\sigma_f'$  se sono fissate  $\sigma_c$ ,  $\sigma_c'$ ,  $\sigma_f$ , che rappresentano i limiti di lavoro dei materiali adoperati.

Le grandezze da determinare si riducono allora a 4 e sono  $\sigma_c^o$ ,  $\sigma_f^o$ ,  $C$ ,  $F$ .

Abbiamo di fatto a disposizione le prime 4 equazioni.

La [3] è già stata utilizzata per mezzo della [6] che ne è conseguenza, quando si tenga presente la [4].

PROPORZIONAMENTO DELLA STRUTTURA. — Sostituendo nella [3] a  $\sigma_f'$  il suo valore deducibile dalla [6] si ha con essa e con la [2] il sistema di equazioni per il proporzionamento della struttura

$$\sigma_c \frac{C}{R} + \sigma_f \frac{F}{R} = p \quad \frac{C}{R} + n \frac{F}{R} = \frac{p - p_1}{\sigma_c - \sigma_c'}$$

Risulta subito che, per dati valori delle pressioni e tensioni massime ammissibili, C ed F variano proporzionalmente al raggio R del canale.

Si deduce

$$[7] \quad \frac{C}{R} = \frac{(p - p_1) \frac{\sigma_f}{\sigma_c - \sigma_c'} - n p}{\sigma_f - n \sigma_c} \quad \frac{F}{R} = \frac{p - (p - p_1) \frac{\sigma_c}{\sigma_c - \sigma_c'}}{\sigma_f - n \sigma_c}$$

Ora i secondi termini a numeratore ed a denominatore della prima delle [7] sono abbastanza piccoli rispetto ai primi; quindi il rapporto fra lo spessore C del fasciame del canale ed il suo raggio varia poco con la tensione  $\sigma_f$  ammessa nella armatura metallica. Si può cioè prossimamente assumere

$$[8] \quad \frac{C}{R} = \frac{(p - p_1)}{(\sigma_c - \sigma_c')}$$

Supposta la soprapressione  $p$  di 2 atmosfere e la depressione  $-p_1$  di 1 atmosfera (valore limite) ed attribuiti a  $\sigma_c$  e  $-\sigma_c'$  i valori 10 e 30 kg/cm<sup>2</sup> risulta  $C/R = 3/40$ .

Di fatto, facendo variare  $\sigma_f$  da 1500 kg/cm<sup>2</sup> (tondi di ferro omogeneo) a 10000 kg/cm<sup>2</sup> (fili di acciaio) si passa per C/R da 0,066 a 0,074.

Ha invece sensibile influenza la tensione positiva massima ammessa per il conglomerato cementizio. Se, ad esempio, invece di  $\sigma_c = 10$  kg/cm<sup>2</sup> si ritenesse necessario, per evitare la fessurazione, limitarsi a  $\sigma_c = 5$  kg/cm<sup>2</sup>, si avrebbe dalla [8]  $1000 C/R = 94$ .

Finalmente, come è naturale, col crescere di  $\sigma_f$  da 1500 a 10000, il rapporto  $1000 F/R$  diminuisce rapidamente da 0,89 a 0,126.



Riducendo la sollecitazione massima a trazione del conglomerato a  $5 \text{ kg/cm}^2$ , con l'armatura metallica in fili di acciaio ( $\sigma_r = 10000$ ) si ha

$$1000 \frac{F}{R} = 0,158 .$$

Si possono pure calcolare le tensioni di forzamento  $\sigma_c^0$  e  $\sigma_r^0$  per mezzo delle [1] e [4], dalle quali, posto

$$A = \frac{\sigma_r - n\sigma_c}{n \frac{F}{R} + \frac{C}{R}}$$

si deduce

$$[9] \quad \sigma_c^0 = -A \frac{F}{R} \quad \sigma_r^0 = A \frac{C}{R} .$$

Adottando per  $C/R$  ed  $F/R$  gli ultimi valori sopra registrati si ottiene

$$\sigma_c^0 = -18,4 \quad \sigma_r^0 = 9776$$

Riassumendo i risultati ottenuti per stabilire un confronto fra le due soluzioni:

con armatura di forzamento in ferro omogeneo

| $\sigma_c'$ | $\sigma_c$ | $\sigma_r$ | $\sigma_r'$ | $\sigma_c^0$ | $\sigma_r^0$ | $1000 \frac{C}{R}$ | $1000 \frac{F}{R}$ |
|-------------|------------|------------|-------------|--------------|--------------|--------------------|--------------------|
| -30         | 10         | 1500       | 1100        | -16,6        | 1230         | 66                 | 0,89               |

con armatura di forzamento in filo di acciaio

|     |   |       |      |       |      |    |       |
|-----|---|-------|------|-------|------|----|-------|
| -30 | 5 | 10000 | 9650 | -18,4 | 9776 | 94 | 0,158 |
|-----|---|-------|------|-------|------|----|-------|

È lecito concludere che, col secondo tipo, la tensione nell'armatura varia pochissimo passando dallo stato di forzamento a quello di lavoro sia nel regime di soprapressione sia in quello di depressione interna, mentre nel primo tipo tali variazioni sono assai più accentuate.

ARMATURA LONGITUDINALE. - Le equazioni di condizione per il forzamento longitudinale sono identiche a quelle per la resistenza periferica, ove si sostituisca ad  $R$  l'area  $\pi R^2$  della sezione interna del

tubo, e si indichino con (F) e (C) le sezioni totali dell'armatura longitudinale e del tubo in conglomerato cementizio.

Il problema però si presenta in modo alquanto differente, essendo già determinata, col calcolo della resistenza periferica, la sezione anulare del tubo in conglomerato cementizio.

La [2] scritta con le varianti sopra indicate, diventa allora

$$[2'] \quad \sigma'_c \cdot 2\pi R^2 \frac{C}{R} + \sigma_r(F) = p\pi R^2 .$$

Se quindi fissiamo i valori di  $\sigma_c$  e di  $\sigma_r$ , possiamo subito dedurre

$$(F) : \pi R^2 = \frac{p - 2\sigma_c \frac{C}{R}}{\sigma_r}$$

e, introducendo anche per l'armatura longitudinale la *densità* lungo il perimetro

$$F' = \frac{(F)}{2\pi R}$$

si ottiene

$$[7'] \quad \frac{F'}{R} = \frac{p - 2\sigma_c \frac{C}{R}}{2\sigma_r} = \frac{0,227}{1000} \quad \text{ovvero} \quad \frac{0,050}{1000} ,$$

rispettivamente per le due soluzioni già considerate nel precedente numero.

Il rapporto fra la densità longitudinale delle cerchiature  $F/R$  e quella periferica delle briglie  $F/R$  è dunque prossimo a 4 per l'armatura con ferro omogeneo, ed a 3 per quella in filo di acciaio.

Questo risultato può sembrare in contraddizione con la nota proprietà che in un tubo cilindrico chiuso la sollecitazione periferica è soltanto doppia della longitudinale, mentre qui l'armatura resistente alla prima risulta tripla o quadrupla di quella corrispondente alla seconda.

Ma la divergenza appare subito logica se si osserva che il conglomerato cementizio, collaborante col ferro dell'armatura per resistere alle sollecitazioni, ha, rispetto al cemento longitudinale, una sezione eccessiva, essendo stato proporzionato rispetto al cemento periferico.

Rimangono a determinare le 4 tensioni

$$\sigma_c^0 \quad \sigma_r^0 \quad \sigma'_c \quad \sigma'_r$$

per le quali sono a disposizione le equazioni [1] [3] [4] [6] scritte le prime due, sostituendo  $F'$  ad  $F$   $p_i/2$  a  $p_i$ .

Combinando la [1] con la [4] si deducono quindi le [9] con la sola sostituzione di  $F'$  per il calcolo di  $\sigma_c^0$  e di  $\sigma_r^0$ .

Finalmente, per il calcolo delle tensioni operanti nella galleria in depressione, basta combinare la [3] con la [6] ossia

$$\sigma'_c \frac{C}{R} + \sigma'_r \frac{F'}{R} = \frac{p_i}{2} \quad \sigma'_r - n \sigma'_c = \sigma_r - n \sigma_c,$$

dalle quali si deduce

$$[10] \quad \sigma'_c = \frac{\frac{p_i}{2} + (n \sigma_c - \sigma_r) \frac{F'}{R}}{\frac{C}{R} + n \frac{F'}{R}} \quad \sigma'_r = \frac{n \frac{p_i}{2} - (n \sigma_c - \sigma_r) \frac{C}{R}}{\frac{C}{R} + n \frac{F'}{R}}.$$

Si ha di conseguenza  
per l'armatura in omogeneo

$$\sigma'_c = -11,9 \quad \sigma'_r = 1275$$

per l'armatura in fili di acciaio

$$\sigma'_c = -10,9 \quad \sigma'_r = 9800$$

**ARMATURA A MAGLIE ROMBICHE.** - Alle armature distinte, con funzione di cerchiature le une e di briglie le altre, si può sostituire una armatura simmetrica con la doppia funzione a maglie rombiche, costituita di barre tutte di ugual sezione e sottoposte tutte allo stesso sforzo di trazione  $T$ .

Disponendo le diagonali maggiori dei rombi secondo il perimetro circolare delle sezioni rette del tubo con angolo al vertice  $2\beta$  e le minori in direzione longitudinale con angolo  $\pi - 2\beta$ , si rende operante secondo il perimetro lo sforzo  $2T \cos \beta$  con passo  $2a \sin \beta$

( $a$  è il lato del rombo), quindi la densità longitudinale della cerchiatura, alla quale l'armatura a maglie rombiche equivale, è

$$[11] \quad \frac{T}{a \sigma_r} \cot \beta ;$$

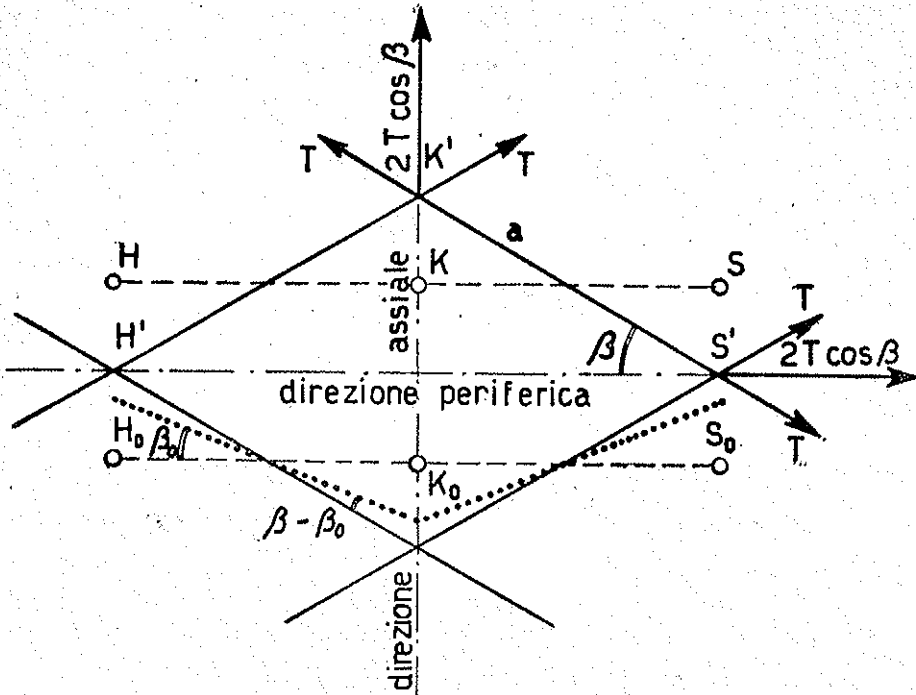


Fig. 5.

analogamente è operante in direzione longitudinale lo sforzo  $2T \sin \beta$  con passo  $2a \cos \beta$  e vi corrisponde una densità periferica dello imbrigliamento longitudinale equivalente

$$[12] \quad \frac{T}{a \sigma_r} \operatorname{tg} \beta .$$

Il rapporto delle due densità dell'armatura rombica, che indicammo con  $F/F'$  nella trattazione precedente, è dunque

$$[13] \quad \frac{F'}{F} = \cot^2 \beta$$

Ricorrendo alla [7] e [7'] si deduce in generale

$$[14] \quad \cot^2 \beta = 2 \frac{p_1 \sigma_c - p \sigma'_c}{p \left(1 + n \frac{\sigma_c}{\sigma_f}\right) (\sigma_c - \sigma'_c) - 2(p - p_1) \sigma'_c}$$

ovvero, per piccoli valori del rapporto  $n\sigma_c/\sigma_f$ ,

$$[14'] \quad \cot^2 \beta = \frac{p_1 \sigma_c - p \sigma'_c}{p_1 \sigma_c - \left(\frac{p}{2}\right) (\sigma_c + \sigma'_c)}$$

che sarebbe indipendente da  $\sigma'_f$ .

Effettivamente la [14'], nel caso dell'armatura in ferro omogeneo per la quale si adottò  $\sigma_c = 10$ , non è sufficientemente approssimata, e bisogna quindi ricorrere alla [14].

Lo è invece per l'armatura in fili di acciaio, per la quale coi valori più volte citati

$$\sigma_c = 5 \quad \sigma'_c = -30 \quad p = 2 \quad p_1 = -1$$

si ha  $\cot^2 \beta = 2,75$  e quindi  $\beta = 31^\circ - 10'$  come la figura 5 indica.

L'armatura a maglie rombiche si può creare anche con cerchiature disposte con passo  $a \sin \beta$ , oppure con un unico filo avvolto secondo un'elica col suddetto passo, accostando a forza (secondo il brevetto Ing. TOURNON) i punti HKS di uno stesso filo, distanziati di  $a \cos \beta$ , alternativamente alla spira che precede ed a quella che segue, e fissando i fili a contatto in H'K'S' con opportuni legacci.

Però l'allungamento che si deve produrre in ogni tratto lungo  $a \cos \beta$  per ottenere che raggiunga la lunghezza  $a$ , ossia l'allungamento unitario

$$[15] \quad \frac{1}{\cos \beta} - 1$$

è di gran lunga superiore a quello che i limiti di elasticità definiscono, se l'angolo  $\beta$  deve essere quello dianzi calcolato per ottenere il voluto rapporto fra densità di armatura in direzione longitudinale ed in direzione periferica.

Di fatto uguagliando la [15] allo allungamento elastico  $\sigma_f/E$ , anche supponendo  $\sigma_f = 100 \text{ kg/mm}^2$  e sostituendo ai fili di acciaio i cavi

semplici che hanno un modulo di elasticità più basso ( $=18000 \text{ kg/mm}^2$ ) si deduce  $\beta_1 = 6^\circ - 35'$  invece di  $31^\circ - 10'$ .

Bisognerebbe quindi avvolgere il flessibile, senza tensione, secondo una spezzata  $H_0 K_0 S_0$  (fig. 5) a lati uguali con angoli al vertice  $\pi - 2\beta_0$  avente per linea media l'elica di passo  $a \text{ sen } \beta$ , e poi generarvi il forzamento, al quale corrisponde l'allungamento elastico unitario  $\sigma_f/E$  sopra calcolato.

La condizione del problema è quindi espressa da

$$\frac{1}{\cos \beta} - \frac{1}{\cos \beta_0} = \frac{\sigma_f}{E}$$

la quale, essendo  $\beta - \beta_0$  assai piccola e quindi

$$\cos \beta_0 = \cos \beta + (\beta - \beta_0) \text{ sen } \beta$$

si riduce a

$$\beta - \beta_0 = \frac{\sigma_f}{E} \frac{1}{\text{sen } \beta},$$

che, per il valore sopra ricordato  $\beta = 31^\circ - 10'$  dà

$$\beta_0 = \beta - (0^\circ - 38') = 30^\circ - 32'.$$

Se non che la realizzazione di questo forzamento richiederebbe che nel getto cementizio fosse preveduto, in corrispondenza di ogni vertice della spezzata, un infisso sporgente dalla parete cilindrica esterna del getto, sagomato, in modo di offrire l'appoggio al flessibile senza tensione, a piccola distanza dalla parete stessa, e di assicurare il forzamento, nella esatta misura, quando lo si costringesse ad adagiarsi sulla parete, ciò che costituisce una esigenza non compatibile con la tecnica delle costruzioni cementizie.

Appare quindi più pratica la soluzione di tenere distinta la armatura longitudinale, ancorandola agli anelli ellittici dei gomiti studiati nella prima parte di questa nota, anche volendo realizzare il forzamento dell'armatura periferica, costringendola a disporsi secondo la spezzata serpeggiante con la inclinazione definita dall'angolo  $\beta$ , come sopra calcolato, rispetto alla elica media.



## SOPRA LE INVOLUZIONI APPARTENENTI AD UNA VARIETÀ DI PICARD (\*)

A. ANDREOTTI

SUMMARY. — Theoremata ENRIQUES-SEVERI, de possibilitate generandi, per birationales transformationes, involutiones quae insunt in superficiebus hyperellipticis, ad varietates Abelianas extenduntur.

La classificazione delle superficie iperellittiche, com'è stata fatta nelle classiche memorie di ENRIQUES-SEVERI e BAGNERA-DE FRANCHIS<sup>(1)</sup>, riposa essenzialmente sopra i fatti seguenti:

a) ogni corrispondenza razionale  $(1, n)$  fra due superficie iperellittiche di rango uno  $F, F'$ , dà luogo su  $F'$  ad una involuzione generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali di 2<sup>a</sup> specie di  $F'$  in sè;

b) ogni involuzione sopra una superficie iperellittica di rango uno, la quale possenga un numero finito di coincidenze e non sia composta con un'involuzione abeliana di rango uno, è generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali della superficie sostegno, in sè.

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 15 maggio 1951.

<sup>(1)</sup> ENRIQUES-SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, « Acta Mathematica », t. 32 e 33 pagg. 283-392 e 321-403; prix Bordin, 1907; BAGNERA-DE FRANCHIS, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti*, « Memorie della società italiana delle scienze (detta dei XL) », s. 3, t. 15, pag. 251-343 (1908). La prima dimostrazione completa dei teoremi sottoindicati è di ENRIQUES-SEVERI; solo più tardi DE FRANCHIS (« Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », giugno 1936) riuscì a liberare da ogni ipotesi restrittiva la dimostrazione addotta nella citata Memoria.

In questa nota ci proponiamo di estendere questi teoremi alle varietà abeliane di dimensione qualsiasi (n. 1-3) <sup>(1)</sup>.

L'estensione non presenta eccessive difficoltà (se si suppone che la varietà immagine della involuzione abbia almeno un plurigenere uguale ad 1), ma ci pare opportuno rilevare come solo in questa direzione sia lecito ricercare un ampliamento del campo di validità di detti teoremi. Si è cercato infatti di trasportare ad una superficie algebrica qualunque (e poi ad una varietà) un teorema analogo al teorema *b* asserendo la possibilità di generare con trasformazioni birazionali ogni involuzione dotata di un numero finito di coincidenze. L'asserzione si è dimostrata erronea dopo alcuni esempi adottati da DANTONI e recentemente da GAETA <sup>(2)</sup>, pur rimanendo aperta l'ipotesi che la non validità del teorema dipendesse come nell'esempio di DANTONI dalla assoluta mancanza di coincidenze o, come in quello di GAETA dalla presenza di curve fondamentali. Ebbene qui proviamo che nella forma suaccennata il teorema è *falso già sulle superficie iperellittiche* adducendo come esempio una involuzione con un numero finito non nullo di coincidenze e priva di curve fondamentali. La ragione di questo fenomeno viene illustrata al n. 4.

1. - Cominciamo a dimostrare che *una varietà  $W_p$  d'irregolarità superficiale  $p$ , immagine d'una involuzione sopra una varietà di PICARD  $V_p$  è essa stessa una varietà di PICARD e l'involuzione su  $V_p$  si genera con un gruppo di trasformazioni birazionali di 2<sup>a</sup> specie.*

Indichiamo invero con  $\Omega = (\Omega_{rs})$  ( $r = 1, \dots, p$ ;  $s = 1, \dots, 2p$ ) la matrice dei periodi degli integrali semplici di prima specie  $U_1, \dots, U_p$  di  $W_p$  e con  $\omega = (\omega_{rs})$  ( $r = 1, \dots, p$ ;  $s = 1, \dots, 2p$ ) l'analoga matrice per gli integrali semplici di prima specie  $u_1, \dots, u_p$  di  $V_p$ . Siano:

$$[1] \quad \begin{cases} U_i(y) \equiv \sum_{h=1}^p \lambda_{ih} u_h(x) + c_i \\ i=1, \dots, p \end{cases} \quad (\text{mod } \omega)$$

<sup>(1)</sup> Si veda per problema la rubrica « Problemi, risultati e discussioni » dei « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », s. 5, t. 4, pag. 108; (1948).

<sup>(2)</sup> GAETA, *Sull'esistenza di una serie infinita discontinua di trasformazioni razionali...* « Atti dell'Istituto Veneto », t. 109, pag. 135-139; (1950).



le equazioni trascendenti della corrispondenza fra  $W_p$  e  $V_p$ , e

$$[2] \quad \begin{cases} \sum_1^p \lambda_{ih} \omega_{hr} = \sum_1^{2p} \alpha_{rs} \Omega_{is} \\ i=1, \dots, p; r=1, \dots, 2p \end{cases}$$

le corrispondenti relazioni di HURWITZ.

Poichè il determinante delle  $\lambda_{ih}$  è diverso da zero, possiamo cambiare su  $V_p$  gli integrali  $u_1, \dots, u_p$  e sostituirli con gli integrali  $v_i = \sum_1^p \lambda_{ih} u_h$ . Con ciò le equazioni [1], [2] assumono la forma

$$\begin{cases} U_i(y) \equiv v_i(x) + c_i \pmod{\omega} \\ i=1, \dots, p \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_{ir} = \sum_1^{2p} \alpha_{rs} \Omega_{is} \\ i=1, \dots, p; r=1, \dots, 2p \end{cases}$$

avendo indicato con  $\omega = (\omega_{rs})$  ancora la matrice dei periodi dei nuovi integrali  $v_i$ .

Cambiando il sistema di periodi primitivi di  $\Omega$  e  $\omega$ , si può far sì che  $(\alpha_{rs})$ , che in tal guisa viene moltiplicata a destra e a sinistra per matrici unimodulari, si riduca alla forma diagonale canonica. In tal modo le [2] assumono la forma

$$\begin{cases} \omega_{ir} = v_r \Omega_{ir} \\ i=1, \dots, p; r=1, \dots, 2p \end{cases}$$

colle  $v_r$  interi (che possono suppersi positivi e ciascuno divisore del successivo).

È chiaro allora che l'involuzione<sup>(1)</sup> esistente su  $V_p$  è generata dal gruppo delle trasformazioni di 2<sup>a</sup> specie date al variare delle  $\mu$  frai numeri interi dalle equazioni

$$\begin{cases} v_i(y) \equiv v_i(x) + \sum_1^{2p} \mu_r \frac{\omega_{ir}}{v_r} \\ i=1, \dots, p \end{cases}$$

ciò dimostra l'asserto.

Per  $p = 2$  si ritrova il teorema  $\alpha$  dell'introduzione.

(1) D'ordine  $\alpha = \text{Det}(\alpha_{rs}) = v_1 v_2 \dots v_{2p}$ .

2. - Veniamo all'estensione del teorema **b**: *Ogni involuzione sopra una varietà di PICARD  $V_p$ , possedente al più  $\infty^{p-2}$  coincidenze con almeno un plurigenere uguale ad uno e non composta con un'involuzione abeliana di rango uno <sup>(1)</sup>, è generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali della varietà di PICARD  $V_p$  in sè.*

Osserviamo subito che se la varietà  $W_p$  immagine dell'involuzione ha un plurigenere  $P_n=1$ , non vi possono essere su  $V_p$  punti coniugati nell'involuzione a varietà a  $p-1$  dimensioni. Infatti, consideriamo su  $W_p$  l' $n$ -esima forma tensoriale <sup>(2)</sup> corrispondente all' $n$ -genere di  $W_p$

$$A(y_1, \dots, y_{p+1}) \left( \frac{\partial(y_1, \dots, y_p)}{\partial(s_1, \dots, s_p)} \right)^n$$

essendo  $y_1, \dots, y_{p+1}$  le coordinate non omogenee di un punto corrente su  $W_p$  supposta immensa in uno spazio lineare a  $p+1$  dimensioni  $(y_1, \dots, y_{p+1})$  ed  $A$  una funzione razionale su  $W_p$  la cui varietà di zero, fuori della sezione di  $W_p$  coll'iperpiano improprio è una varietà  $n$ -canonica di  $W_p$ .

Mediante la trasformazione razionale  $\tau$  essa si muta nella forma tensoriale che dà l' $n$ -genere di  $V_p$ , la quale, quando si assumono come variabili indipendenti su  $V_p$  le  $p$  variabili uniformizzanti la varietà:  $u_1, \dots, u_p$  (cioè in altri termini i suoi  $p$  integrali semplici di prima specie) assume la forma:

$$\left( \frac{\partial(u_1, \dots, u_p)}{\partial(\sigma_1, \dots, \sigma_p)} \right)^n$$

In due punti  $a, b$  coniugati nella involuzione dovrà essere

$$\left( \frac{\partial(u_1, \dots, u_p)}{\partial(\sigma_1, \dots, \sigma_p)} \right)_{(a)}^n = \left( \frac{\partial(u_1, \dots, u_p)}{\partial(\sigma_1, \dots, \sigma_p)} \right)_{(b)}^n$$

ossia il determinante Jacobiano delle  $u_1, \dots, u_p$  nell'intorno di  $a$  rispetto alle  $u_1, \dots, u_p$  nell'intorno di  $b$  uguaglia una radice  $n$ -esima dell'unità

<sup>(1)</sup> Cioè rappresentata a sua volta da una varietà di PICARD.

<sup>(2)</sup> Vedi KÄHLER, *Forme differenziali e funzioni algebriche*, «Memorie dell'Accademia d'Italia», t. 3, pagg. 5-19; (1932). La dimostrazione che adduciamo è l'estensione di quella data da BAGNERA-DE FRANCHIS nella memoria citata nell'introduzione.

è perciò costante e diverso da zero. Ciò esclude la possibilità di varietà fondamentali a  $p-1$  dimensioni coniugate a punti nell'involuzione data.

3. - Supponiamo ora  $V_p$  immersa in uno spazio lineare a  $p+1$  dimensioni e siano  $x_1, \dots, x_{p+1}$  coordinate non omogenee del punto corrente su  $V_p$ . Indichiamo con  $(x_1, \dots, x_{p+1})$ ,  $(x'_1, \dots, x'_{p+1})$  due punti di  $V_p$  coniugati nell'involuzione data e corrispondenti rispettivamente ai valori  $(u_1, \dots, u_p)$ ,  $(u'_1, \dots, u'_p)$  degli integrali  $u$ .

Le  $x'_i$  sono funzioni analitiche delle  $x_i$  e quindi delle  $u_i$  nell'intorno del punto considerato:  $x'_i = x'_i(u_1, \dots, u_p)$ .

Dimostriamo che per prolungamento analitico le  $x'_i = x'_i(u_1, \dots, u_p)$  danno luogo a funzioni uniformi e meromorfe in tutto lo spazio  $S_p$  delle  $u$ . Ed invero esse possono essere prolungate analiticamente in tutto  $S_p$  eccezion fatta al più per la varietà  $D$  a  $p-2$  dimensioni che corrisponde alle coincidenze dell'involuzione, avendo in ogni punto carattere di funzione razionale; d'altra parte ogni cammino chiuso di  $S_p$  si può ridurre tenendone fisso un punto, omotopicamente a zero senza incontrare  $D$ . Ciò prova che le funzioni considerate sono uniformi e meromorfe.

Di più le funzioni  $x'_i = x'_i(u_1, \dots, u_p)$  sono funzioni abeliane certo appartenenti alla matrice di RIEMAN  $n!\omega$ , essendo  $\omega = (\omega_{ij})$  la matrice dei periodi degli integrali  $u$  ed  $n$  l'ordine dell'involuzione. Ed invero ad una linea di  $S_p$  congiungente due punti congrui mod  $n!\omega$ , corrisponde su  $V_p$  un cammino chiuso percorso  $n!$  volte il quale quando si pensi percorso da  $(x_1, \dots, x_{p+1})$  produce nei punti coniugati nell'involuzione la sostituzione identica. Ciò non significa affatto che  $n!\omega$  dia un sistema di periodi primitivi per le funzioni  $x'_i = x'_i(u_1, \dots, u_p)$ ; quei periodi sono invece primitivi per le funzioni  $x_i = x_i\left(\frac{u_1}{n!}, \dots, \frac{u_p}{n!}\right)$  sicchè le  $x'_i$  risultano funzioni razionali di quest'ultime. Le equazioni trascendenti della corrispondenza razionale che così si genera fra la varietà  $V_p$  pensata come ottenuta dalle equazioni parametriche  $x'_i = x'_i(u_1, \dots, u_p)$  e quella (birazionalmente identica a  $V_p$ ) ottenuta dalle equazioni parametriche  $x_i = x_i\left(\frac{u_1}{n!}, \dots, \frac{u_p}{n!}\right)$ , mostrano come si

passi dai valori degli integrali  $u_1, \dots, u_p$  a quelli  $u'_1, \dots, u'_p$  mediante una sostituzione lineare

$$[3] \quad \begin{cases} u'_i = \sum_{h=1}^p \lambda_{ih} u_h + c_i \\ i=1, \dots, p \end{cases} \pmod{n! \omega}$$

a determinante  $|\lambda_{ih}| \neq 0$ .

L'insieme di tutte le possibili sostituzioni [3] che così si ottengono per passaggio da un punto  $(x_1, \dots, x_{p+1})$  ad uno qualunque degli  $n$  punti del gruppo dell'involuzione individuato da  $(x_1, \dots, x_{p+1})$  costituisce un gruppo G.

Entro G consideriamo il sottogruppo  $\Gamma$  delle trasformazioni di 2ª specie di G:

$$\begin{cases} u'_i = u_i + c_i \\ i=1, \dots, p \end{cases}$$

Poichè le coordinate  $y_1, \dots, y_{p+1}$  del punto corrente su  $W_p$  sono, pensate come funzioni meromorfe delle  $u_i$ , invarianti per le sostituzioni di G e quindi di  $\Gamma$ , quest'ultimo gruppo ammette un sistema di  $2p$  sostituzioni generatrici

$$[4] \quad \begin{cases} u'_i = u_i + \Omega_{ih} \\ i=1, \dots, p; h=1, \dots, 2p \end{cases}$$

e la varietà abeliana  $Z_p$  corrispondente alla matrice  $\Omega = (\Omega_{ih})$  è tale che:

**a)** le coordinate  $y_1, \dots, y_{p+1}$  del punto corrente su  $W_p$ , come funzioni delle  $u_i$  appartengono alla matrice  $\Omega$  e come tali risultano funzioni razionali delle coordinate  $z_1, \dots, z_{p+1}$  non omogenee del punto corrente su  $Z_p$  quando questa varietà s'immagini immersa in uno spazio lineare  $(z_1, \dots, z_{p+1})$  a  $p+1$  dimensioni;

**b)** le coordinate  $z_1, \dots, z_{p+1}$  del punto variabile su  $Z_p$  per la medesima ragione addotta in **a** si esprimono razionalmente per quelle  $x_1, \dots, x_{p+1}$  del punto variabile su  $V_p$  in quanto fra le sostituzioni di G quelle che fanno passare dal punto  $(x_1, \dots, x_{p+1})$  al punto stesso hanno le costanti

$$\begin{cases} c_i = \sum_{r=1}^{2p} \mu_{ir} \omega_{ir} \\ i=1, \dots, p \end{cases}$$

colle  $\mu_{ir}$  interi qualsiasi.

Ma per l'ipotesi che l'involuzione  $W_p$  non sia composta con un'involuzione abeliana di rango 1 la corrispondenza razionale fra  $Z_p$  e  $V_p$  è di necessità birazionale sicchè si può senz'altro supporre  $\Omega_{ih} = \omega_{ih}$ . D'altra parte la possibilità di generare  $W_p$  su  $Z_p = V_p$  con un gruppo di trasformazioni birazionali di  $V_p$  in sè discende dal fatto che nelle [3] se si incrementano le  $u_h$  di periodi  $\Omega_{hr} = \omega_{hr}$ , anche le  $u'_i$  si incrementano di periodi appartenenti allo stesso sistema chè altrimenti le [4] non sarebbero le sostituzioni generatrici del gruppo  $\Gamma$ . Il teorema è perciò dimostrato.

4. - *L'ipotesi ammessa al n. 2 che l'involuzione  $W_p$  non sia composta con un'involuzione abeliana di rango 1 è essenziale.*

Riprendendo invero il ragionamento precedente, e supponiamo l'involuzione  $W_p$  generata su  $Z_p$  dal gruppo delle trasformazioni birazionali

$$[5] \quad \begin{cases} u_i(z') = \sum_1^p \eta^i{}_{ih} u_h(z) + c_i & (\text{mod } \Omega) \\ i=1, \dots, p; \quad l=1, 2, \dots \end{cases}$$

e l'involuzione che rappresenta  $Z_p$  su  $V_p$  generata (n. 1) dal gruppo delle trasformazioni birazionali:

$$[6] \quad \begin{cases} u_i(x') = u_i(x) + \sum_1^{2p} \mu_r \frac{\omega_{ir}}{v_r} & (\text{mod } \omega) \\ i=1, \dots, p; \quad \mu_r=0, 1, \dots, v_r-1 \end{cases}$$

essendo

$$\begin{cases} u_i(z) \equiv u_i(x) & (\text{mod } \omega) \\ i=1, \dots, p \end{cases}$$

le equazioni trascendenti della corrispondenza fra  $Z_p$  e  $V_p$ .

Ebbene si riconosce subito che condizione necessaria e sufficiente perchè l'involuzione  $W_p$  su  $V_p$  sia generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali di  $V_p$  in sè è che il gruppo delle sostituzioni [5] sia permutabile col gruppo delle sostituzioni (1)

$$\begin{cases} u_i(z') = u_i(z) + \sum_1^{2p} \lambda_r \omega_{ir} \\ i=1, \dots, p \end{cases}$$

(1) Cioè per incremento delle  $u_i(z)$  di periodi (mod  $\omega$ ) le  $u_i(z')$  s'incrementano pure di periodi (mod  $\omega$ ).

colle  $\lambda$  interi arbitrari. In tal caso le [5] e [6] insieme pensate come sostituzioni fra i valori degli integrali  $u_i$  in due punti di  $V_p$  (cioè mod  $\omega$ ) danno le trasformazioni birazionali del gruppo che genera su  $V_p$  l'involuzione  $W_p$ .

Tale è per esempio il caso in cui le [5] siano tutte sostituzioni di prima o seconda specie ma può ben accadere che il fenomeno indicato non si presenti come lo mostra il seguente esempio, che esponiamo per  $p=2$ , ma che ha evidentemente carattere generale.

Sopra la superficie di PICARD  $Z$ , corrispondente alla matrice di periodi

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

degli integrali  $u_1, u_2$  di prima specie semplice di  $Z$ , cioè sulla superficie prodotto di due curve ellittiche armoniche, consideriamo l'involuzione del 4° ordine generata dalla trasformazione birazionale

$$[7] \quad \begin{cases} u'_1 \equiv iu_1 \\ u'_2 \equiv iu_2 \end{cases} \pmod{\Omega}$$

Quest'involuzione possiede 4 punti quadrupli e 12 punti doppi ed è rappresentata da una superficie razionale  $W$ .

Ed invero sono uniti per la [7] epperò quadrupli per l'involuzione generata i punti  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_1 = u_2 = \frac{1+i}{2}$ ;  $u_1 = 0, u_2 = \frac{1+i}{2}$ ;  $u_1 = \frac{1+i}{2}, u_2 = 0$ .

Sono invece uniti pel quadrato della [7] epperò doppi per l'involuzione  $W$  i punti

$$\begin{aligned} &u_1 = u_2 = \frac{1}{2}; \quad u_1 = u_2 = \frac{i}{2}; \quad u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{i}{2}; \quad u_1 = \frac{i}{2}, u_2 = \frac{1}{2}; \\ &u_1 = 0, u_2 = \frac{1}{2}; \quad u_1 = 0, u_2 = \frac{i}{2}; \quad u_1 = \frac{1+i}{2}, u_2 = \frac{i}{2}; \quad u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = 0; \\ &u_1 = \frac{i}{2}, u_2 = 0; \quad u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1+i}{2}; \quad u_1 = \frac{i}{2}, u_2 = \frac{1+i}{2}. \end{aligned}$$

Non vi sono altri punti uniti.

Che la superficie  $W$  sia razionale discende sia dalla rappresentazione parametrica sia anche dal fatto che essa rappresenta una involuzione del 2° ordine sopra la superficie di KUMMER relativa alla trasformazione  $u'_1 = -u_1$ ,  $u'_2 = -u_2$ ; involuzione che presenta diramazione nelle 4 curve razionali della superficie di KUMMER provenienti dai 4 punti quadrupli della involuzione  $W$  su  $Z$ .

Ciò posto consideriamo la trasformazione razionale  $(1, v_1 \cdot v_2)$  che muta la superficie  $Z$  nella superficie di PICARD  $V$  corrispondente alla matrice

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 i \end{pmatrix} \quad (v_1 > 1, v_2 > 1)$$

dei periodi degli integrali semplici di prima specie  $v_1, v_2$  di  $V$ , le equazioni trascendenti della corrispondenza essendo:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases} \pmod{\omega}$$

L'involuzione  $W$  si muta così in un'involuzione d'ordine  $4v_1v_2$  su  $V$  non generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali inquantochè le equazioni [7] su  $V$  non rappresentano più una corrispondenza birazionale di  $V$  in sè.

Su  $V$  l'involuzione  $W$  ha  $4v_1v_2$  punti quadrupli  $12v_1v_2$  punti doppi.



SULL' ATTIVITÀ GLICOLITICA IN AEROBIOSI,  
IN VITRO, DI PREPARAZIONI DI FEGATO  
DI MAIALE (\*)

(Con due figure)

FRANCO RECCHIA E MARCELLO GHIRON

**SUMMARIVM.** — Quadam adhibita suilli iecoris praeparatione (P. E.), in qua iam cellulae epaticae agnoscì nequeunt (est enim liquor, qui, si centrifugetur, ostendit tantum minimas formas fere rotundas, quae anilinae coloribus tingui possunt), Auctores et *in vivo* et *in vitro* demonstrarunt glycolithicam huius praeparationis (P. E.) vim. Putant autem Auctores, quamquam nondum audent de natura earum formarum quidquam certius asserere, in ea praeparatione inesse enzima cellulae epaticae propria (quae glycidos oxydare possunt), dummodo optimis condicionibus se habeat (eius enim vis evanescit decursu temporis, vel si oxygenium adsit, eademque calore cessat).

