

PAS
Acta 9

Pres,

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA

ANNVS IX
VOLUMEN IX



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCXXXV

INDEX

	FOL.
1. L. NORZI, <i>Sull'effetto della solidarietà dell'impalcato nei ponti ad arco</i> (cum 11 fig.)	1-16
2. R. ASCIONE, <i>Azione di ioni imbibenti e coloranti vitali sullo sviluppo embrionale</i>	17-20
3. S. MALATESTA, <i>Interpretazione relativistica delle azioni elettrodinamiche</i> (cum 2 fig.)	21-26
4. A. SANTONI, <i>Ulteriori ricerche sul metabolismo della retina</i>	27-36
5. G. ARMELLINI, <i>Misure micrometriche di stelle doppie</i> .	37-64
6. G. B. BONINO, <i>Ricerche sulla riducibilità polarografica del pirrolo e dei pirroli sostituiti</i>	65-68
7. A. GEMELLI, <i>Nota preventiva sul meccanismo d'azione delle corde vocali nella fonazione</i>	69-74
8. F. SILVESTRI, <i>Descrizione di intercaste di Syntermes grandis (Rambur) causate da un protozoo microsporidio</i>	77-90
9. G. ZAPPA, <i>Sull'esistenza, sopra le superficie algebriche, di sistemi continui completi infiniti, la cui curva generica è a serie caratteristica incompleta</i>	91-94
10. G. GIORGI, <i>Struttura intrinseca del campo elettromagnetico</i>	95-102
11. A. ZIRWES, <i>Konstruktion und klassifikation des achtzells 3⁴</i> (cum 4 fig.)	103-126
12. G. SANSONE, <i>Sulle superficie ngualmente illuminate da una sorgente luminosa</i>	127-134
13. P. LEONARDI, <i>I primi resti di pesci rinvenuti nel trias della regione dolomitica</i> (cum 1 tab.)	135-138
14. C. CATTANEO, <i>Azioni elastico-dissipative a ciclo d'isteresi ellittico</i>	139-156
15. C. GUARESCHI, <i>Sulle cause della variabilità dell'Epilachna Chrysomelina di Roma e del Circeo</i>	157-162
16. G. FANO, <i>Nuove ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche</i> (Nota riassuntiva)	163-168
17. M. SILVIO MINETTI, <i>Sur l'allure des fonctions analytiques au voisinage d'une singularité essentielle</i> . . .	169-186
18. F. IPPOLITO, <i>Sulla sistematica della attività vesuviana</i>	187-196

19. T. PERRI, *Azione dei raggi Röntgen su embrioni e larve di Anfibi*, Nota II (cum 1 fig.) 197-204
20. G. B. MARINI-BETTOLO e E. DEL PIANTO, *Contributo alla conoscenza del meccanismo d'azione dell'antibiosi tra microorganismi* (Nota riassuntiva) 205-212
21. L. AMERIO, *Sull'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico* . . . 218-228
22. G. PLATONE, *Sul passaggio da certe equazioni algebrico-funzionali a quelle integro-funzionali ed estensione di alcune proprietà fondamentali del nucleo risolvante generalizzato* 229-234
23. E. MARTINELLI, *Formule integrali e topologia nella teoria delle funzioni di più variabili complesse* 235-250
24. G. ANDREASSI, *Sulla forma e sulle connessioni reciproche delle fibrocellule muscolari lisce* (cum 2 fig.) 251-258
25. M. TIRELLI, *Nuovi orientamenti della sistematica (La valutazione delle colorazioni mediante scale cromatiche)* (cum 2 fig. et 2 tab.) 259-274

SULL' EFFETTO DELLA SOLIDARIETÀ DELL'IMPALCATO NEI PONTI AD ARCO (*)

(Con undici figure)

LIVIO NORZI

SUMMARIVM. — Auctor perpendit quomodo arcus statice se praebat si cum contabulatione arte connexus sit, et comparat graviores condiciones in variis calculi casibus.

Nei ponti in cemento armato del tipo indicato in figura 1, il comportamento statico rispetto ai carichi accidentali dissimmetrici è notevolmente modificato dalla solidarietà dell'arco con l'impalcato. Alcuni hanno ritenuto opportuno eliminare questa solidarietà interrompendo l'impalcato con giunti di dilatazione. Scopo della presente nota è giungere a calcolare con soddisfacente approssimazione le sollecitazioni massime di un arco solidale con l'impalcato analizzando invece come l'effetto di solidarietà sia nettamente vantaggioso.

Ho schematizzato questo effetto come quello dovuto ad una robusta asta incernierata al vertice dell'arco ed alle spalle costituite da piloni flessibili o, come caso limite, rigidi (fig. 2).

Sotto l'effetto di un carico accidentale dissimmetrico la chiave dell'arco tende a spostarsi con una considerevole componente orizzontale. Allora lo sfiancamento dell'arco è energicamente contrastato, riguardo allo spostamento orizzontale, dall'impalcato che agisce nella sua metà, per esempio sinistra, come tirante e nella destra come puntone applicando all'arco due forze orizzontali in direzione opposta a quella del movimento del vertice.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti nella Tornata del 21 febbraio 1943.

Con lo schema posto si trascura solo la limitata rigidezza flessionale dell'impalcato nel piano dell'arco e l'azione dovuta ai pilastri di ripartizione. Questa per i più lunghi è assai piccola data la loro forte flessibilità, e per i più corti è notevolmente attenuata dall'essere gli

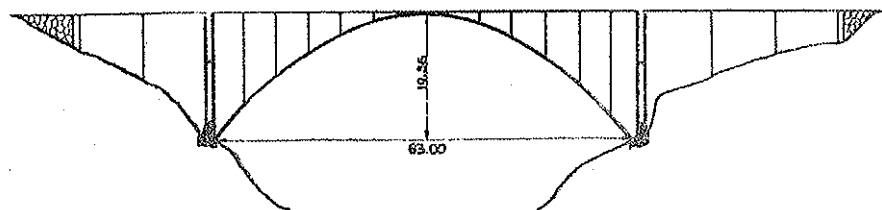


FIG. 1.

spostamenti orizzontali dei loro punti d'incastro sull'arco quasi uguali a quello della chiave. Poichè, come risulterà dal calcolo, le sollecitazioni unitarie nell'impalcato dovute all'effetto studiato sono minime, non c'è da tener conto della differente resistenza del calcestruzzo a



FIG. 2.