Numerosi sono i lavori riguardanti la funzione esplicata dal fegato sul ricambio dei carboidrati. Da essi risulta come il fegato ha un ruolo di primo piano nella trasformazione del glucosio e degli altri zuccheri [1]. Recenti studi tendono a dimostrare che il fegato, per la proprietà omeostatica ad esso attribuita, ha anche la funzione di regolare il tasso glicemico, e che la curva tipica di carico da glucosio, più che ad un plus di secrezione insulinica pancreatica, pare legata alla funzione glicolitica del fegato [2]. In proposito, vari AA. hanno anche studiato su fegato isolato, o su omogenati, dettagli della sua funzione. LEPAGE e

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Dante De Blasi il 31 maggio 1951.



Stosz [3] hanno osservato la produzione di acido lattico ed esterificazione di fosforo mediante pappe di fegato in mezzo glucosato. Mason ed ISAEFF [4] hanno dimostrato che fette di fegato normale hanno, in opportune condizioni, la capacità di metabolizzare il glucosio.

In questo lavoro<sup>(1)</sup> abbiamo voluto studiare, se è possibile ottenere dal fegato di maiale (abbiamo scelto per le esperienze il fegato di maiale, perchè esso ci ha dimostrato a parità di concentrazione il massimo di attività) una preparazione che dimostrasse attività glicolitica in vitro ed in presenza di ossigeno, e quali fossero i caratteri propri di una preparazione di fegato che si dimostrasse capace di determinare glicolisi. Abbiamo scelto come substrato il sangue di coniglio normale, al quale al momento delle esperienze, per aumentare il tasso glicemico in vitro, abbiamo aggiunto a volte glucosio, a volte levulosio, a volte lattosio, a volte maltosio.

Abbiamo usato la seguente metodica.

*Preparazione epatica (P. E.):* 50 g. di fegato di maiale (ucciso nella stessa giornata) si trituranò e si lavano con acetone anidro. Si decanta e si asciuga alla pompa, si dà ottenere una polvere, che si riprende con 300 cc. di una soluzione acquosa di fosfato monopotassico 0,5 M e fosfato bisodico 0,5 M a pH 7,80. Successivamente si procede alla purificazione con carbone animale, carbonato di magnesio e caolino, e si filtra con carta Whatman n. 4. La preparazione così ottenuta si è rivelata attiva solo per 30 ore, dopo di che l'attività scompare completamente.

*Preparazione del sangue substrato:* Il sangue, prelevato con puntura intracardiaca, da conigli del peso di circa Kg. 2, alimentati con cruseca e verdura da più giorni, veniva diluito in acqua bidistillata al fine di impedirne la coagulazione (gli anticoagulanti, come il citrato di sodio, non furono usati per evitare possibili interferenze con la reazione che si voleva studiare), e veniva usato come controllo, oppure ad esso veniva aggiunta in quantità diverse a seconda degli esperimenti, una soluzione all'1% o di glucosio, o di levulosio, o di lattosio, o di maltosio.

---

(<sup>1</sup>) Il presente lavoro è stato eseguito nella Clinica delle Malattie Infettive dell'Università di Roma, diretta dal Prof. G. CARONIA.

Le varie lavorazioni furono sempre eseguite sterilmente si da poter escludere inquinamenti microbici che potessero falsare i risultati.

Per la determinazione degli zuccheri, abbiamo usato il metodo di BAUDOIN e LEWIN [5].

### PARTE SPERIMENTALE

In ogni beuta veniva posto sangue diluito corrispondente ad 1 cc. di sangue prelevato dal coniglio. Ad esso si aggiungeva la preparazione epatica (P. E.) ed uno degli zuccheri sopra elencati, in proporzioni diverse. Venivano preparati, inoltre, controlli contenenti: 1°) sangue; 2°) sangue e preparazione epatica; 3°) sangue e zuccheri. Le beute così preparate venivano poste in termostato a 37° per un periodo di tempo variabile tra i 15 e i 180 minuti. I dosaggi degli zuccheri venivano eseguiti dopo 15-20-30-60-120-150-180 minuti.

### RISULTATI DEGLI ESPERIMENTI

#### I. Dopo 20' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                | g. glucosio ‰ | 1,06 |
| 2. » + 1 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 0,75 |
| 3. » + 10 mg. glucosio . . . . .             | » » »         | 5,72 |
| 4. » + 10 mg. glucosio + 1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 4,75 |

#### II. Dopo 60' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                | g. glucosio ‰ | 1,44 |
| 2. » + 1 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 0,84 |
| 3. » + 10 mg. glucosio . . . . .             | » » »         | 6,98 |
| 4. » + 10 mg. glucosio + 1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 5,90 |

#### III. Dopo 60° a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                  | g. glucosio ‰ | 1,20 |
| 2. » + 0,5 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 0,90 |
| 3. » + 10 mg. glucosio . . . . .               | » » »         | 8,55 |
| 4. » + 10 mg. glucosio + 0,5 cc. P. E. . . . . | » » »         | 7,59 |

#### IV. A) Dopo 120' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                  | g. glucosio ‰ | 1,08 |
| 2. » + 10 mg. glucosio . . . . .               | » » »         | 8,43 |
| 3. » + 10 mg. glucosio + 0,5 cc. P. E. . . . . | » » »         | 6,14 |

\*11 Acta, vol. XIV.

## B) Dopo 120' a 37°:

|  |               |       |
|--|---------------|-------|
| 1. sangue + 20 mg. glucosio . . . . .          | g. glucosio ‰ | 10,12 |
| 2. » + 20 mg. glucosio + 0,5 cc. P. E. . . . . | » » »         | 8,48  |

## V. A) Dopo 30' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                  | g. glucosio ‰ | 0,92 |
| 2. » + 0,1 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 0,60 |
| 3. » + 10 mg. glucosio . . . . .               | » » »         | 7,55 |
| 4. » + 10 mg. glucosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 7,43 |

## B) Dopo 60' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 5. sangue + 10 mg. glucosio . . . . .          | g. glucosio ‰ | 7,55 |
| 6. » + 10 mg. glucosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 7,07 |

## C) Dopo 120' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 7. sangue + 10 mg. glucosio . . . . .          | g. glucosio ‰ | 7,55 |
| 8. » + 10 mg. glucosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 5,90 |

## VI. Dopo 120' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                  | g. glucosio ‰ | 1,56 |
| 2. » + 0,2 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 1,50 |
| 3. » + 10 mg. glucosio . . . . .               | » » »         | 7,71 |
| 4. » + 10 mg. glucosio + 0,2 cc. P. E. . . . . | » » »         | 6,50 |
| 5. » + 10 mg. glucosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 6,38 |

## VII. A) Dopo 120' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                  | g. glucosio ‰ | 0,72 |
| 2. » + 0,1 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 0,48 |
| 3. » + 10 mg. glucosio . . . . .               | » » »         | 7,50 |
| 4. » + 10 mg. glucosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 7,31 |

## B) Dopo 150' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 5. sangue + 10 mg. glucosio . . . . .  | g. glucosio ‰ | 7,50 |
| 6. » + 10 mg. glucosio + 0,1 cc. P. E. + 2 cc.<br>soluz. tampone fosfato pH 7,80 . . . . . | » » »         | 5,55 |
| 7. » + 10 mg. glucosio + 0,1 cc. P. E. . . . .   | » » »         | 5,33 |
| 8. » + 10 mg. glucosio + 0,05 cc. P. E. . . . .  | » » »         | 6,77 |

## VIII. Dopo 15' a 37°:

|   |               |      |
|---|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                   | g. glucosio ‰ | 0,90 |
| 2. » + 10 mg. glucosio . . . . .                | » » »         | 4,25 |
| 3. » + 10 mg. glucosio + 0,05 cc. P. E. . . . . | » » »         | 3,50 |

## IX. Dopo 15' a 37°:

|   |               |      |
|---|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                   | g. glucosio ‰ | 0,90 |
| 2. » + 20 mg. glucosio . . . . .                | » » »         | 6,20 |
| 3. » + 20 mg. glucosio + 0,05 cc. P. E. . . . . | » » »         | 4,10 |

## X. A) Dopo 120' a 37°:

|   |               |      |
|---|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                   | g. zuccheri ‰ | 1,20 |
| 2. » + 10 mg. levulosio . . . . .               | » » »         | 7,95 |
| 3. » + 10 mg. levulosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 6,86 |

## B) Dopo 180' a 37°:

|   |               |      |
|---|---------------|------|
| 4. sangue + 10 mg. levulosio . . . . .          | g. zuccheri ‰ | 7,95 |
| 5. » + 10 mg. levulosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 6,87 |

## XI. A) Dopo 120' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                  | g. zuccheri ‰ | 0,75 |
| 2. » + 0,1 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 0,50 |
| 3. » + 10 mg. lattosio . . . . .               | » » »         | 5,09 |
| 4. » + 10 mg. lattosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 4,85 |

## B) Dopo 180' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 5. sangue + 10 mg. lattosio . . . . .          | g. zuccheri ‰ | 5,09 |
| 6. » + 10 mg. lattosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 4,06 |

## XII. A) Dopo 120' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                  | g. zuccheri ‰ | 0,75 |
| 2. » + 0,1 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 0,50 |
| 3. » + 10 mg. maltosio . . . . .               | » » »         | 4,49 |
| 4. » + 10 mg. maltosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 4,25 |

## B) Dopo 180' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 5. sangue + 10 mg. maltosio . . . . .          | g. zuccheri ‰ | 4,49 |
| 6. » + 10 mg. maltosio + 0,1 cc. P. E. . . . . | » » »         | 4,23 |

*Controllo con preparazione epatica inattivata col calore.*

## Dopo 120' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                  | g. glucosio ‰ | 0,90 |
| 2. » + 0,5 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 0,90 |
| 3. » + 10 mg. glucosio . . . . .               | » » »         | 7,55 |
| 4. » + 10 mg. glucosio + 0,5 cc. P. E. . . . . | » » »         | 7,50 |

*Controllo con preparazione epatica vecchia di 3 giorni.*

## Dopo 120' a 37°:

|  |               |      |
|--|---------------|------|
| 1. sangue controllo . . . . .                  | g. glucosio ‰ | 0,75 |
| 2. » + 0,5 cc. P. E. . . . .                   | » » »         | 0,75 |
| 3. » + 10 mg. glucosio . . . . .               | » » »         | 7,73 |
| 4. » + 10 mg. glucosio + 0,5 cc. P. E. . . . . | » » »         | 7,70 |

Incoraggiati dai risultati ottenuti dalle prove in vitro, abbiamo voluto vedere successivamente se la preparazione epatica (P. E.) in esame, iniettata per via venosa nel coniglio, fosse in grado di determinare in vivo lo stesso abbassamento della glicemia come avevamo constatato in vitro. In due conigli del peso di Kg. 2, tenuti a digiuno da 24 ore, dopo di aver determinato, tenendoli sempre a digiuno, il tasso glicemico, abbiamo iniettato quantità diverse di P. E. (4-2 cc.) ed abbiamo seguito la curva glicemica per due ore.

|            |          |                                  |        |
|------------|----------|----------------------------------|--------|
| Coniglio A | ore 9    | glicemia 0,95 ‰                  |        |
|            | » 9,10   | iniezione endovenosa 4 cc. P. E. |        |
|            | dopo 50' | glicemia . . . . .               | 0,62 ‰ |
|            | » 75'    | » . . . . .                      | 0,45 » |
|            | » 120'   | » . . . . .                      | 0,80 » |
| Coniglio B | ore 9    | glicemia 0,75 ‰                  |        |
|            | » 9,10   | iniezione endovenosa 2 cc. P. E. |        |
|            | dopo 30' | glicemia . . . . .               | 0,68 ‰ |
|            | » 45'    | » . . . . .                      | 0,58 » |
|            | » 90'    | » . . . . .                      | 0,40 » |
|            | » 130'   | » . . . . .                      | 0,70 » |

Nessuno dei due conigli presentò convulsioni nonostante il notevole abbassamento della glicemia.

CONSIDERAZIONI. — Dall'insieme delle nostre ricerche, risulta innanzi tutto dimostrato che è possibile ottenere dal fegato di maiale una preparazione che conserva la capacità ossidante sugli zuccheri propria del tessuto epatico. La preparazione epatica (P. E.) da noi ottenuta presenta inoltre alcune caratteristiche che meritano di essere segnalate, perchè a nostro parere capaci di meglio chiarire la complessa fisiopatologia del fegato. Questa preparazione perfettamente limpida, se centrifugata a 3.000 giri, non dà alcun sedimento; a fresco ed in preparati colorati col bleu di metilene non si osservano al microscopio cellule epatiche, ma solo *formazioni rotondeggianti*, probabilmente di derivazione cellulare, ma sulla cui natura e funzione, pur conoscendo gli attuali studi sull'importante problema della localizzazione degli

enzimi nella cellula epatica [6], non vogliamo almeno per ora avanzare alcuna decisiva affermazione.

Nel dettaglio della disamina dei vari protocolli risulta provato — oltre che è possibile ottenere dal fegato una preparazione, libera da cellule, che abbia un'azione glicolitica sugli zuccheri (senza che sia necessario aggiungere particolari coenzimi o catalizzatori metallici) — anche che questa preparazione epatica esplica *in vitro* una notevole azione glicolitica, maggiore sul glucosio, minore sugli altri glicidi presi in esame.

Studiando le curve di scomposizione del glucosio (vedi fig. 1), si osserva che l'optimum si ha quando la P. E. viene aggiunta nella quantità di 0,5 cc. È interessante però notare come la curva dei valori ottenuti con 0,1 cc. di P. E. sia quasi uguale alla precedente, seppure ritardata nel tempo, mentre quella ottenuta con 1 cc., dopo una rapida ascesa, dimostra un arresto e una lieve diminuzione. Quella con 0,05 cc. decorre molto più bassa delle precedenti.

L'optimum di conservazione e di attività della P. E. è il pH 7,80. L'aggiunta di soluzione tampone a pH 7,80 non facilita la reazione perchè già nella P. E. e nel sangue di coniglio esistono sistemi tampone. Determinazioni potenziometriche eseguite nei diversi tempi degli esperimenti hanno fatto risaltare un lieve abbassamento del pH, come ad esempio da pH 7,80 a pH 7,60. È interessante questo dato perchè dimostra la tendenza all'acidificazione del mezzo per opera della reazione glicolitica, limitata dai vari sistemi tampone presenti.

Come si osserva nella fig. 2, il massimo di attività di scomposizione, a parità di concentrazione della P. E., si esplica sul glucosio, in misura minore sul levulosio e sul lattosio, e in misura ancora più ridotta sul maltosio. Questo dato è in accordo con i concetti oggi esistenti sul ricambio dei carboidrati, secondo i quali fase obbligata della scomposizione delle molecole dei glicidi è la trasformazione in molecole di glucosio [5]. La P. E. dimostra così di conservare la proprietà del tessuto epatico di scindere il glucosio e di trasformare in glucosio e successivamente scindere gli altri carboidrati di origine alimentare.

È possibile ottenere curve ipoglicemiche nei conigli tenuti a digiuno per 24 ore, mediante la somministrazione per via venosa di

2-4 cc. di P. E. Non si sono osservate convulsioni nonostante il basso livello glicemico raggiunto. Si rileva che le curve ipoglicemiche *in vitro* ed *in vivo* dimostrano un accentuato parallelismo.

CONCLUSIONI. - Dalle caratteristiche della P. E. ora esaminate, si può ritenere che essa contenga gli enzimi propri della cellula epatica ad azione ossidante i glicidi.

Gli elementi per i quali si può arrivare alla conclusione della presenza di enzimi nella preparazione epatica, sono:

- a) Possedere un optimum di concentrazione nel mezzo. Infatti raddoppiando la concentrazione non si ha un'attività glicolitica doppia.
- b) Possedere un optimum di pH (7,80) e di temperatura (37°).
- c) Esaurimento dell'attività glicolitica col tempo, in presenza di ossigeno, caratteristico degli enzimi ossidanti dei tessuti.
- d) Distruzione dell'attività glicolitica per opera del calore.

Queste due ultime caratteristiche portano anche ad escludere una ipotetica azione glicolitica aspecifica, termostabile della P. E., dovuta ad esempio a sostanze proteiche.

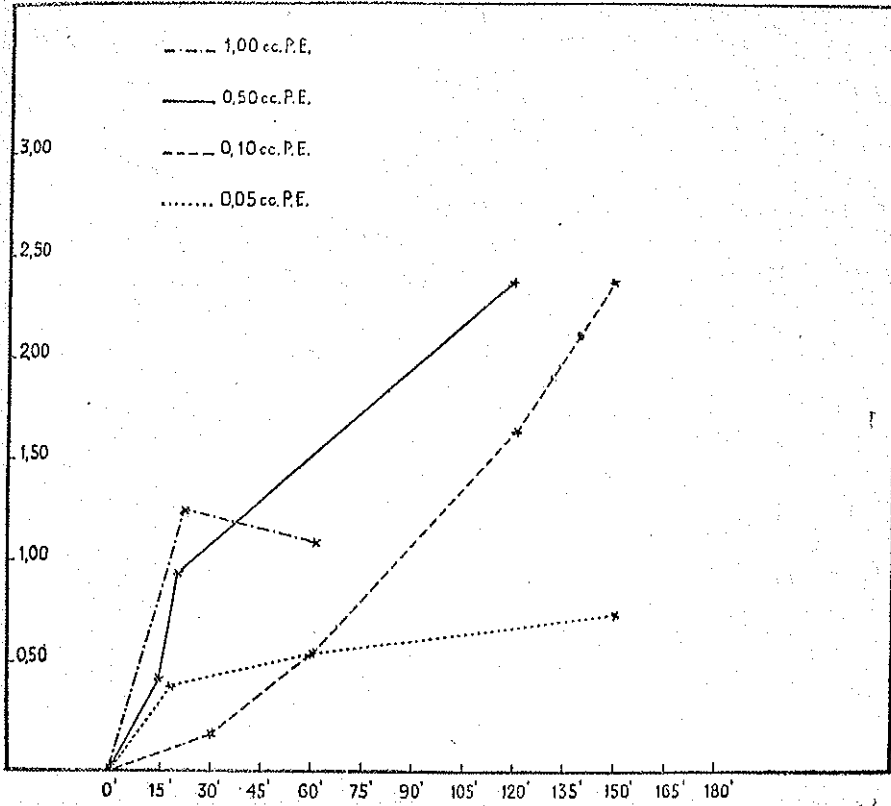


FIGURA N° 1

Ascisse: tempo degli esperimenti in minuti primi.

Ordinate: quantitativo di glucosio scomposto (in mg.) dalla P. E. per cc. di sangue.

Nella figura si osserva la quantità di glucosio per cc. di sangue scisso da quantità variabili di P. E., in rapporto al tempo. La linea tratteggiata e punteggiata indica quanti mg. di glucosio per cc. vengono scissi rispetto al tempo da 1 cc. di P. E. La linea continua indica i mg. di glucosio per cc. di sangue scissi da 0,5 cc. P. E.; la linea tratteggiata i mg. di glucosio scissi da 0,10 cc. di P. E.; la linea punteggiata i mg. di glucosio scissi da 0,05 cc. P. E., sempre rispetto al tempo. La figura dimostra l'esistenza di un optimum di concentrazione della P. E. e la mancanza di un rapporto proporzionale diretto tra quantità di P. E. impiegata e quantità di glucosio scisso.



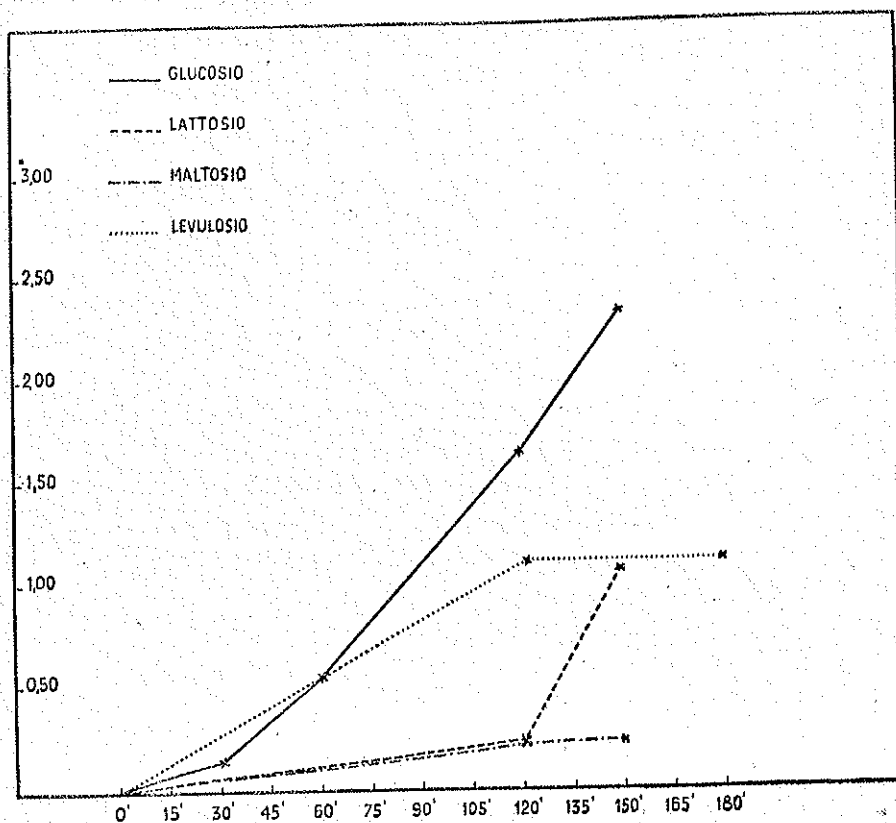


FIGURA N° 2

Ascisse: tempo degli esperimenti in minuti primi.

Ordinate: Quantitativo degli zuccheri scomposti dalla P. E. per cc. di sangue.

Nella figura sono riportati in mg. per cc. di sangue i diversi quantitativi degli zuccheri scissi da una medesima quantità di P. E. (0,10 cc.), rispetto al tempo. La linea continua dimostra i mg. di glucosio scissi rispetto al tempo; quella punteggiata i mg. di levulosio; quella tratteggiata i mg. di lattosio; quella punteggiata e tratteggiata i mg. di maltosio, sempre rispetto al tempo. Si osserva la maggiore scissione operata dalla P. E. sui monosaccaridi rispetto ai disaccaridi.

## BIBLIOGRAFIA

[1] BARRON E. S. G., *Meccanismo del metabolismo dei carboidrati*, « Adv. Enzimol », **3**, 149, 1943; KREBS A., *Gli stadi intermedi nella ossidazione biologica dei carboidrati*, « Adv. Enzimol. », **3**, 191, 1943; CORI C. F., *Fosforilizzazione del glucosio e del glicogeno*, « Biol. Symp. », **5**, 181, 1941; CORI C. F., *Demolizione del glicogeno e sintesi nei tessuti*, « Endocrinology », **26**, 285, 1940; KOSTERLITZ H. W., *La presenza di galattosio-fosfato in fegati di conigli alimentati con galattosio*, « Bioch. J. », **31**, 2217, 1937.

[2] SOSKIN S. e ALLWEISS M. D., *La fase ipoglicemica della curva di tolleranza al glucosio*, « Am. J. Physiol. », **110**, 4, 1934; SOSKIN S., ALLWEISS M. D., e COHN D. J., *Influenza del pancreas e del fegato sulla curva di tolleranza al glucosio*, « Am. J. Physiol. », **109**, 155, 1934; SOSKIN S., HEXES H. E., HERRICK J. F., e MANN F. C., *Meccanismo di regolazione epatica della glicemia*, « Am. J. Physiol. », **124**, 558, 1938; SOSKIN S. o LEVINE R., *Una relazione tra il livello glicemico e la utilizzazione del glucosio concernente le teorie sul diabete*, « Am. J. Physiol. », **120**, 761, 1937.

[3] LEPAGE G. A., STOESZ P. A., *Glicolisi negli omogenati di fegato*, « J. Biol. Chem. », **130**, 587, 1949.

[4] MAROSE E. I., ISAEFF E., CHERNICK e CHAIKOFF I. L., *Lipogenesi ed ossidazione del glucosio nel fegato di ratti con diabete allossanico*, « J. Biol. Chem. », **186**, 527, 1950.

[5] DENIGES, CHELLE e LABAT, *Precis de Chimie analytique*, t. II, 622, 1931, « Bull. Soc. Ch. Biol. », Sept-Oct-Nov., 1928.

[6] SCHNEIDER W. C. e VAN R. POTTER, *Distribuzione intracellulare degli enzimi*, « J. Biol. Chem. », **177**, 893, 1949.

## SULL'AZIONE IPOGLICEMIZZANTE DI UN ESTRATTO DI FEGATO DI MAIALE IN CONIGLI NORMALI ED IN CONIGLI CON DIABETE ALLOSSANICO (\*)

MARCELLO GHIRON

**SUMMARYM.** — Cum investigaverit Auctor quid fiat de glycaemia, in cuniculis sanis et in cuniculis diabete alloxanico affectis, si per venas inmittatur enzymaticum suilli iecoris extractum (E. E.), observavit primum glycaemiam celeriter deminui, mox autem ita augeri ut post duas horas eadom fere sit quae initio. Cum autem inter se comparaverit effectum E. E. et effectum insuliniae, deque amborum commixtione inquisiverit, opinatur per commixtionem E. E. et insuliniae valde augeri utriusque extracti (pancreatici et epatici) vim glycolithicam.

Dai lavori fatti da diversi autori [1] appare il ruolo fondamentale che ha il fegato nel ricambio glicidico, ed in particolare nella regolazione del tasso del glucosio nel sangue. Come risulta dai lavori di SOSKIN e LEVINE [2], il fegato possiede la capacità di regolare il tasso glicemico (homeostatic mechanism) e di riportarlo rapidamente alla norma quando esso venga modificato artificialmente, ad esempio dalla somministrazione endovenosa di glucosio. Sembra che il livello della glicemia sia uno dei fattori regolanti il meccanismo omeostatico. Secondo gli autori sopracitati, il modo di rispondere alla somministrazione di glucosio sembra sia da mettere in rapporto più con la funzione del fegato, che con quella del pancreas [3], infatti se si determina

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Dante De Blasi il 31 maggio 1951.

un'alterazione parenchimale del fegato, si ha al test-glucosio una risposta di tipo diabetico, mentre se si è assicurato il minimum del fabbisogno insulinico in animali privi di pancreas, la curva glicemica appare di tipo normale, purchè il fegato sia indenne. In altri lavori è stato osservato come il ricambio del glucosio nel fegato sia alterato, rispetto al normale, in animali con diabete allossanico [4].

Come abbiamo riportato in un altro lavoro [5], siamo riusciti ad ottenere dal fegato di maiale un estratto, libero da cellule, che possiede un'attività glicolitica *in vitro* e nei conigli normali a digiuno da 24 ore. Dai dati ottenuti (presenza di un optimum di concentrazione dell'estratto epatico, di un optimum di pH e di temperatura, distruzione dell'attività glicolitica ad opera dell'invecchiamento e ad opera del calore) abbiamo potuto concludere che l'estratto epatico conteneva gli enzimi glicolitici del fegato (E. E.).

Scopo del presente lavoro<sup>(1)</sup> è lo studio dell'azione dell'estratto enzimatico (E. E.) sui conigli normali e su quelli con metabolismo glicidico (sia pancreatico, che epatico) alterato per diabete allossanico. Durante il corso degli esperimenti, oltre a studiare l'effetto del solo E. E. sulla glicemia, abbiamo confrontato anche l'azione di questo con quella dell'insulina, e studiato l'effetto dell'associazione dell'E. E. e dell'insulina.

**METODICA.** - Abbiamo preso un gruppo di conigli della stessa età, circa sei mesi, e del peso oscillante tra 1.800 e 2.250 grammi. Li abbiamo tenuti in osservazione per una diecina di giorni al fine di controllare le loro condizioni, e per potere dare loro una dieta tipo consistente in 100 g. di crusca e 400 g. di verdura fresca al giorno. Questa dieta è stata continuata per tutto il periodo di studio. Il tasso glicemico di tutto il lotto dei dodici conigli oscillava tra 0,70 e 1,15 g. %<sub>00</sub>. I conigli furono trattati con allossana in modo da determinare in essi una iperglicemia e una glicosuria persistenti. Il giorno in

<sup>(1)</sup> Il presente lavoro è stato eseguito nella I<sup>a</sup> Clinica Pediatrica e Clinica delle Malattie Infettive dell'Università di Roma, diretta dal Prof. G. CARONIA.

cui veniva somministrata l'allossana, l'alimentazione era identica a quella degli altri giorni. L'allossana è stata somministrata nella dose di 200 mg. pro kilo in soluzione acquosa al 4 % nella vena marginale dell'orecchio. L'alcalinizzazione della soluzione di allossana mediante ammoniaca N/10 è stata provata, ma non avendo dato alcun vantaggio è stata successivamente abbandonata. Per evitare i pericoli della fase ipoglicemica [6], susseguente alla iniezione di allossana, venivano iniettati sotto-cute 2 g. di glucosio pro kilo alla quarta ora e mezza, alla sesta ora e mezza e alla undicesima ora, dalla iniezione. Verso la quarta ora è stata osservata ipoglicemia lieve. Durante il secondo giorno fu osservato in tutti i conigli aumento della glicemia e comparsa di glicosuria. Non fu riscontrata chetonuria. La glicemia e la glicosuria raggiungevano verso il terzo-quarto giorno il massimo, mantenendosi poi stabili per diverse settimane. I conigli con diabete allossanico sono ora in osservazione da più di tre mesi.

L'allestimento ed il controllo dell'attività dell'estratto enzimatico (E. E.) venivano eseguiti con le stesse modalità descritte nel precedente lavoro [5].

In ogni esperienza venivano usati E. E. ottenuti nelle 24 ore, da fegato di maiale appena ucciso. Questo punto della tecnica è molto importante, perchè abbiamo osservato che E. E. di più di 30 ore perdevano sia *in vitro* che *in vivo* la loro caratteristica azione glicolitica. Un certo prolungamento dell'attività, però sempre limitata, si aveva se si conservava l'E. E. a 0°. Il riscaldamento dell'E. E. portava alla distruzione di ogni attività glicolitica.

Poichè gli E. E. venivano somministrati ai conigli per via endovenosa, è stata messa particolare cura nel loro allestimento sì che ogni E. E. risultasse sterile ed atossico.

Nei conigli soggetti ad esperimento veniva determinata la glicemia prima dell'iniezione endovenosa dell'E. E., e successivamente per parecchie ore, onde osservare eventuali modificazioni.

Riportiamo alcuni dei dati ottenuti nelle esperienze sui conigli normali e su quelli con diabete allossanico.

I. EFFETTO DELLA INIEZIONE ENDOVENOSA DELL'E. E.  
NEI CONIGLI NORMALI NON A DIGIUNO

| CONIGLIO A                     |                           | CONIGLIO B                     |                           |
|--------------------------------|---------------------------|--------------------------------|---------------------------|
| <i>I giorno di esperimento</i> |                           | <i>I giorno di esperimento</i> |                           |
| ore 9,00                       | glicemia . . . 0,95 ‰     | ore 9,00                       | glicemia . . . 0,75 ‰     |
| » 9,10                         | 4 cc. E. E. endo-<br>vena | » 9,10                         | 2 cc. E. E. endo-<br>vena |
| » 10,10                        | glicemia . . . 0,62 ‰     | » 9,40                         | glicemia . . . 0,68 ‰     |
| » 10,25                        | » . . . 0,45 ‰            | » 9,55                         | » . . . 0,58 ‰            |
| » 11,10                        | » . . . 0,80 ‰            | » 10,40                        | » . . . 0,40 ‰            |
|                                |                           | » 11,20                        | » . . . 0,70 ‰            |

CONTROLLI CON E. E. INATTIVATO

| CONIGLIO A                       |  | CONIGLIO B                       |   |
|----------------------------------|--|----------------------------------|---|
| <i>III giorno di esperimento</i> |  | <i>III giorno di esperimento</i> |   |
| ore 11,50                        | glicemia . . . 0,70 ‰                            | ore 15,50                        | glicemia . . . 0,75 ‰                         |
| » 11,55                          | 5 cc. E. E. inatti-<br>vato al calore (65°) end. | » 15,55                          | 5 cc. E. E. vecchio<br>di tre giorni endovena |
| » 13,00                          | glicemia . . . 0,72 ‰                            | » 17,00                          | glicemia . . . 0,75 ‰                         |
|                                  |  | » 17,30                          | » . . . 0,75 ‰                                |

II. EFFETTO DELLA INIEZIONE ENDOVENOSA DELL'E. E.  
NEI CONIGLI CON DIABETE ALLOSSANICO.

Avendo osservato che la glicemia tende ad abbassarsi per l'effetto del solo digiuno, abbiamo preferito sperimentare in condizioni le meno modificate possibili, dando l'alimento anche durante le esperienze.

CONIGLIO N° 4

| <i>I giorno di esperimento</i> |                       | <i>II giorno di esperimento</i> |                       |
|--------------------------------|-----------------------|---------------------------------|-----------------------|
| ore 13,30                      | glicemia . . . 2,90 ‰ | ore 16,35                       | glicemia . . . 2,20 ‰ |
| » 13,35                        | 5 cc. E. E. endov.    | » 16,40                         | 5 cc. E. E. endov.    |
| » 14,55                        | glicemia . . . 2,30 ‰ | » 18,00                         | glicemia . . . 1,58 ‰ |

*IV giorno di esperimento*

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| ore 17,25 glicemia . . .   | 3,12 ‰ |
| » 17,30 7 cc. E. E. endov. |        |
| » 18,15 glicemia . . .     | 2,42 ‰ |
| » 19,10 » . . .            | 2,85 ‰ |

*V giorno di esperimento*

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| ore 16,00 glicemia . . .   | 2,03 ‰ |
| » 16,05 5 cc. E. E. endov. |        |
| » 17,15 glicemia . . .     | 1,55 ‰ |
| » 18,00 » . . .            | 1,80 ‰ |

*VII giorno di esperimento*

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| ore 15,35 glicemia . . .   | 2,40 ‰ |
| » 15,40 5 cc. E. E. endov. |        |
| » 17,15 glicemia . . .     | 1,50 ‰ |
| » 18,05 5 cc. E. E. endov. |        |
| » 19,30 glicemia . . .     | 1,40 ‰ |

*VIII giorno di esperimento*

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| ore 15,40 glicemia . . .   | 2,70 ‰ |
| » 15,55 5 cc. E. E. endov. |        |
| » 17,15 glicemia . . .     | 1,65 ‰ |
| » 17,20 5 cc. E. E. endov. |        |
| » 18,30 glicemia . . .     | 1,20 ‰ |

*IX giorno di esperimento*

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| ore 15,00 glicemia . . .   | 3,44 ‰ |
| » 15,05 5 cc. E. E. endov. |        |
| » 16,25 glicemia . . .     | 3,12 ‰ |
| » 17,00 » . . .            | 3,15 ‰ |
| » 17,10 5 cc. E. E. endov. |        |
| » 18,50 glicemia . . .     | 2,35 ‰ |

## CONIGLIO N° 5

*I giorno di esperimento*

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| ore 17,30 glicemia . . .   | 4,70 ‰ |
| » 17,35 4 cc. E. E. endov. |        |
| » 18,25 glicemia . . .     | 3,40 ‰ |
| » 19,15 » . . .            | 4,20 ‰ |

## CONTROLLI CON E. E. (ESTRATTO EPATICO ENZIMATICO)

## INATTIVATO:

## CONIGLIO N° 4

*XVIII giorno di esperimento*

|   |        |
|---|--------|
| ore 15,45 glicemia . . .                          | 3,40 ‰ |
| » 15,50 5 cc. E. E. vecchio<br>di 3 giorni endov. |        |
| » 16,50 glicemia . . .                            | 3,45 ‰ |
| » 17,30 » . . .                                   | 3,45 ‰ |

*XIX giorno di esperimento*

|  |        |
|--|--------|
| ore 15,45 glicemia . . .                         | 3,30 ‰ |
| » 15,55 5 cc. E. E. riscal-<br>dato a 65° endov. |        |
| » 17,00 glicemia . . .                           | 3,30 ‰ |

## CONIGLIO N° 5

*III giorno di esperimento*

|   |        |
|---|--------|
| ore 13,85 glicemia . . .                          | 4,40 ‰ |
| » 13,40 5 cc. E. E. vecchio<br>di 3 giorni endov. |        |
| » 15,00 glicemia . . .                            | 4,40 ‰ |

III. Abbiamo voluto studiare successivamente nello stesso animale, a distanza di alcuni giorni, comparativamente l'effetto di iniezione endovenosa dell'E. E. e dell'iniezione sotto-cute di 3 unità Insulina (= a 1,5 unità pro kilo). (Abbiamo usato l'Insulina Lilly nella confezione 1 cc. = 20 unità).