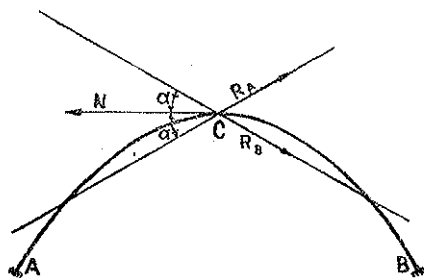


FIG. 3.

compressione e a trazione e le due parti della reazione d'impalcato possono ritenersi uguali.

Si tratta quindi di studiare l'effetto sull'arco di una forza N applicatagli orizzontalmente in chiave e di valutare la grandezza di questa forza in funzione dei carichi applicati e delle caratteristiche elastiche del sistema complessivo.

Grazie alla simmetria, il problema della determinazione delle reazioni d'imposta R_A, R_B è solo semplicemente iperstatico. Infatti (fig. 3) R_A, R_B ed N devono concorrere in C e le componenti orizzontali di

R_A e di R_B sono evidentemente eguali ad $\frac{1}{2}N$. Occorre determinare le componenti verticali $\pm Y$ fra loro eguali e contrarie. Queste componenti sono essenziali nell'analisi di questo problema e sono state invece sempre trascurate fin ora ⁽¹⁾. Trascurare queste componenti porta ad ammettere per l'arco delle deformazioni incongruenti e quindi inaccettabili. Infatti se ciascun semiarco fosse soggetto solo ad una forza orizzontale applicatagli al vertice, la chiave pensata come appartenente al semiarco per esempio sinistro dovrebbe alzarsi e pensata come appartenente al semiarco destro dovrebbe abbassarsi.

Per determinare le reazioni ho osservato che, per il primo teorema di reciprocità, siccome una forza verticale in C produce solo un abbassamento in C, una forza orizzontale in questo punto deve produrne solo uno spostamento orizzontale.

Si ritrova lo stesso risultato notando che per il teorema di MENABREA deve annullarsi la derivata della funzione lavoro di deformazione L rispetto all'unica incognita iperstatica che è la componente verticale Y, e che per il teorema di CASTIGLIANO, $\frac{\partial L}{\partial Y}$ è lo spostamento verticale di C.

Considerando questo spostamento come dovuto (figura 4) alla forza $-R_A$ agente sul semiarco sinistro, la Y è così determinata dalla condizione:

$$[a] \quad \frac{1}{2} N J'_{xy} - Y J'_{yy} = 0 \quad \text{ossia:} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{J'_{xy}}{J'_{yy}}$$

dove J'_{xy} , J'_{yy} sono momenti del second'ordine del peso elastico del semiarco rispetto agli assi x, y .

La [a] esprime che Y produce un abbassamento della chiave dell'arco tale da elidere l'innalzamento che $\frac{1}{2}N$ produrrebbe da sola.

Conoscendo, per il dato arco incastrato considerato a sè, le linee di influenza dei parametri M, A, H della reazione d'imposta ridotta al baricentro elastico G la [a] può essere posta sotto una forma che evita il calcolo diretto di J'_{xy} .

⁽¹⁾ Cfr.: C. GUIDI, *Sui ponti ad arco in cemento armato*, « Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino », 1917.

Infatti, riducendo la forza $-R_A$ al baricentro elastico G, si ha:

$$\begin{cases} M = -\frac{\overline{CG}}{2} N = -\frac{1}{2} k N \\ A = Y \\ H = -\frac{1}{2} N \end{cases}$$

e se M_0, A_0, H_0 sono i parametri della reazione d'imposta dovuta ad un carico verticale in chiave, W il peso elastico dell'arco immaginato svincolato da uno degli incastrì, J_{xx}, J_{yy} i momenti d'inerzia del peso elastico rispetto agli assi dell'ellisse di elasticità..... l'annul-

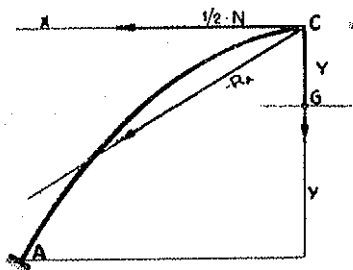


FIG. 4.

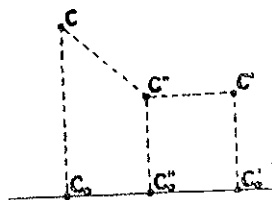


FIG. 5.

larsi dello spostamento verticale della chiave, calcolato come somma degli spostamenti prodotti rispettivamente da M, A, H, è espresso dall'equazione:

$$[a'] \quad -\frac{1}{2} k N \cdot M_0 W + Y \cdot A_0 J_{yy} - \frac{1}{2} N \cdot H_0 J_{xx} = 0$$

da cui si può ancora ricavare $\tan \alpha$ ed una notevole espressione per J_{yy} .

Per determinare la grandezza della forza N, ho ragionato così (cfr. fig. 5):

Siano C, C', C'' rispettivamente le posizioni della chiave, ad arco scarico, ad arco caricato dissimetricamente (per es. a sinistra) e non contrastato dall'impalcato, ad arco carico a sinistra e contrastato.

Considerando le proiezioni sull'orizzontale di questi tre punti in C_0, C'_0, C''_0 si può porre:

$$[b] \quad \begin{cases} C_0 C''_0 = \lambda N \\ C''_0 C'_0 = \mu N \end{cases}$$

dove λ è il coefficiente di elasticità del sistema costituito dall'impalcato e dai suoi piedritti terminali elastici per uno spostamento orizzontale di C dovuto ad una forza orizzontale in C e μ è l'analogo coefficiente per l'arco. Sommando le [b] segue la

$$[b'] \quad N = \frac{\delta}{\lambda + \mu}$$

in cui δ rappresenta lo spostamento orizzontale che l'arco subirebbe se non fosse contrastato dall'impalcato.

Per calcolare δ nel modo più generale per ogni condizione di carico dissimmetrico occorre costruire la linea d'influenza dello spostamento orizzontale del vertice per un carico mobile verticale unitario.

Per il primo teorema di reciprocità questa linea non è altro che il diagramma degli spostamenti verticali dovuti ad una forza orizzontale unitaria applicata in chiave. Applicare questa forza all'intero arco incastrato equivale ad esercitare le forze $-R_A$, $-R_B$ sui due semiarchi considerati a sè (a guisa di mensole). In valore assoluto gli abbassamenti di un semiarco sono uguali agli innalzamenti dell'altro per punti simmetrici.

Grazie alla [a] ovvero alla [a'], è nota la forza $-R_A$ le cui componenti, per $N=1$, sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2} \tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{J'_{xy}}{J'_{yy}}$.

Riducendola al baricentro elastico G, si può calcolare l'abbassamento δ di ogni punto di un semiarco con procedimento perfettamente analogo a quello che ha condotto alla [a'].

Indicando quindi ora con M' , A' , H' i parametri della reazione di imposta destra, sempre per il solo arco incastrato considerato a sè e per una generica posizione di un carico mobile verticale unitario sul semiarco sinistro, risulta:

$$[c] \quad \delta = -\frac{k}{2} \cdot M' W + \frac{1}{2} \frac{J'_{xy}}{J'_{yy}} \cdot A' J_{yy} - \frac{1}{2} \cdot H' J_{xx}$$

per ogni punto del semiarco sinistro e δ uguale e contrario per ogni punto simmetrico.

Sostituendo queste espressioni nelle $[a]$, $[a']$, $[c]$, $[d]$, si ottiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} \frac{f}{a} \quad |\delta| = \frac{Wf}{96a^3} (a-x)^2 x (2x+a) \quad \mu = W \left(\frac{f^2}{320} + \frac{p^2}{4} \right)$$

Un facile calcolo indica che $|\delta|$ è massimo per $x = 7 \frac{a}{16}$.

In figura 7 è tracciato il diagramma di $\frac{\delta}{\mu}$ corrispondente alla reazione di impalcato N nel caso limite in cui lo spostamento orizzontale della chiave sia completamente annullato ($\lambda = 0$).

In questo e nei successivi diagrammi sono indicati i valori numerici riferentesi all'esempio di un arco di 20 metri di luce, 4,00 di freccia e $J_0 = \frac{1}{12} 50 \cdot 46^3 \text{ cm}^4$.

Venendo a considerare in che modo sia vantaggioso l'effetto della reazione d'impalcato si può dire qualitativamente che esso consiste nel sovrapporre una distribuzione di momenti flettenti che, nei casi più sfavorevoli, è di andamento analogo e di segno generalmente opposto a quella che si calcolerebbe considerando l'arco a sè.

Il diagramma risultante dei momenti flettenti è perciò notevolmente smorzato⁽¹⁾. Infatti (cfr. fig. 6) le rette d'azione delle R_A , R_n tagliano l'asse geometrico dell'arco per $x = \frac{3a}{4}$ ed i momenti di alleggerimento dovuti alla N risultano massimi per le sezioni d'imposta e per le sezioni distanti $\frac{3a}{8}$ dalla chiave cioè per le sezioni che sono sensibilmente le più sollecitate, mentre si annullano solo per le sezioni $x = \frac{3a}{4}$ normalmente poco sollecitate.

La figura 8 illustra questo confronto fra diagrammi di momenti flettenti nel caso tipico di un arco parabolico caricato uniformemente sulla sua metà sinistra.

(1) Se non si fossero considerate le componenti verticali delle reazioni di imposta il diagramma dei momenti flettenti dovuti all'effetto d'impalcato sarebbe stato assai diverso e proprio in alcune delle sezioni più sollecitate si sarebbe sommato anzichè sottrarsi a quello per l'arco considerato a sè.

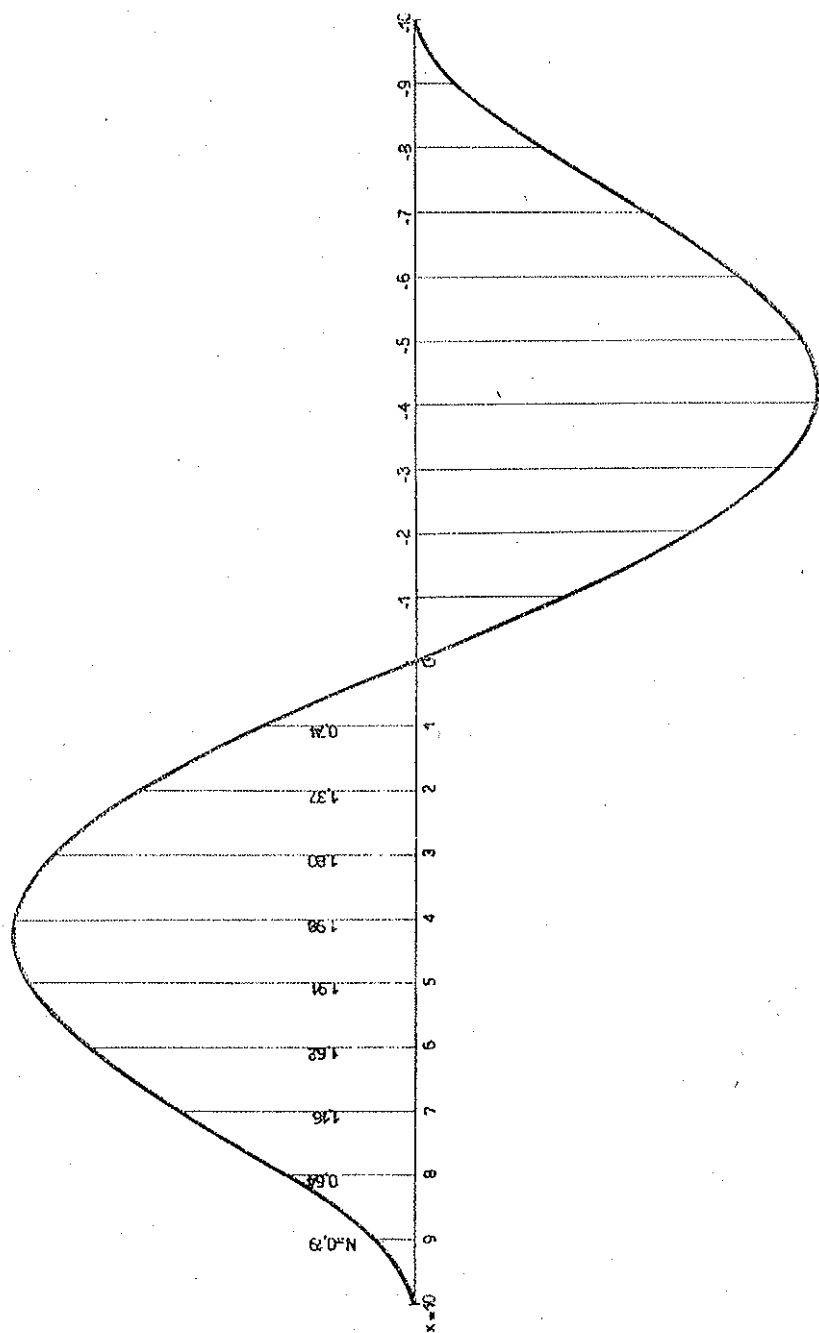


Fig. 7.