## CONIGLIO N° 8

*I giorno di esperimento*

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| ore 17,05 glicemia . . .   | 3,25 ‰ |
| » 17,10 4 cc. E. E. endov. |        |
| » 18,45 glicemia . . .     | 2,35 ‰ |
| » 19,00 2 cc. E. E. endov. |        |
| » 20,20 glicemia . . .     | 1,85 ‰ |

*III giorno di esperimento*

|  |        |
|--|--------|
| ore 17,15 glicemia . . .               | 3,03 ‰ |
| » 17,16 3 unità insulina<br>sottocute. |        |
| » 18,10 glicemia . . .                 | 2,75 ‰ |
| » 19,05 » . . .                        | 2,20 ‰ |

IV. Avendo osservato, come si vede nelle tabelle sopra riportate, che l'E. E. iniettato per via endovenosa, è in grado di determinare una diminuzione del tasso glicemico sia nei conigli normali, che nei conigli con diabete allossanico, abbiamo voluto studiare anche l'effetto dell'associazione dell'E. E. con l'insulina in conigli normali e in quelli con diabete allossanico. Riportiamo i dati ottenuti:

## CONIGLIO C. NORMALE

*I giorno di esperimento*

|  |        |
|--|--------|
| ore 15,30 glicemia . . .   | 0,70 ‰ |
| » 15,35 5 cc. E. E. endo-<br>vena e 3 unità in-<br>sulina sottocute. |        |
| » 16,15 glicemia . . .   | 0,25 ‰ |
| » 16,50 » . . .  | 0,25 ‰ |
| » 18,30 » . . .  | 0,30 ‰ |

*III giorno di esperimento*

|                                       |        |
|---------------------------------------|--------|
| ore 9,20 glicemia . . .               | 0,70 ‰ |
| » 9,20 3 unità insulina<br>sottocute. |        |
| » 10,00 glicemia . . .                | 0,58 ‰ |
| » 11,30 » . . .                       | 0,45 ‰ |
| » 13,00 » . . .                       | 0,33 ‰ |
| » 15,00 » . . .                       | 0,80 ‰ |



## CONIGLI CON DIABETE ALLOSSANICO

## CONIGLIO N° 4

*XI giorno di esperimento*

|           |  |        |
|-----------|--|--------|
| ore 16,05 | glicemia . . .   | 3,05 ‰ |
| » 16,10   | 5 cc. E. E. endo-<br>vena e 3 unità in-<br>sulina sottocute. |        |
| » 17,10   | glicemia . . .   | 1,70 ‰ |
| » 17,15   | 5 cc. E. E. endov.   |        |
| » 19,00   | glicemia . . .   | 0,88 ‰ |
| » 20,25   | » . . .  | 1,05 ‰ |

*XV giorno di esperimento*

|          |  |        |
|----------|--|--------|
| ore 9,30 | glicemia . . .   | 2,05 ‰ |
| » 9,35   | 5 cc. E. E. endo-<br>vena e 3 unità in-<br>sulina sottocute. |        |
| » 10,50  | glicemia . . .   | 0,85 ‰ |
| » 12,00  | » . . .  | 0,50 ‰ |
| » 13,00  | » . . .  | 0,25 ‰ |
| » 15,00  | » . . .  | 0,50 ‰ |
| » 18,00  | » . . .  | 1,20 ‰ |
| » 20,15  | » . . .  | 1,65 ‰ |
| » 21,00  | » . . .  | 1,50 ‰ |
| » 9,00   | » . . .  | 2,60 ‰ |

## CONIGLIO N° 5

*V giorno di esperimento*

|           |  |        |
|-----------|--|--------|
| ore 15,35 | glicemia . . .   | 4,40 ‰ |
| » 15,40   | 5 cc. E. E. endo-<br>vena e 3 unità in-<br>sulina sottocute. |        |
| » 16,35   | glicemia . . .   | 3,20 ‰ |
| » 16,40   | 5 cc. E. E. endov.   |        |
| » 17,40   | glicemia . . .   | 2,40 ‰ |
| » 17,45   | 5 cc. E. E. endov.   |        |
| » 19,10   | glicemia . . .   | 1,10 ‰ |

## CONIGLIO N° 8

*V giorno di esperimento*

|           |  |        |
|-----------|--|--------|
| ore 15,45 | glicemia . . .   | 3,25 ‰ |
| » 15,50   | 5 cc. E. E. endo-<br>vena e 3 unità in-<br>sulina sottocute. |        |
| » 16,45   | glicemia . . .   | 1,35 ‰ |
| » 17,45   | » . . .  | 0,50 ‰ |
| » 19,15   | » . . .  | 1,05 ‰ |

## DISCUSSIONE

I risultati fino ad ora ottenuti nella nostra serie di esperienze, ci sono sembrati di per se stessi meritevoli di essere segnalati, pur essendo esse ancora in corso, perchè dimostrano chiaramente due lati importanti del ricambio degli zuccheri. Il primo punto che abbiamo potuto dimostrare è l'azione ipoglicemica di un estratto enzimatico di fegato (E. E.) sia nei conigli normali, come nei conigli con diabete allossanico. Il secondo punto riguarda l'effetto che produce l'associazione dell'E. E. con piccole quantità di insulina.

Dai dati ottenuti possiamo trarre le seguenti conclusioni:

I) È possibile ottenere dal fegato di maiale un E. E. che contiene con tutta verosimiglianza gli enzimi ossido-riducenti della cellula epatica (ottimi di concentrazione, di pH, di T°, distruzione dell'attività col calore e con l'invecchiamento). Questo E. E. se iniettato nella vena marginale del coniglio ha la capacità di abbassare il tasso glicemico. L'entità di questa curva ipoglicemica oscilla tra 0,35 e 0,50 g. glucosio per litro, nel coniglio normale. Nel coniglio con diabete allossanico essa va a seconda degli animali, da un minimo di 0,60 ad un massimo di 1,35 g. glucosio per litro. Sia nei conigli normali che in quelli con diabete allossanico, la diminuzione del tasso glicemico è già evidente dopo 30' e raggiunge il suo massimo entro la prima ora e mezza. Dopo questo tempo la glicemia torna ad elevarsi lentamente per raggiungere i valori di partenza dopo la seconda ora e mezza. Se nel coniglio con diabete allossanico, al punto più basso della curva ipoglicemica, determinata da una prima iniezione endovenosa di E. E., se ne inietta dell'altro, non si osserva più risalita della glicemia, ma un nuovo cospicuo abbassamento. Con due iniezioni a distanza di un'ora e mezza o due ore, si può così determinare un abbassamento complessivo di di 1,00-1,10-1,60 g. glucosio per litro.

Abbiamo così potuto sicuramente dimostrare che un E. E. del fegato determina una diminuzione della percentuale del glucosio nel sangue. Come nel precedente lavoro [5], anche in questo abbiamo voluto osservare se la proprietà ipoglicemizzante si conserva con l'invecchiamento dell'E. E. e con il suo riscaldamento. Le prove di controllo

oseguite sia con l'E. E. riscaldato, che con quello lasciato invecchiare per tre giorni, non hanno dimostrato nessuna diminuzione del tasso glicemico. Si può quindi escludere che l'azione ipoglicemizzante sia un'azione aspecifica, ad esempio legata all'introduzione in circolo di proteine eterogenee.

Di notevole interesse era anche il sapere se l'E. E. agisse per la presenza di enzimi glicolitici, o se invece per un'azione inibitrice esplicantesi nell'animale a carico della glicogenolisi epatica, e che determinasse quindi secondariamente la ipoglicemia. Questa seconda possibilità, alla quale avevamo pensato per la capacità omeostatica del fegato, dimostrata da SOSKIN e LEVINE e coll. [2], è stata però scartata perchè, come avevamo dimostrato in altro lavoro [5], questo E. E. possiede *in vitro* la capacità glicolitica. Quindi è da ritenere che l'E. E. introdotto in circolo, determini una diminuzione del glucosio nel sangue per una rapida ossidazione del glucosio, e non per una azione indiretta attraverso i meccanismi di regolazione della glicemia.

II) Dimostrata l'azione ipoglicemizzante dell'E. E., non solo nel coniglio normale, ma specialmente nel coniglio con diabete allossanico, abbiamo voluto studiare i rapporti che esso aveva con l'insulina. Nel coniglio normale, come si osserva nella fig. 1, l'ipoglicemia da insulina (1,5 unità pro kilo) determina un abbassamento che raggiunge il suo massimo solo alla terza ora e mezza. L'entità è di 0,37 g. per litro. La glicemia ritorna ai valori di partenza alla sesta ora. L'ipoglicemia determinata dall'associazione dell'E. E. con l'insulina (1,5 unità pro kilo) inizia al contrario assai rapidamente, raggiunge il suo massimo dopo 40' e si protrae fino alla terza ora ai valori raggiunti, dopo di che torna lentamente a rialzarsi. L'entità della ipoglicemia è di 0,45 g. glucosio per litro.

Nel coniglio con diabete allossanico, vedi fig. 2, abbiamo studiato comparativamente l'azione di due iniezioni di E. E. con quella di 1,5 unità insulina pro kilo. Come si osserva dalla grafica, le due curve ipoglicemiche hanno un andamento assai vicino nel tempo e nell'intensità. Confrontando queste due curve con quella ottenuta con l'associazione dell'E. E. con insulina nelle stesse dosi, si notano due dati importanti: la rapidità molto maggiore della diminuzione della glicemia e la maggiore entità dell'abbassamento in quella ottenuta con

l'associazione. In due ore la sola insulina produce un abbassamento di 0,90 g. glucosio per litro, il solo E. E. uno di 1,00 g. glucosio per litro, l'associazione dei due produce un abbassamento di 2,75 g. per litro. Sommando l'effetto dei due preparati usati isolatamente, si ha uno abbassamento molto inferiore a quello dei due associati. Da questi dati si può quindi concludere che l'associazione, in maniera ancora più evidente nel coniglio diabetico, produce un effetto che non deve essere considerato solo come somma di quello dei due principi ipoglicemizzanti, ma come conseguenza di un sinergismo esistente tra i due preparati. Poichè *in vitro* l'E. E. ha azione glicolitica [5], mentre l'insulina è priva di attività [7], e poichè più evidente è l'effetto della associazione negli animali diabetici, per danno pancreatico, si può avanzare l'ipotesi che il vero principio glicolitico, di tipo enzimatico, sia quello contenuto nell'E. E. e che esso venga regolato ed esaltato nella sua funzione dal principio pancreatico, l'insulina. Appare evidente l'importanza di questo punto, e maggiori dati occorrono per chiarire più intimamente il meccanismo di sinergia tra enzimi epatici ed insulina. Per questo motivo, merita di iniziare una serie di esperienze dirette a dimostrare e chiarire un argomento sul quale gli autori si dimostrano discordi, cioè il punto di attacco dell'azione insulinica nel processo glico-regolatore del fegato.

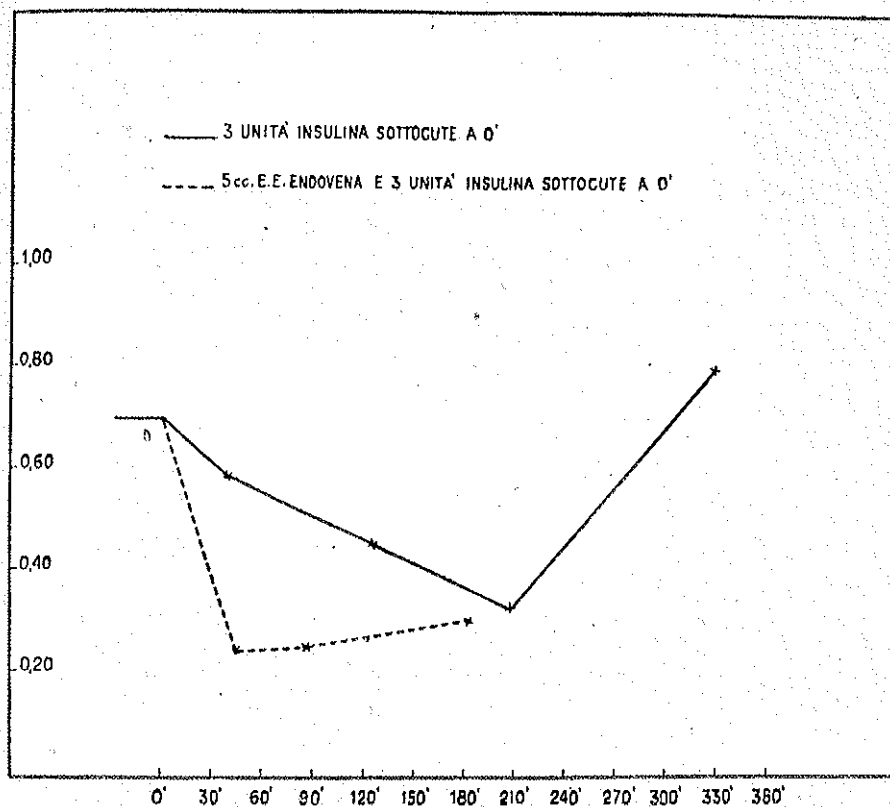


FIGURA N° 1

Ascisse: tempo dell'esperimento in minuti primi.

Ordinate: valore del tasso glicemico espresso in grammi glucosio per litro. Nella figura sono riportate le curve ottenute, a distanza di alcuni giorni l'una dall'altra, nel coniglio normale C (vedi protocolli pag. 134) con A) iniezione sottocutanea al tempo 0' di sola insulina nella dose di 1,5 unità pro kilo III giorno di esperimento (linea continua); B) iniezione endovenosa di 5 cc. E. E. e 1,5 unità pro kilo insulina sottocute al tempo 0', associate I giorno di esperimento (linea tratteggiata). La figura dimostra un più rapido abbassamento, che è anche di maggiore entità, nella curva ottenuta con E. E. e insulina associate.

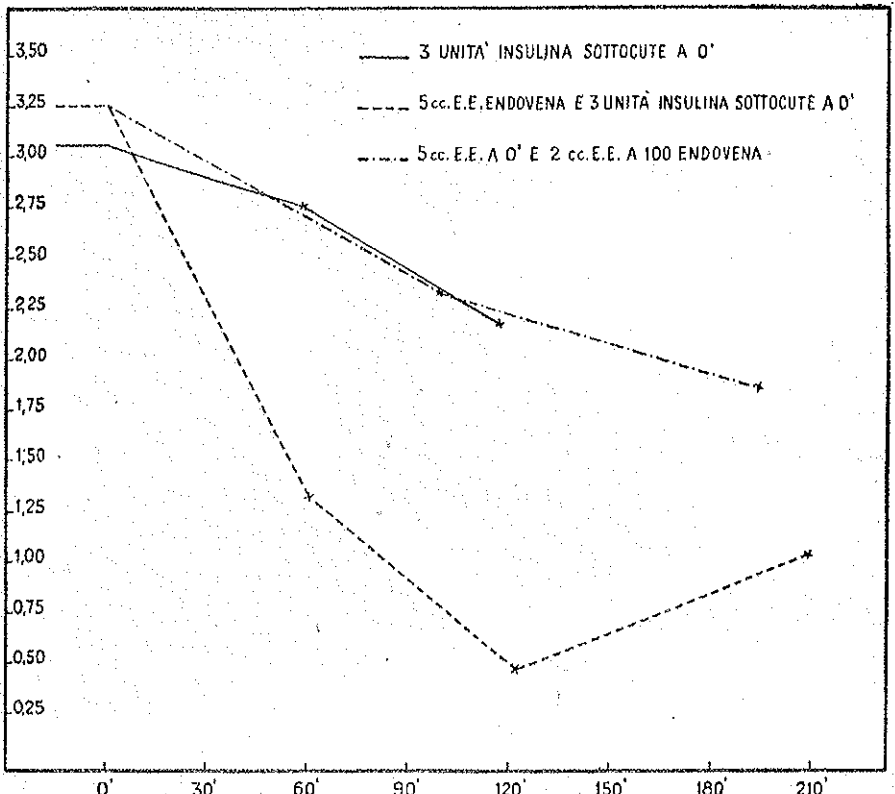


FIGURA N° 2

Ascisse: tempo dell'esperimento in minuti primi.

Ordinate: valore del tasso glicemico espresso in grammi glucosio per litro. Nella figura sono riportate le curve glicemiche ottenute, a distanza di alcuni giorni le une dalle altre, nel coniglio con diabete allossanico N° 8 (vedi protocolli alle pagg. 134 e 135) con A) iniezione sottocutanea al tempo 0' di sola insulina nella dose di 1,5 unità pro kilo III giorno di esperimento (linea continua); B) due iniezioni al tempo 0' e al tempo 100' di rispettivamente 5 cc. e 2 cc. di E. E. endovena I giorno di esperimento (linea tratteggiata e punteggiata); C) iniezione al tempo 0' di 5 cc. E. E. endovena e 1,5 unità insulina pro kilo sottocute V giorno di esperimento (linea tratteggiata). La figura dimostra un andamento paragonabile delle prime due curve. La curva terza dimostra invece un andamento del tutto particolare, per il quale si deve ritenere che esista un sinergismo tra E. E. ed insulina e non una somma dei singoli effetti.

## BIBLIOGRAFIA

[1] BARRON E. S. G., *Meccanismo del metabolismo dei carboidrati*, «Adv. Enzymol.», **3**, 149, 1943; KREBS A., *Gli stadi intermedi nell'ossidazione biologica dei carboidrati*, «Adv. Enzymol.», **3**, 191, 1943; CORI C. P., *Fosforilizzazione del glucosio e del glicogeno*, «Biol. Symp.», **5**, 131, 1941; CORI C. P., *Demolizione del glicogeno e sintesi nei tessuti*, «Endocrinology», **26**, 285, 1940.

[2] SOSKIN S., ALLWEISS M. D. e COHN D. J., *Influenza del pancreas e del fegato sulla curva di tolleranza al glucosio*, «Am. J. Physiol.», **109**, 155, 1934; SOSKIN S., HEXES H. E., HERRICK J. F. e MANN F. C., *Meccanismo di regolazione epatica della glicemia*, «Am. J. Physiol.», **124**, 558, 1938; SOSKIN e ALLWEISS M. D., *La fase ipoglicemica della curva di tolleranza del glucosio*, «Am. J. Physiol.», **110**, 4, 1934.

[3] SOSKIN S. e LEVINE R., *Produzione sperimentale di tipi di diabete sensibili ed insensibili all'insulina*, «J. A. M. A.», **110**, 768, 1938; WILLIAMS J. L. e DICK G. F., *Diminuzione della tolleranza al glucosio nelle malattie infettive acute*, «Arch. Inter. Med.», **50**, 801, 1932; SOSKIN S., ALLWEISS M. D. e MIRSKY I. A., *Interpretazione della curva anormale al glucosio che si ha nella tossiemia in relazione alla funzione epatica*, «Arch. Inter. Med.», **56**, 927, 1935; HOLMES E. C., *Metabolismo dei carboidrati e tossiemia*, «Physiol. Rev.», **19**, 439, 1939; SOSKIN S. e MIRSKY I. A., *Influenza del progressivo danno tossiemico del fegato sulla curva di tolleranza al glucosio*, «Am. J. Physiol.», **112**, 649, 1935.

[4] ZILVERSMIT D. B., CHAIKOFF I. L., FELLER e MAROSO E. J., *Ossidazione del glucosio marcato con carbonio radioattivo da parte dei topi normali e con diabete allossanico*, «J. Biol. Chem.», **176**, 389, 1943; FELLER, STRISOWER e CHAIKOFF I. L., *Trasformazione ed ossidazione del glucosio dell'organismo in topi normali e con diabete allossanico*, «J. Biol. Chem.», **187**, 571, 1950; CHERNIK S., CHAIKOFF I. L., MAROSO E. J. e ISARFF E., *Lipogenesi ed ossidazione del glucosio nel fegato di topi con diabete allossanico*, «J. Biol. Chem.», **186**, 527, 1950.

[5] RECCHIA F. e GHIRON M., *Sull'attività glicolitica in vitro e aerobiosi di preparazione di fegato di miale*, «Pont. Acad. Scient. Acta», XIV, n. 11, 1951.

[6] DUFFY, *Diabete allossanico nel coniglio*, «J. of Path. and Bact.», **57**, 199, 1945; DUNN J. F., SCHIBHAN H. L. e MC LETCHIE N. G. B., *Necrosi delle isole del Langerhans prodotte sperimentalmente*, «Lancet», **1**, 484, 1943; JACOBS H. R., *Azione ipoglicemica dell'allossana*, «Proc. Soc. Exper. Biol. and Med.», **37**, 407, 1937.

[7] EADIE G. S., MACLEOD J. J. R. e NOBLE E. C., *Insulina e glicolisi*, «Am. J. Physiol.», **65**, 462, 1923; SOSKIN S. e LEVINE R., *Relazione tra il cambiamento nei fosfati ematici e muscolari che segue alla somministrazione di glucosio, e somministrazione di insulina ed epinefrina*, «Am. J. Physiol.», **134**, 40, 1941.

## UNA NUOVA VISIONE DELLA GEOMETRIA SOPRA UNA CURVA (\*)

FRANCESCO SEVERI  
*Accademico Pontificio*

SUMMARIVM. — Super algebraicam curvam Auctor, intrinseco praesertim modo, constituit geometriam invariantem relate ad birationales transformationes, quae non postulat praeviam multiplo-  
rum punctorum remotionem; quorum insuper omnium remotionem a posteriori operatur methodus quae in hac Nota exponitur.

Il metodo rapido per costruire la geometria sopra una curva, esposto dall'Autore (1), poggia sopra un lemma proiettivo. Qui si vuol compiere un passo ulteriore per una formulazione del tutto intrinseca della geometria sopra una curva, sostituendo a quel lemma un teorema intrinseco nella deduzione e nell'espressione; con migliori possibilità, dunque, di ulteriori avvicinamenti all'algebra astratta (2).

Il metodo qui sviluppato a un certo momento si fonde con quello esposto nel 1920 e sbocca nell'eliminazione globale delle singolarità, senza che occorra alcun processo infinitesimale o alcuna nozione di singolarità infinitamente vicine.

1. — Supporremo acquisite proiettivamente talune proprietà elementari relative alle curve algebriche e alle loro serie lineari; e cioè:

(\*) Nota presentata nella riunione del 22 novembre 1951.

(1) F. SEVERI, *Una rapida ricostruzione della geometria sopra una curva algebrica*, «Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti», 1920, pag. 930. Vedi pure SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, Bologna, Zanichelli, 1926, pag. 145. Questo metodo fu didatticamente elaborato in forma ancor più elementare da ALBANESE (Vedi il *Trattato* citato, pag. 75).

(2) L'avvicinamento del metodo rapido all'algebra astratta fu compiuto da GRÖBNER, *Idealthoretischer Aufbau der algebraischen Geometrie*, Berlin-Leipzig, Teubner, 1941.



a) La circostanza ovvia che il punto « generico » d'una curva algebrica irriducibile qualunque è semplice (ossia che i punti multipli sono in numero finito).

b) La nozione di serie lineare  $g_n^r$ , d'ordine  $n$  e dimensione  $r$ , di gruppi di  $n$  punti sopra una curva algebrica irriducibile  $C$ , quale intersezione di  $C$  con un sistema lineare (che senza restrizione può suppersi  $\infty^r$ ) di forme, dell'ambiente proiettivo di  $C$ .

Se non esistono punti fissi dei gruppi di  $g_n^r$ , ed è quindi  $r \geq 1$ , il gruppo « generico » di  $g_n^r$  consta di  $n$  punti semplici, distinti di  $C$ , in ciascun dei quali la forma del sistema, che sega il gruppo, ha con  $C$  un'intersezione semplice.

Ciò significa che le forme del sistema secante, che intersecano  $C$ , fuori degli eventuali punti base, giacenti su  $C$ , in meno di  $n$  punti, costituiscono entro il sistema una varietà (algebrica) subordinata.

Quanto ai punti semplici di  $C$ , che sieno punti base del sistema secante, se in un tal punto,  $P$ , la forma « generica » del sistema ha con  $C$  in  $P$  molteplicità d'intersezione  $\mu$  (ossia se le forme che hanno con  $C$  in  $P$  molteplicità maggiore di  $\mu$  formano in esso una varietà subordinata), il punto  $P$  potrà esser considerato come punto fisso dei gruppi di  $g_n^r$ , con una molteplicità  $\nu$  ( $0 \leq \nu \leq \mu$ ).

Dei gruppi della serie contenenti punti multipli di  $C$ , ci disinteressiamo, in quanto ci basta ora di considerare gruppi costituiti soltanto da punti semplici di  $C$ .

OSSERVAZIONE. - Abbiamo insistito a precisare ogni volta, nelle varie circostanze in cui è stata usata, il senso della parola « generico » per chi eventualmente lo considerasse tuttora non ben definito! Rinviamo in proposito ad altri nostri lavori sull'argomento e non insistiamo più su questa banale ed ormai inutile precisazione.

2. La precedente definizione b) riconduce senz'altro alla definizione della serie lineare quale insieme dei gruppi di livello d'una funzione razionale del punto di  $C$ , combinazione lineare di  $r$  funzioni razionali linearmente indipendenti, aventi in comune un gruppo di dato livello, costituito da  $n$  punti semplici, distinti di  $C$ .

Dei gruppi di livello contenenti punti non distinti o punti multipli di  $C$ , possiamo qui disinteressarci.

c) Quest'interpretazione conduce poi subito al teorema di unicità e di esistenza per la serie lineare completa di ordine  $n$  (ossia non ulteriormente ampliabile) individuata da  $n$  punti semplici distinti di  $C$ , ivi compreso il caso in cui non esiste alcuna funzione razionale avente quei soli punti come punti del dato livello: nel qual caso la serie individuata si assume di dimensione  $r = 0$ .

D'altronde la serie lineare completa individuata dal dato gruppo di  $n$  punti semplici, distinti, può nel fatto possedere alcuni di quei punti come fissi (cioè di livello indeterminato).

È l'ipotesi che ha per caso estremo una serie completa  $g_n^0$ .

Dal teorema di unicità e di esistenza segue infine, quale ovvio corollario, il Restsatz invariante, inerente ai concetti di somma e di differenza di serie lineari, limitatamente (in questa fase costruttiva) a operazioni che facciano intervenire serie senza punti fissi in punti multipli di  $C$ .

d) Si suppone altresì acquisita la distinzione delle serie lineari in semplici e composte. Tale distinzione non richiede che l'intervento dei gruppi della serie che passano per un punto generico di  $C$ , e, astrazione fatta dai punti fissi, il generico di questi gruppi consta di punti semplici e distinti.

Un gruppo neutro di una  $g_n^r$  data su  $C$  ( $r > 1$ ) è un gruppo di  $v$  punti ( $1 < v < n$ ) semplici e distinti di  $C$ , che presenta ai gruppi della serie che debbon contenerlo, una sola condizione; cioè tale che nessun suo punto sia fisso per  $g_n^r$  e che tutti i gruppi di  $g_n^r$  che passano per uno qualsiasi dei  $v$  punti del gruppo, contengono in conseguenza i  $v - 1$  rimanenti.

Orbene, se una  $g_n^r$  è semplice, non esiste sulla curva che un numero finito ( $\geq 0$ ) di gruppi neutri per la serie.

Data la  $g_n^r$  costruiscasi invero la curva irriducibile  $C'$  - definita a meno di un'omografia - detta immagine proiettiva della  $g_n^r$  di  $C$ . Allora: o  $C'$  risulta in corrispondenza birazionale con  $C$  e la  $g_n^r$  data è semplice; oppure  $C'$  risulta in corrispondenza  $(1, v)$  (ove  $v$  è un certo intero,  $1 < v < n$ , divisore di  $n$ ) e la  $g_n^r$  è composta con un'involuzione di grado  $v$ , in corrispondenza birazionale con  $C$ . Nel primo caso ogni gruppo neutro di  $g_n^r$  dà luogo ad un punto multiplo di  $C'$ ;

sicchè, per la proprietà  $a$ ), i gruppi neutri di  $g_r^n$  sono in numero finito (<sup>1</sup>).

3. Premesso tutto ciò dimostriamo il teorema:

*Sieno  $|G_m|, |H_n|$  due serie lineari complete, semplici, prive di punti fissi, di dimensioni  $> 1$ , individuate da due gruppi  $G_m, H_n$ , rispettivamente di  $m, n$  punti semplici, distinti, privi di punti comuni. Sussiste allora per  $l$  abbastanza grande [ $\geq \max(m-1, n-1)$ ], la relazione:*

$$[1] \quad lm - \delta(lG_m) = ln - \delta(lH_n) ,$$

ove  $\delta(A)$  denota la dimensione della serie lineare completa  $|A|$ .

Consideriamo la serie completa, d'ordine  $l(m+n)$ ,  $|l(G_m + H_n)|$  e cerchiamo di calcolarne la dimensione  $\delta[l(G_m + H_n)]$ .

All'uopo osserviamo che, se  $l \geq n-1$ , un generico gruppo  $\bar{H}_n$  di  $|H_n|$  presenta ai gruppi di  $|lG_m|$ , che debbon contenerlo, esattamente  $n$  condizioni indipendenti.

Invero, essendo  $|G_m|$  semplice, non esiste in  $C$  che un numero finito di gruppi neutri di  $|G_m|$ , epperò, essendo inoltre  $|H_n|$  priva di punti fissi,  $\bar{H}_n$  non contiene alcun punto appartenente a qualche gruppo neutro di  $|G_m|$ . Pertanto i gruppi di  $|G_m|$  passanti per un punto qualunque di  $\bar{H}_n$ , non contengono altri punti di  $\bar{H}_n$ ; e le serie, almeno  $\infty^1$ , residue dei singoli punti di  $\bar{H}_n$  rispetto a  $|G_m|$ , sono  $n$  distinte fra loro e ciascuna non ha che il punto fisso imposto. Si posson in conseguenza trovare  $n-1$  gruppi distinti  $G_m^1, G_m^2, \dots, G_m^{n-1}$  di  $|G_m|$  contenenti i punti  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  di  $\bar{H}_n$  e non il punto restante  $P_n$ . I gruppi scelti non hanno inoltre a due a due punti comuni. Il gruppo  $G_m^1 + G_m^2 + \dots + G_m^{n-1}$ , insieme ed altri  $l-n+1$  gruppi generici di  $|G_m|$ , costituisce dunque un gruppo  $X$  di  $|lG_m|$ , formato da  $lm$  punti semplici di  $C$  e distinti, il quale passa per  $n-1$  punti di  $\bar{H}_n$ , senza contenere il punto rimanente. Questo prova che  $\bar{H}_n$  presenta ai gruppi di  $|lG_m|$   $n$  condizioni indipendenti.

Assumasi ora in  $C$  un'altra serie lineare qualunque  $|A|$ , individuata da un gruppo  $A$  di punti semplici e distinti della curva.

(<sup>1</sup>) È quasi superfluo ricordare che esistono serie semplici: per esempio quelle segate su  $C$  dalle forme di dato ordine dell'ambiente. Non val la pena che spendiamo parole a dimostrare l'esistenza di serie composte, perchè non intervengono nella nostra trattazione.

È facile constatare che anche ai gruppi della serie completa  $|lG_m + A|$ , per  $l$  abbastanza grande, il generico  $\bar{H}_n$  presenta  $n$  condizioni indipendenti. Infatti,  $\bar{H}_n$ , essendo generico entro una serie priva di punti fissi, non ha alcun punto comune col gruppo  $\bar{A}$  genericamente prefissato in  $|A|$ , epperò aggiunto  $\bar{A}$  al gruppo  $X$  sopra costruito, s'ottiene un gruppo di  $|lG_m + A|$  contenente  $n-1$  punti di  $\bar{H}_n$  e non il rimanente: donde l'asserto.

Ne segue, per gradi successivi, che le serie

$$|l(G_m + H_n) - \bar{H}_n|, |l(G_m + H_n) - 2\bar{H}_n|, \dots, |l(G_m + H_n) - l\bar{H}_n|;$$

cioè le serie:

$$|lG_m + (l-1)H_n|, |lG_m + (l-2)H_n|, \dots, |lG_m|,$$

le quali son tutte individuabili con gruppi di punti semplici e distinti (tanti quant'è l'ordine di ciascuna di esse), per  $l \geq n-1$  hanno le dimensioni

$$\delta[l(G_m + H_n)] - n, \delta[l(G_m + H_n)] - 2n, \dots, \delta[l(G_m + H_n)] - ln.$$

Dunque è:

$$\delta[l(G_m + H_n)] - ln = \delta(lG_m).$$

Similmente, per  $l \geq m-1$ , sarà:

$$\delta[l(G_m + H_n)] - lm = \delta(lH_n).$$

Sottraendo a membro a membro le ultime due relazioni, se ne trae la relazione [1], che si voleva dimostrare<sup>(1)</sup>.

4. - Si osservi ora che è certo  $lm \geq \delta(lG_m)$ , il segno = valendo allora e soltanto allora che tutti i gruppi di  $lm$  punti di  $C$  formano una  $g_{lm}^{lm}$ . Ma se così è, lo stesso avviene dei resti di un gruppo di

(1) Il ragionamento esposto è la radice d'un procedimento che ho seguito in generale per dimostrare l'invarianza del genere aritmetico d'una varietà di dimensione qualunque. Vedi SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche: seconda memoria*, «Annali di matematica», 1951. Nella conferenza che feci in proposito alla Harvard University l'8 settembre 1950, mi fermai anzi proprio sulle curve per mostrare in questo caso semplice la trama del processo generale.

$lm - 1$  punti generici di  $C$ , rispetto alla  $g_{lm}^1$ , cosicchè  $C$  è birazionalmente equivalente ad una  $g_1^1$ , cioè ad una retta, e secondo la locuzione corrente, è una *curva razionale*. Poniamo, per  $l$  abbastanza grande:

$$[2] \quad lm - \delta(lG_m) = p .$$

L'intero  $p \geq 0$  risulta indipendente da  $l$  e da  $|G_m|$ . Il suo annullarsi caratterizza inoltre le curve razionali.

Già la [2], comparata con l'ordinario teorema di RIEMANN-ROCH per le serie non speciali, mostra che  $p$  non è che il carattere conosciuto classicamente con la denominazione di *genere* della curva (vedi il successivo n. 5).

Ma qui si tratta di costruire ex novo la teoria, mostrando viceversa, che assunto  $p$  a genere della curva, si ricade nel carattere conosciuto con questo nome.

Da notarsi anzitutto che *il genere d'una curva irriducibile (secondo la definizione cui siamo giunti) ha senso sopra una curva con singolarità qualunque (di un qualsiasi spazio ambiente) ed esso risulta invariante per ogni trasformazione birazionale della curva.*

Invero, ad una serie lineare semplice  $|G_m|$ , almeno  $\infty^2$ , priva di punti fissi su  $C$ , risponde, sopra una trasformata birazionale  $C'$  di  $C$ , una serie analoga  $|G'_m|$  e gl'interi  $lm$ ,  $\delta(lG_m)$ , permangono immutati nel passaggio da  $|G_m|$  a  $|G'_m|$ , perchè una serie completa semplice, almeno  $\infty^2$ , priva di punti fissi, ha per corrispondente su  $C'$  una serie analoga.

La ragione intima del successo del procedimento è che *ci siamo fondati su proprietà delle serie lineari, le quali hanno senso, non soltanto se riferite all'insieme di tutti i punti semplici o multipli della curva, ma anche al solo insieme dei punti semplici* (1).

5. Dato su  $C$  un gruppo  $H_n$  di  $n$  punti semplici, distinti, esiste sempre qualche serie lineare completa  $|G_m|$ , semplice, almeno  $\infty^2$ , i cui eventuali gruppi neutri non hanno alcun punto comune con  $H_n$ .

(1) È questa la bussola orientatrice per simili procedimenti, come avevo già osservato a pag. 335 del *Trattato di geometria algebrica*.

Una tal serie è per esempio quella individuata da una sezione iper-piana generica di  $C$ .

Da quest'osservazione, tenuto conto di quanto precede, si trae il teorema:

*La dimensione della serie lineare completa  $|H_n|$ , individuata da un gruppo  $H_n$  di  $n$  punti semplici, distinti della curva, soddisfa alla disuguaglianza:*

$$\delta(H_n) \geq n - p .$$

Sia infatti  $|G_m|$  una serie lineare completa, almeno  $\infty^2$ , soddisfacente rispetto ad  $H_n$  alle ipotesi dell'osservazione premessa. Allora  $n$  gruppi generici  $G_m$  passanti pei singoli punti di  $H_n$  sono tra loro distinti e non hanno a due a due punti comuni. Per  $l \geq n$  esistono dunque in  $|lG_m|$  gruppi passanti per  $H_n$ , i cui residui sono gruppi  $K$  di  $lm - n$  punti semplici, distinti della curva, sicchè è  $lG_m \equiv H_n + K$ .

Ora il gruppo  $K$ , costituito da punti semplici, distinti, presenta ai gruppi della  $|lG_m|$ , che debbano contenerlo, per lo meno tante condizioni quant'è il numero  $lm - n$  dei suoi punti; epperò la dimensione della serie residua  $|H_n| = |lG_m - K|$  è  $\geq \delta(lG_m) - (lm - n) = n - p$ ; c. d. d.

Questo teorema, confrontato con l'analogo della geometria algebrica classica, permette di affermare che il numero  $p$  non è altro che il genere riemanniano.

Chiameremo *non speciale* una  $|H_n|$  completa per cui  $\delta(H_n) = n - p$ . Come risulta dai nn. 3, 4, esistono serie non speciali. Se invece  $\delta(H_n) > n - p$ , la serie sarà detta *speciale*.

6. - Dal teorema precedente si deduce che « i gruppi di  $lm$  punti di  $C$ , per  $l$  abbastanza grande, si distribuiscono in  $\infty^p$  serie lineari complete non speciali ». Infatti, se  $|G_m|$  è una serie soddisfacente alle ipotesi del n. 3, per  $l$  abbastanza grande,  $|lG_m|$  è non speciale.

D'altronde, a norma del teorema precedente, una serie qualsiasi di ordine  $lm$ , individuata da  $lm$  punti distinti, semplici di  $C$ , ha dimensione  $\geq lm - p$ . E siccome la dimensione di una tal serie, variando il gruppo degli  $lm$  punti, non può che crescere per gruppi particolari,

così deve si concludere che ogni serie di ordine  $lm$  ( $l$  grande) ha la dimensione  $lm - p$ . Donde la proprietà enunciata.

Ne deriva che:

*Un gruppo  $\Gamma$  di  $p$  punti generici, semplici, distinti, della curva  $C$ , individua una serie lineare di dimensione zero.*

Assumiamo invero due serie  $|B'|$ ,  $|B''|$  di ordine  $lm$ , appartenenti dunque alla predetta varietà  $\infty^p$ . La serie  $|\Gamma + B' - B''|$  esiste effettiva, perchè  $|\Gamma + B'|$  ha la dimensione  $\geq (lm + p) - p = lm$  e il gruppo  $B''$  presenta al più ai gruppi di una tal serie  $lm$  condizioni. Siccome, tenuto fisso  $B'$ , due serie distinte  $|B''|$  danno luogo a due serie distinte  $|\Gamma + B' - B''|$ , la varietà delle serie  $|\Gamma|$  contiene almeno  $\infty^p$  serie distinte. E questo significa che un generico  $\Gamma$  individua una  $g_p^0$  completa.

D'altronde, preso un gruppo generico di  $p+1$  punti, questo, a norma del teorema del n. 5, individua almeno una  $g_{p+1}^1$ . Si ricade dunque nella definizione del genere secondo WEIERSTRASS, già da me raggiunta nella trattazione del 1920, sulla base di un lemma prettamente proiettivo.

Da ciò tutte le conseguenze tratte intrinsecamente nella Nota del 1920 o nel passo citato del *Trattato di geometria algebrica*. In particolare, il fatto che per  $n > 2p - 2$  o per  $r > p - 1$  ogni  $g_n^r$  completa su  $C$  è non speciale e il teorema che l'immagine proiettiva d'una serie completa  $|H_n|$  individuata su  $C$  da un gruppo di  $n > 2p$  punti semplici e distinti, è birazionalmente equivalente a  $C$  e priva di punti multipli.

Così i punti multipli eventuali di  $C$  spariscono in blocco, mediante una conveniente trasformazione birazionale.