Linea d'influenza della reazione d'impalcato N nel caso di rigidità totale ($\lambda=0$).

Nel caso limite di totale rigidità del sistema d'impalcato ($\lambda=0$) si raggiunge quasi l'annullamento dei momenti flettenti. Questo per due motivi:

Nel semiarco carico la curva delle pressioni è sollevata verso l'imposta dalla composizione con la reazione dovuta alla N e nello stesso tempo è tesa verso l'asse dell'arco per effetto dell'aumento della spinta. Nel semiarco scarico R_H elide quasi la reazione dovuta al carico disimmetrico ⁽¹⁾. Tuttavia questo confronto ha solo un valore indicativo di esempio perchè le condizioni di carico più sfavorevoli, tenendo conto della solidarietà con l'impalcato, mutano e precisamente tendono a diventare più simmetriche.

Per giungere ad un confronto esauriente tra i due modi di considerare il ponte ho tracciato le linee d'influenza del momento flettente per sezioni equidistanti di due in due metri (fig. 9).

Per questo occorre sottrarre alle linee d'influenza per l'arco a sé i momenti M_N dovuti alla forza N , ossia una curva affine alla linea d'influenza dello spostamento orizzontale del vertice. Se $x', f\left(\frac{x'}{a}\right)^2$ sono le coordinate del baricentro della sezione considerata:

$$M_N = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\lambda + \mu} \left(\frac{3}{4} f \frac{x'}{a} - f \frac{x'^2}{a^2} \right).$$

Si vede che per $\lambda=0$ il comportamento statico dell'arco è profondamente modificato, ma anche per rigidzze facilmente realizzabili in pratica il vantaggio della solidarietà con l'impalcato appare assai notevole.

Nè mancano d'altra parte casi pratici in cui è soddisfatta la condizione di rigidzza quasi perfetta essendo l'impalcato ancorato a spalle molto robuste.

⁽¹⁾ Integrando da $x=0$ ad $x=a$ le formule date per M, A, H, N si ha:

$$M = p \frac{a^2}{12} \quad A = \frac{3}{16} p a \quad H = \frac{p f a^2}{4 f^2 + 45 p} \quad N = \frac{p}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} \frac{f a^2}{2 f^2 + 160 p^2}$$

da cui si vede che, per $\lambda=0$, se si potesse trascurare p , il semiarco destro risulterebbe libero da ogni sollecitazione e nel semiarco sinistro la curva delle pressioni sarebbe perfettamente centrata con la spinta raddoppiata.

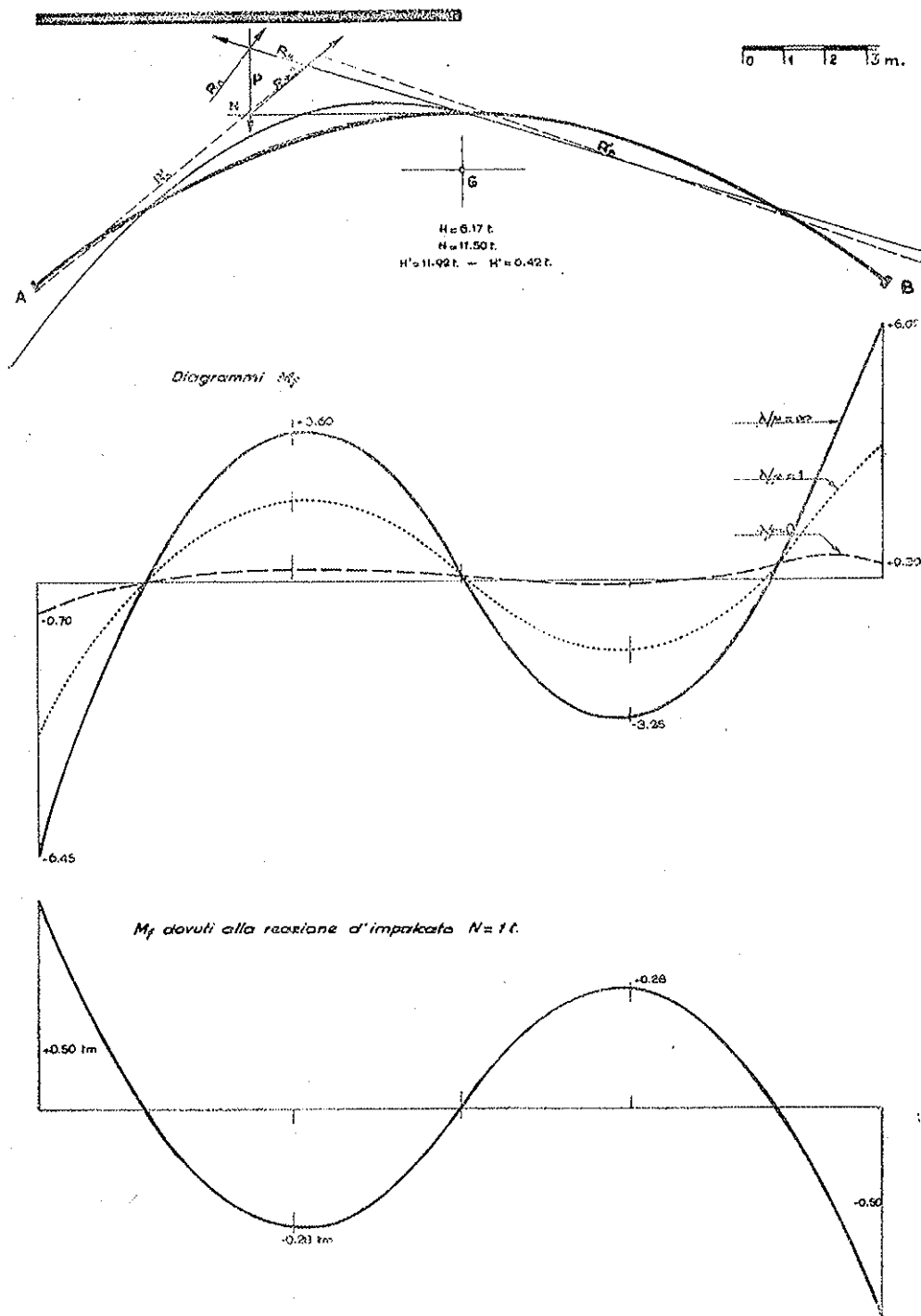


FIG. 8.

Confronto di curva delle pressioni nel caso di carico uniforme sul mezzo ponte.
 Linea continua: arco libero - Linea a tratti: impalcato rigido.

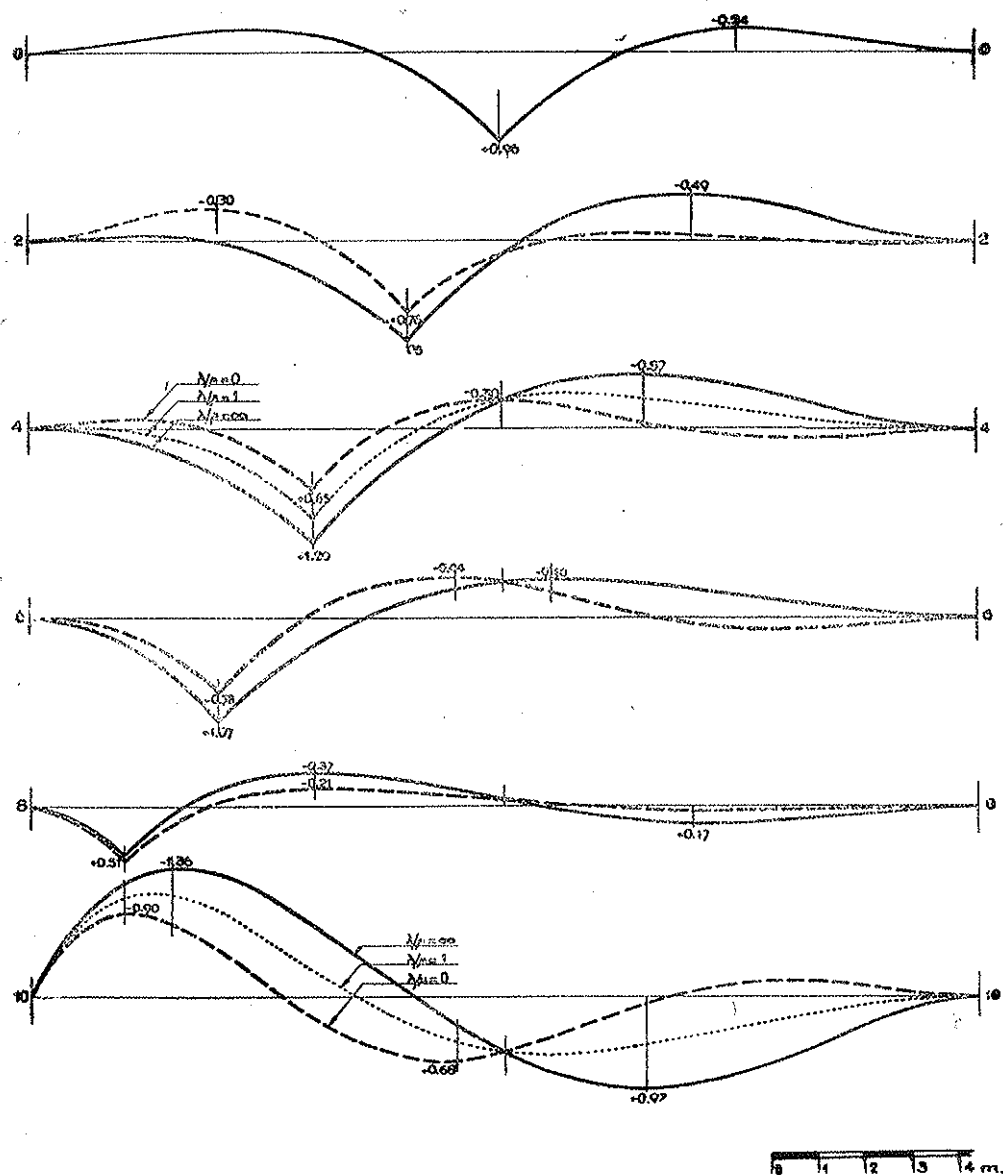


FIG. 9.

Linee d'influenza dei momenti flettenti.

Linea continua: arco libero - Linea a tratti: impalcato rigido - Linea punteggiata: $\lambda/\mu = 1$.

Se ora si immagina di caricare con p kg/ml uniformemente, le zone positive o negative date dalle linee d'influenza per ogni sezione, si arriva a costruire i diagrammi dei momenti flettenti massimi.

Questi diagrammi, tracciati in figura 10, hanno ordinate proporzionali alle aree positive e negative racchiuse dalle curve d'influenza e riassumono il confronto fra i casi di carico accidentale più sfavorevoli nelle diverse ipotesi di calcolo⁽¹⁾.

Si conclude che, in seguito all'effetto di solidarietà, si ha una netta riduzione nei momenti flettenti massimi. Questa riduzione si annulla per la sezione, che è sensibilmente la meno sollecitata, $x = \frac{3a}{4}$ ⁽²⁾. Inoltre è la stessa in valore assoluto sia per i momenti positivi che per quelli negativi.

Per le sezioni più sollecitate e per $\lambda = 0$, la riduzione raggiunge il 45 per cento circa e tale può ritenersi la riduzione percentuale nelle sollecitazioni unitarie massime σ dovute al carico accidentale dissimmetrico. A questo riguardo è anche da notare che il punto intermedio di massimo momento si sposta dalla sezione $x \cong 4$ verso la sezione più robusta $x \cong 6$ mentre la sezione di chiave normalmente è meno sollecitata avvantaggiandosi della collaborazione coll'impalcato.

(¹) Le due curve sono sostanzialmente analoghe e sarebbero anzi uguali qualora si trascurasse il raggio d'inerzia ρ della sezione trasversale dell'arco. Infatti in tal caso la curva delle pressioni per un carico uniforme su tutto il ponte apparirebbe coincidere con l'asse geometrico dell'arco.

(²) Per precisare l'andamento delle curve dei momenti massimi occorre conoscere i valori in questo punto. Accenno brevemente al calcolo:

Dalle formule già ricordate si ricava che un carico unitario verticale nel punto $x = \xi$ sull'arco svincolato dall'impalcato produce intorno al baricentro della sezione $x = 0a$ situata alla sua sinistra, un momento flettente

$$M(0, \xi) = M + Hf\left(\theta^2 - \frac{1}{3}\right) - Aa = \frac{a}{4}(1 - \xi)^2 \left[1 + \frac{1}{18}\left(\frac{f}{\rho^2}\right)^2(3\theta^2 - 1)(1 + \xi)^2 - (2 + \xi)\theta\right]$$

Il massimo momento negativo della sezione $\frac{x}{a} = 0 = \frac{3}{4}$ è

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} M\left(\frac{3}{4}, \xi\right) d\xi$$

tra i limiti che sono radici dell'equazione di secondo grado in ξ fra parentesi quadre.

$$(\xi_1 = -0,552, \quad \xi_2 = 0,314)$$

In modo analogo sono stati calcolati tutti gli altri valori numerici indicati nei diagrammi di figura 10.