7. - Tralascio di esporre altri teoremi, che si presentano successivamente nello sviluppo della geometria sopra una curva, nei quali occorrerebbe di ridurre al minimo i richiami di carattere proiettivo, pei migliori accostamenti all'algebra astratta. Uno dei punti essenziali è il teorema di riduzione, alla cui dimostrazione occorrerebbe dare un andamento intrinseco, stabilendo in primo luogo che su  $C$  esiste sempre qualche serie speciale di ordine  $2p - 2$ . Da ciò seguirebbero facilmente in modo intrinseco le proprietà della serie canonica, il teorema di riduzione e il teorema di RIEMANN-ROCH.

Preferisco chiudere con talune rapide considerazioni relative alla geometria sopra una curva  $C$  con singolarità qualunque.

Una volta provato che  $C$  possiede un modello privo di punti multipli è noto (vedi per es. il mio *Trattato* citato) come si possa introdurre il concetto di *ramo* e arrivare agli sviluppi in serie che rappresentano il ramo stesso.

Ma si può pensare anche a tale proposito (con vantaggio forse rispetto alle applicazioni all'algebra astratta) di capovolgere la trattazione, stabilendo a priori in modo intrinseco sulla curva  $C$ , dotata di singolarità qualunque, il concetto di ramo.

Introdotta in una delle tante maniere possibili (per es. attraverso l'espressione formale della distanza complessa di due punti di  $C$ ) la nozione d'intorno di un punto di  $C$ , al finito o all'infinito, un *ramo* avente l'*origine* in un punto  $O$  di  $C$ , si può definire come un insieme di punti appartenente all'intorno di  $O$ , il quale, mediante una conveniente trasformazione birazionale di  $C$ , può ricondursi ad essere l'intorno completo di un sol punto della trasformata di  $C$  e non può mai scindersi in insiemi parziali appartenenti a intorni di due o più punti della curva trasformata.

Il ramo è invariante per trasformazioni birazionali e la geometria sopra un modello non singolare della curva si trasferisce senz'altro al modello  $C$ , dotato di singolarità qualunque, sostituendo ai punti (semplici) del modello non singolare i *punti-origine* di  $C$ , ossia le associazioni di ciascun ramo della curva con la rispettiva origine.

Così per esempio il teorema di unicità e d'esistenza della serie lineare individuata da un gruppo di  $G$  di  $m$  punti-origine distinti o coincidenti (i quali naturalmente possono anche non coincidere, pur avendo la stessa origine), acquista valore appunto rispetto a gruppi siffatti di punti-origine, ciascun dei quali resta definito intrinsecamente sulla curva.

Ogni serie lineare  $g_n^r$  sulla  $C$ , dà luogo, nei riguardi d'un dato ramo  $\gamma$ , di origine  $O$ , a un *ciclo*, costruito a partire da un gruppo  $G$  di  $g^r$ , contenente il punto-origine  $(O, \gamma)$ . Il ciclo è formato dagli  $i$  punti di un gruppo  $\bar{G}$  di  $g_n^r$ , mobile nell'intorno di  $G$ , i quali appartengono a  $\gamma$  e si permutano fra loro per le circolazioni di  $\bar{G}$  attorno a  $G$ .



Si può anche considerare l'*ordine* (intrinseco)  $s$  di un ramo  $\gamma$  di  $C$  rispetto a  $g_n^r$ . È la molteplicità  $s$  dell'origine  $O$  del ramo pel gruppo generico di  $g_n^r$  contenente il punto-origine  $(O, \gamma)$ . Quando  $s=1$  il ramo è *lineare* rispetto alla data serie; ma la sua molteplicità cambia naturalmente quando la serie cangia.

La possibilità di costruire un modello non singolare di  $C$  equivale alla possibilità di costruire su  $C$  una serie lineare rispetto a cui ogni ramo di  $C$  sia lineare.

Come ed in qual misura concetti analoghi posson esser trasportati alle falde di varietà algebriche?

## LA STRUTTURA DEL BULBO OLFATTIVO (\*)

(Con sei figure)

LUIGI CATTANEO

SUMMARIVM. — Auctor quaedam nova de bulbi, qui ad odoratum pertinet in mammalibus osmaticis, structura describit, et imprimis connexiones quae inter nerva bulbi elementa intercedunt. Animadvertit Auctor veluti anulum quemdam, cuius hystologicam structuram describit, exstare inter bulbum et odoratus pedunculum.

Si suole distinguere nel bulbo olfattivo un certo numero di strati disposti attorno ad una cavità centrale o ventricolo. L'elemento fondamentale del bulbo è il glomerulo olfattivo che troviamo già presente nei vertebrati inferiori nei quali sono rappresentati solo gli elementi essenziali senza tutte quelle formazioni accessorie che negli animali macrosmatici complicano la struttura di tale organo in rapporto ad una più elevata ed affinata sensibilità olfattiva. Nei glomeruli infatti le fibre olfattive si mettono in rapporto con le cellule proprie del bulbo e con le fibre provenienti dagli strati sottostanti a quello dei glomeruli, stabilendosi così i rapporti morfologici e funzionali fra le fibre del nervo olfattivo e le vie olfattive centrali.

Secondo quanto sostenuto da tutti gli Autori, i fasci delle fibre olfattive entrerebbero direttamente nei glomeruli mantenendo la loro individualità, si scomporrebbero poi nell'interno di essi per prendere contatto coi dendriti delle cellule mitrali.

Recenti esperimenti di LE GROS CLARK avrebbero confermato quello che già era stato sostenuto; che vi sia un certo ordine nella localizzazione topografica delle fibre olfattive dentro il bulbo.

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Antonio Pensa nella Riunione di giovedì 22 novembre 1951.

Lavoro eseguito nel Centro di studi sul sistema nervoso dell'Università di Pavia e del Consiglio nazionale delle ricerche - Direttore Prof. Antonio Pensa.

CAJAL ritiene che nei glomeruli olfattivi fra dendriti delle cellule mitrali e fibre olfattorie si compiano sinapsi l'una dall'altra indipendenti; PENSA invece descrive numerose fibre di associazione fra i vari glomeruli. Pare sia da attribuirsi funzione di associazione anche a particolari cellule che KÖLLIKER chiamò granuli esterni; hanno queste cellule infatti dei prolungamenti che si ramificano intorno e nell'interno dei glomeruli.

Pur ammettendo che la più importante modalità di conduzione nervosa dalle fibre afferenti alle efferenti sia questa sinapsi neurodendritica, tuttavia il PENSA non trascura l'altra modalità possibile: quella per via delle collaterali dei neuriti delle cellule mitrali che si espandono nei glomeruli intrecciandosi con le fibre olfattive; è ammesso infatti anche dal GOLGI che nei glomeruli giungano e si colleghino con le fibre olfattive anche fibre provenienti dalla profondità del bulbo olfattivo; tra queste ultime specialmente numerose sono le collaterali dei neuriti delle cellule mitrali. Quest'ultima modalità non è però ammessa dal CAJAL.

La parte centrale del bulbo olfattivo è occupata da un imponente ammasso di fibre che fra loro intrecciandosi, lasciano degli spazi occupati da ammassi di piccolissimi elementi chiamati granuli. I granuli vengono considerati da moltissimi Autori, CAJAL in testa, cellule nervose quantunque coi metodi all'argento ridotto non si sia arrivati a mettere in evidenza in essi la trama neurofibrillare e non sia stato dimostrato che posseggano un neurite; CAJAL avanza l'ipotesi che il dendrite periferico sostituisca il neurite funzionalmente. Articolandosi questa espansione periferica coi dendriti delle cellule mitrali, suppone che i granuli trasmettano alle cellule mitrali per mezzo del dendrite periferico, l'eccitamento che ricevono da fibre terminanti nel bulbo mediante il loro corpo ed i dendriti diretti centralmente.

Il KÖLLIKER considera i granuli una varietà di cellule di nevroglia perchè durante la loro fase embrionale hanno grande somiglianza coi corpuscoli endodimali.

Il denso plesso di fibre che occupa lo strato dei granuli è costituito prevalentemente dai neuriti delle cellule mitrali che con decorso efferente passano nel peduncolo olfattivo. Ma lungo il loro decorso questi neuriti abbandonano delle collaterali molte delle quali risalgono

nello strato plessiforme esterno ove prendono rapporto coi dendriti delle cellule mitrali. Secondo il CAJAL il compito di queste collaterali sarebbe quello di trasmettere una parte della corrente glomerulare che percorre il loro cilindrase ad altre cellule mitrali, facendole così partecipi del loro eccitamento.

Le fibre afferenti di questo strato sono classificate dal CAJAL in fibre grosse e fibre fini; le grosse egli suppone provengano attraverso il peduncolo dalla corteccia della regione olfattiva, le più fini attraverso la commessura anteriore dal bulbo olfattivo del lato opposto.

Per quanto riguarda le cellule nervose del bulbo olfattivo è noto che le più importanti sono le cellule mitrali, quelle principali disposte in un unico e continuo strato che da esse prende nome; quelle accessorie situate nello strato plessiforme esterno. Ogni cellula mitrale emette un cilindrase che diretto in profondità, acquista tosto un rivestimento mielinico e, divenuto fibra nervosa, si approfonda fino a raggiungere lo strato dei granuli per passare poi nel peduncolo olfattivo. Secondo la descrizione del CAJAL, fra i dendriti della cellula mitrale ve n'è uno (dendrite principale) particolarmente spesso che conservando il suo diametro primitivo e non emettendo che raramente delle collaterali, attraversa lo strato plessiforme esterno ed entra in un glomerulo dove dà origine ad un elegante e fine intreccio che prende contatto con le arborizzazioni delle fibre olfattive; il dendrite principale è quasi sempre unico. Gli altri dendriti (dendriti accessori) dividendosi a più riprese partecipano alla costituzione del denso feltro nervoso dello strato plessiforme esterno.

Il GOLGI non divide i dendriti in principali ed accessori ed afferma che non uno solo, ma più prolungamenti protoplasmatici di una stessa cellula possono entrare nei glomeruli.

Scopo delle mie ricerche è stato quello di riesaminare con nuovi criteri e nuove tecniche la complessa struttura del bulbo olfattivo.

Ho eseguito le mie ricerche specialmente nel cane e nel gatto, perchè è in questi animali che si ottengono reperti particolarmente dimostrativi. Quasi tutti i preparati furono fatti col metodo BIELSCHOWSKY

nella modificazione PALUMBI; mi sono valso però anche dei metodi di CAJAL e di GOLGI.

È da notarsi innanzitutto un fatto che non è certo da trascurarsi. Tutti i cilindrassi delle fibre olfattive che giungono nello strato superficiale del bulbo e vi si distribuiscono in fasci e fascetti variamente disposti ed intrecciati fra di loro per poi raggiungere i glomeruli, si impregnano elettivamente in nero col metodo del GOLGI e tale elettività essi hanno non soltanto negli animali neonati o giovanili, ma anche negli adulti.

Ho invece potuto constatare che, nei preparati allestiti col metodo BIELSCHOWSKY-PALUMBI, quei cilindrassi non si impregnano in nero se non quando hanno raggiunto i glomeruli ai quali sono destinati. Nel tratto precedente del loro decorso appaiono soltanto tinti debolmente in rosa dal viraggio al cloruro d'oro. Sono tuttavia ben distinti e facilmente riconoscibili (fig. 1).

Non saprei ora dire quale sia la causa di questo diverso comportamento di fronte ai reattivi usati. Potrebbe trattarsi di una variazione delle condizioni chimico-fisiche dello stesso cilindrasse nella zona limite fra il primo tratto ed il secondo, oppure della presenza di una guaina che avvolge i cilindrassi olfattivi fino a livello dei glomeruli proteggendoli dall'azione dei reattivi. Ad ogni modo è una circostanza che può avere la sua importanza per la conduzione nervosa.

Nello strato dei glomeruli tutte le fibre appaiono impregnate elettivamente sia col metodo del GOLGI, che con quelli di CAJAL e del BIELSCHOWSKY-PALUMBI. Ma è con quest'ultimo metodo che mi è occorso di mettere in rilievo alcuni particolari che parmi siano sfuggiti agli osservatori precedenti, anche perchè con la tecnica da me usata è possibile ottenere in sezioni sottili una visione più dettagliata del comportamento delle singole fibre.

Mentre generalmente si ritiene che le fibre olfattive entrino direttamente nei glomeruli formando in essi un groviglio inestricabile, ho invece potuto constatare che in realtà i fascetti di cilindrassi, intensamente tinti in nero non entrano mai direttamente nei singoli glomeruli, ma le loro fibre espandendosi ed intrecciandosi si dispongono intorno ad ognuno di essi in forma di plessi periglomerulari, avvolgenti cioè i glomeruli. È da questa rete periglomerulare che,

come vedremo, si dipartono le fibrille intraglomerulari destinate a prendere rapporto con i dendriti delle cellule mitrali (fig. 2).

Talvolta un fascetto passa direttamente nel plesso periglomerulare, tal'altra uno o più fascetti decorrono dapprima negli interstizi fra glomerulo e glomerulo e quindi si risolvono in fascetti secondari per formare altrettanti plessi periglomerulari.

Qualunque sia il comportamento in particolare dei fasci delle fibre olfattive, resta costante il fatto che il fascio non entra mai direttamente nel glomerulo, ma viene a costituire dapprima attorno ad esso una rete che lo delimita avvolgendolo totalmente. L'esistenza di queste reti periglomerulari costituite dalle fibre olfattive appare particolarmente evidente nei preparati allestiti col metodo BIELSCHOWKY-PALUMBI, ma la loro esistenza è confermata anche da una attenta lettura dei preparati fatti coi metodi di GOLGI e di CAJAL.

Quando i glomeruli sono addossati, risultano separati da un unico trabecolato comune di fibre; invece dove i glomeruli sono relativamente distanziati, le reti periglomerulari sono connesse tra loro da numerosissime fibre di passaggio formanti intrecci nervosi interglomerulari.

Ho dovuto convincermi che costantemente i cilindrassi delle fibre olfattive che, raggiunto lo strato dei glomeruli sono impregnabili intensamente in nero con la tecnica da me applicata, formano altrettanti plessi interglomerulari e periglomerulari per poi dare origine alle fibre intraglomerulari. Queste sono in parte la diretta continuazione di alcune delle fibre periglomerulari fattesi particolarmente sottili, in parte sono le loro collaterali. Le fibrille intraglomerulari sono distinguibili dalle periglomerulari perchè situate in diverso piano focale, perchè più sottili e flessuose: formano nell'interno del glomerulo una delicata rete.

Ho potuto, come dissi, anche dimostrare con chiarezza, a conferma di quanto è stato sostenuto dal PENZA che i varii sistemi delle fibre nervose destinate ai glomeruli non sono indipendenti l'uno dall'altro ma connessi da fibre di associazione a decorso orizzontale anch'esse divise e suddivise: di maniera che, tenendo conto altresì del fatto che giungono e si distribuiscono nello strato dei glomeruli anche fibre di altra provenienza, come vedremo in seguito, dobbiamo ricono-

scere che lo strato glomerulare è occupato da un intreccio o rete della quale i vari sistemi glomerulari rappresentano i punti nodali. Questa rete è completata da neuriti di cellule situate nello stesso strato oppure nella zona più prossima del sottostante strato plessiforme esterno e dalle collaterali ascendenti dei neuriti delle cellule mitrali principali ed accessorie, nonché da fibre con tutta probabilità provenienti dallo strato midollare più profondo e di derivazione centrale.

Della massima importanza è la ricchezza di fibre nervose dello strato dei granuli e del plessiforme interno. Esse vi compongono un intreccio o rete di estrema finezza e particolarmente fitto, quale difficilmente si trova rappresentato in altre parti della sostanza grigia nevrassiale; è forse paragonabile per quei suoi caratteri alla ben nota, tipica rete nervosa diffusa dello strato dei granuli del cervelletto (fig. 3). Quando l'impregnazione di questo intreccio o rete è avvenuta, come ebbi la ventura di ottenere, in modo completo, esso è esteso fino allo strato delle cellule mitrali principali in maniera da ritenersi non giustificabile una distinzione fra strato dei granuli e strato plessiforme interno, se non per il fatto che le fibre dell'intreccio dello strato detto plessiforme interno hanno un orientamento prevalentemente orizzontale e sono in alcune zone almeno, più fittamente disposte; quelle invece dello strato dei granuli formano maglie più fini ed irregolari. Anche qui i componenti dell'intreccio sono: collaterali dei neuriti delle cellule mitrali principali ed accessorie, fibre, ramificazioni e collaterali di fibre afferenti provenienti da centri encefalici superiori e forse anche dal bulbo olfattivo del lato opposto; neuriti brevi di cellule del secondo tipo di GOLGI che si trovano nello strato dei granuli. Sono dimostrabili in larga misura fibre che risalendo da questa imponente formazione retiforme dello strato dei granuli, attraversano lo strato delle cellule mitrali e del plessiforme esterno per congiungersi con il complesso sistema pure retiforme che trovasi, come ho detto, nello strato dei glomeruli (fig. 4).

È noto (GOLGI, PENSA) che la maggior parte di queste fibre ascendenti sono collaterali di neuriti delle cellule mitrali e collaterali o ramificazioni di fibre provenienti dal peduncolo olfattivo.

Riguardo alle cellule è noto che le più caratteristiche e dominanti sono le cellule mitrali principali, regolarmente allineate nello

strato detto appunto delle cellule mitrali. È noto anche che il loro neurite si dirige profondamente per continuarsi nel peduncolo e raggiungere i centri olfattivi superiori, e che dà origine a collaterali delle quali alcune risalgono e si immettono nel sistema glomerulare, altre prendono parte alla formazione della rete estesa allo strato plessiforme interno e dei granuli.

I loro dendriti accessori sono molto lunghi e ramificati e si distribuiscono orizzontalmente e obliquamente nello strato plessiforme esterno; man mano che si allontanano dal corpo cellulare dal quale hanno preso origine, il loro decorso si fa sempre più irregolare e flessuoso; ramificandosi si fanno anche molto sottili e si intrecciano con le fibre nervose che attraversano lo strato plessiforme esterno, e perciò in quel loro ultimo tratto sono da queste difficilmente distinguibili. Il plesso dello strato plessiforme esterno risulta così formato da fibre nervose e dai dendriti secondari delle cellule mitrali. I dendriti principali delle cellule mitrali degli animali osmatici che ho studiato sono generalmente più di uno (1, 2, 3); si dirigono per lo più verticalmente, e talvolta obliquamente, verso i glomeruli senza dare rami collaterali oppure originandone solo qualcuno che si intreccia coi dendriti secondari nello strato plessiforme esterno; raggiungono un glomerulo riuniti in gruppo insieme a dendriti principali di altre cellule mitrali, attraversano il plesso nervoso periglomerulare e si distribuiscono nell'interno di un glomerulo ramificandosi ripetutamente per formare quelle tipiche arborizzazioni terminali che si mettono specialmente in evidenza nella loro completezza col metodo della reazione nera del GOLGI. Essendo queste arborizzazioni dendritiche in intimo rapporto con le fibre che formano l'intreccio nervoso intraglomerulare, è stata data a questa compenetrazione il significato di sinapsi neurodendritica. Le cellule mitrali accessorie hanno pressappoco gli stessi caratteri. Tra le cellule mitrali accessorie voglio però ricordarne alcune di forma alquanto caratteristica; sono cellule con un esiguo corpo triangolare dal cui apice, sempre rivolto alla periferia, si stacca un unico dendrite di notevoli dimensioni che viene a costituire un tutto unico col pirenoforo, il quale si riconosce solo per essere lievemente più espanso del dendrite e per la presenza del nucleo.



Si rileva una differenza tra i reperti che si ottengono generalmente col metodo della reazione cromoargentica del GOLGI rispetto a quelli che si ottengono coi metodi all'argento ridotto. Con quello l'espansione dendritica è più completa ma i rami della arborizzazione più grossolani; con questi la espansione è più frammentaria ma i rami raggiungono una maggiore finezza. Coi metodi all'argento ridotto inoltre si mette in evidenza la struttura neurofibrillare. Studiando i preparati eseguiti con quelle modificazioni al metodo del GOLGI della reazione nera che già da tempo erano state usate dal PENSA per il midollo spinale e che essenzialmente consistono nell'aggiunta alla miscela osmio-bicromica di piccole quantità di soluzione all'1% di cloruro di platino, ho notato nei dendriti quella stessa struttura neurofibrillare che dal PENSA è stata descritta nelle cellule del midollo spinale. Mi riuscì quindi di avere associate le prerogative di un metodo con quello degli altri e precisamente una maggiore completezza e continuità delle arborizzazioni intraglomerulari dei dendriti delle cellule mitrali che è propria della reazione cromargentica e la dimostrazione della struttura neurofibrillare che è propria dei metodi all'argento ridotto. Ne conseguì anche per i dendriti delle cellule mitrali la conferma del reperto ottenuto dal PENSA per i dendriti delle cellule del midollo spinale: quello delle così dette fibrille ultraliminali, che consiste essenzialmente in ciò, che l'apparato neurofibrillare dei dendriti si riduce, nelle ramificazioni più fini e terminali di quelli, ad un'unica neurofibrilla che si estende nella rete nervosa intraglomerulare intrecciandosi e confondendosi con le fibrille nervose, senza possibilità di distinguerla da queste per un differente aspetto. Ne deriva che nella rete glomerulare è presente anche un altro elemento oltre a quelli già specificati e cioè le fibrille ultraliminali dei dendriti (fig. 5).

La continuità degli intrecci nervosi dei vari glomeruli fra loro per mezzo di fibre di associazione; le comunicazioni di tale complesso sistema glomerulare con la fitta rete dello strato plessiforme interno e dei granuli e quindi la connessione mediante queste formazioni, fra via afferente al bulbo olfattivo e via efferente, non trascurando la partecipazione dei dendriti, soprattutto per mezzo delle loro fibrille ultraliminali, alla composizione delle reti nervose stesse, induce a concludere in favore di una azione di tutto il bulbo olfattivo nel suo

insieme per la trasmissione della attività nervosa (stimolo olfattivo) dall'area olfattiva periferica ai centri superiori. I dati anatomici sembrerebbero quindi in contrasto con quanto sperimentalmente sostiene LE GROS CLARK che nel bulbo olfattivo vi sia una certa sistematizzazione delle fibre olfattive provenienti da varie e distinte aree periferiche. Però due circostanze fanno pensare che l'opinione di LE GROS CLARK possa anche essere accettabile, l'una è la individualità e forse la possibilità di conduzione isolata delle fibre olfattive nel loro tratto precedente la zona glomerulare; l'altra è inerente al fatto già ammesso dal PENSA e da altri che l'esistenza delle reti nervose diffuse e la conduzione della attività nervosa attraverso questa via non esclude l'esistenza delle sinapsi (in questo caso sinapsi neurodendritiche) e che quindi vi sia la possibilità che, in alcune contingenze, la conduzione possa effettuarsi secondo il principio della conduzione isolata.

Riguardo poi alla imponente e fitta rete nervosa degli strati dei granuli e plessiforme interno che mi è riuscito di dimostrare con particolare evidenza, essa sta a riaffermare uno degli argomenti che hanno indotto il PENSA a ritenere che i granuli abbiano una funzione nervosa esprimendosi in una sua recente nota con le seguenti parole: « . . . . non è ammissibile che i granuli siano indifferenti nella attività specifica nervosa, tenendo conto della loro struttura interna e della quantità enorme che è assiepata nello strato che dalla loro presenza ha preso il nome e di un altro fatto estremamente importante, e precisamente che è proprio in questo strato che è rappresentata una rete fittissima di fibre nervose interposta fra il sistema afferente e l'effe-rente del bulbo olfattivo ».

Un particolare interessante ho notato nel bulbo olfattivo del cane rivelato nei suoi particolari dal metodo BIELSCHOWSKY-PALUMBI, ma visibile in parte anche nelle sezioni semplicemente fissate e non ancora trattate con nessuno dei metodi specifici. Si tratta di una formazione che al confine tra bulbo e peduncolo è disposta anularmente intorno a questa zona di passaggio. Consta di un complesso di fasci e fascetti nervosi che si distinguono da quelli delle fibre olfattive, nel loro tratto precedente ai glomeruli, per il fatto che invece di rimanere incolori col metodo all'argento ridotto BIELSCHOWSKY-PALUMBI

si impregnano elettivamente in nero (fig. 6). Seguendo le sezioni fatte in serie ci si può accertare che hanno un decorso orizzontale e in parte circolare; inoltre sembrano riconnettersi con fibre del peduncolo olfattivo.

Le fibre di questi fasci si espandono in un'area pure essa circolare e sottostante dove si suddividono e si intrecciano formando un groviglio assai irregolare indipendente dai glomeruli. Si mettono in rapporto con cellule di carattere polimorfo poste al di sotto o nello spessore della formazione. Queste cellule hanno un breve dendrite che termina o liberamente con ramificazioni che si intrecciano con le fibre del plesso, oppure entro nicchie scavate nel plesso dove le fibre formano punti nodali omologabili ai glomeruli olfattivi. Voglio ricordare che quivi esistono anche fasci che si risolvono costituendo gomitolì che spiccano per l'eleganza e la densità delle loro fibre.

Sopra il significato ed i particolari strutturali di questa formazione, ho in corso ricerche anche in altri animali e del risultato di queste riferirò in un prossimo lavoro.

#### RIASSUNTO

L'Autore mette in rilievo il fatto che le fibre olfattive, lungo tutto il decorso che precede lo strato dei glomeruli, non vengono impregnate in modo specifico dal metodo di riduzione argenticca BIELSCHOSKY-PALUMBI, mentre giunte a livello dei glomeruli si impregnano elettivamente in nero. Descrive il comportamento di queste fibre in rapporto coi glomeruli; la formazione di plessi interglomerulari e periglomerulari e di una fine rete intraglomerulare. Riconferma il fatto che gli intrecci e le reti glomerulari sono uniti fra loro da fibre di associazione e descrive nei loro particolari anche gli altri componenti nervosi del sistema delle fibre dello strato glomerulare. Illustra la complessità e la finezza della rete nervosa diffusa dello strato dei granuli e del plessiforme interno; il reperto di fibre che congiungono questo sistema retiforme profondo con quello più superficiale dei glomeruli stabilendo così una continuità della via afferente al bulbo olfattivo e proveniente dall'area olfattoria periferica con la via efferente destinata ai centri olfattivi superiori e forse in parte anche al bulbo

olfattivo del lato opposto. Precisa i caratteri morfologici delle cellule del bulbo olfattivo ed in particolare quelli delle cellule mitrali, dimostrando che i loro dendriti emettono nell'interno dei glomeruli fibrille ultraliminali che si immedesimano con la rete nervosa glomerulare nella stessa maniera che il PENZA ha dimostrato nella sostanza grigia del midollo spinale. Insiste sulla opinione espressa dal PENZA che l'imponenza della rete nervosa diffusa dello strato dei granuli deponga in favore del concetto che ai granuli, pur avendo essi più l'aspetto di gliociti che quello di cellule nervose, debba essere attribuita una funzione nella attività specifica nervosa.

L'Autore accenna anche all'esistenza nel cane di una formazione nervosa disposta anularmente nella zona confinante fra peduncolo e bulbo olfattivo, alla quale giunge e si espande un sistema di fibre che sembrano riconnettersi con fibre del peduncolo e che sono indipendenti dalle fibre del nervo olfattivo propriamente detto.

## BIBLIOGRAFIA

- BLANES T., *Sobre algunos puntos dudosos de la estructura del bulbo olfatorio.* « Rev. trim. micr. », vol. 3, 1898.
- BROCA P., *Recherches sur les centres olfactifs.* « Rev. d'antr. », 1879.
- CAJAL S., *Estructura de la corteza olfativa del hombre y mamíferos.* « Trab. d. Lab. d. investig. biol. Madrid. », vol. 1, 1901-02.
- CAJAL S., *Histologie du système nerveux de l'homme et des vertébrés.* Vol. II, Paris, 1911.
- CHIARUGI G., *Anatomia dell'uomo.* Vol. IV, Milano, 1948.
- CLARA M., *Das Nervensystem des Menschen.* Leipzig, 1942.
- CLARK. W. E. LE GROS, *The projection of the olfactory area of the nasal cavity on the olfactory bulb.* « International Anatomical Congress », Oxford, 24-28 July 1950.
- CROSBY E. C., HUMPHREY T., *Studies of the vertebrate telencephalon. I. The nuclear configuration of the olfactory and accessory olfactory formations and of the nucleus olfactorius anterior of certain reptiles, birds and mammals.* « J. Com. Neur. », vol. 71, 1939.
- DINOLT R., *Ein Beitrag zur Histologie des menschlichen Bulbus olfactorius.* « Virchow's Arch. path. Anat. », 1938.
- EDINGER L., *Vorlesungen über den Bau der nervösen Zentralorgane des Menschen und der Tiere.* Leipzig, 1911.
- GEHUCHTEN A. VON, *Anatomie du Système nerveux de l'Homme.* Vol. II, Louvain, 1900.
- GEHUCHTEN A. VON, MARTIN S., *Le bulbe olfactif chez quelques mammifères.* « La Cellule », vol. 7.
- GOLGI C., *Sulla fina struttura dei bulbi olfattivi.* « Rivista Sper. di Fren. e di Med. leg. », vol. 1, 1875.
- KOELLIKER A., *Handbuch der Gewebelehre des Menschen.* Vol. II, Leipzig, 1896.
- KREINER G., *Bulbus olfactorius der weissen Ratte.* « Zeitschr. f. Anat. Entwicklungsgesch. », vol. 102, 1933-34.
- MANOUËLIAN Y., *Le fibres centrifuges du bulbe olfactif et les neurones olfactifs centraux.* « Compt. Rend. Soc. Biol. », Paris, vol. 1, 1899.

- OWSJANNIKOW PH., *Ueber die feinere Structur der Lobi olfactorii der Säugethiere.*  
«Müller's Archiv f. Anat. Phys. und wissensch. Medicin», 1860. Cit. da Golgi.
- PENSA A., *Trattato di Anatomia umana sistematica.* Vol. II, Torino, 1944.
- PENSA A., *Il significato dei granuli del bulbo olfattivo.* «Mon. Zool. It.» supp.,  
vol. 59, 1951.
- PENSA A., *Trattato di istologia generale.* Milano, 1946.
- ROSSI O., *Sulla fine struttura del bulbo olfattivo.* «Riv. pat. nerv.», vol. 12,  
fasc. 2.
- STERZI G., *Anatomia del sistema nervoso centrale dell'uomo.* Vol. II, Padova, 1915.
- TESTUT L., *Anatomia umana.* Vol. V, Torino, 1920.
- WALTER G., *Ueber den feineren Bau des Bulbus olfactorius.* «Virchow's Arch.  
f. pathol. und Phys.», vol. 22, 1861. Cit. da GOLGI.
- WHARTON YOUNG M., *The telencefalon of the rabbit.* «J. Comp. Neur.», vol. 65,  
1936.
- WINKLER C. *Anatomie du système nerveux.* Vol. I, Harlem, 1918.

## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

- Fig. 1. — Sezione frontale di bulbo olfattivo di cane. Le fibre olfattive dello strato superficiale non sono impregnate dal nitrato d'argento, lo sono invece nello strato sottostante dove formano i plessi interglomerulari e perglomerulari. Notasi l'intreccio formato dalle fibre nervose e dai rami secondari dei dendriti delle cellule mitrali, nello strato plessiforme esterno. (Microfotografia di preparato ottenuto col metodo Bielschowsky-Palumbi. Ingrand. 85 ×).
- Fig. 2. — Glomerulo di bulbo olfattivo di cane. Le fibre olfattive circondano il glomerulo; da esse si staccano fibrille più fini che prendono rapporto con le ramificazioni dendritiche. (Disegno eseguito da preparato ottenuto col metodo Bielschowsky-Palumbi. Ingrand. 600 ×).
- Fig. 3. — Rete nervosa diffusa dello strato dei granuli di cane. (Microfotografia di preparato ottenuto col metodo Bielschowsky-Palumbi. Ingrand. 160 ×).
- Fig. 4. — Rete nervosa diffusa dello strato dei granuli e dello strato plessiforme interno di gatto. Si notino le fibrille di associazione che risalgono da questa imponente formazione retiforme, attraversano lo strato delle cellule mitrali e plessiforme esterno per raggiungere lo strato dei glomeruli. (Microfotografia di preparato ottenuto col metodo Bielschowsky-Palumbi. Ingrand. 110 ×).
- Fig. 5. — Glomerulo di bulbo olfattivo di cane con la rete nervosa delle fibre olfattive. Quattro dendriti delle cellule mitrali con la loro struttura neurofibrillare e le fibrille ultralimali che si espandono e si compenetrano con la rete nervosa intraglomerulare. (Disegno eseguito da preparato ottenuto col metodo della reazione cromargentica di Golgi modificato. Ingrand. 700 ×).
- Fig. 6. — Formazione situata al confine fra bulbo e peduncolo olfattivo di cane. Notasi la differenza fra le fibre di questa formazione (a destra) fortemente impregnate e quelle del nervo olfattivo (a sinistra) non impregnate. (Microfotografia di preparato ottenuto col metodo Bielschowsky-Palumbi. Ingrand. 28 ×).

## A B B R E V I A Z I O N I

- b. o.* = bulbo olfattivo.  
*d.* = dendriti.  
*f. o.* = fibre olfattive.  
*s. c. m.* = strato delle cellule mitrali.  
*s. f. o.* = strato delle fibre olfattive.  
*s. gl.* = strato dei glomeruli.  
*s. gr.* = strato dei granuli.  
*s. pl. e.* = strato plessiforme esterno.  
*s. pl. i.* = strato plessiforme interno.  
*z. b. p.* = zona di passaggio fra bulbo e peduncolo.



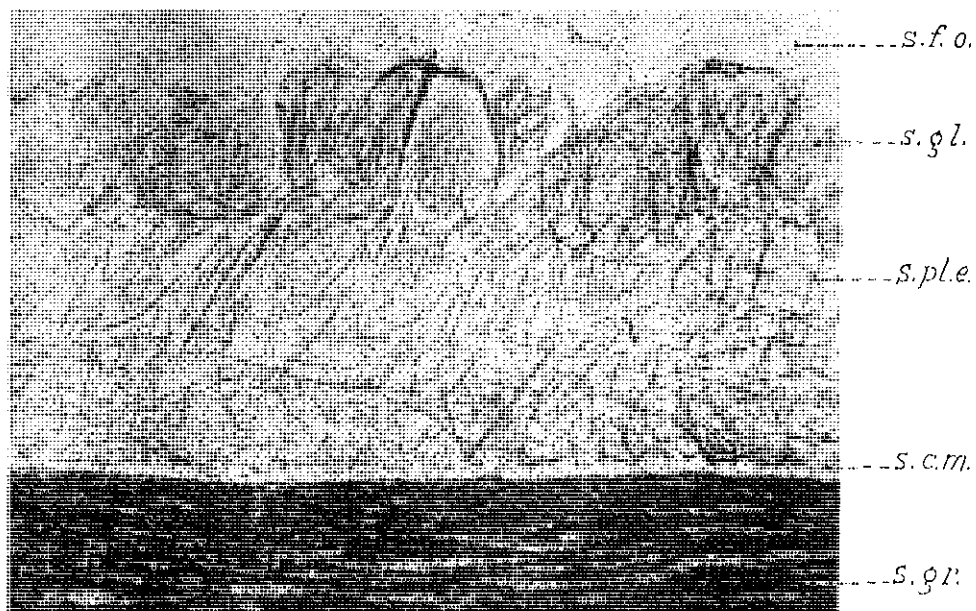


FIG. 1.

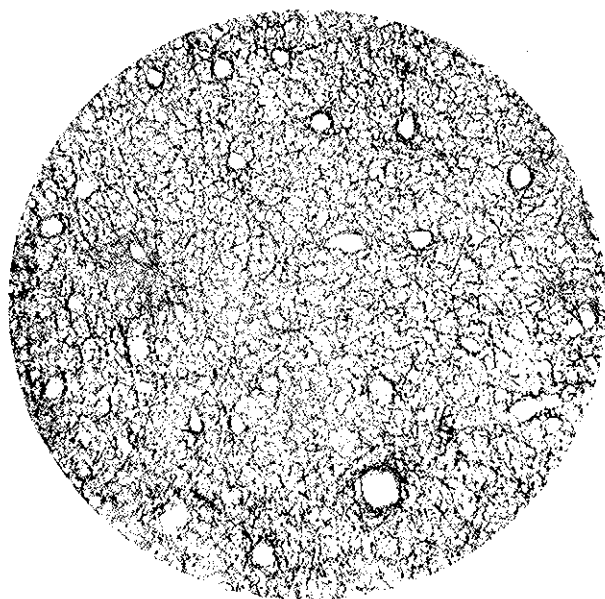
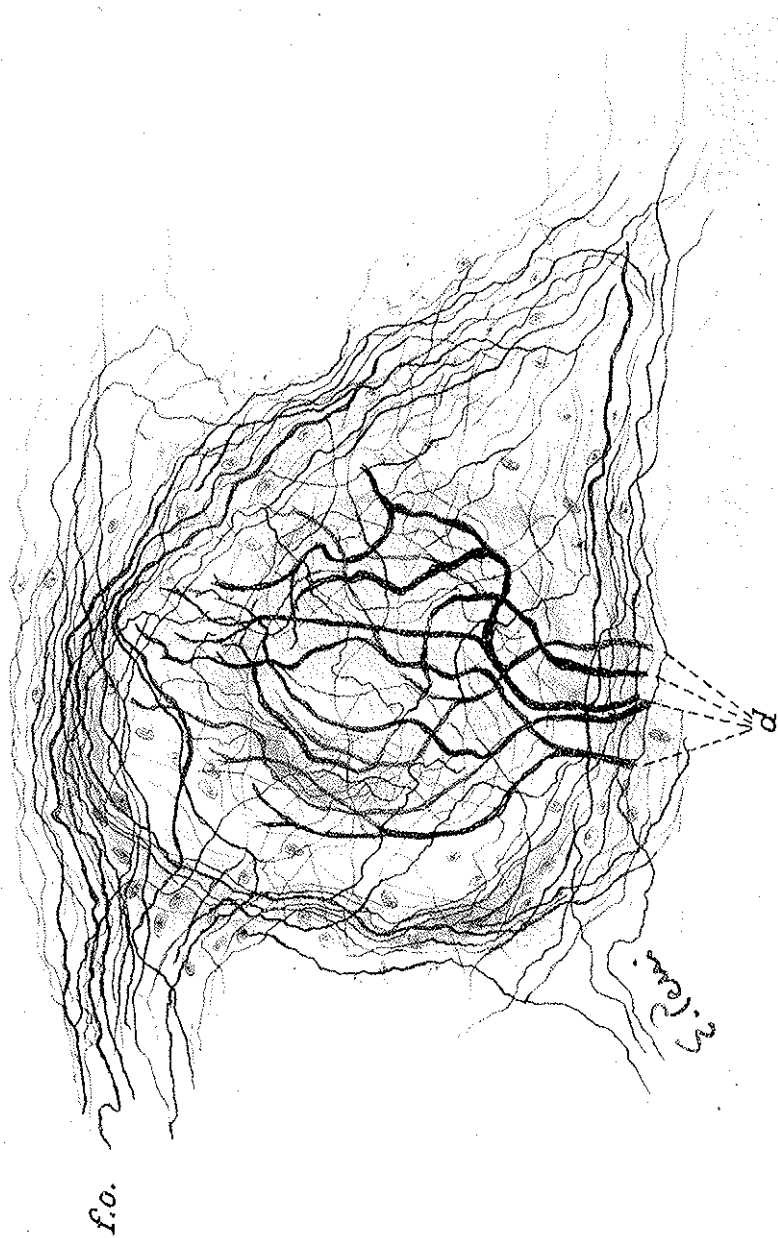


FIG. 3.



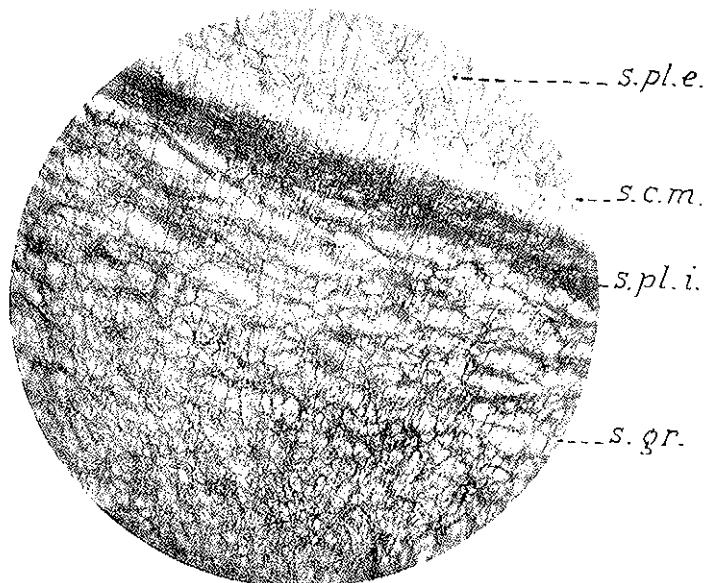


FIG. 4.

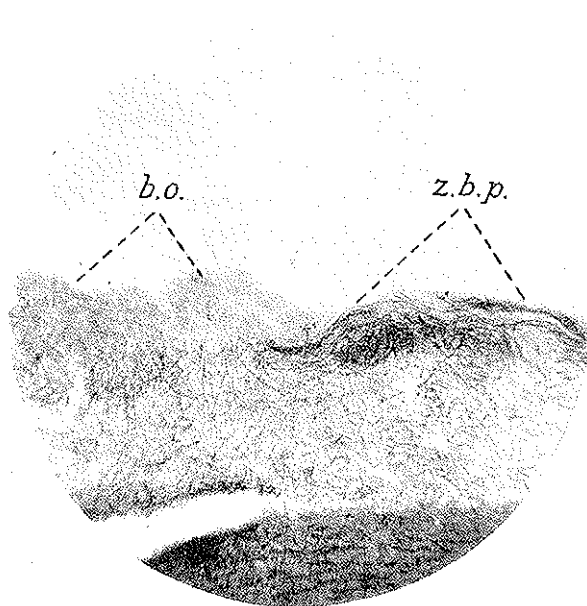


FIG. 6.

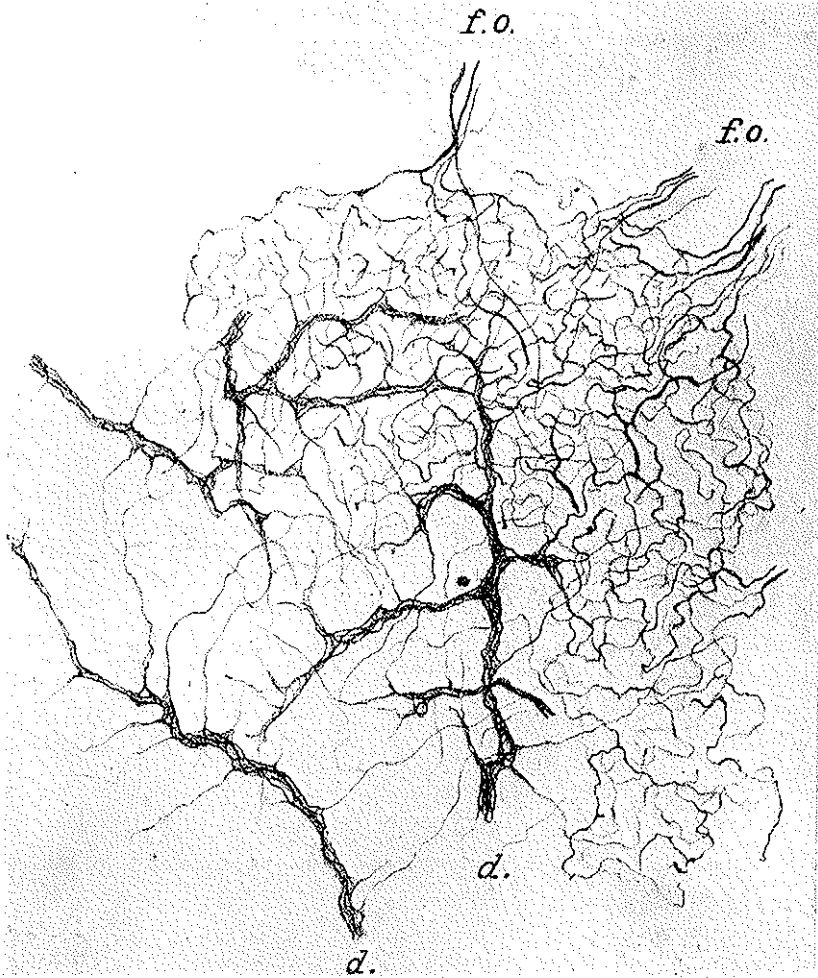


FIG. 5.



## OSSERVAZIONI SULLA INNERVAZIONE DEL FEGATO (\*)

(Con sei figure)

BRUNO ZANOBIO

SUMMARIVM. — Auctor describit ganglia quae in hepatis porta sunt, partem orthosympaticam et parasympathicam innervationis hepatis, et intimas connexiones expansionum terminalium nervearum cum hepaticis cellulis.

NOTIZIE BIBLIOGRAFICHE. — Numerosi furono gli Autori che studiarono l'innervazione del fegato, ma relativamente scarse sono le conoscenze che attorno ad essa si hanno. Alcune di queste sono poi nettamente discordi. PFLUGER per primo (1869) e RANVIER successivamente (1886) si occuparono dell'argomento; ma fu solo col KOROLKOW (1893) che vennero effettivamente dimostrate fibre nervose perivascolari e reti parenchimali. Fibre nervose nel fegato dimostrano anche RINA MONTI (1898), WOLFF (1902), RIEGELE (1928), MASAYA KUBO (1933), FERREIRA-BERRUTTI (1947).

Si discusse e si discute tutt'ora se le fibre nervose penetrino nell'interno della cellula epatica. Tale penetrazione fu sostenuta da MAC CALLUM (1887), da TRICOMI ALLEGRA (1904), da RIEGELE (1928). Quest'ultimo, descrivendo le fibre espansionali periferiche, affermò l'esistenza di un reticolo terminale nel senso dello STÖHR. Invece negano la penetrazione di fibre nelle cellule NESTEROWSKY (1875), BERKLEY (1893), MASAYA KUBO (1933), FERREIRA-BERRUTTI (1947).

Furono anche descritte cellule gangliari intraparenchimali.

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Antonio Pensa nella Riunione di giovedì 22 novembre 1951.

Lavoro eseguito nel Centro di studio del Sistema nervoso dell'Università di Pavia e Consiglio Nazionale delle Ricerche, Direttore A. Pensa.

OSSERVAZIONI PERSONALI. — Mi sono preoccupato di rivedere il problema della innervazione del fegato impiegando i metodi più adatti e più recenti. Mi sono valso come materiale di ricerca di fegato di uomo e di altri mammiferi. I preparati furono allestiti oltre che coi comuni metodi, con quelli di GOLGI, di RAMON Y CAJAL, di BIELSCHOWSKY, nella modificazione di PALUMBI.

Mi sono proposto essenzialmente di stabilire quale parte hanno nella innervazione del fegato le fibre vasomotrici, quelle eccitosecretici e quelle destinate alle vie escrettrici; di precisare la loro appartenenza all'ortosimpatico ed al parasimpatico.

Sezioni di fegato nelle quali è sicuramente compreso l'ilo permettono di constatare che nel connettivo dell'ilo si trovano grossi tronchi nervosi, cellule nervose e gruppi di cellule gangliari.

I tronchi nervosi possono decorrere isolati oppure più frequentemente essere connessi da fascetti di fibre, che passano dall'uno all'altro (fig. 1).

Alcuni dei tronchi sopraddetti non contengono cellule gangliari, altri invece ne sono riccamente forniti; talvolta le cellule sono così numerose da costituire veri e propri gangli (fig. 2 e 3). Si tratta evidentemente di gangli simpatici periferici appartenenti al parasimpatico e pertanto sono pure di natura parasimpatica le fibre con esse in rapporto.

Le fibre postgangliari di alcuni fra questi gangli si portano verso le vie biliari extraepatiche, mentre le fibre di altri si portano verso il parenchima epatico, nel quale, raggruppatesi in fasci, penetrano o direttamente o seguendo i vasi (fig. 4).

Queste ultime, riunite in fascetti, passano dall'ilo negli interstizi interlobulari e quindi si risolvono in una rete intralobulare; raggiungono una estrema finezza ed arrivano a contatto diretto con le cellule epatiche, compenetrandosi con la rete capillare biliare, che spesso si presenta pure impregnata, ma che per i suoi caratteri è ben distinguibile dalle fibre nervose (fig. 5 e 6).

Le fibre più fini sono amieliniche; hanno decorso tortuoso e presentano frequenti ramificazioni.

Nei punti di ramificazione si trovano bottoncini o meglio placchette di forma triangolare: sono le cosiddette « masse di irradiazione » di Estable.

È caratteristica pressochè costante di queste fibre quella di presentare numerose varicosità; la successione di diverse varicosità dà una immagine a corona di rosario.

I rapporti che le fibrille contraggono con le cellule epatiche sono assai intimi; infatti giungono sicuramente a contatto della superficie esterna delle cellule; non ho però mai potuto vedere fibrille penetrare nell'interno del citoplasma cellulare e tanto meno venire a contatto immediato del nucleo come è stato sostenuto da alcuni Autori.

Talvolta tali fibrille sembrano terminare liberamente con piccoli bottoncini terminali. Non è possibile dire se questi bottoncini siano delle vere terminazioni nervose o non rappresentino piuttosto l'interruzione della fibrilla in corrispondenza di una varicosità. Questi bottoncini si presentano intensamente impregnati e sono assai nitidi. Non ho mai riscontrato disposizioni tali che possano essere riferite al reticolo terminale della scuola dello Stöhr.

Non ho nemmeno mai constatata la presenza di particolari apparati terminali, nè posso dire se tutte le cellule epatiche vengono a contatto almeno in un punto della loro superficie con la rete nervosa; in altre parole se la rete nervosa intralobulare è così fitta da avvolgere ogni singola cellula epatica.

Nei preparati sino ad ora eseguiti non mi è stato possibile accertare la presenza, nell'interno del parenchima, di cellule sicuramente gangliari, come è stato asserito da alcuni. Posso però affermare che le cellule da qualcuno descritte come cellule gangliari intraparenchimali sono invece certamente cellule del Kupffer impregnate dall'argento.

I gangli e le fibre che accompagnano l'apparato secretore, e la cui funzione è evidentemente eccito-secretrice, appartengono al parasimpatico.

La componente ortosimpatica è rappresentata da un fitto intreccio di fibre nervose perivasali. Queste si dispongono già a plesso intorno ai grossi vasi sanguiferi dell'ilo e specialmente intorno alle arterie; seguono pure con disposizione plessiforme le ramificazioni che decorrono negli interstizi interlobulari. I plessi delle ramificazioni vascolari minori si risolvono in fibre isolate che raggiungono i capillari.

Vivamente ringrazio il Prof. PENSA sotto la cui guida preziosa potei compiere queste ricerche.

AUTORIASSUNTO. — Le presenti ricerche riguardanti l'innervazione del fegato in alcuni mammiferi, hanno dimostrato che il parasimpatico è rappresentato da fasci di fibre che penetrano nell'ilo e sono accompagnati da cellule nervose e talvolta da veri e propri gangli. Le fibre post-gangliari si dirigono in parte alle vie biliari extraepatiche, in parte al fegato dove terminano in una rete intralobulare, giungendo a contatto con la superficie delle cellule epiteliali epatiche. L'ortosimpatico è costituito da intrecci di fibre nervose che seguono i grossi vasi sanguigni e terminano lungo i capillari.



## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

- Fig. 1. — Fascetti di fibre nervose di connessione fra tronchi nervosi nell'ilo del fegato di cane (Met. di riduzione argentica Bielschowsky-Palumbi).
- Fig. 2. — Gangli nervosi parasimpatici nell'ilo del fegato di cane (Met. di riduzione argentica Bielschowsky-Palumbi).
- Fig. 3. — Ganglio nervoso parasimpatico nell'ilo del fegato di cane. (Met. di riduzione argentica Bielschowsky-Palumbi).
- Fig. 4. — Tronchi nervosi interlobulari e fibre nervose che penetrano nei lobuli epatici di cane. (Met. di riduzione argentica Bielschowsky-Palumbi).
- Fig. 5. — In basso plesso nervoso perivascolare; in alto fibre nervose in rapporto coi canalicoli biliari. Fegato di coniglio neonato trattato con la reazione cromoargentica di Golgi.
- Fig. 6. — A destra fibre nervose eccitosecrettrici in rapporto con cellule epatiche; a sinistra fibre nervose e rete capillare biliare. Fegato di coniglio neonato trattato con la reazione cromoargentica di Golgi.

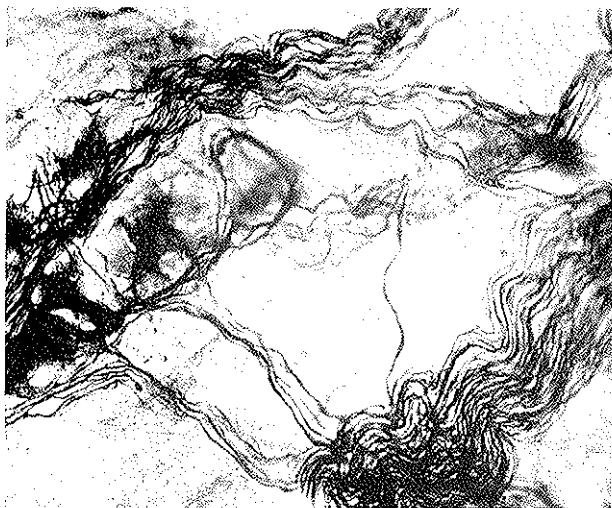


FIG. 1.

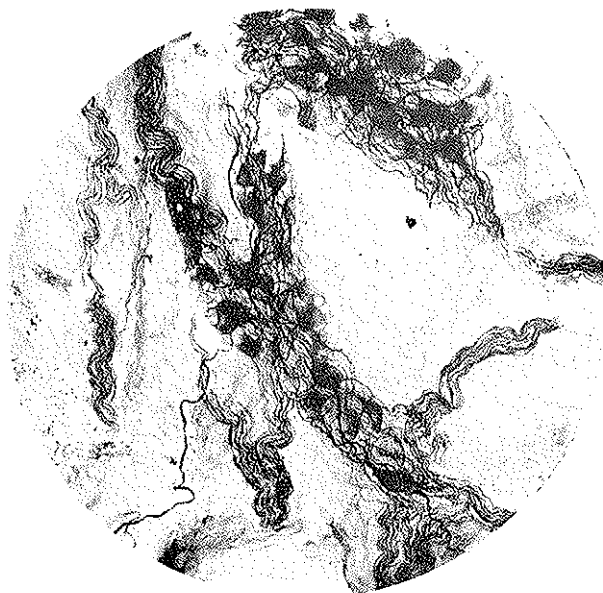


FIG. 2.

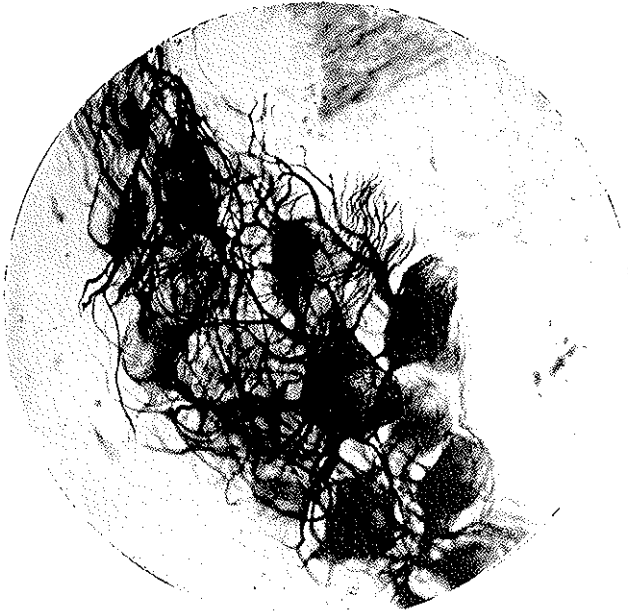


FIG. 3.

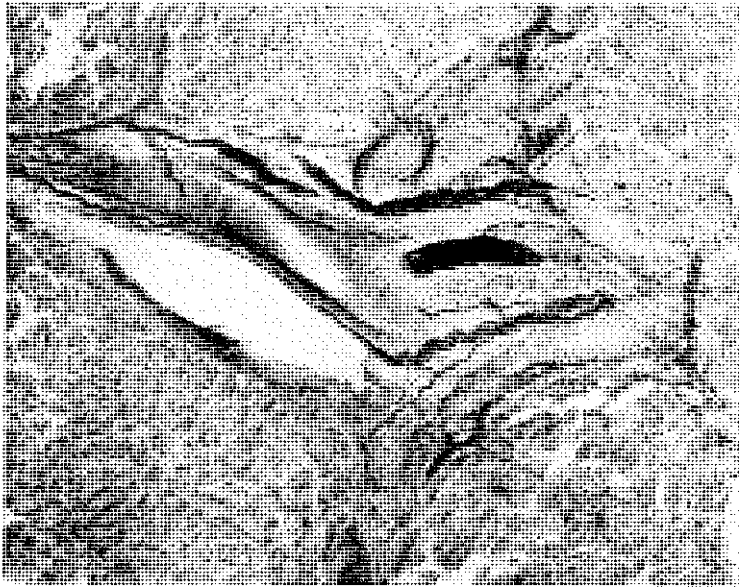


FIG. 4.

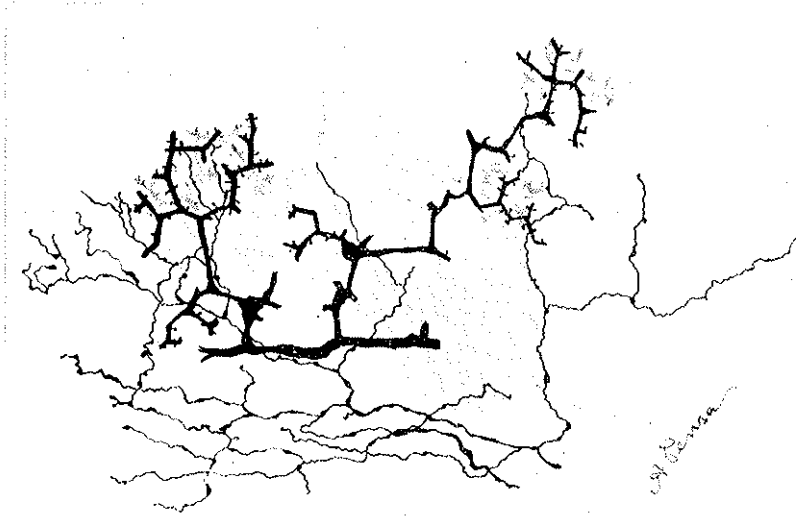


FIG. 5.

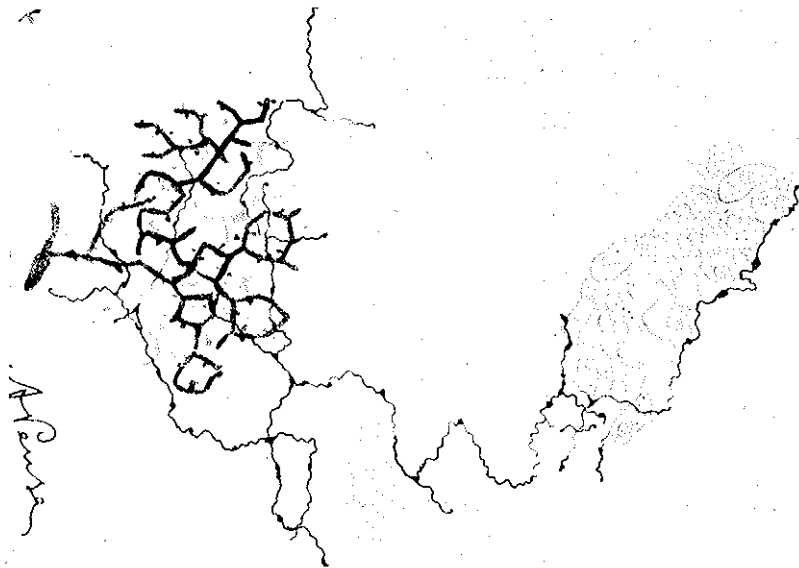


FIG. 6.

## IL GENERE *ARCHIGONIODES* CONCI ED IL SUO GENERITIPO (MALLOPHAGA) (\*)

(Con una figura)

CESARE CONCI

SUMMARIVM. — Recensetur genus Mallophagorum *Archigoniodes*, quod in *Archigoniodes* s. str. et *Clayarchigoniodes* n. subgen. dividitur. Deinde de *A. Wilsoni* Clay, qui in *Afropavo congensis* parasita est, disserit Auctor.

Dal prof. ALESSANDRO GHIGI, che mi è grato ringraziare vivamente, ho avuto in esame una femmina ed alcuni immaturi di Mallofagi raccolti su *Afropavo congensis* Chapin, lo strano gallinaceo, di peculiare posizione sistematica, descritto solo nel 1937. Provenienza dell'ospitatore: Angumu (Stanleyville, Congo Belga).

I Mallofagi dell'*Afropavo congensis* furono già oggetto di una Nota da parte della Clay (1938), che, sul materiale esaminato, aveva riconosciuto ben 8 specie, 4 *Ischnocera* e 4 *Amblycera*. I quattro *Ischnocera* vennero descritti come nuovi nel lavoro citato, mentre gli *Amblycera*, pure probabilmente nuovi, sono ancora inediti.

Tra le specie descritte dalla Clay particolare interesse presenta il « *Goniodes* » *Wilsoni*, per il quale EICHLER nel 1945 aveva stabilito il genere *Archigoniodes*. La diagnosi del genere fu pubblicata da me nel 1946.

La posizione del genere *Archigoniodes* è nettamente isolata nel complesso della famiglia *Goniodidae* e rende pienamente giustificata,

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi nella riunione del 22 novembre 1951.

a mio avviso, la creazione della sottofamiglia *Archigonioidinae*, comprendente quest'unico genere.

I più notevoli caratteri distintivi del genere e della sottofamiglia stanno nella chetotassi. Tutti i *Goniodidae* noti hanno le tempie con due macrochete (eccezionalmente una o tre), nel mentre *Archigonioides* ne ha un'intera serie (8-10). Inoltre in *Archigonioides* ambedue i sessi hanno numerose macrochete all'orlo laterale del protorace e del meso-metatorace, mentre di regola nei *Goniodidae* l'orlo laterale del protorace porta una sola setola e poche quello del meso-metatorace.

I maschi hanno per di più una serie di setole, aberranti per la loro eccezionale lunghezza, all'orlo anteriore del capo, gran numero di brevissime spinule irregolarmente sparse sulla superficie dorsale del capo e fitti ciuffi di setole sui tergiti 3°, 4° o 5°.

Tutti questi caratteri separano in modo nettissimo *Archigonioides* da ogni altro genere di *Goniodidae*: non vi sono affatto specie intermedie di congiunzione, come vorrebbe CLAY, 1940, perchè la somiglianza con *Stenocrothaphus* è oltremodo vaga.

Ad *Archigonioides*, oltre alla specie tipica, *A. Wilsoni* (Clay) 1938 (pag. 5, fig. 5-9); (Clay, 1940, pag. 26), da *Afropavo congensis* (Congo Belga), vanno ascritte anche le seguenti specie, epizoe su *Numida* e *Guttera*, e precisamente:

*A. Hopkinsi* (Clay) 1940 (pag. 26, fig. 16-17), da *Guttera edouardi seth-smithi* (Uganda). Trovato inoltre su *Guttera edouardi sclateri* (Camerum), *Guttera edouardi pallasi* (Togo), *Guttera e. edouardi* (Niassa), *Guttera pucherani* (Tanganika).

*A. fimbriatus* (Neumann) 1913 (pag. 629, fig. 19-20); (Clay 1940, pag. 29, fig. 18), da *Numida meleagris galeata*, (Isola Konacry, Sierra Leone). Trovato inoltre su *Numida m. callewaerti* (Congo Belga).

*A. numidae* (Mjöberg) 1910 (pag. 102, fig. 60-61); (Clay 1940, pag. 29), da *Numida m. meleagris* (Sudan). Tale specie, tutt'ora incerta, è forse uguale all'*A. fimbriatus* od al *perlatus* (Clay 1940, pag. 29).

*A. perlatus* (Clay) 1940 (pag. 31, fig. 19-20); da *Numida meleagris major* (Uganda). Trovato inoltre su *Numida meleagris maxima* (Angola), *N. meleagris coronata* (Transvaal), *N. meleagris mitrata* (Zambesi), *N. m. damarensis* (Africa del Sud-Ovest).

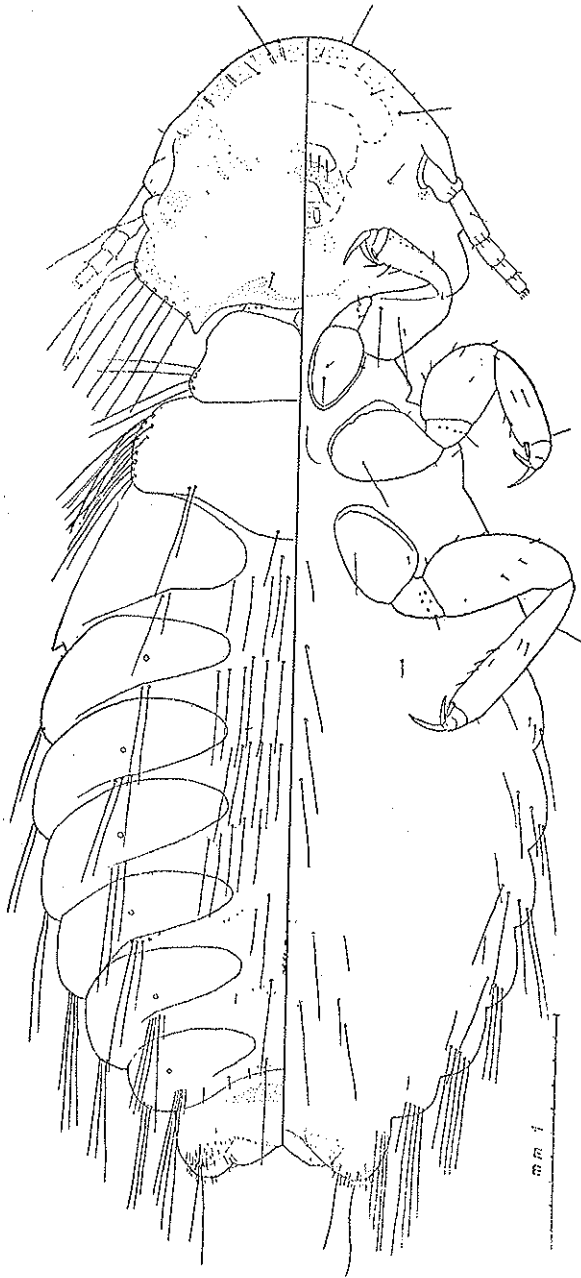


FIG. 1.

*Archigoniodes* (*Archigoniodes* s. str.) *Wilsoni* (Clay), Femmina.

Tali ultime quattro specie, omogenee tra di loro, si differenziano bene dall'*A. Wilsoni*, per cui ritengo opportuno distinguere due sottogeneri: *Archigoniodes* s. str., con l'unica specie *A. Wilsoni* e *Clayarchigoniodes* n. subgen., comprendente le rimanenti specie. Fisso come tipo di *Clayarchigoniodes* n. subg. l'*A. Hopkinsi* Clay. I due sottogeneri corrispondono ai gruppi F e G della Clay 1940. *Clayarchigoniodes* n. subg. si differenzia da *Archigoniodes* s. str. per esempio per la presenza di zone chitinizzate tra i tergiti e per la forma delle scleritizzazioni sternali.

Mi è gradito dedicare il nuovo sottogenere alla sig.na THERESA CLAY, del British Museum, a cui va il merito pressochè esclusivo della conoscenza di queste interessantissime specie africane.

L'*Archigoniodes Wilsoni* è stato descritto in modo sufficientemente dettagliato dalla CLAY. Reputo però utile aggiungere la figura *in toto* dalla femmina, della quale erano state date solo due figure di dettaglio. Del resto di nessuna femmina del genere era stata pubblicata fino ad oggi la figura *in toto*.

Dimensioni della femmina disegnata: totale mm. 4,75; larghezza del capo mm. 1,35; lunghezza massima del capo mm. 1,22.

Resterebbe da considerare la posizione sistematica dell'ospitante, l'*Afropavo congensis* Chapin, in rapporto a quanto può dedursi dalla sua fauna mallofagologica. Ma per ora l'argomento è prematuro, perchè occorrerebbe prendere in considerazione tutte le 8 specie infestanti, di cui invece, come ho detto sopra, ben quattro sono ancora inedite.

Per quanto riguarda *Archigoniodes* ho già rilevato come il genere, nettamente isolato tra gli altri *Gonioididae* dei Gallinacei, infesta solamente *Numida*, *Guttera* (subgen. *Clayarchigoniodes*) ed *Afropavo* (subgen. *Archigoniodes* s. str.).

Questo è pertanto un argomento etologico favorevole ad un ravvicinamento di *Afropavo* alle *Numididae*, anzichè ai Francolini. In ogni modo conferma la peculiare posizione di quest'uccello.

È per lo meno strano come i dati morfologici distacchino *Afropavo* dalle *Numididae*, a cui invece va avvicinato da fatti ecologici (per es. cura della prole da parte del maschio: cfr. GHIGI, 1949).



## BIBLIOGRAFIA

1938. CLAY TH., *New species of Mallophaga from Afropavo congensis Chapin*, « American Museum Novitates », New York, 1006, 11 pag., 17 figure.
1940. CLAY TH., *Genera and species of Mallophaga occurring on Gallinaceous hosts. Part I. Goniodes* « Proc. Zool. Soc. London », Serie B, 110, pag. 1-120, 79 figure (pag. 25-32).
1945. EICHLER WD., « Acta Mallophagologica » 7 e 10 (ciclostilati).
1946. CONCI C., *Due nuovi generi di Gonioididae dei Galliformes e nota sul genere Archigoniodes Eichler*, « Boll. Soc. Ent. It. », LXXXVI, pag. 76-78.
1946. EICHLER WD., *Phthirapterorum mundi catalogus*, « Acta Mallophagologica » VI (ciclostilato).
1947. HOPKINS G. H. E., *Stray notes on Mallophaga*, VIII, « Ann. Mag. Nat. Hist. », Serie II, XIV, pag. 98-112 (pag. 98).
1949. GHIGI A., *Sulla posizione sistematica di Afropavo congensis Chapin*, « Mem. Acc. Sc. Ist. Bologna », Serie X, vol. V, 1947-48, 6 pag., 1 fig., 1 tav.



## CONTRIBUTO ALLO STUDIO DEL CANALE ALIMENTARE IN *LACERTA* (\*)

(Con dieci figure)

ANTONIO TADDEI

SUMMARIVM. — Auctor, radiis Roentgen adhibitis, canalis alimentarii physiologiam et anatomiam in *Lacerta* (*Podarci*) et in *Lacerta* (*Lacerta*) investigavit. Harum investigationum expositionem complent microscopica observata, et radiographicae vel delineatae imagines.

Le più antiche notizie relative all'apparato digerente ed in particolare al canale alimentare in *Lacerta* spettano a MECKEL (1817) e quindi se ne sono occupati BUEBERGER (1819) e RUDOLPHI (1828). A queste prime ricerche seguirono quelle di BISCHOFF (1838), di LEYDIG (1872), di PARTSCH (1877), della SACCHI (1886), di KLEIN (1878), di NUSSBAUM (1882), di HOFFMANN (1890), di BIZZOZERO (1888-1893), di GIANNELLI e GIACOMINI (1896), di GIANNELLI e LUNGHETTI (1901), di BÉGUIN (1902-1904) e quelle più recenti di GARGANO (1906), di ARCANGELI (1908), di COHN (1915), di KOSTANECKI (1913-1926), ancora di ARCANGELI (1920-1921), di CROFT (1925), di VIALLI (1929), di CLARA (1932), di DORDONI (1937), di DRALLE (1939), di BAEBCKER (1940), e di GODLEWSKI M. (1951). Nella quasi totalità dei lavori degli autori sopra citati le indagini riguardanti il canale alimentare di *Lacerta* sono state eseguite di solito nel quadro più vasto dello studio, in generale, del canale alimentare dei Rettili ed i dati riportati sono spesso molto brevi, si riferiscono

---

(\*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Alessandro Ghigi il 4 gennaio 1952.

quasi sempre solo a determinati tratti del canale stesso od a particolari strutture istologiche di esso, comparativamente analizzando quanto osservato in confronto di altri Rettili o di altri Vertebrati, specie di Anfibi ed Uccelli, ma anche di Pesci e Mammiferi. Dato ciò non riesce facile farsi un concetto esatto della struttura macro- e microscopica del canale alimentare in *Lacerta* e per tentare di averne un quadro il più possibile completo occorre fare una sintesi delle brevi, sparse e frammentarie notizie, che d'altra parte non sono sempre concordi. Solo GARGANO ed ARCANGELI hanno dedicata la loro attenzione esclusivamente allo studio del canale alimentare di *Lacerta muralis* LAUR.: il primo analizzandolo tutto e riportando anche le uniche figure d'insieme che riproducano il comportamento generale del canale alimentare (tav. I, fig. 1 e 2) ed il secondo studiando le strutture e la disposizione delle ghiandole dello stomaco. Osservazioni assai interessanti, anche se eseguite su scarso materiale, tre esemplari di *Lacerta muralis* e due di *Lacerta stirpium* soltanto, furono eseguite da BÉGUIN che studiò istologicamente il canale alimentare anche durante il digiuno e durante la digestione.

Con l'ausilio dei moderni mezzi di indagine sul vivente, radioscopia e radiografia, dopo introduzione di mezzo di contrasto, ho ritenuto interessante di riprendere questo genere di studi, analizzando i vari tratti del canale alimentare di *Lacerta* sia nel sottogenere *Podarcis* che nel sottogenere *Lacerta*, corredandoli di quelle notizie relative alla anatomia macroscopica e microscopica che con indagini particolari ho potuto trarre a chiarimento di alcuni reperti che l'indagine sul vivente aveva reso necessari. Ciò non ha riscontro nella letteratura se si eccettua che, mentre erano in corso le mie ricerche, in un lavoro, recentissimo, di GODLEWSKI sullo studio radiologico del tubo digestivo di alcuni animali invertebrati e vertebrati è raffigurata senza commento una radiografia di *Lacerta* (*Lacerta*) vista dal lato dorsale che mette in evidenza lo stomaco e parte della porzione subterminale dell'intestino (evidentemente il risultato di due, nel tempo, diverse somministrazioni di mezzo di contrasto). L'autore, che ha solo saggiato il tempo di transito del pasto opaco riferisce, senza aggiungere altre notizie, che questo nel soggetto da lui osservato variava

da due giorni e mezzo a tre giorni e che come mezzo di contrasto aveva usata una sospensione di solfato di bario, la concentrazione della quale egli definisce « habituelle ».

Riferirò quindi della tecnica usata per le mie osservazioni ed il risultato di esse, riportando man mano quei dati tratti dalla letteratura che serviranno a chiarire quanto da me notato.

Gli animali che hanno servito per le presenti ricerche sono stati catturati viventi negli immediati dintorni di Firenze nella primavera del 1951, mantenuti in cattività in adatto ambiente nell'Istituto di Zoologia generale della Università di Firenze e nutriti con larve di *Tenebrio molitor*. Si trattava di maschi e di femmine adulti di *Lacerta (Podarcis) muralis nigriventris* BONAPARTE, di *Lacerta (Podarcis) sicula campestris* (DE BETTA) e di *Lacerta (Lacerta) viridis italica* TADDEI promiscuamente tenuti. Le radiografie e le osservazioni radio-scopiche sono state eseguite in gran parte nell'Istituto di Radiologia della Università di Firenze ed al suo Direttore il prof. Turano e all'assistente dott. Ragolini, che hanno contribuito al buon esito dell'indagine, vadano i miei più sentiti ringraziamenti.

Quale mezzo di contrasto usai una sospensione di solfato di bario abbastanza tenue (due cucchiaini da caffè in un bicchiere di acqua) in modo che mi potesse facilmente defluire da una siringa da un cc. graduata a  $\frac{1}{10}$ ; questa soluzione fu in ogni caso ben tollerata dagli animali in esperimento. Dopo omogeneizzazione veniva introdotta nella siringa il cui beccuccio era fatto mordere dall'animale, che quindi lo tratteneva stretto tra i denti, e spinta la quantità dosata della sospensione (da  $\frac{1}{10}$  a  $\frac{3}{10}$  di cc. pro dose ripetuta). In tal modo si poteva senza difficoltà riempire la bocca dell'animale ed attendere la naturale ingestione; a volte tale riempimento della bocca era ripetuto senza togliere da fra i denti il beccuccio della siringa, a volte questo veniva tolto e, dopo deglutizione, ripetuta la introduzione del materiale opaco. L'animale veniva fissato su di una tavoletta sottile di legno legato per gli arti con l'addome rivolto in alto verso la sorgente dei raggi. Le radiografie furono eseguite su pellicola Ferrania, con schermi di rinforzo, distanza fuoco-pellicola cm. 110, tempo 2 centesimi di secondo, kV 47 mA/s 6,2. Questa tecnica « standard » fu il frutto di una lunga serie di prove.