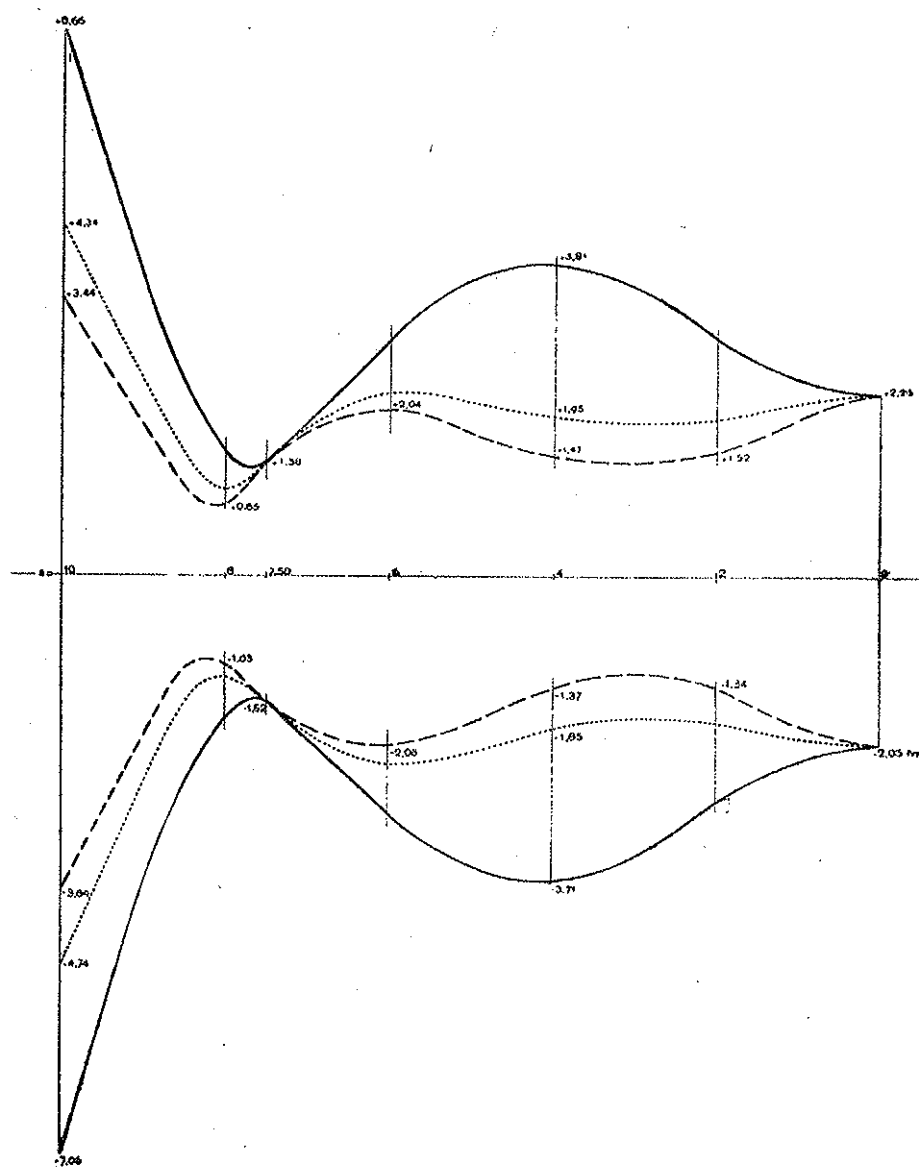


FIG. 10.

Diagrammi dei momenti massimi

Linea continua: arco libero - Linea a tratti: impalcato rigido.

(I valori numerici indicati sono in tm se $p = 1t/ml$) - Linea punteggiata $\lambda/\mu = 1$).

Per $\frac{\lambda}{\mu} = 1$ si ha circa il 33 per cento di riduzione.

Viceversa senza aumentare le sollecitazioni massime, si potrebbe moltiplicare il sovraccarico per 1,8 se $\lambda = 0$ e per 1,5 se $\frac{\lambda}{\mu} = 1$.

Si migliora un poco l'approssimazione del calcolo delle sollecitazioni massime tenendo conto delle variazioni della spinta H .

Se si considera l'impalcato solidale si ottiene la nuova linea d'influenza della H aggiungendo $\frac{1}{2} \frac{\delta}{\lambda + \mu}$ alla linea per l'arco a sè.

Tale linea, valida per un semiarco, è tracciata in figura 11. Si vede che in ogni caso, dalla parte del semiarco più carico aumentano lievemente le sollecitazioni per sforzo normale e però, per lo stesso motivo, diminuisce l'eccentricità della curva delle pressioni riducendo il pericolo della parzializzazione della sezione reagente.

Degno di nota è che per $\lambda = 0$ si possono avere piccoli valori negativi della spinta. Analogo fatto si verifica per A, M (Cfr. Diagrammi fig. 11).

Naturalmente tali valori negativi sono in pratica assai piccoli rispetto a quelli positivi dovuti al peso proprio.

Mi sono soffermato in particolare sul caso dell'arco $J \frac{dx}{ds} = J_0 = \text{Cost.}$ perchè le curve di figure 7, 8, 9, 10, 11 calcolate per un arco parabolico valgono con buona approssimazione per qualunque arco parabolico simile o affine purchè si tenga conto che praticamente, H ed N variano come il rapporto a/f , le ordinate delle linee d'influenza dei momenti variano in proporzione alla luce ed i momenti flettenti dovuti a carichi uniformi con pL^2 .

Infatti si ricava dalla teoria dell'arco parabolico che il coefficiente di correzione β da introdursi nelle linee d'influenza per tener conto dello spessore h dell'arco in chiave in rapporto alla freccia è sempre molto vicino all'unità (bisogna arrivare ad h/f uguale a $1/5$ per avere $\beta = 0,98$); pure piccola è l'importanza delle variazioni di h/f nel calcolo di p_s^2 mentre è un po' più accentuata per il coefficiente μ qui introdotto (posto $\mu = m \frac{Wf^2}{320}$ è $m = 1,27$ per $h/f = 1/5$, ma per i più comuni valori di h/f dell'ordine di $1/10, 1/20$ si ha $m = 1,07, 1,02$).