Gli animali venivano tenuti digiuni circa le 48 ore precedenti l'indagine e per tutto il periodo che questa durava, ed osservati ad intervalli vari anche per più giorni di seguito sia scopicamente che a mezzo di radiografie, mettendoli in libertà, in adatto ambiente, durante i periodi di non osservazione. Finito il primo ciclo di indagini venivano normalmente alimentati e quindi alcuni di nuovo posti sotto controllo nelle stesse condizioni sperimentali che precedentemente. Altri invece venivano sacrificati a tempo opportuno, come sarà precisato in seguito, per lo studio anatomo-istologico di determinate sezioni del canale alimentare che sembrarono avere maggiore interesse. Due soli morirono non molto tempo dopo l'indagine radiografica, fra i primi studiati, per le lesioni che producevano agli arti le legature (stasi venosa) troppo a lungo protratta durante le ripetute osservazioni radioscopiche e radiografiche, che impedivano successivamente all'animale anche se messo in libertà di muoversi liberamente e quindi di alimentarsi.

Differenti in alcuni interessanti particolari, anche se in linea di massima molto simili, sono i reperti osservati in *Lacerta (Podarcis)* rispetto a quelli in *Lacerta (Lacerta)*, tanto che ho ritenuto di dover riferire separatamente dell'uno o dell'altro sottogenere: siccome invece quanto si riferisce alla *Lacerta (Podarcis)* è identico tanto che si tratti di *L. (P.) muralis nigriventris* o di *L. (P.) sicula campestris*, sarà fatta di queste una unica descrizione.

Comincerò appunto con la *Lacerta (Podarcis)*. Non starò a riferire le numerose osservazioni eseguite, ma tratteggerò in un quadro unico la forma, la disposizione, i dati funzionali, il tempo di transito del pasto opaco e quant'altro fu potuto mettere in evidenza in questo studio radioscopico e radiografico corredandolo, come ho già detto, anche di quelle notizie anatomiche e anatomo-istologiche che man mano ho ritenuto necessario eseguire per chiarire i vari reperti osservati. Come ho già accennato i dati relativi alle due sottospecie esaminate, *Lacerta (P.) muralis* e *L. (P.) sicula*, per quanto riguarda il canale alimentare sono perfettamente identici e così anche non ho trovate differenze, se si eccettuano piccolissime variazioni individuali, che ritengo di nessun conto, sia che si trattasse di maschi oppure di femmine scelte fra quelle che non presentassero uova fecondate di un certo volume,

delle quali femmine mi propongo di dire in altro lavoro per le particolarità di posizione che il canale alimentare assume in questo periodo della vita sessuale di *Lacerta*. Così che appunto il quadro unico di descrizione servirà in complesso per tutti i casi studiati del sottogenere *Podarcis*.

Introdotta il bario in bocca con la tecnica descritta ivi era trattenuto per un più o meno breve periodo di tempo variabile da soggetto a soggetto fino a che veniva in una od in più riprese spontaneamente ingerito e passava quindi nella retrobocca. Questa sosta orale, di nessuna importanza ai fini dello studio intrapreso era in dipendenza, è lecito supporlo, dello scarso gradimento per alcuni soggetti ad ingerire la sospensione di bario, allo stato di irrequietezza dell'animale per la non naturale introduzione di una sostanza non usuale e forse anche in gran parte alla posizione a dorso in giù in cui era costretto l'animale ad eseguire la deglutizione. Comunque giunta la sospensione di bario nella retrobocca, quivi aveva un periodo di sosta che ritengo interessante mettere in evidenza in quanto, pur essendo il periodo di sosta press'a poco uguale nei vari soggetti, da un paio di minuti ad un massimo di cinque minuti primi, la retrobocca veniva occupata di solito dal materiale ingerito da più di una deglutizione così che con una certa frequenza essa si mostrava al suo massimo riempimento: si poteva in ogni modo mettere bene in evidenza la sua forma triangolare un poco allungata e con la base leggermente concava volta verso la bocca e l'apice verso l'esofago oltre a due piccole espansioni irregolarmente rotondeggianti agli angoli della base or più or meno repleti a seconda della quantità di materiale ingerito e del tempo di sosta di questa sede. È appunto interessante a questo proposito far notare come nella retrobocca faccia sosta sia pure per un breve periodo di tempo una quantità di materiale alimentare pari circa da due a quattro volte quella introdotta in bocca, cioè da  $\frac{5}{10}$  a  $\frac{6}{10}$  di cc. di solito, prima di iniziare la discesa nelle restanti porzioni del canale alimentare o come la quantità che nella retrobocca può essere accumulata sia piuttosto notevole in rapporto alla mole dell'animale.

Ad un certo momento il mezzo di contrasto che aveva, come ho accennato, per più o meno tempo fatto sosta nella retrobocca, si avviava lungo l'esofago non nella sua totalità, ma a piccoli boli che

acquistavano un aspetto filiforme e riempivano, a tratti più o meno lunghi, il lume del canale esofageo spostandosi lentamente uno di seguito all'altro fino verso lo stomaco. Di solito attraverso l'esofago si sposta un bolo per volta, raramente mentre uno sta per giungere presso lo stomaco ne parte un secondo e solo in qualche caso, veramente assai raro, ne parte un terzo, uno di seguito all'altro, così che radiosopicamente si vedono in tal caso tre distinti boli percorrere l'esofago contemporaneamente o quasi, ma a livelli diversi. In ogni modo i vari boli che si partono dalla retrobocca successivamente giunti in prossimità dello stomaco nell'ultima porzione dell'esofago ivi si arrestano di solito per un periodo di tempo abbastanza lungo fino talvolta a due ore e mezzo circa, da un minimo di una mezza ora. Questo arresto così notevole in questa sede fa sì che l'esofago nella sua porzione terminale immediatamente pregastrica subisca una dilatazione, puramente funzionale, come sarà precisato in seguito, durante il passaggio del materiale opaco in questa sede più o meno marcata in rapporto con la maggiore o minore quantità di materiale ingerito. Di solito prima di passare nello stomaco tutto il materiale ingerito si ferma in questa dilatazione esofagea. Da questa sede il pasto opaco ad un certo momento di tempo, vario per ogni animale e nello stesso animale vario per i vari esperimenti, passa, ora in piccoli, ora in grossi boli irregolari per forma e dimensioni ora quasi in massa, nello stomaco dove in ultima analisi si ritrova tutto il materiale ingerito. È da mettere in evidenza che mentre la dilatazione dell'ultima porzione dell'esofago ha forma rotondeggiante, lo stomaco presenta una forma piriforme piuttosto irregolare con la parte più espansa in alto al cardias e la più stretta in sede pre-pilorica, forma che era già stata messa in chiara evidenza fin da 1896 da GIANNELLI e GIACOMINI, i quali riferiscono tra l'altro che « l'ampiezza dello stomaco è massima nella parte cardiaca e va decrescendo verso il piloro » ed in seguito confermata da GARGANO e poi da ARCANGELI. Nello stomaco si notano radiosopicamente delle onde di contrazione a tipo peristaltico che partendosi da una zona laterale e superiore rimangono il contenuto gastrico e infine lo spingono attraverso il piloro nel duodeno, non prima però che il materiale ingerito abbia fatto una lunga sosta nello stomaco, sosta che va da un minimo di 10 ore ad un massimo di 18 o

Mentre la retrobocca e l'esofago sopra la sua dilatazione occupano una posizione quasi perfettamente assiale nell'animale, con perfetta distribuzione simmetrica a destra ed a sinistra, la ultima porzione dell'esofago che si dilata quando ivi è raccolto del materiale alimentare tende a spostare l'organo verso sinistra dove raggiunge il cardias e quindi lo stomaco sito oltre la metà inferiore del tratto di corpo dell'animale compreso tra il cingolo scapolare e quello pelvico (essendo oltre la metà superiore occupata dall'apparato respiratorio) e che ha una disposizione nettamente sinistra ma con un lieve ripiegamento leggermente curvilineo con tendenza a destra nel tratto prepilorico e pilorico.

Le varie osservazioni radioscopiche sopra riferite delle quali ho fissato su lastra molti dei momenti più interessanti (vedi fig. 1, 2, 3 e 4) mi hanno spinto a chiarire il problema della fine dell'esofago e dell'inizio dello stomaco in *Lacerta (Podarcis)* dal punto di vista della sua anatomia macroscopica. Gli autori che si sono occupati dell'argomento in complesso sono concordi nell'affermare invece che dal punto di vista anatomico macroscopico non è possibile nè esternamente nè internamente fissare un limite netto fra esofago e stomaco, mentre è possibile tracciarlo non in uguale sede però per tutti gli autori, dal punto di vista microscopico in base alla presenza di ghiandole gastriche che iniziando bruscamente, danno il limite dell'inizio della mucosa gastrica. ARCANGELI riferisce infatti che microscopicamente: « la regione cardiaca incomincia là dove all'epitelio vibratile e mucoso dell'esofago si sostituisce l'epitelio cilindrico caratteristico dello stomaco e contemporaneamente a questa sostituzione compariscono nella mucosa le ghiandole gastriche ». Poichè invece per quanto ho potuto constatare io dal punto di vista funzionale esiste un limite ben netto tra esofago e stomaco messo in particolare evidenza dalla dilatazione pre-gastrica dell'ultima porzione dell'esofago, ho ritenuto interessante sacrificare alcuni animali in questo preciso momento del passaggio del bario nel canale alimentare per una osservazione diretta di questo punto e per l'esecuzione di indagini anatomiche ed istologiche della porzione degli organi già radioscopicamente osservati. Gli animali sono stati uccisi mediante decapitazione in due distinti periodi e cioè quando la dilatazione esofagea pregastrica non aveva ancora passato il suo



contenuto nello stomaco e quando questo passaggio era incominciato. Aperto l'animale potei constatare che effettivamente il cardias in ambedue i momenti funzionali considerati era nettamente visibile per un netto cercine che separava l'esofago dallo stomaco; fissato questo punto era poi facile ritrovarlo anche negli animali a digiuno ed in quelli nei quali tutto il contenuto gastrico dalla dilatazione esofagea pregastrica era passato nello stomaco come una lieve strozzatura, sempre presente, spesso non completa che separa l'esofago dallo stomaco e ne segna i limiti precisi (vedi fig. 5 a e b). Del resto questa strozzatura era stata già intravista da BISCHOFF, LEYDIG e NUSSBAUM ed altri, ed era stata vista e raffigurata (nella fig. 2 del suo lavoro) da GARGANO che in proposito dice « qualche volta si vede come un leggero strozzamento, che è dovuto più di tutto allo stato di maggiore o minore vacuità dello stomaco o di restrizione maggiore dell'esofago, come si verifica nell'inverno durante il letargo ». Per quanto riguarda la dilatazione pregastrica dell'esofago solo BÉGUIN ha notato che l'esofago presenta talvolta un diametro considerevole contrariamente a quanto osservato da tutti gli altri autori. Aperto il canale alimentare in questa sede si nota che le pieghe esofagee sembrano continuarsi con quelle dello stomaco ad organo in riposo a digiuno, ma che invece quando l'esofago è pieno di materiale ingerito nella sua porzione pregastrica terminale queste pieghe quasi spariscono o spariscono del tutto e comunque si arrestano in prossimità dello sfintere che divide esofago e stomaco e si ritrovano nello stomaco molto pronunciate dove, con gli autori precedenti, si possono suddividere in primarie, secondarie e terziarie. Nello stomaco tali pieghe primarie sono talvolta così evidenti che radiologicamente in qualche caso fanno apparire l'organo come suddiviso in tante logge che si continuano l'una all'altra tanto da simulare una serie di sottili canali ravvicinati a matassa (vedi fig. 6 e 7). Ho ritenuto interessante eseguire dei preparati istologici della zona ora considerata di limite fra esofago e stomaco comprendendovi anche dei tratti della dilatazione esofagea pregastrica e della prima porzione dello stomaco e per controllo identici tratti di esofago, cardias e stomaco di animali tenuti a digiuno. Fissazione in formalina neutra, colorazione, dopo inclusione, con ematossilina ed eosina; sezioni eseguite in senso parallelo all'asse del canale alimentare, e in senso trasversale.

Senza entrare in minuti dettagli che esulano dalle osservazioni di questo studio radiologico farò notare che istologicamente subito al di sotto della dilatazione esofagea pregastrica là dove sosta il pasto opaco prima di penetrare nello stomaco e prima che inizi lo stomaco (le due porzioni del cauale alimentare, come ho già accennato, sono per la differente struttura della mucosa sempre microscopicamente ben distinguibili tanto che il « limite - dice GARGANO - molto netto... è dato dall'immediato iniziarsi delle ghiandole gastriche che sono tubulari e dell'epitelio che da cubico passa a cilindrico », cosa anche da me constatata) la tunica muscolare, che è tipicamente formata da due strati di fibre, uno all'interno con fibre ad andamento circolare ed uno all'esterno con fibre ad andamento longitudinale, mostra nel suo strato di fibre circolari per un brevissimo tratto delle cellule più voluminose ed anche in numero maggiore rispetto a tratti immediatamente sopra e sottostanti, il che indica la presenza di una formazione anatomica a tipo di sfintere che divide l'esofago dallo stomaco e giustifica in particolare la possibilità di una funzionale dilatazione esofagea pregastrica. Tale dilatazione infatti manca negli animali tenuti a digiuno, nei quali l'esofago ha lungo tutto il suo percorso un calibro pressochè uniforme, ma presenta a livello del suo limite inferiore sempre una lieve strozzatura anche se non completa, come già ho accennato, che lo separa nettamente dallo stomaco. Questo sfintere sempre visibile a por bene attenzione in tutti gli animali ed in ogni momento dell'attività funzionale di questo tratto del canale alimentare permette di poter misurare con esattezza la lunghezza dell'esofago e quindi quella dello stomaco: le misure fin ora rese note (BÉGUIN, GARGANO, ecc.) si riferivano di solito ai due tratti di canale alimentare complessivamente considerati e se si riportavano misure separate queste erano del tutto approssimative. Calcolando la media su di una quindicina di esemplari si trova che l'esofago è lungo cm. 2,6 e che lo stomaco ha una lunghezza di cm. 1,7: la dilatazione esofagea pregastrica ha misure alquanto variabili, ma di solito non oltrepassa i 0,6 cm. Sulla base di queste osservazioni radiologiche e anatomico-istologiche ritengo che la dilatazione esofagea pregastrica si possa considerare fino ad un certo punto quasi analoga al gozzo degli Uccelli.

Proseguendo nella osservazione del canale alimentare di *Lacerta (Podarcis)* si nota che il tratto di intestino che segue allo stomaco e dal quale è diviso da uno sfintere (pilorico) radiologicamente ben visibile e che già fu chiaramente messo in evidenza e ampiamente studiato nella sua struttura macro e microscopica dai precedenti autori, è sottile con un'ansa che da sinistra volge verso destra ed in alto (accogliendo in essa il pancreas). Questo tratto di intestino si riempie a tratti assai variabili di tempo evidentemente perchè a tratti si apre lo sfintere pilorico e lascia passare in esso il contenuto gastrico; il suo svuotamento è rapido, talvolta rapidissimo così che solo dopo lunghe e pazienti osservazioni radiosopiche è possibile talvolta vederlo pieno di pasto opaco. A questo breve tratto segue una porzione di intestino che si mostra un poco più voluminoso, che forma una ansa che dal centro si porta di nuovo verso sinistra ed ancora verso l'alto raggiungendo circa la metà dell'altezza tra il cardias ed il piloro e che va a porsi un poco dietro lo stomaco tanto che per la sua visualizzazione è sempre necessario spostare un poco l'animale sul fianco di sinistra in modo da evitare che l'ombra dello stomaco si sovrapponga a quella di questa porzione di intestino. Da questo punto, che è il più alto che l'intestino raggiunga, esso con una o più curve irregolari per forma e posizione volge nettamente verso destra ed in basso per raggiungere un tratto di intestino voluminoso e separato dalla porzione che ivi imbocca da una valvola, già ampiamente studiata da VIALLI, al cui lavoro rimando per i dettagli relativi alla sua costituzione anatomico-istologica. Le due porzioni di intestino sono ben distinte radiologicamente oltre che per il calibro anche perchè la prima quella sottile è, come ho accennato, raramente piena di bario e, se lo è, sempre per brevi tratti e per breve tempo, la seconda invece perchè più voluminosa e per la presenza costante di bario che ivi, come sarà meglio precisato in seguito, vi si sofferma per lungo tempo. La lunghezza di questa prima porzione dell'intestino che va dal piloro alla valvola ileo-cecale è in media di cm. 5,2 (la misura riportata da GARGANO da un minimo di cm. 5 ad un massimo di cm. 7,5 mi sembra eccessiva, in quanto in un solo caso ho avuto come misura massima cm. 6,8).

La seconda porzione dell'intestino che inizia a livello della valvola ileo-cecale che si trova a destra è piuttosto voluminosa e in netto

rapporto il suo calibro con la quantità di materiale in esso contenuto; mostra un cieco posto sulla sinistra di questo tratto di intestino non sempre visibile per la sua posizione un poco posteriore rispetto all'asse del canale alimentare così che per la sua buona visualizzazione è necessario spostare un poco l'animale sul fianco destro. In questo tratto non si sofferma mai materiale opaco. Da destra la seconda porzione dell'intestino si porta medialmente e in basso sovrapponendo la sua ombra a quella data dalla colonna vertebrale senza anse e quasi perfettamente diritto; in questo tratto il materiale opaco si sofferma prima di essere espulso all'esterno per un certo periodo di tempo. Non sono mai riuscito a vedere il pasto opaco a contatto o quasi dell'orifizio cloacale, dal quale esso era separato sempre da un tratto che si può calcolare essere lungo dai 4 ai 5 mm. (la cloaca). Dall'inizio dello svuotamento gastrico al riempimento della porzione terminale dell'intestino intercorrevano dalle tre alle cinque ore: nell'intestino terminale si aveva poi una sosta che pur variando da soggetto a soggetto anche nelle singole prove andava dalle 15 alle 20 ore. La lunghezza della seconda porzione dell'intestino (esclusa la cloaca sempre invisibile radiologicamente) variava da cm. 1,5 a cm. 2,4, ed in media 2 cm. In totale il pasto opaco dalla introduzione alla sua espulsione impiega in media dalle 33 ore e mezzo circa alle 40 ore e mezzo circa, cioè da un poco più di un giorno ad un poco meno di due giorni, con una media di un giorno e mezzo, cioè di 36 ore circa. La lunghezza del canale alimentare dall'inizio dell'esofago all'orifizio cloacale è in media 22 cm. circa. Il materiale che viene evacuato dopo il pasto opaco è solido, a consistenza terrosa, di colorito bianco-sporco ed in massa unica a forma di sigaro avana un poco smussato alle estremità (gli escrementi usuali in animali nutriti con *Tenebrio molitor* invece sono poltigliosi misti a materiale liquido e pseudo-mucoide, senza una forma particolare) del massimo spessore di due mm. e mezzo circa. È interessante mettere a questo proposito in evidenza che per quanto il bario introdotto fosse in tenue sospensione già dopo la sosta nella dilatazione esofagea pregastrica aveva perduto circa il 40% dell'acqua, che nello stomaco in seguito ne veniva riassorbita la quasi totalità per proseguire nelle restanti porzioni del canale alimentare quasi solido od appena pastoso; era espulso, come ho già detto, solido del tutto. Questi

dati fanno supporre che l'assorbimento dell'acqua venga in buona parte effettuato a livello dello stomaco, ma che già una buona percentuale venga riassorbita attraverso la parete esofagea nella sua ultima porzione durante la sosta che il pasto opaco fa in tale sede; nell'intestino il riassorbimento dell'acqua è piuttosto scarso, anche in relazione alla relativamente scarsa quantità di acqua ancora presente nel pasto opaco. È infine interessante mettere in evidenza come esista uno strozzamento fra l'ultima porzione dell'intestino e la cloaca, tratto questo che serve solo come via di espulsione del materiale alimentare già elaborato dopo la digestione e l'assorbimento e comune ad altri apparati (genitale): strozzamento che rende impossibile il riempimento per elisma dell'ultima porzione dell'intestino non ostante ripetuti infruttuosi tentativi che ho praticato con i più vari accorgimenti di tecnica (sonda semirigida, sonda rigida, siringa, ecc.). Del resto per quanto non esista un proprio e vero sfintere ho potuto anch'io come i precedenti autori (GIANNELLI e GIACOMINI, GARGANO, ecc.) mettere in evidenza microscopicamente che a questo livello lo strato muscolare è molto spesso, specie per quanto riguarda le fibre muscolari circolari, ed è caratteristico l'epitelio di rivestimento che si presenta pluristratificato.

Dopo aver riferito dettagliatamente su quanto ho potuto osservare nello studio radiologico del canale alimentare del sottogenere *Podarcis* non starò a dilungarmi troppo su quello che si può notare nel canale alimentare di *Lacerta* (*Lacerta*) in quanto salvo alcune differenze che li fanno nettamente distinguere (e per questo ho ritenuto opportuno farne due differenti trattazioni), i due tipi di canale alimentare hanno un comportamento assai simile. Dirò per ciò in breve di quei tratti di canale alimentare di *Lacerta* (*Lacerta*) che, pur considerando il suo maggiore diametro e la sua maggiore lunghezza in rapporto con la maggior mole degli animali studiati, si possono riportare a quanto già per tratti similari è stato detto e tratterò invece più a lungo quei punti del canale alimentare che presentano delle differenze, più o meno notevoli, nei due sottogeneri di *Lacerta*.

Anche nel sottogenere *Lacerta* si nota un breve periodo di sosta del materiale opaco, introdotto con la tecnica già a suo tempo descritta, nel retrobocca e che è variabile da soggetto a soggetto: la retrobocca

si mostra triangolare con le stesse caratteristiche che furono già descritte in *Podarcis*. Dalla retrobocca il bario si avvia in piccoli boli che hanno aspetto filiforme lungo l'esofago che si susseguono con una certa frequenza uno dietro l'altro tanto da occupare in breve tutto il canale esofago che però appare maggiormente ripieno nella sua porzione pregastrica e da dove, quasi senza apparente sosta, il bario prosegue nello stomaco. Per quanto appunto manchi una vera e propria dilatazione pregastrica dell'esofago, come quella descritta in *L. (Podarcis)*, pure si rende evidente, mediante la radiografia, che l'esofago è irregolarmente imbutiforme con la sua maggiore ampiezza nella sua porzione subito al di sopra dell'inizio dello stomaco (vedi fig. 8). L'esofago che per i suoi due terzi superiori è mediano con una ampia curva tende a sinistra per raggiungere lo stomaco che è invece tutto a sinistra. È proprio la sua porzione più espansa che curva verso il cardias. Sacrificando degli animali mediante decapitazione nel momento in cui si nota più evidente la dilatazione appariscente dell'esofago precardica si può osservare che esiste a questo livello una strozzatura lieve e talvolta non completa, che si ritrova poi anche negli animali in altri momenti dell'attività funzionale del canale alimentare ed anche negli animali digiuni che indica esattamente la fine dell'esofago e l'inizio dello stomaco senza per altro, microscopicamente, poter mettere in evidenza alcuna variazione qualitativa nè quantitativa nella tunica muscolare in questo punto che invece dal punto di vista dell'epitelio indica nettamente il passaggio da un organo all'altro. Lo stomaco, nel quale il bario si sofferma per varie ore da un minimo di 15 ad un massimo di 20 ore circa si presenta nettamente piriforme (vedi fig. 8, 9) a pieno riempimento, con la parte più espansa verso il cardias e la meno espansa al piloro, e tutto posto alla sinistra dell'animale. La lunghezza media dell'esofago, su 12 soggetti, è di cm. 3, 1; dello stomaco di cm. 1, 9. Dallo stomaco si snoda una prima porzione di intestino sottile ed avvolta in numerose anse, da quattro a sei, avvolte a matassa irregolare (che si osservano meglio sull'animale anatomicamente studiato di quanto non lo si possa fare radiologicamente in quanto le une si sovrappongono alle altre e alcune sono dietro lo stomaco e soprattutto perchè il periodo del loro riempimento è molto fugace) che va da sinistra a destra ed in alto raggiungendo come massima altezza

un poco meno che la distanza tra cardias e piloro e quindi portano il pasto opaco nettamente a destra a livello della valvola ilco-cecale. Da qui si passa in una seconda porzione di intestino assai voluminoso dove il pasto opaco sosta per un periodo piuttosto lungo prima di venire espulso all'esterno. Questa porzione dell'intestino (come anche lo stomaco) mostra delle onde di contrazione che talvolta risultano radiologicamente molto ben marcate (vedi fig. 10). Il pasto opaco non raggiunge mai l'orifizio cloacale ma è costantemente distante da questo circa dai 5 ai 6 mm. ed alla sua porzione terminale precloacale mostra un aspetto a cuneo. Il primo tratto di intestino ha una lunghezza di cm. 6,7 in media, con notevoli varianti individuali, ed il secondo tratto una lunghezza di cm. 3,2 in media: per ciò dalla retrobocca all'orifizio cloacale il canale intestinale di *Lacerta* (*Lacerta*) misura cm. 15,5 circa, in media. La sosta del pasto opaco nella seconda porzione dell'intestino varia dalle 16 alle 24 ore: in totale quindi il pasto opaco dalla sua introduzione alla sua espulsione impiega da un minimo di 32 ore ad un massimo di 45 ore cioè da un giorno e mezzo a due giorni circa (il tempo di due giorni e mezzo a tre giorni dato da GODLEWSKI è, per quanto da me osservato, troppo lungo). Anche in questo sottogenere rispetto all'assorbimento dell'acqua si può ripetere quanto osservato in *Podarcis*, che il materiale evacuato era, anche in questo caso, di consistenza terrosa, di colorito bianco-sporco, a forma di sigaro smussato agli apici, mentre le feci normali hanno carattere informe e pastoso; così pure che non fu mai possibile avere un riempimento dell'ultima porzione dell'intestino attraverso l'orifizio cloacale non ostante vari accorgimenti di tecnica usati.

## BIBLIOGRAFIA

- ARCANGELI A., *Per una migliore conoscenza della struttura e della distribuzione delle ghiandole nello stomaco di Lacerta muralis.* («Atti Soc. Tosc. Sc. Nat.», Pisa, vol. XXIV, pag. 205-217, 1908).
- *Lo «stratum compactum» di Opper nel tubo digerente dei Vertebrati ed in particolare nei Pesci.* («Arch. ital. di anat. embr.», vol. XVIII, pag. 335-424, 1920-21).
- BAECKER R., *Ueber die als Stratum fibrosus (compactum) bezeichnete Grenzschicht im Verdauungskanal der Wirbeltiere.* («Zeit. f. micr. anat. Forsch.», vol. 47, pag. 49-99, 1940).
- BÉGUIN F., *Contribution à l'étude histologique du tube digestif des Reptiles.* («Rev. suisse de Zool.», vol. 10, pag. 250-397, 1902).
- *La muqueuse oesophagienne et ses glandes chez les Reptiles.* («Anat. Anz.», vol. 24, pag. 337-356, 1904).
- *L'intestin pendant le jeûne et l'intestin pendant la digestion. Études faites sur le Crapaud des joncs et le Léopard des murailles.* («Arch. anat. micr.», vol. 6, pag. 385-454, 1904).
- BISCHOFF T. W. L., *Ueber den Bau Magenschleimhaut.* («Müller's Arch.», pag. 385-454, 1838).
- BIZZOZERO G., *Sulle ghiandole tubulari del tubo enterico e sui rapporti del loro epitelio di rivestimento della mucosa. Nota quarta.* («Atti Ac. Torino», vol. 27, pag. 891-903, 1892).
- BUERGER H., *Villorum intestinalium examen microscopicum* («Spec. inaug. med.», Halae, 1819, citato da GARGANO).
- CLARA M., *Untersuchungen über die chemische Natur der Körnchen in den basalgelösten Zellen des Darmepithels bei den Sauropsiden.* («Z. Anat.», vol. 98, pag. 516-526, 1932).
- COHN W. H., *Die Drüsen am Munddach der Eidechsen.* («Arch. Naturg.», vol. 80A, fasc. 8, pag. 8-117, 1915).
- CROFT D. R., *The comparative Morphology of the Caecal Gland (Rectal Gland) of.... Sauropsida.* («Proc. Zool. Soc. London», pag. 101-188, 1925, vol. 1).
- DORDONI F., *Le cellule enterocromaffini nei rettili.* («Arch. zool. ital.», vol. 24, pag. 403-417, 1937).



- DRALLE H., *Mikroskopisch-anatomische Untersuchungen des Blinddarmes von Reptilien*. («Zeit. f. Mikros. anat. Forsch.», vol. 45, pag. 291-320, 1939).
- GARGANO C., *Ricerche sulla struttura del tubo digerente della Lacerta muralis*. LAUR. («Atti Ac. Sc. fis. mat., Napoli», vol. 13, serie 2ª, n. 6, pag. 1-37, 1906).
- GIANNELLI L. e GIACOMINI E., *Ricerche istologiche sul tubo digerente dei Rettili: nota 1ª Esofago; nota 2ª Stomaco e nota 3ª Intestino medio e terminale, Fegato, Pancreas*. («Proc. verb. Acc. dei Fisiocrit., Siena», pag. 42-49, 75-84 e 105-110, 1896).
- GIANNELLI L. e LUNGHETTI B., *Ricerche anatomo-comparative sul punto di passaggio dell'intestino medio nel terminale*. («Atti Ac. sc. med. di Ferrara», 1901).
- GODLEWSKI M., *Étude radiologique du tube digestif de quelques animaux*. («Jour. Radiol. et Electrol.», vol. 32, fasc. 1-2, pag. 91-93, 1951).
- HOFFMANN H. G., «*Reptilien*» in *Bronn's Klassen und Ord. d. Tierreiches.*, vol. 6, parte 3ª, 1890.
- KLEIN E., *Observations on the structure of cells and nuclei*. («Quart. J. Micr. Sc.», N. S., vol. 18, pag. 315-339, 1878).
- KOSTANECKI K., *Zur vergleichenden Morphologie des Blinddarmes, ecc.* (1913, citato da VIALLI).
- *Le caecum des Vertébrés*. («Boll. inter. Ac. Polonaise», 1926, citato da VIALLI).
- LEYDIG F., *Die in Deutschland lebenden Arten der Saurier*. (1872, citato da GARGANO)
- MECKEL I. F., *Ueber der Darmkanal der Reptilien*. (1817, citato da GARGANO).
- NUSSBAUM M., citato da GARGANO e dalla SACCHI.
- PARTSCH K., *Beiträge zur Kenntniss des Vorderdarmes einiger Amphibien und Reptilien*. («Arch. mikr. Anat.», vol. 14, pag. 179-203, 1877).
- RUDOLPHI K. A., citato da GARGANO.
- SACCHI M., *Contribuzioni all'istologia ed embriologia dell'apparecchio digerente dei Batraci e dei Rettili*. («Atti soc. ital. di Sc. Nat.», vol. 29, pag. 361-409, 1886).
- VIALLI M., *Ricerche sull'intestino dei rettili: 1º Il tratto ileocecologico*. («Arch. ital. di anat. ed embriol.», vol. 26, fasc. 3, pag. 454-492, 1929).
- *Idem: IV L'epitelio intestinale*. («Arch. de Biol.», Liege, vol. 39, fasc. 3, pag. 527-581, 1929).

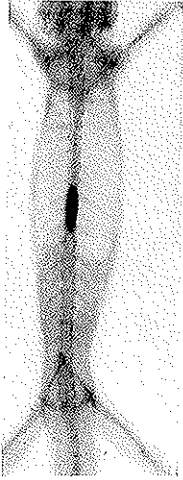


FIG. 1. - Il bolo opaco nel passaggio attraverso l'esofago.  
*Lacerta (Podarcis).*



FIG. 2. - Riempimento della retrobocca e inizio del riempimento della dilatazione esofagea.  
*Lacerta (Podarcis).*

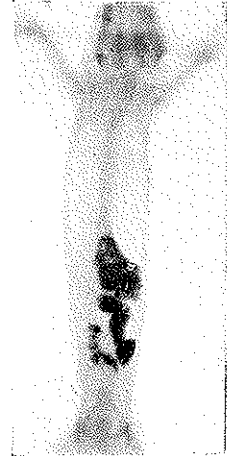


FIG. 3. - Dilatazione esofagea e inizio di svuotamento dello stomaco con fase di riempimento dell'intestino.  
*Lacerta (Podarcis).*



FIG. 4. - Svuotamento dello stomaco ed evidente riempimento della prima ansa dell'intestino tenue.  
*Lacerta (Podarcis).*

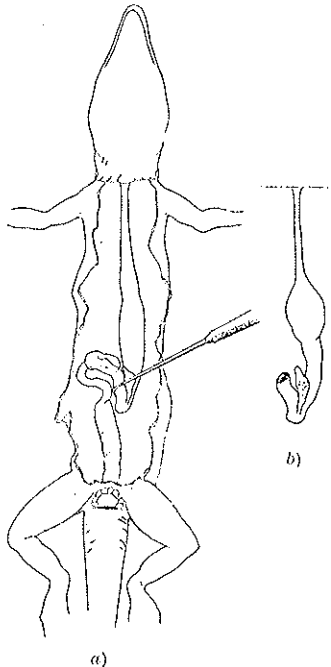


FIG. 5. a) Schema del canale alimentare di *Lacerta (Podarcis)* in fase di digiuno. Il pancreas è punteggiato.  
b) Lo stesso che in a) in fase di riempimento.

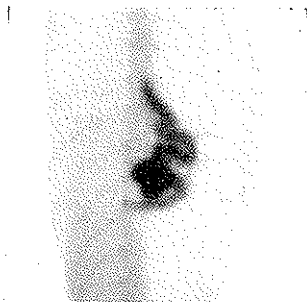


FIG. 6. - Fase di riempimento gastrico che indica la presenza di pieghe nella mucosa.

*Lacerta (Podarcis)*

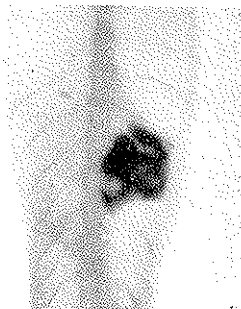


FIG. 7. - Fase di riempimento gastrico che indica la presenza di pieghe nella mucosa.

*Lacerta (Podarcis)*

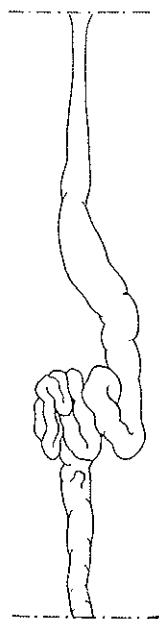


FIG. 8. - Schema di canale alimentare di *Lacerta (Lacerta)* a digiuno.

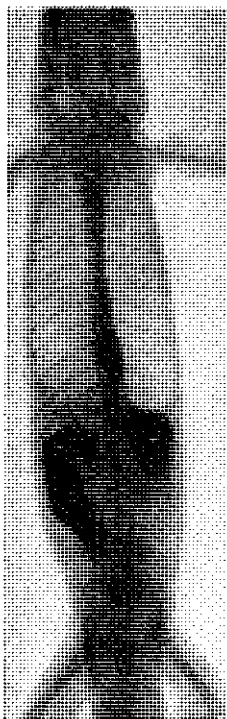


FIG. 9. - Ultima porzione dell'esofago, stomaco e porzione dell'intestino di *Lacerta (Lacerta)*: dopo pasto opaco

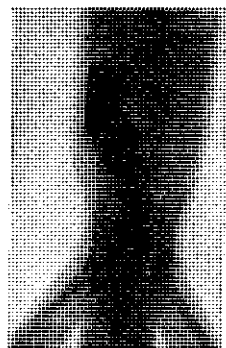


FIG. 10. - Ultima porzione dell'intestino di *Lacerta (Lacerta)*: Onde peristaltiche.



## RILIEVI SULLA INNERVAZIONE DELL'EPIDIDIMO (\*)

(Con sei figure)

GIAN LUIGI CORONA

**SUMMARYM.** — Auctor describit quo modo se habeant nervearum fibrarum fascies, qui per epididymum diffunduntur, quique plexa in connectivo intertubulari et peritubulari efformant. Adnotat in epididymi capite unum vel plura ganglia sympathica adesse. Describit copiosam eamque subtilissimam fibrarum distributionem, quae, postquam peritubularia retia efformarunt, in epitelium ingrediuntur, hic quoque per retia dispositae: hae fibrae sunt nerveae excitosecretrices parasympathicae. Eiusdem generis sunt eae quoque fibrae, quae cum interstitiali glandula connectuntur. Fibrae autem, quae plexa perivascularia efformant, maxima ex parte sunt orthosympathicae.

Poche ed incomplete sono le osservazioni che ci fornisce la letteratura sulla innervazione intrinseca dell'epididimo.

Le prime notizie sull'argomento si devono al TIMORFEEV che nel 1894 col metodo GOLGI e col metodo EHRILCH al bleu di metilene osserva la presenza di fibre nervose e di gangli nell'epididimo. Egli afferma che col bleu di metilene si colorano spesso fra i canalicoli dell'epididimo tronchi nervosi che dividendosi ripetutamente trapassano in fascetti nervosi fibrillari che vanno a formare un plesso superficiale ed uno profondo attorno ai tubuli. Il plesso superficiale presenta maglie allungate col grande asse parallelo alla direzione del canale, il più profondo, costituito da sottili fibrille, è situato a livello della base delle cellule epiteliali.

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Antonio Pensa nella riunione del giovedì 22 novembre 1951.

Questo autore afferma inoltre di aver rilevato con una certa frequenza, accanto ai tronchi nervosi che penetrano nell'epididimo, alcuni gangli simpatici.

Attorno alle cellule gangliari che li accompagnano egli descrive un reticolato pericellulare molto ben sviluppato che si continua il più delle volte con una fibra nervosa ondulata. Col bleu di metilene il citoplasma delle cellule gangliari viene generalmente colorato, mentre rimangono incolori i loro nuclei. Alcune di queste cellule presentano un prolungamento che si divide non lontano dal corpo cellulare ed i cui rami di divisione seguono diverse direzioni.

Il TIMOFEEW distingue in questi gangli due categorie di cellule; le une che non si colorano con il bleu di metilene e possiedono un reticolo pericellulare, le altre che assumono il colorante, ma che non possiedono nessun reticolo pericellulare.

CAVALIÉ (1902) descrive attorno ai tubuli dell'epididimo del coniglio filuzzi nervosi che inviano fini ramuscoli fra le cellule epiteliali prismatiche dei tubuli stessi; questi fini ramuscoli, arborizzandosi liberamente, abbracciano qualcuna delle cellule epiteliali.

LANDAU (1933) segnala la presenza di un ganglio simpatico.

OHMORI (1924) ritiene che le fibre nervose presenti nell'epididimo debbano essere in gran parte amidollate.

BOLOGNESI e BRUGI (1940) descrivono fascetti nervosi e diramazioni secondarie intorno ai vasi e nel connettivo interstiziale e particolari rapporti con le cellule avventiziali.

KUNTZ, RUSSEL e MORRIS (1946) mettono in evidenza, col metodo al protargolo, un plesso nervoso attorno al dotto dell'epididimo e numerosi sottili fasci di fibre nervose, disposte attorno ai vasi, nel tessuto connettivo. Essi distinguono due tipi di fibre nervose; le une sottili, le altre di calibro maggiore. Le fibre più grosse si trovano soprattutto vicino all'epitelio, le fibre più sottili sembrano essere in relazione con la muscolatura del dotto dell'epididimo. Gli autori notano inoltre la presenza di un'abbondante innervazione dei vasi sanguigni presenti nello stroma di tessuto connettivale.

Secondo KUNTZ, RUSSEL e MORRIS l'epididimo è soprattutto innervato dai nervi spermatici inferiori con la partecipazione probabile di alcune fibre derivanti dal plesso ipogastrico e di un limitato nu-

mero di fibre che giungono dal plesso pelvico attraverso il plesso vescicale.

L'incompletezza delle osservazioni precedenti mi ha indotto a riprendere in esame il comportamento del tessuto nervoso negli organi genitali maschili, interessandomi, per ora, dell'innervazione intrinseca dell'epididimo.

#### OSSERVAZIONI PERSONALI

Per le mie ricerche mi sono servito dell'epididimo di gatti nelle varie età e di giovani conigli. Ho ottenuto l'impregnazione degli elementi nervosi col metodo di GOLGI rapido e col metodo di BIELSCHOWSKY secondo la modificazione PALUMBI.

Col metodo BIELSCHOWSKY-PALUMBI applicato all'epididimo di gatto ho potuto osservare che il contingente nervoso destinato all'innervazione dell'epididimo è costituito da numerose fibre nervose che decorrendo nel connettivo intertubulare danno origine ad un intricato plesso nervoso esteso a tutto l'organo.

Le fibre nervose penetrate nell'epididimo, decorrono nelle zone più ricche di connettivo raccolte generalmente in grossi fasci ben impregnati a decorso flessuoso che spesso si dividono fornendo rami minori che seguendo i setti connettivali si insinuano tra le volute del tubulo.

Oltre a questi fasci maggiori si osservano fibre nervose di vario calibro che formano nel connettivo interstiziale una trama molto delicata a strette maglie di forma generalmente poligonale. Alla costituzione di questa rete nervosa partecipano quindi: fibre isolate la cui origine non può essere stabilita, grosse fibre che derivano da fasci nervosi formati da tre o quattro fibre, fibrille sottili che, dopo aver partecipato alla costituzione del plesso, o vanno a formare piccoli fasci nervosi, oppure assumono stretti rapporti col tubulo.

I fasci nervosi più grossi e le fini fibre formano quindi un plesso intricato che disponendosi attorno al tubulo lo avvolge strettamente. Negli interstizi connettivali che il tubulo circonda con le sue volute, le fibre nervose decorrono tortuosamente, anastomizzandosi spesso tra loro. Queste zone costituiscono il punto d'incontro di fasci nervosi provenienti da varie parti ed in esse avviene lo scambio reciproco delle fibre nervose costituenti i fasci stessi (fig. 1).

Generalmente i fasci nervosi maggiori si limitano a decorrere lungo le travate ed i setti connettivali intertubulari circondando più o meno strettamente il tubulo; a volte da essi si staccano fibre che facendosi man mano più sottili si mettono più strettamente in contatto con la parete del tubulo. Le fibre più sottili che partecipano alla formazione del plesso, oltre che nelle zone più ricche di connettivo come le intertubulari, si dispongono preferibilmente sulla parete del tubulo ove divengono estremamente fini e delicate. Esse circondano il tubulo con una delicata trama nervosa che non si limita a rivestire la parete esterna del tubulo ma penetra e decorre nello spessore di essa. Sia le fibre più grosse che le più esili non presentano particolari strutture lungo il loro decorso e sembra che le fibrille più sottili si esauriscano nello spessore della parete tubulare assottigliandosi progressivamente fino a terminare liberamente a punta.

Dal plesso intertubulare si vedono partire fasci di fibre che seguendo i setti connettivali raggiungono il tubulo ove, unitesi a fibre provenienti da altre zone, si dispongono attorno ad esso circondandolo con una fitta rete. Da questa trama nervosa partono numerose sottili fibre che diminuendo progressivamente di calibro penetrano nella parete del tubulo e vi formano un delicatissimo plesso che inguaina e compenetra intimamente il tubulo stesso (fig. 2). Da questa rete derivano alcuni rami nervosi che si mettono in rapporto con le fibrocellule muscolari liscie che, almeno nel cane e nel gatto, costituiscono una sottilissima tonaca muscolare nella parte esterna della parete del tubulo.

È molto difficile con la tecnica sopra detta sorprendere fibre che penetrano fra le cellule epiteliali, tuttavia ho potuto talvolta notare fibre nervose che si mettono in contatto per un certo tratto colla parte basale delle cellule epiteliali tubulari.

Non sono mai riuscito ad osservare nell'interno dell'epididimo cellule nervose isolate nè piccoli raggruppamenti all'infuori della zona in vicinanza della testa ove sono stati messi in evidenza gangli simpatici, come verrà descritto più avanti.

Generalmente non si osserva scambio di fibre nervose tra l'epididimo ed il testicolo, a volte però si può osservare qualche fibra che originatasi da un grosso fascio nervoso decorrente nella capsula con-

nettivale separante i due organi, sembra dirigersi a volte verso il testicolo altra volta verso l'epididimo.

In alcune zone situate tra i tubuli si riscontrano con una certa frequenza raggruppamenti di cellule riferibili alla cosiddetta ghiandola interstiziale dell'epididimo. Questi isolotti cellulari sono circondati, quasi delimitati, da grossi fasci di fibre nervose e compenetrati da fascetti più fini, le cui fibre dividendosi o suddividendosi formano un plesso nelle cui maglie sono comprese le cellule interstiziali. Le fibre nervose circondano strettamente il corpo cellulare.

Inoltre negli spazi intertubulari si riscontrano con una certa frequenza particolari cellule di discreta grossezza il cui citoplasma è ripieno di granuli neri, a volte così stipati da dare l'impressione di una massa di sostanza compatta. Esse presentano un corpo ovoidale, allungato con un grosso nucleo fornito di uno o due nucleoli.

Non tutte queste cellule si presentano intensamente colorate, infatti alcune assumono una tenue colorazione rosea. Non sono in grado di poter precisare se ci si trovi di fronte a cellule argentaffini oppure enterocromaffini; questo particolare, potrà essere messo in luce da ulteriori ricerche.

In prossimità della testa dell'epididimo si osservano generalmente uno o più gangli simpatici che rappresentano probabilmente le ultime stazioni della catena gangliare simpatica disposta lungo il decorso dei nervi destinati agli organi genitati maschili. Nella maggior parte dei casi, vi è un ganglio unico, di notevole volume, di forma ovoidale e rotondeggiante, a volte diviso in due raggruppamenti di cellule e che presenta numerose cellule nervose strettamente raggruppate ed addossate tra di loro (fig. 3). In alcune sezioni si possono osservare due gangli vicini di eguale grandezza intimamente connessi tra di loro, altre volte un grosso ganglio vicino al quale è situato uno più piccolo.

In rari casi mi è stato possibile osservare in immediata vicinanza di un ganglio qualche cellula nervosa isolata, piriforme fornita di vari prolungamenti alcuni dei quali si esauriscono tra i tubuli mentre qualche altro si dirige verso il ganglio.

I fasci nervosi che arrivano al ganglio sono costituiti in grande prevalenza da fibre grosse e da un minor numero di fibre sottili.



Le fibre grosse sembrano essere midollate, tuttavia assieme ad esse non si può escludere che decorrano anche fibre amidollate. La maggior parte delle fibre di questi fasci si esauriscono nell'interno del ganglio partecipando alla costituzione di un plesso intercellulare, poche altre sembrano attraversare il ganglio senza fornire collaterali per continuarsi direttamente in un fascio nervoso che si allontana dal ganglio. Si osserva costantemente che i gangli simpatici dell'epididimo, anche quando sono forniti di poche cellule, costituiscono il punto di convergenza di alcuni grossi fasci formati prevalentemente da grosse fibre.

In alcune sezioni le cellule gangliari sono situate sul tragitto di un grosso fascio nervoso che, giunto in corrispondenza del ganglio, si espande dividendosi in due o più fasci di minor calibro che a loro volta dividendosi ulteriormente si distribuiscono attorno alle cellule nervose.

A volte, prima di giungere al ganglio, questo grosso fascio nervoso viene arricchito dal contingente di fibre nervose di un fascetto di calibro minore.

Altri fasci nervosi di minore entità giungono al ganglio prendendo contatto in parte direttamente con le cellule nervose disposte alla periferia di esso, in parte partecipando alla formazione del plesso intercellulare.

I gangli sono composti in grande prevalenza da elementi cellulari il cui corpo è avvolto da numerose fibre nervose costituenti un fitto plesso intercellulare. Essi sono formati nella maggioranza dei casi da molte cellule, la maggior parte delle quali sono di forma stellata e di ampio volume e in minor numero da altre più piccole di forma allungata ovoidale o piriforme.

Queste cellule di forma e di grandezza variabilissima, sono provviste di un numero vario di prolungamenti.

Tali prolungamenti presentano la caratteristica di essere a lungo decorso, di straordinaria ma variabile sottigliezza; prolungamenti aventi tutti, più o meno lo stesso carattere, tanto che molte volte è impossibile distinguere il neurite dai dendriti. Tali prolungamenti si dipartono o da qualsiasi o da uno o più punti ravvicinati della superficie del corpo cellulare; di essi, alcuni si dividono precocemente, altri tardi-

vamente in un numero vario di rami secondari. I prolungamenti si originano o direttamente dal corpo cellulare o da un corto o robusto tronco che a sua volta nasce dal pirenoforo, spesso con un cono di emergenza nel quale si continua la struttura fibrillare del citoplasma. Essi suddividendosi ed intrecciandosi fra di loro, danno luogo ad un fitto plesso intercellulare. Alcuni di essi, di calibro generalmente un po' maggiore degli altri si portano isolatamente o raccolti in fascetti, in uno dei fasci di fibre più o meno vicino che attraversano il ganglio; una volta penetrati in esso non sono più ulteriormente seguibili.

Altri invece, e questi rappresentano la grande maggioranza, si portano con decorso più o meno flessuoso fra le cellule del ganglio e qui dividendosi ripetutamente si intrecciano in modo inestricabile con gli analoghi prolungamenti di altre cellule. Talora alcuni prolungamenti man mano che si allontanano dalla cellula di origine si assottigliano gradatamente e sembrano apparentemente terminare, più o meno a punta, liberamente fra gli elementi del ganglio; altri decorrono strettamente a ridosso di qualche cellula. Altri infine si dividono in corrispondenza di una cellula più o meno vicina in due o più rami sottili che abbracciano il pirenoforo di questa; in questi ultimi casi, detti rami talora sembrano tutti o in parte terminare; tal'altra continuarsi nel plesso intercellulare.

Alcune volte subito al di sotto della capsula che riveste il ganglio si notano disposti in fila cellule multipolari molto grandi i cui prolungamenti sorgono sempre dal contorno cellulare rivolto verso l'interno del ganglio. Inoltre cellule binucleate in discreto numero, sono disseminate un po' dappertutto nell'ambito del ganglio. Raramente i prolungamenti di due cellule lontane si dirigono l'uno verso l'altro e si intrecciano in modo complesso.

In alcuni preparati si notano, talvolta, elementi piccoli che sembrano o monopolari o bipolari e cioè alcuni provvisti di un unico prolungamento di cui non è possibile seguire il decorso che per un breve tratto; altri che sembrano invece provvisti di due prolungamenti originantisi in vario modo.

In qualche preparato si osserva accanto ad un ganglio di maggior volume un'altro più piccolo composto prevalentemente da cellule

nervose a corti prolungamenti. Sono cellule di forma rotondeggiante od allungata di notevole grandezza. Da un settore limitato del loro corpo sorgono prolungamenti di vario numero, in parte tozzi ed in parte delicati ed esili. Questi, ad una distanza più o meno grande dal pirenoforo, danno origine ad un numero vario di rami estremamente sottili che si intrecciano strettamente fra loro ed in qualche caso sembrano anastomizzarsi quasi a formare un vero e proprio apparato retiforme.

Attorno al tratto iniziale del neurite e delle propaggini brevi intracapsulari appare spesso un manicotto di sottili fibre, formato in parte dai rami di divisione di fibre afferenti, in parte dalle diramazioni terminali delle propaggini intracapsulari.

Per quanto riguarda il comportamento delle fibre afferenti a questi gangli, esse, per mezzo delle loro più fini espansioni, non formano mai complessi canestri pericellulari, e cioè quelle connessioni note come sinapsi neurosomatiche; contornano, al più lassamente il pirenoforo di alcune cellule nervose stabilendo così connessioni sempre molto semplici. Al contrario queste fibre formano sempre un fitto plesso diffuso intercellulare per mezzo del quale esse compenetrano intimamente la trama formata dai prolungamenti delle cellule nervose. Si può ritenere che il tipo predominante di connessione fra le fibre afferenti e gli elementi costitutivi dei gangli è rappresentato da un plesso nervoso diffuso costituito dalle espansioni terminali delle fibre afferenti e dai prolungamenti delle cellule gangliari.

Col metodo Golgi applicato all'epididimo di giovani conigli ho potuto mettere in evidenza una notevole quantità di fibre nervose isolate o raccolte in fasci che si distribuiscono in tutto l'organo.

Le fibre nervose si presentano varicose, con decorso tortuoso e terminano generalmente con un piccolo nodo o una piccola massa.

Le fibre nel loro tragitto intertubulare, emettono ad angolo retto o ad angolo acuto, numerose collaterali che abbracciano il tubulo formando un plesso peritubulare.

Con il metodo della reazione cromoargentica del Golgi ho potuto identificare nettamente i fasci di fibre destinate all'epitelio e quindi a funzione eccitosecretrice da quelli che formano i plessi perivasali e quindi a funzione vasomotoria (fig. 4 e 5). Le fibre destinate al tu-

bulo, dopo aver formato plessi e delicate ramificazioni che sono disposte nella lamina propria e nella lamina basale e quindi alla superficie del tubulo (fig. 4), danno origine a fibre finissime che attraversano la lamina basale e penetrano nell'interno dello strato epiteliale dove, ridottesi a calibro sottilissimo, si intrecciano fra di loro con disposizione retiforme e contraggono intimi rapporti con le cellule epiteliali secernenti (fig. 5 e 6).

L'innervazione dei vasi sanguigni è costituita da un plesso perivascolare a maglie strette ed a trabecole fortemente varicose e flessuose, dal quale sembrano emanare fini rami disposti entro o sopra le fibre muscolari lisce della parete (vedansi ancora le fig. 5 e 6).

Le fibre nervose sono disposte lungo la parete vasale, circondandola di tanto in tanto, ed inviano di volta in volta corte o lunghe diramazioni alla tonaca muscolare: le prime nascono ad angolo retto od acuto, decorrono in senso trasversale e presentano varicosità e corti rami terminanti a bottone; le seconde si dispongono parallelamente alla tonaca muscolare e, dividendosi più volte, dirigono i loro rami in senso trasversale.

I vasi sanguigni di maggior calibro sono accompagnati da grossi fasci nervosi che decorrono strettamente accollati alla parete vasale e da fibre sottili che formano volute attorno ad essi e presentano un decorso elicoidale. Queste fibre anastomizzandosi fra loro originano un plesso a maglie strette che in alcune sezioni si vede rivestire la parete vasale, mentre in altre compenetra intimamente gli elementi muscolari del vaso stesso.

Dal plesso perivasale si staccano fibre che partecipano alla costituzione di fasci nervosi più grossi, oppure contribuiscono alla formazione della rete nervosa peritubulare.

In vicinanza degli gangli simpatici della testa dell'epididimo, si osserva che alcune fibre derivanti dai fasci più grossi che partono da essi fattesi più sottili partecipano alla formazione del plesso perivasale.

Il contingente maggiore di fibre nervose accompagna i vasi di maggior calibro. Con la diminuzione del calibro vasale si riduce anche il numero delle fibre nervose perivasali, finchè a livello dei capillari non si incontrano che una o due esili fibre, poco ramificate e tese longitudinalmente lungo il loro decorso.

## CONCLUSIONI

L'epididimo è innervato da un grande numero di fibre nervose che in parte derivano dai gangli simpatici posti vicino alla testa, in parte originano dai plessi nervosi perivascolari, ed in parte sono di origine spinale.

Le fibre nervose, penetrate nell'epididimo, decorrono nelle zone più ricche di connettivo raccolte in grossi fasci ben impregnati, a decorso ondulato, che spesso si dividono formando rami minori che lungo i setti connettivali raggiungono il tubulo.

Oltre i fasci maggiori si osservano nel connettivo interstiziale numerose fini fibre nervose che formano una trama molto delicata a strette maglie. Questa è disposta attorno al tubulo e lo avvolge strettamente.

Generalmente i fasci nervosi maggiori decorrono lungo le travate ed i setti connettivali intertubulari, mentre le fibre più sottili si mettono più strettamente in contatto e rapporto con la parete del tubulo.

Le fibre più sottili derivanti dal plesso intertubulare circondano con una fitta rete il tubulo. Da questa trama nervosa partono numerose sottili fibre che, diminuendo progressivamente di calibro, penetrano nella parete del tubulo formando un delicatissimo plesso che inguaina e compenetra intimamente il tubulo stesso. Da questa rete si vedono derivare rami nervosi alcuni dei quali non oltrepassano la lamina basale sulla quale poggia l'epitelio tubulare e si mettono in rapporto con gli elementi muscolari della lamina propria ed altri che si spingono più profondamente ed abbracciano strettamente le cellule epiteliali.

I vasi sanguigni dell'epididimo sono accompagnati da un ricco plesso nervoso dal quale originano fibre sottili che si mettono in intimo contatto con gli elementi muscolari della parete vasale.

In tutta vicinanza della testa dell'epididimo si trovano frequentemente gangli simpatici di forma ovoidale o rotondeggiante, di notevole volume, mentre è estremamente raro riscontrare cellule nervose isolate in tutto il resto dell'organo.

I fasci nervosi che arrivano al ganglio sono costituiti generalmente da fibre grosse apparentemente in maggioranza midollate e da un minor numero di fibre sottili.

I gangli sono composti in grande prevalenza da elementi cellulari stellati il cui corpo è avvolto da numerose fibre nervose costituenti un fitto plesso intercellulare. Le cellule gangliari di forma e grandezza variabilissima, sono provviste di un numero vario di prolungamenti. La maggior parte delle cellule gangliari appartiene al 2° tipo della classificazione secondo DOGIEL, cioè sono a lunghi e sottili prolungamenti; se ne trovano però alcune a corti e tozzi prolungamenti, cioè del 1° tipo secondo DOGIEL.

Intorno alla maggior parte delle cellule gangliari non si notano complessi canestri pericellulari, e cioè quelle connessioni note come sinapsi neurosomatiche; le fibre afferenti contornano lassamente il corpo cellulare di alcune cellule nervose stabilendo connessioni sempre molto semplici.

Il contingente nervoso che presiede all'innervazione dell'epididimo è composto quindi da tre tipi di fibre; le une di natura parasimpatica provenienti dai gangli simpatici situati in corrispondenza della testa dell'organo e aventi probabilmente funzione eccitosecetrica sulle cellule ghiandolari del tubulo e sulla ghiandola interstiziale; le altre derivanti dai plessi nervosi perivasali a funzione vasomotoria e di natura probabilmente ortosimpatica. Si mettono inoltre in evidenza anche grosse fibre midollate forse di origine spinale che potrebbero esplicare una funzione sensitiva.

## BIBLIOGRAFIA

- BOLOGNESI G. e BRUGI G., *Osservazioni sopra la fine innervazione dell'epididimo di Cynocephalus hamadryas*. « Atti R. A. Fisiocritici Siena », serie XI, vol. 8, n. 2, 1940.
- CAVALIÉ M., *Terminaisons nerveuses dans le testicule chez le lapin et chez le poulet, et dans l'épididyme chez le lapin*. « C. R. Soc. Biol. », 1902, pag. 298-300.
- KUNTZ A., RUSSEL E. e MORRIS JR., *Components and distribution of the spermatic nerves and the nerves of the vas deferens*. « Jour. of Comparative Neurol. », 85, 33-44, 1946.
- LANDAU, *La presence d'un ganglion sympathique dans l'épididyme*. Bull. Soc. Vaudoise Sc. natur. 52, 181, 1933.
- OHMORI D., *Ueber die Entwicklung der Innervation der Genitalapparate als peripheren Aufnahmeapparat der genitalen Reflexen*. « Zeitschr. f. Gesamte Anatomie », 70, 347, 1924.
- PALUMBI G., *Osservazioni sulla struttura dei gangli del simpatico dei mammiferi*. « Zeitschr. f. Gesamte Anatomie », 109, 396-422, 1939.
- PALUMBI G., *Contributo alla valutazione del significato dei vari tipi di cellule e di connessioni nervose nei gangli del simpatico dei mammiferi*. « Ricerche di Morfologia », 1940.
- TIMOFEEW D., *Zur Kenntnis der Nervendünungen in den männlichen geschlechtorganen der Säuger*. « Anatom. Anzeiger. », IX, 342, 1894.

## SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

- Fig. 1. — Fasci e fibre nervose decorrenti negli interstizi circoscritti dalle volute del tubolo. Epididimo di gatto. Met. Bielschowsky-Palumbi. Ingr. 450×.
- Fig. 2. — Sezione trasversale del tubolo dell'epididimo di gatto. Disposizione delle fibre nervose a formare l'intreccio intertubulare dal quale emanano fini fibrille che vanno a costituire il plesso peritubulare. Metodo Bielschowsky-Palumbi. Ingr. 650×.
- Fig. 3. — Zona in prossimità della testa dell'epididimo di gatto. Caratteristica disposizione di un ganglio simpatico. Met. Bielschowsky-Palumbi. Microfotografia. Ingr. 110×.
- Fig. 4. — Distribuzione delle fibre nervose alla superficie del tubulo (B) e, in basso (A), un plesso perivascolare. Epididimo di coniglio. Met. Golgi rapido.
- Fig. 5. — Fibre e fasci di fibre che circondano il tubulo ed inviano rami finissimi nell'interno dell'epitelio. In alto un plesso nervoso perivascolare. Epididimo di coniglio. Met. Golgi rapido.
- Fig. 6. — Distribuzione delle fibre nervose nell'interno dell'epitelio e loro rapporti con le cellule secernenti. Epididimo di coniglio. Met. Golgi rapido.



TAVOLE

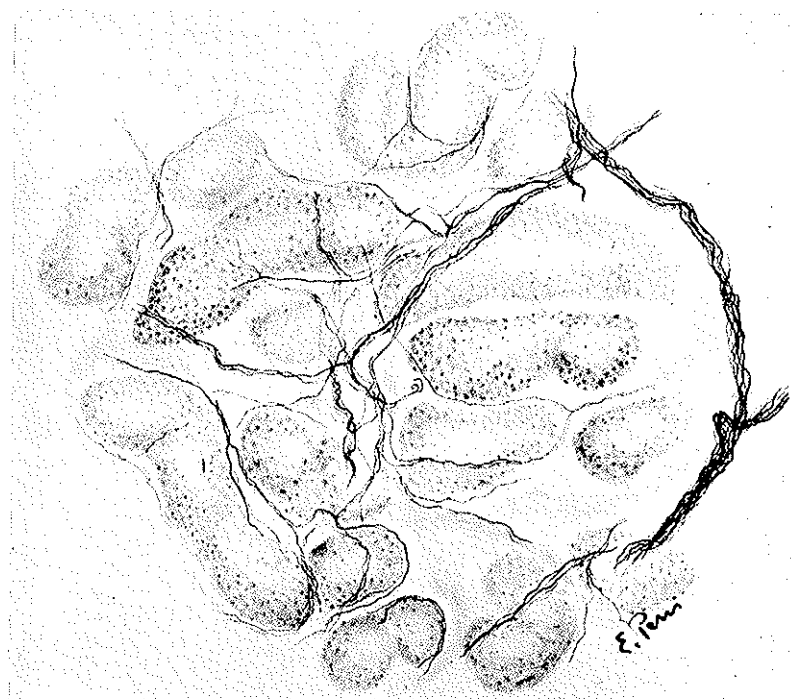


FIG. 1.

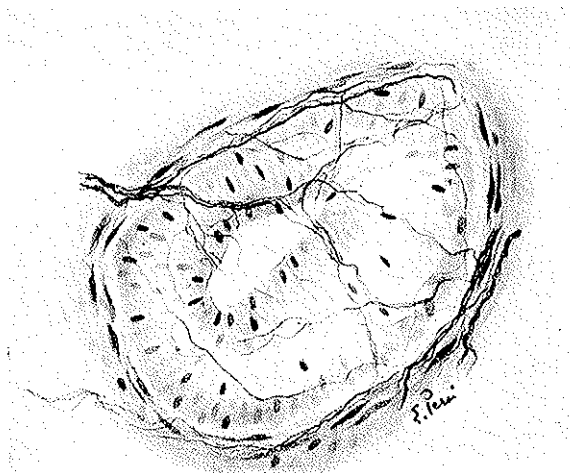


FIG. 2.

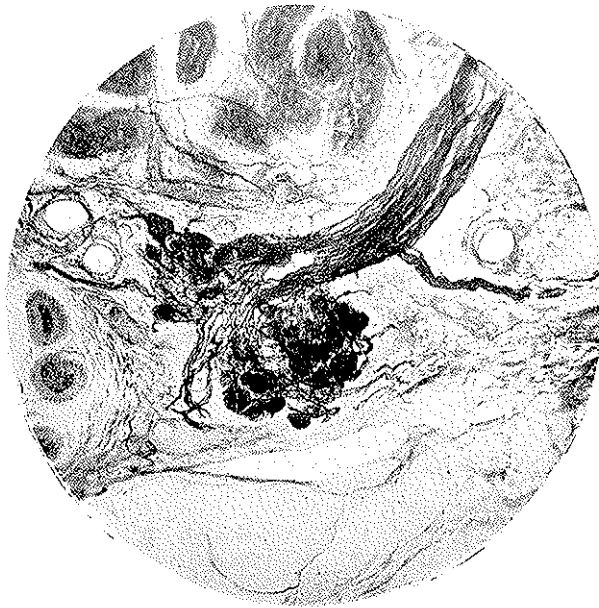


FIG. 3.



FIG. 4.



FIG. 5.

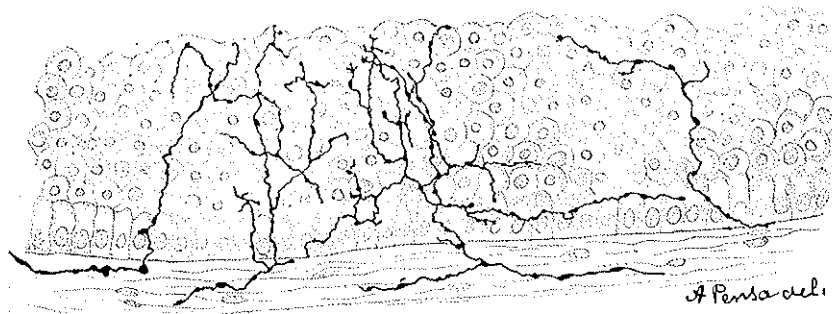


FIG. 6.



PONTIFICIA  
ACADEMIA  
SCIENTIARVM

*A C T A*  

---

*Vol. XIV - N. 19*  

---

pag. 211-224

## DISPOSITIVO PER LO STUDIO DINAMICO E CINETICO DEL METABOLISMO CELLULARE (BL 98) (\*)

*(Con nove figure e sei grafici)*

GIOCONDO PROTTI

**SUMMARIVM.** — Nova ratio technica proponitur ac describitur, qua biologicae actiones, per radioactivos indicadores, sine ulla intermissione investigari possunt.

Radioactivitatis indicationes graphice imprimuntur in circulatorio systemate constantem habenti fluxum; in quodam eius systematis puncto diaphragmata biologica interpeni possunt, quae uniformi ratione a substratis «notatis», quae radioactivum habent isotopum, traiciuntur.

Lo studio delle attività biologiche è ostacolato, come è noto, dalla necessità di interrompere il fenomeno biologico per poterlo osservare in tempi successivi.

Determinate condizioni relative, per esempio, all'intervento di un enzima, di un attivatore, di un inibitore enzimatico, o relativo a reazioni intermedie, non possono essere precisate nei valori istantanei, perchè si è costretti a frammentare la osservazione, la quale, perciò, in definitiva, è statica e discontinua, per quanto ridotto possa essere il tempo intercorrente tra misura e misura.

Ho creduto che sarebbe stato possibile far avanzare il problema dello studio istantaneo e continuato del metabolismo cellulare, realizzando un sistema circolatorio, termoregolato, sterile, a flusso costante, in un punto del quale fosse interposto un filtro, sostenente uno strato

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Pietro Rondoni nella riunione del 22 novembre 1951.

di materiale biologico, attraversando il quale, sostanze nutritizie, circolanti in soluzione, potessero venire in profondo, intimo contatto con gli elementi cellulari in studio.

Il lato tecnico del problema circolatorio è stato risolto mediante la utilizzazione di una pompa ad ingranaggi, del tipo in uso per la filatura della viscosa. Queste particolari pompe spingono la cellulosa in soluzione attraverso una filiera, dalla quale esce il filo perfettamente uniforme.

Lo schema della pompa ad ingranaggi è visibile nelle figg. 1, 2, 3.

Nel dispositivo da noi realizzato, il liquido si muove in circuito chiuso, sterile in ogni sua parte (fig. 4).

La espressione sperimentale più semplice e dimostrativa del dispositivo in parola è costituita da un foglio di comune carta da filtro che avvolge una candela, la quale ha un lume interno, che comunica all'esterno, attraverso una serie di fori allineati sulla sua superficie (fig. 5, 6).

La candela, così preparata, viene infilata in un cilindro metallico (che viene chiuso ermeticamente) il quale comunica con la pompa e col resto del circuito (fig. 7).

Se, per esempio, introduciamo nel circolo una sospensione acquosa di lievito e avviamo il motore che aziona la pompa, si verifica la progressiva deposizione delle cellule del lievito attorno alla carta del filtro, mentre l'acqua di supporto va gradualmente chiarificandosi.

Si forma così, sul filtro a candela, un *diaframma biologico* (fig. 8).

Se a questo punto sostituiamo l'acqua con una soluzione glucosata e interponiamo nel circuito un polarimetro <sup>(1)</sup> e un raccogliatore di CO<sub>2</sub>, si osserva che il lievito è attivo, in quanto prontamente diminuisce il glucosio e si sviluppa CO<sub>2</sub>.

Esperienze parallele, condotte per confrontare la diminuzione di glucosio nel suddetto sistema a diaframma, con la diminuzione di glucosio in matracci, con valvole di H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, tenuti in termostato, dimostrano che la diminuzione del glucosio è uguale nelle due prove, eseguite con la stessa quantità di materiale, alla stessa temperatura, negli

---

<sup>(1)</sup> Il polarimetro risponde regolarmente anche se il liquido è in movimento, purché siano eliminate le bolle gassose.

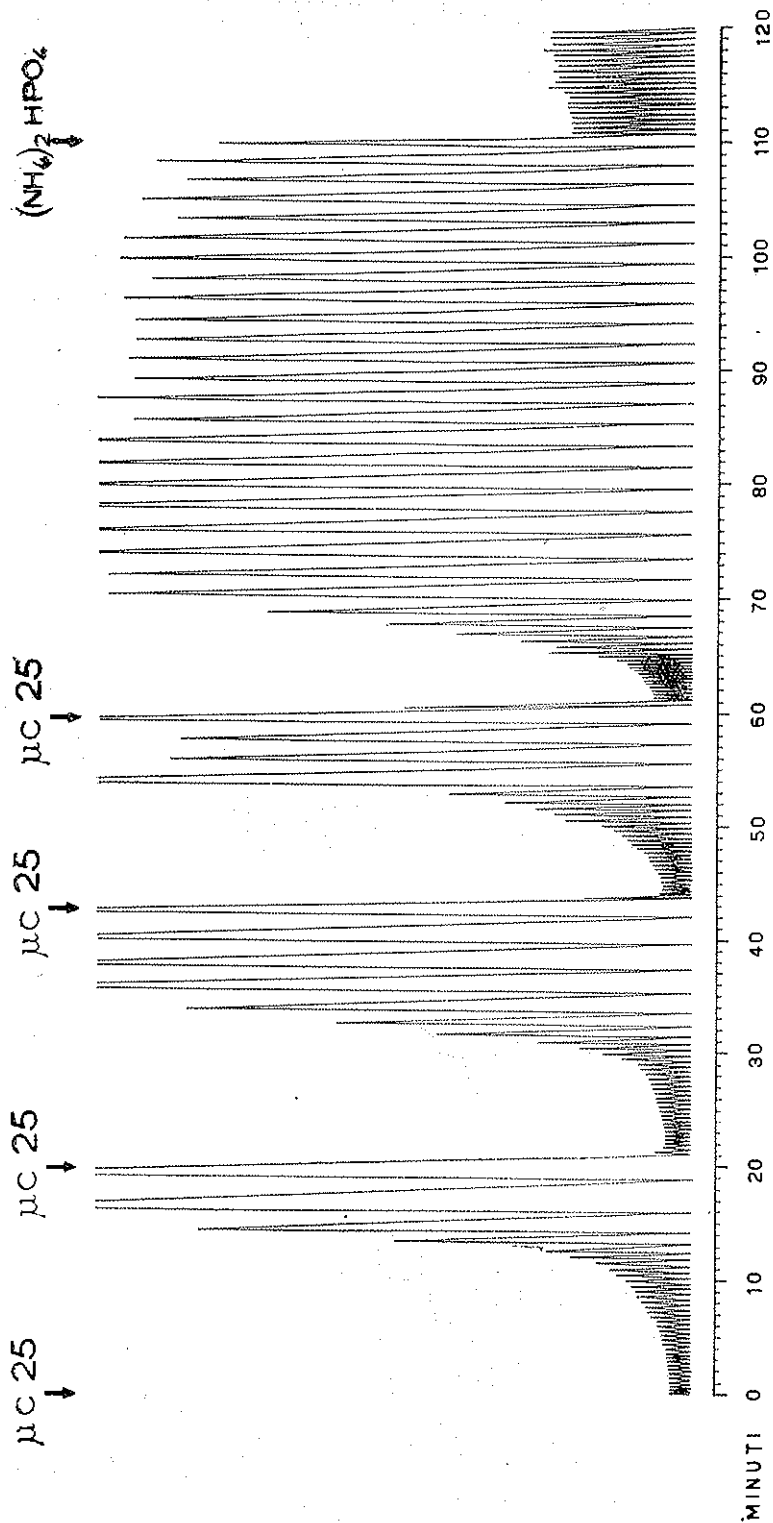


GRAFICO A. — Lievito normale di distilleria.

Quattro successive dosi di fosfato ammonico marcato, aggiunte ad una soluzione glucosata, sono rapidamente metabolizzate. Al 110° minuto una aggiunta di fosfato ammonico non marcato determina il ritorno in circolo di una parte della radioattività.

stessi momenti. I medesimi risultati si hanno nei due sistemi anche relativamente allo sviluppo di  $\text{CO}_2$ .

Ciò mi permise di concludere che la fermentazione alcolica è possibile e regolare anche immobilizzando il lievito sopra ad un filtro, attraverso il quale sia fatto circolare un substrato zuccherino.

Avuta così la prova che il diaframma biologico è perfettamente e uniformemente attivo, mi sono convinto d'aver risolto, in linea di massima, la difficoltà maggiore, vale a dire quella inerente alla possibilità di avere a disposizione un sistema circolatorio chiuso, a flusso rigorosamente costante, anche nel caso che tale flusso attraversasse un filtro.

La utilizzazione degli isotopi radioattivi nello studio delle attività cellulari (<sup>1</sup>), mi fece inoltre considerare che, come avevo potuto seguire, istante per istante, al polarimetro, il consumo del glucosio, così, verosilmente e, anzi, a più forte ragione, avrei potuto seguire, col contatore di GEIGER-MÜLLER, *istante per istante*, il consumo di sostanze marcate con isotopo radiattivo.

Ripetei perciò l'esperienza con lievito, usando una soluzione glucosata, addizionata di fosfato ammonico, marcato con  $\text{P}^{32}$ , e scelsi il fosforo, per queste prime prove, sia per la sua praticità di impiego, sia perchè il metabolismo fosforico è tra i più conosciuti, ciò che, *a priori*, mi avrebbe consentito di escludere, o quanto mai di ridurre, dubbi e incertezze sulla interpretazione dei risultati.

Messa in moto la pompa, facendo cioè circolare il liquido nutrizio, marcato con  $\text{P}^{32}$ , attraverso il diaframma di lievito, si rilevò tosto che la scala elettronica, collegata al tubo di GEIGER-MÜLLER, indicava che la radioattività, presente nella soluzione, diminuiva fino a raggiungere valori costanti.

Tale comportamento non poteva essere dovuto, salvo interpretarlo, che ad un assorbimento del fosforo a livello del diaframma del lievito, in piena concordanza con quanto è noto circa il bisogno di fosforo da parte delle cellule attive.

Per eliminare il dubbio che il fosforo fosse stato trattenuto dal diaframma, per semplice *adsorbimento*, provai sia con la sola carta da filtro, sia con il lievito inattivo, reso tale mediante prolungata ebulli-

---

(<sup>1</sup>) GEORGE HEYBESY, *Radioactive Indicators*; WILLIAM E. SIRS, *Isotopic Tracers and Nuclear Radiations*.