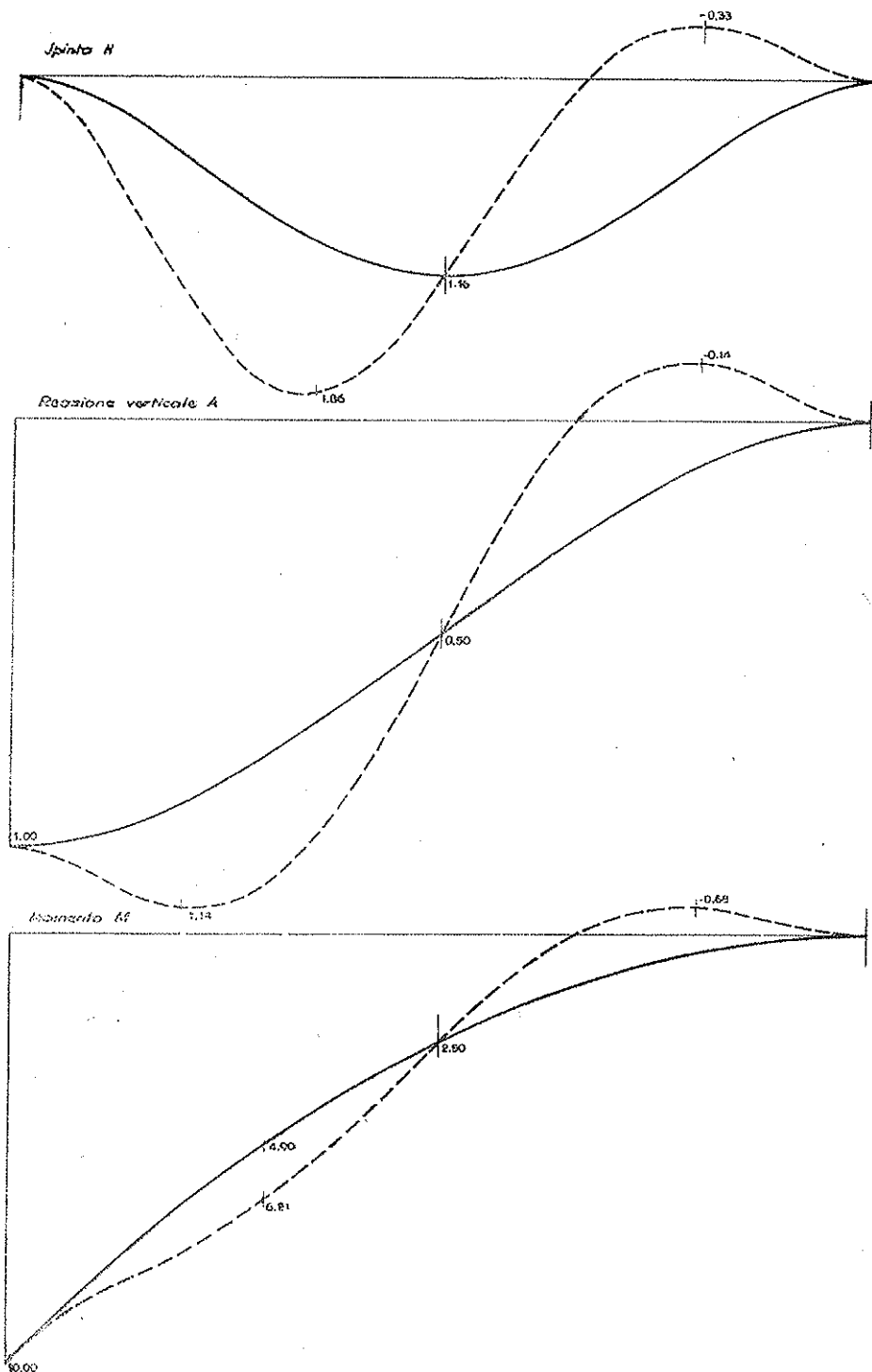


FIG. 11.

Linea d'influenza dei parametri
della reazione d'impasto sinistra ridotta al baricentro elastico.
Linea continua: arco libero - Linee a tratti: impalcato rigido ($\lambda = 0$).

Inoltre è noto che negli archi reali in cui $J \frac{dx}{ds}$ non è costante la sua variazione non influenzerà troppo i risultati essenziali del calcolo.

Qui si può osservare che l'essere effettivamente l'arco incorporato con l'impalcato in chiave equivale ad una reale diminuzione del peso elastico del tratto centrale dell'arco e quindi ad una variazione assai minore di $J \frac{dx}{ds}$. Sembra così legittimo trattare, agli effetti di ricerche di questo genere, gli archi come archi parabolici a peso elastico uniformemente distribuito sull'orizzontale.

A titolo d'esempio dico che per il ponte sull'Erno a Gignese, schizzato in figura 1, i calcoli eseguiti con metodo grafico-analitico hanno dato risultati concordanti con le formule qui trovate entro il 5% nel caso di impalcato perfettamente rigido. Negli altri casi, assumendo J_0 uguale al momento d'inerzia dell'arco in chiave, si esagera la cedevolezza dell'arco rispetto a quella del sistema d'impalcato. Se però si introduce nelle formule il peso elastico effettivo dell'arco, si ristabilisce la concordanza entro meno del 10% e probabilmente non si può pretendere maggior precisione nel valutare l'effetto studiato.

Per il ponte citato, tenendo conto nel caso effettivo della forte forza d'attrito eccitata dal peso delle campate dei viadotti d'accesso gravanti direttamente sui piloni di spalla, nonché dei nuovi valori delle spinte nella verifica delle sezioni, è risultato che a parità di σ_{\max} , l'intensità del sovraccarico accidentale, prevista in 400 kg/mq per l'arco, potrebbe portarsi a 600 kg/mq.

Per $\lambda=0$ si arriva quasi ad 800 kg/mq ed avendo presente la differenza fra arco reale ed arco parabolico, e soprattutto quanto già detto sul coefficiente μ , si comprende come ciò sia d'accordo con i vantaggi percentuali precedentemente calcolati.

Nel ponte di Gignese l'esistenza dell'attrito fa sì che per carichi non troppo forti il regime statico del ponte sia sensibilmente quello del caso $\lambda=0$.



AZIONE DI IONI IMBIBENTI E COLORANTI VITALI SULLO SVILUPPO EMBRIONALE (*)

ROSA ASCIONE

SUMMARY. — SCN^- et I^- , quemadmodum colorantia vitalia et nitrophenolia, efficiunt ut celerius embryo evolatur. Haec duo genera substantiarum simili modo operantur ut iam in aliis casibus notis.