Pol. 5,3



Pol. 5  
Mg. SO<sub>4</sub>



Pol. 4,7



Pol. 3,5

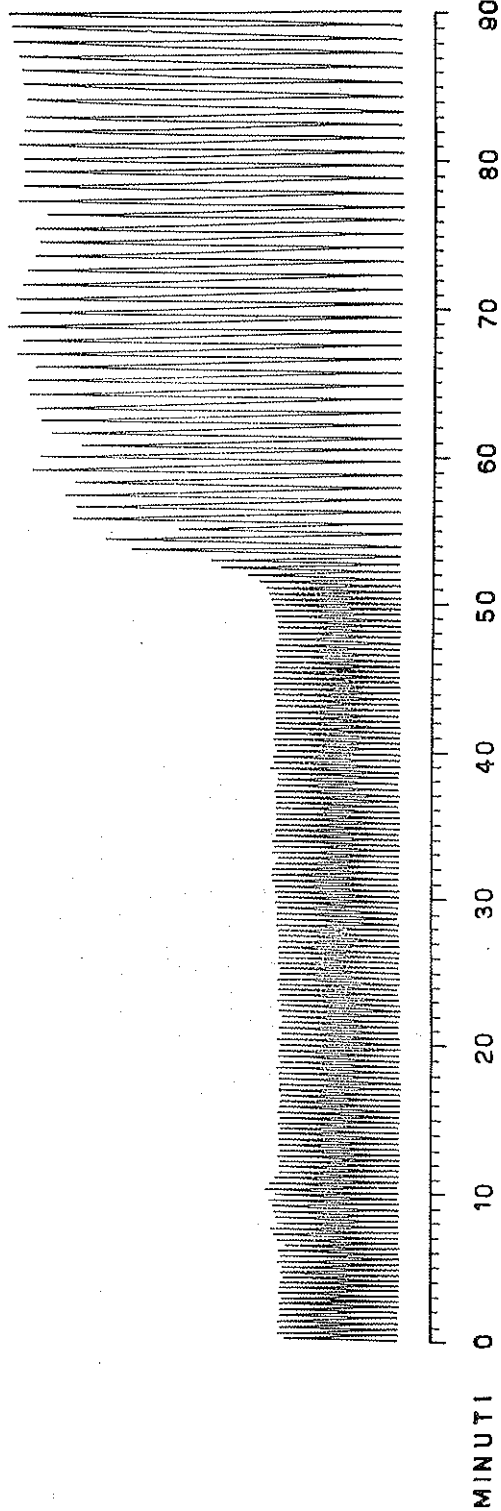


GRAFICO B. — Lievito in carenza di magnesio.

Il fosfato ammonico, presente fin dall'inizio dell'esperienza, non è metabolizzato nonostante che il polarimetro indichi che il glucosio vada diminuendo. Al 85° minuto si aggiunge del solfato di magnesio: dopo 13' inizia il metabolismo del fosforo. Si noti la più rapida diminuzione del glucosio, in rapporto al metabolismo fosforico.

zione. Così operando, non si riscontrò diminuzione della radioattività; le diminuzioni di radioattività, che si verificano col lievito vivo, sono quindi da considerarsi come dovute a fenomeni metabolici veri e propri.

La scala elettronica, in questo genere di ricerche, dà risultati molto evidenti, se è collegata ad un registratore scrivente, sia elettronico, sia elettromeccanico.

MOREL aveva già stabilito, usando un registratore da lui ideato, realizzato con la collaborazione tecnica di SERREL, che lo scambio tra

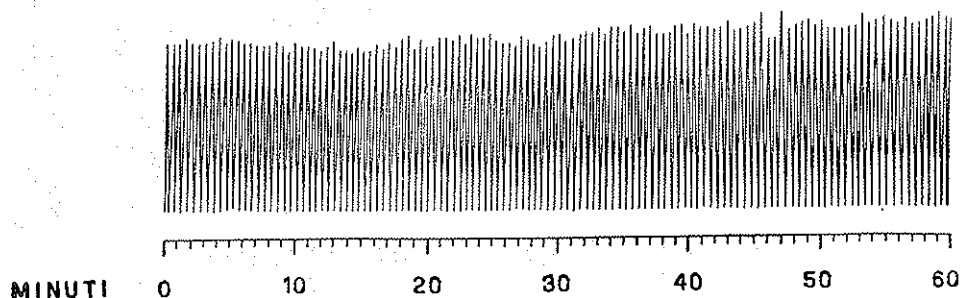


GRAFICO C. — Lievito inattivato con la ebollizione.

Il fosforo non è metabolizzato. Nessuna fermentazione. Tempo dell'esperienza 60'.

atomi di sodio e atomi di sodio radioattivo (il sodio è un elemento extracellulare) si attua, nel circolo sanguigno dell'animale, seguendo determinate modalità e controllò che questa indagine, eseguita mediante il suo apparecchio (detto Integratore meccanico) era del tutto sovrapponibile alla indagine eseguita, per pesata, ricorrendo a campioni di sangue, saltuariamente prelevati dall'animale, e notevolmente più rapida e precisa.

L'Integratore meccanico di MOREL totalizza automaticamente gli impulsi su curve grafiche tracciate su carta affumicata, sul principio che lontanamente ricorda quello su quale è basato il « Pulzschreiber » di FLEISCH: esso consiste nel ricondurre a zero la penna scrivente verticalmente, a velocità costante, in funzione del tempo, ogni qualvolta essa abbia ricevuto *esattamente* 1000 impulsi dal contatore di GEIGER-MÜLLER. Ne consegue che quanto è maggiore la radioattività, tanto più rapida è la totalizzazione dei 1000 colpi, tanto più breve è la corsa verticale della penna, cioè del tracciato; reciprocamente: quanto minore è la radioattività, più tardo sarà il raggiungi-

mento del totale di 1000 colpi, più lenta la salita della penna, più lungo il tracciato verticale.

Noi nostri Laboratori possiamo registrare graficamente la radioattività sia con l'Integratore meccanico del MOREL, sia con potenziometro elettronico Speedomax, Leeds and Northrup.

Per il momento abbiamo dato la preferenza all'Integratore meccanico di MOREL, che ha risposto ammirevolmente allo scopo (fig. 9).

Lo schema e il funzionamento dell'Integratore meccanico di MOREL è il seguente (vedi fig. 9 bis):

L'asse del cilindro registratore (1) in moto, aziona la puleggia motrice (2). Le espansioni elettromagnetiche (3) della frizione girano così ininterrottamente a velocità costante. La frizione elettromagnetica trascina a sua volta la rotella avente debole inerzia (4), il nottolino reggispinta della quale aziona la grande ruotella scanalata (5); questa, infine, fa salire a velocità costante la penna scrivente (6).

Il numeratore elettromagnetico fa compiere alla camma (7) un decimo di giro tutte le volte che il contatore di GERGER-MÜLLER ha registrato 100 impulsi, ossia un giro completo con 1000 impulsi; ad ogni giro della camma (7) si chiude il contatto (8) in modo che dalla rete attraverso ad una resistenza termica (9), venga inviato nella elettrocalamita (10) un breve impulso di corrente, giusto sufficiente a farla funzionare. La molla (11) libera il gancio (12) e interrompe la corrente nel circuito della frizione elettromagnetica (3) per mezzo del contatto (13). Il contrappeso (14) riconduce quasi istantaneamente ( $\frac{1}{20}$  di secondo circa) la rotella avente debole inerzia (4) al punto di partenza; il nottolino carica la molla (11); ciò chiude il circuito della frizione elettromagnetica e la rotella riparte subito.

La grande rotella (5), avente inerzia non trascurabile, trascinata dal peso della penna (6) raggiunge con lieve ritardo la rotella motrice (4) e si fa trascinare da questa. Questo sistema di doppio *débrayage* riduce al massimo l'inerzia dell'apparecchio ed evita ogni perdita del conteggio durante la rimessa a zero.

Inoltre, il contatto di sicurezza (15), posto in serie al circuito della frizione elettromagnetica, impedisce le escursioni eccessive della penna scrivente; quando la ruota motrice (4) ha descritto quasi un giro completo, il nottolino agisce sulla leva a molla (15) e apre il circuito; appena la puleggia motrice (4) viene liberata dalla frizione lascia tornare la leva (15) in posizione di riposo, il circuito si richiude e la rotella ricomincia ad essere trascinata dalla frizione; questo sali-scendi determina un tracciato seghiforme sulla carta affumicata.

Un primo sistema di pulegge permette di far variare la velocità della rotazione del cilindro registratore e un secondo il rapporto di

velocità verticale e orizzontale del tracciato (cfr. F. MOREL, « Helvetica Physiologica » et Pharmacologica Acta », vol. 8, fasc. 1, pag. 64, 1950).

Per quanto riguarda la precisione (in %) di ciascun punto del grafico ottenuto con l'Integratore di MOREL, essa corrisponde alla formula di fluttazione radioattiva

$$\pm \frac{\sqrt{N}}{N}$$

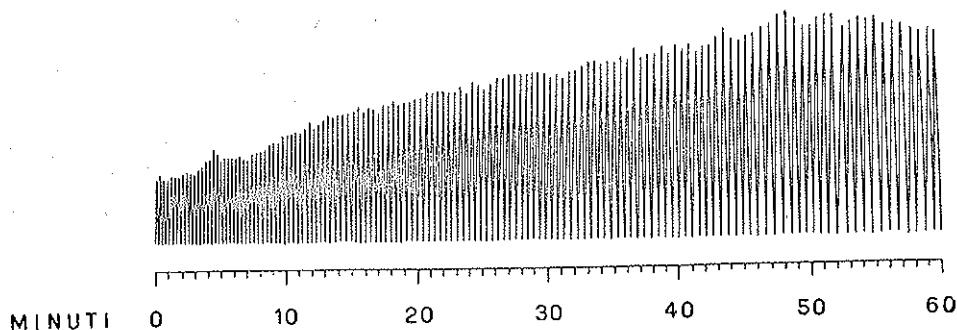


GRAFICO D. — Timo di vitello.

La assimilazione del fosforo avviene a velocità quasi uniforme. Tempo dell'esperienza 60'.

essendo  $N$  sempre uguale a 1000 impulsi. L'errore probabile è quindi dell'ordine del  $\pm 3\%$ .

L'esperienza del metabolismo fosforico del lievito (come di qualsiasi altra sostanza suscettibile di essere metabolizzata) ha inizio, ricorrendo alla apparecchiatura suddetta, con la misura del « movimento proprio », cui fa seguito la taratura della radioattività iniziale della soluzione nutritizia etichettata. Ho trovato conveniente misurare, di volta in volta, la radioattività del liquido marcato, sia calcolando il volume della soluzione radioattiva che viene aggiunta alla soluzione glucosata (in rapporto al periodo dell'isotopo), sia diluendo il liquido marcato fino ad ottenere sempre, all'inizio dell'esperienza, lo stesso numero di impulsi; in altre parole: tutti i liquidi nutritizi da noi usati vengono inizialmente portati alla stessa radioattività, a parità di volume e di concentrazione.

Perfettamente note devono almeno essere:

- la quantità del fosforo totale usato e la sua concentrazione;
- la concentrazione del fosforo radioattivo nella soluzione nutritizia;
- il volume della soluzione impiegata;
- la quantità in peso del lievito;
- la superficie del filtro;
- la portata della pompa;
- la sezione del circuito;
- la pressione del liquido;
- la velocità della circolazione;
- la temperatura;
- la durata della esperienza.

Abbiamo finora eseguito esperienze:

- con *lievito normale di distilleria*;
- con *lievito in carenza di magnesio*;
- con *lievito in carenza di magnesio, successivamente attivato con Mg SO<sub>4</sub>*;
- con *lievito bollito*;
- con *lievito reso inattivo durante il corso dell'esperienza, mediante aggiunta di acido fosforico in eccesso.*

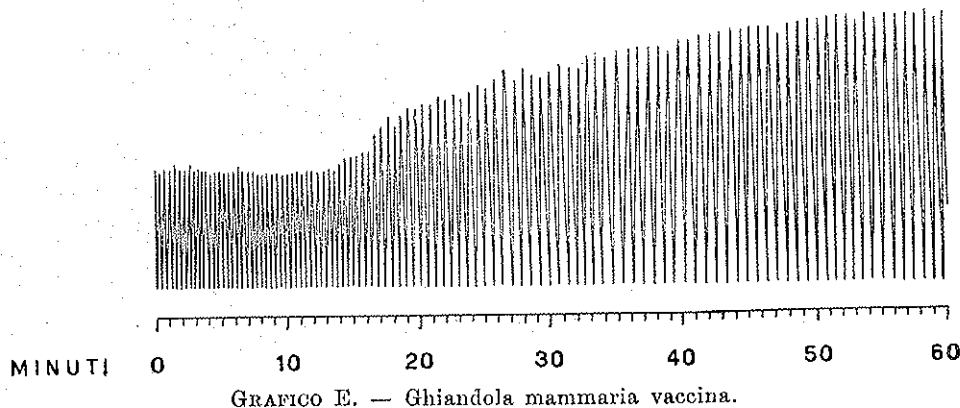
I grafici del lievito, automaticamente ottenuti nelle suesposte condizioni, sembrano dare una prima conferma circa la probabilità di potere attuare uno studio *dinamico* e *cinetico* del fenomeno metabolico cellulare. (Si vedano, al riguardo, i grafici A, B, C).

Per i germi, di dimensioni inferiori alle cellule del lievito, i filtri sono costituiti da candele di Berkefeld o da altro materiale conveniente, sempre collegati alla pompa ad ingranaggi.

Chiudiamo questa breve Nota preliminare, segnalando d'aver compiuto un primo gruppo di analoghe prove, sempre col P<sup>32</sup>, utilizzando diaframmi costituiti da materiale proveniente da fegato, da timo, da ghiandola mammaria normale, da adenocarcinoma mammario spontaneo del topo.

Procurammo che le condizioni sperimentali fossero identiche per le varie esperienze, soprattutto per quanto riguardava la freschezza e la integrità dei tessuti, il loro peso, la temperatura, la durata dell'esperimento, la sterilità del sistema circolatorio.

Filtri del tutto particolari, tipo SCHOTT, sui quali verrà riferito in altra Nota, vennero pure usati per queste prove.



Metabolismo fosforico lento; le cellule di questa ghiandola raggiungono rapidamente la saturazione.  
Tempo dell'esperienza 60'.

A differenza del procedimento impiegato con il lievito o con i batteri, per la preparazione del diaframma biologico, i delicatissimi tessuti di provenienza animale non sono immessi in sospensione nel sistema circolante, per ottenerne l'arresto sopra il supporto inerte, ma su questo vengono direttamente adagiati sotto forma di sottili sezioni.

Le prove con materiale animale sono state, per ora, eseguite soltanto facendo attraversare i relativi diaframmi biologici da soluzioni saline fosforate, isotoniche, marcate dal  $P^{32}$ .

I grafici che riportiamo mostrano il comportamento di alcuni materiali biologici animali, nei confronti del fosforo marcato.

Risultano immagini che parrebbero potersi considerare tipiche per ciascun tessuto. (Confrontare i grafici D, E, F).

In questi grafici, come in quelli ottenuti con il lievito, è chiaro il momento nel quale inizia e termina il metabolismo del fosforo e, si direbbe, il *ritmo* con il quale esso si attua; la progressione di questo ritmo potrà essere particolarmente valutata.

$\mu\text{C } 5$   
↓

$\mu\text{C } 5$   
↓

$\mu\text{C } 5$   
↓

$\text{H}_3\text{PO}_4$   
↑

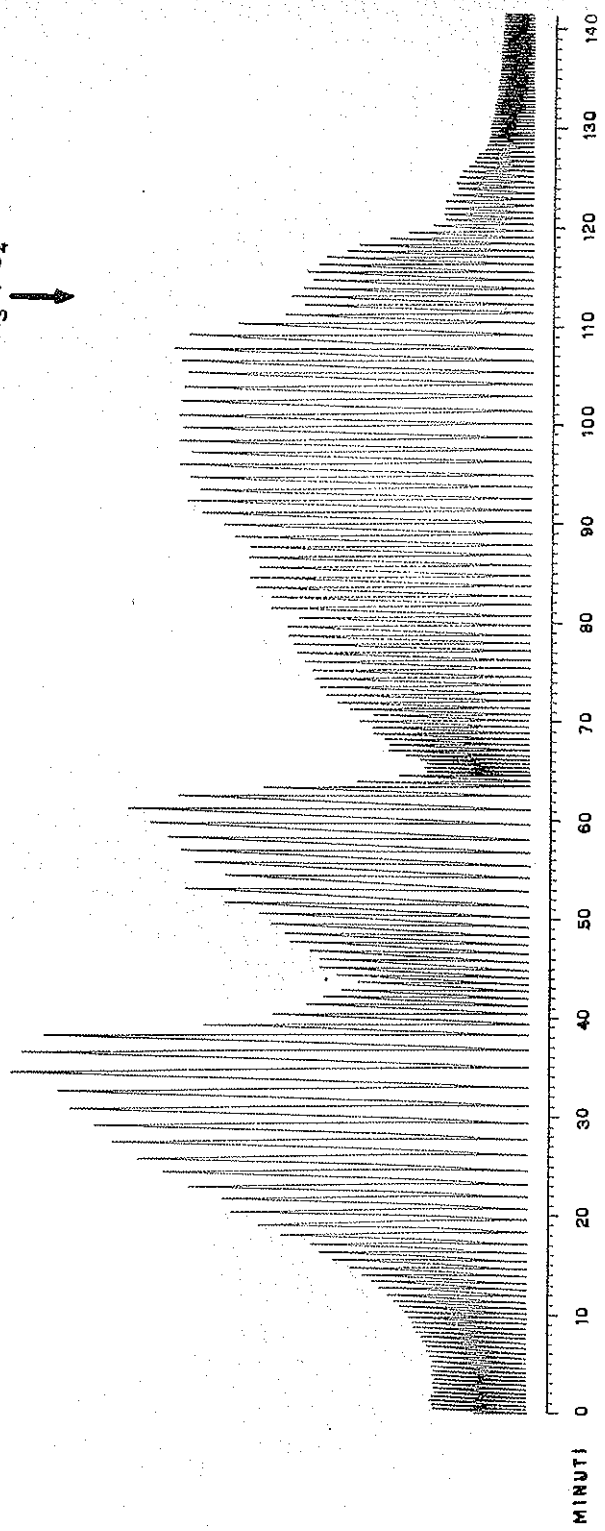


GRAFICO F. — Andenocarcinoma mammario spontaneo del topo (ceppo IV B).

Il fosfato ammonico viene metabolizzato rapidamente in tre dosi successive; si raggiunge la saturazione soltanto dopo un'ora e 30'.

Il fosfato radioattivo può essere fatto ritornare in circolo aggiungendo una cospicua dose di acido fosforico non marcato (cfr. Grafico A).

N. B. - Le esperienze con materiale animale sono state eseguite a parità di peso e di superficie.

Le nostre ricerche sono all'inizio, ma è probabile che questo metodo di indagine sia proficuo e possa rispondere alle premesse che lo hanno fatto concepire: il consumo della sostanza; la esatta quantità di sostanza consumata; gli istanti precisi in coincidenza dei quali il consumo della sostanza ha inizio e ha termine, sono ben rilevabili, con semplicità ed esattezza, mediante grafici che si svolgono sotto gli occhi dello sperimentatore.

La apparecchiatura qui proposta consente perciò la determinazione della quantità di reazione chimica che ha luogo in un processo intracellulare, dal principio alla fine, con valutazioni dirette, attimo per attimo, dove, con l'impiego di indicatori radioattivi, gli errori non sono superiori a quelli della fluttuazione di radioattività (3 %).

Concludendo: dato e concesso che il metabolismo di sostanze marcate sia eguale al metabolismo di sostanze non marcate, con il presente esposto si notifica un dispositivo sperimentale, di alta precisione<sup>(1)</sup>, per lo studio dinamico e cinetico del metabolismo cellulare e si mostrano alcune curve delineate, in breve spazio di tempo, da uno stilo scrivente, senza alcuna sosta, sotto l'impulso di una piccolissima quantità di energia nucleare, presente durante lo svolgimento di un processo chimico cellulare.

I calcoli matematici metteranno in luce, per le diverse funzioni, i valori delle costanti e delle variabili e le loro eventuali espressioni integrali.

Tra le ricerche sussidiarie, specie per quanto riguarda la sorte, nel processo metabolico, delle sostanze in esame marcate, sarà dato particolare rilievo alla cromatografia su carta.

Con il descritto dispositivo, un modello interamente elettronico del quale è in costruzione, opportunamente adattato, per l'impiego di microcircuiti, sarà anche possibile lo studio del metabolismo di

---

(1) La precisione del metodo è dovuta anche al fatto che i liquidi nutritizi attraversano uniformemente l'intero spessore del diaframma biologico (anche nel caso che esso sia costituito da fette relativamente spesse di tessuto) a pressione predeterminata e costante, e ciò evita lo stabilirsi di differenze funzionali tra gli strati cellulari superficiali e quelli rivolti verso il filtro di supporto, al quale aderiscono; di qui la possibilità di riferire alla unità di peso il consumo delle sostanze da parte di un tessuto.



culture « in vitro » di tessuti; di materiale acquatico (uova, teleostei, alghe) eccetera; oltre lo studio degli istanti nei quali intervengono le azioni degli antibiotici nelle colture batteriche.

È possibile lo sperimentare in aerobiosi e in anaerobiosi.

Il dispositivo « BL 98 » è stato presentato in versione cinematografica inglese il 18 luglio 1951, ad Oxford, in occasione delle « Isotope Techniques Conference », organizzata dall'Atomic Energy Research Establishment di Harwell, e, in versione cinematografica tedesca, il 2 ottobre 1951, alla Technische Hochschule di Monaco di Baviera, in occasione del 75° anniversario giubilare della Wissenschaftliche Station für Brauerei.

# TAVOLE

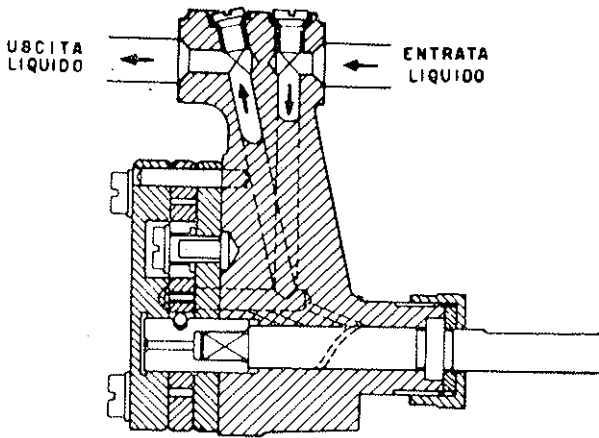


FIG. 1.

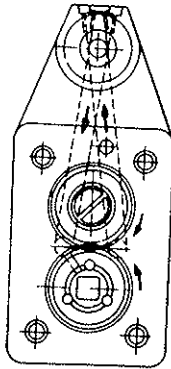


FIG. 2.

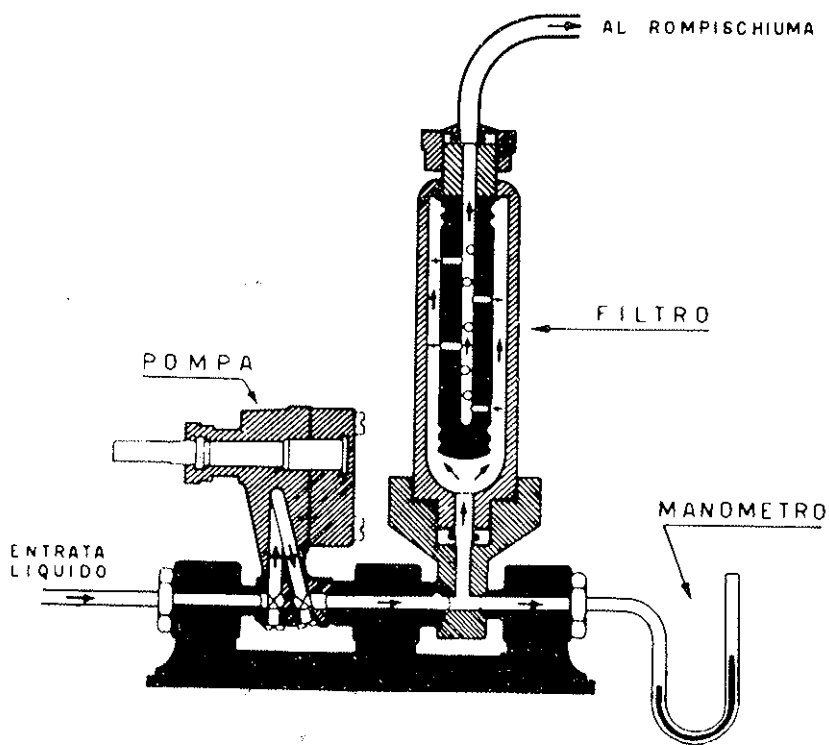


FIG. 3.

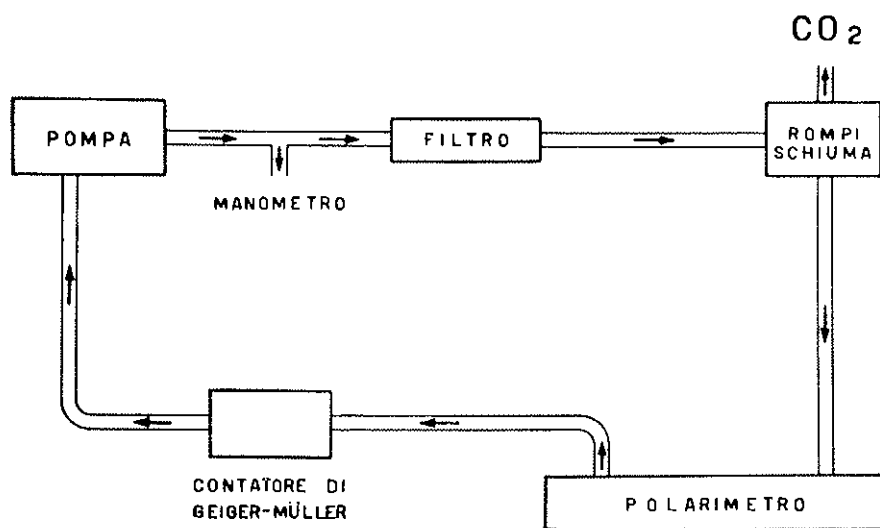


FIG. 4.

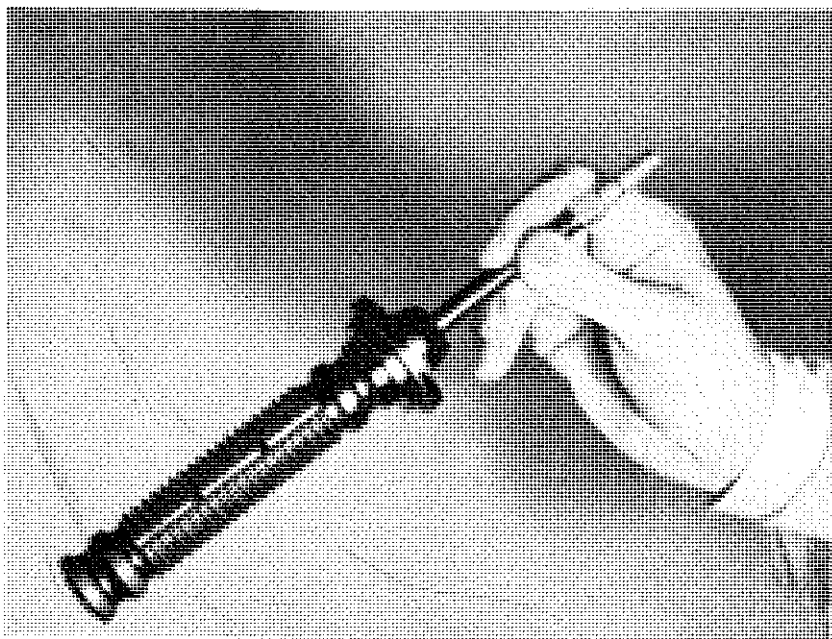


FIG. 5.

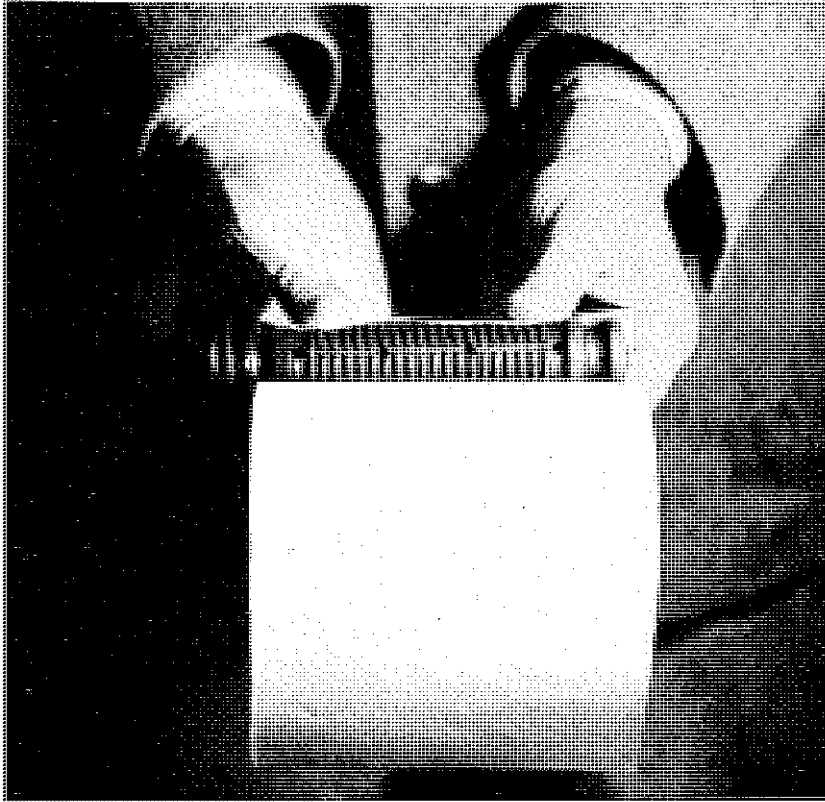


FIG. 6.

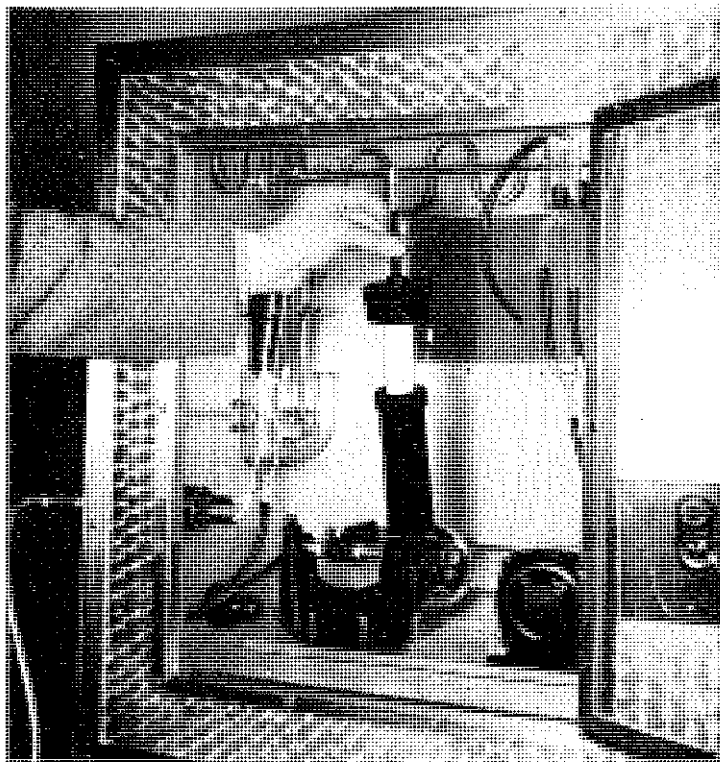


FIG. 7.



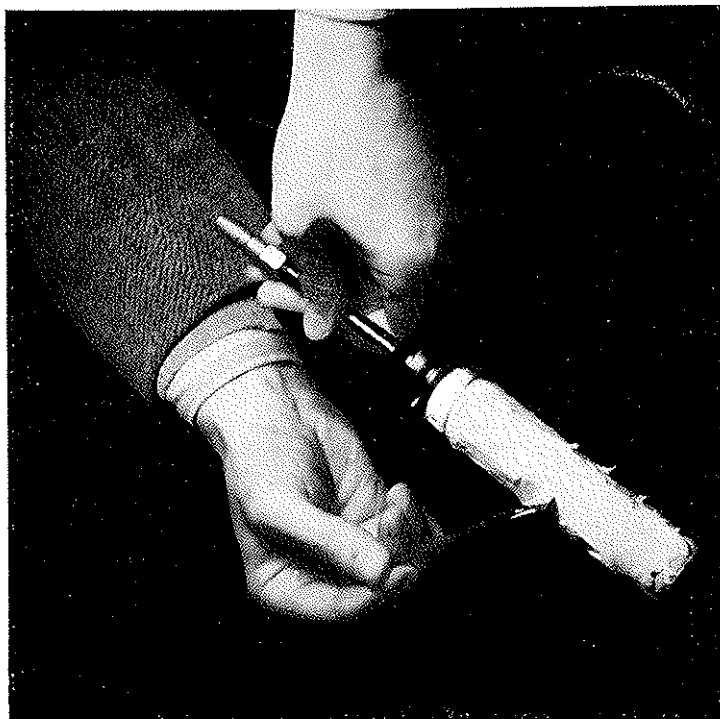


FIG. 8.

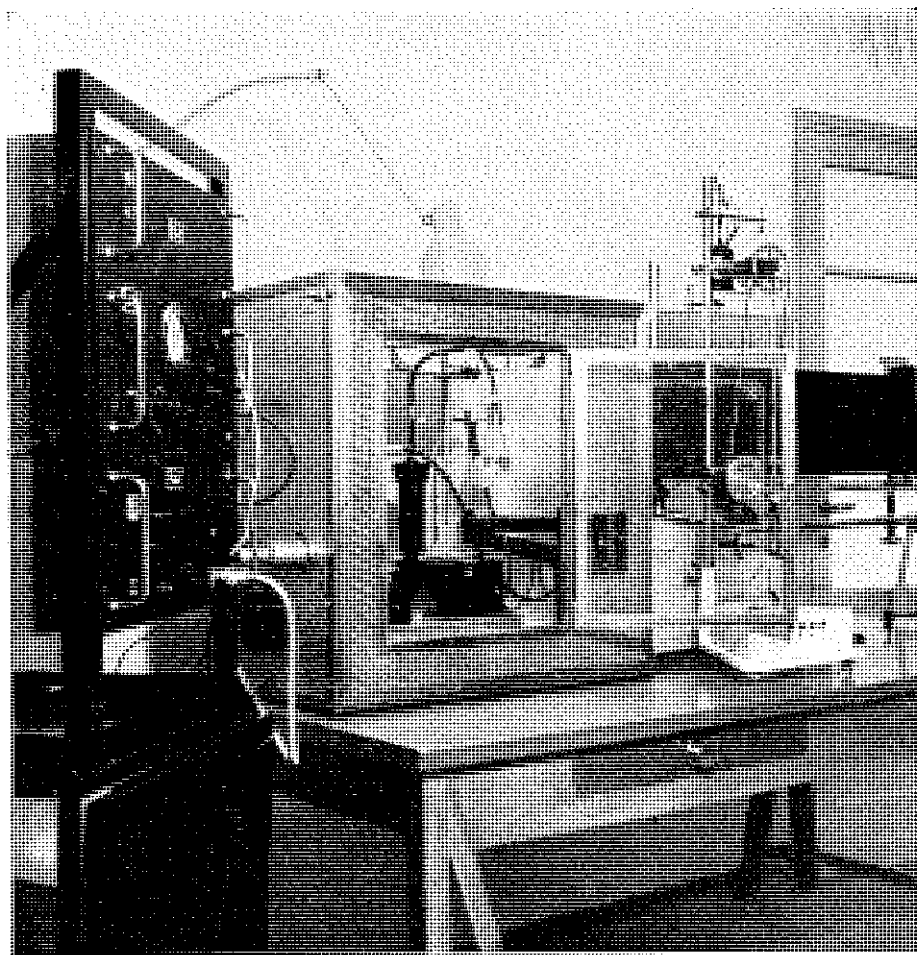


FIG. 9.

Come si presenta nel suo complesso il BL 98 (Mod. A).

A sinistra la scala elettronica collegata per mezzo del proamplificatore al Geiger Müller ben visibile nella fig. 7. Al centro il termostato contenente la pompa e il filtro a candela in collegamento col rompischiuma, il raccoglitore di  $\text{CO}_2$  e il polarimetro. A destra l'integratore di Morel a penna scrivente su carta affumicata.

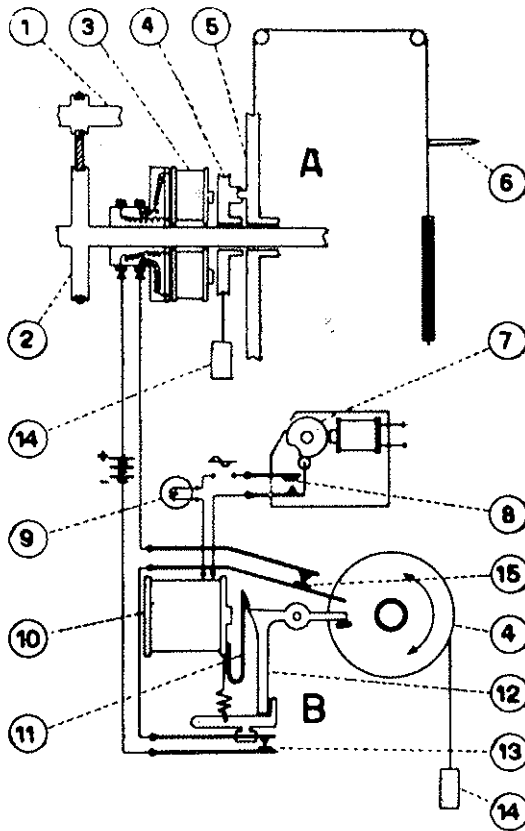


FIG. 9 bis.

Schema del registratore meccanico.

In A : sezione longitudinale lungo l'asse dell'apparecchio.  
 In B : sezione trasversale a livello della rotella.  
 (1) asse del cilindro registratore; (2) puleggia motrice dell'integratore; (3) elemento della frizione elettromagnetica; (4) rotella di debole inerzia; (5) rotella grande scanalata; (6) penna scrivente; (7) camma del numeratore collegata alla scala calcolatrice; (8) contatto elettrico comandato dalla camma (7); (9) resistenza termica; (10) elettrocalamita che comanda la rimessa a zero; (11) molla; (12) gancio; (13) interruttore del circuito della frizione elettromagnetica; (14) contrappeso alla rotella (4); (15) interruttore di sicurezza.