RANZI ⁽¹⁾ ⁽²⁾ richiamò l'attenzione sul fatto che soluzioni di Na SCN o Na I e soluzioni di coloranti vitali (piocianina, blu di metilene, ecc.) o nitrofenoli causano lo stesso effetto in parecchi fenomeni dello sviluppo embrionale.

Le soluzioni di Na SCN , di Na I e quelle dei coloranti vitali e p. nitrofenolo determinano infatti:

ipersviluppo della corda in embrioni di Anfibi (cfr. RANZI ⁽²⁾ e lavori ivi citati);

evocazione in espianti ventrali di gastrule iniziali di Anfibi (RANZI e TAMINI ⁽³⁾ per Na SCN ; BEATTY, DE JONG e ZIELINSKI ⁽⁴⁾ per i coloranti vitali; il Na I non è stato saggiato);

animalizzazione dello sviluppo dei ricci di mare (LINDAHL ⁽⁵⁾ per Na SCN e Na I e TAMINI ⁽⁶⁾ per i coloranti vitali e p. nitrofenolo).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Lepri il 25 maggio 1945.

(1) RANZI S., « Naturwiss », 1942, **30**, 329.

(2) RANZI S., « Boll. Soc. ital. Biol. sper. », 1943, **18**, 218.

(3) RANZI S. e TAMINI E., « R. Istit. Lombardo (Rend. Sc.) », **73**, 525.

(4) BEATTY R. A., S. DE JONG a. M. A. ZIELINSKI, « J. exp. Biol. », 1939, **16**, 150.

(5) LINDAHL P. E., « Acta Zool. », 1936, **17**, 179.

(6) TAMINI E., « Monit. zool. ital. », 1941, **52**, 81.

Un punto doveva però ancora esser preso in esame. DEOTTO⁽¹⁾ con soluzioni di piocianina e tionina aveva posto in evidenza un acceleramento dello sviluppo degli embrioni di riccio di mare. CITTERIO⁽²⁾ aveva osservato che, con soluzioni di piocianina, si può determinare un acceleramento dello sviluppo dei girini di rana, acceleramento che ANDREASSI⁽³⁾ ottenne per azione di alfa-dinitro-fenolo. Una simile accelerazione dello sviluppo non era però nota per azione di NaSCN e NaI, anzi RANZI e TAMINI⁽⁴⁾ non l'avevano ottenuta agendo con varie soluzioni di NaSCN sullo sviluppo di rana e di axolotl.

È per questo che, lavorando presso la Stazione Zoologica di Napoli, mi sono proposta di vedere se con soluzioni di NaSCN, di NaI e, per controllo, di blu di metilene si potesse determinare un acceleramento dello sviluppo dell'embrione di riccio di mare (alcuni degli esperimenti con NaI sono stati eseguiti dalla dott.^{sa} MIRANDA RAGUSA).

Il materiale, che ha servito per le mie ricerche è stato prevalentemente costituito da uova di *Paracentrotus lividus* (Lm.), e sul *Paracentrotus* sono gli esperimenti qui sotto illustrati; per qualche esperimento di controllo, che ebbe poi i medesimi risultati, mi sono servita di *Arbacia Lixula* (L.). All'acqua di mare, nella quale venivano fatte sviluppare le uova, aggiungevo soluzioni isotoniche di NaSCN · 2H₂O (prodotto B. D. H.) (6,44 % = 0,65 M) o di NaI (prodotto Erba) (11,4 % = 0,67 M), ovvero una soluzione di blu di metilene secondo EHRLICH (prodotto Grüber) in acqua di mare. Ogni singolo esperimento venne eseguito con le uova di una sola femmina, fecondate con lo sperma di un solo maschio, ed ogni esperimento aveva il suo controllo, che era fatto con altrettante uova fecondate provenienti dalla medesima coppia di individui.

Fin dai primi esperimenti emerse che l'aumento della velocità di sviluppo, determinato da queste sostanze, non è grande. Era quindi particolarmente importante la scelta dello stadio al quale occorreva eseguire il controllo; dopo ripetute prove, scelsi il processo di formazione della blastula e aumento in dimensione di essa, aumento che,

(¹) DEOTTO R., « Boll. Soc. Ital. Biol. sper. », 1939, 14, 327.

(²) CITTERIO P., « R. Ist. Lombardo (Rend. Sc.) », 1942, 75, 142.

(³) ANDREASSI G., « Boll. Soc. Ital. Biol. sper. », 1941, 16, 668; 1942, 17, 61.

(⁴) RANZI S. e TAMINI E., « R. Ist. Lomb. (Rend. Sc.) », 1942, 75, 695.

come è ben noto, si accompagna ad una diminuzione dell'altezza delle sue cellule. Questo processo segue di poco la schiusa, la rottura cioè della membrana di fecondazione. Stadi successivi non ho creduto dover prendere in esame, perchè cominciano ad entrare in giuoco i fenomeni di animalizzazione determinati dalle tre sostanze prese in esame.

Gli esperimenti per saggiare l'azione di NaSCN dimostrano che, aggiungendo a 100 cc. di acqua di mare 3,4 — 5,0 — 7,5 — 11,3 cc. di soluzione isotonica di NaSCN, con 3,4 e 11,3 cc. non si ottiene un'accelerazione, anzi con 11,3 cc., a volte, si osserva un ritardo. Si osserva invece accelerazione con l'aggiunta di 5,0 ovvero 7,5 cc.

Così in allevamenti condotti a 14°-15° troviamo che, a 19 ore di età dalla fecondazione, gli embrioni che avevano sempre soggiornato in 100 cc. acqua di mare + 7,5 cc. soluzione isotonica di NaSCN erano blastule con pareti più sottili dei controlli e molto più mobili di questi. Il diametro medio di queste blastule al NaSCN era 103,6 μ , quello del blastocele 55,5 μ . Le blastule controllo avevano un diametro di 96,2 μ con blastocele di 44,4 μ ed erano meno mobili. In altro esperimento, condotto con uova di altra femmina, a 17 ore di età dalla fecondazione, in analoghe condizioni sperimentali, le blastule trattate avevano un diametro di 111,0 μ con blastocele di 66,6 μ mentre, nei controlli, il diametro era 103,6 μ con blastocele di 37,0 μ . Anche la schiusa delle larve trattate fu, nei due casi, più precoce dei controlli.

Analogo risultato si ottiene con NaI. Aggiungendo a 100 cc. di acqua di mare 1,0 — 2,5 — 5,0 — 10,0 cc. di soluzione isotonica di NaI, si vede che mentre l'aggiunta di 1,0 e 2,5 cc. dà un risultato dubbio, forse in qualche caso un leggerissimo acceleramento, l'aggiunta di 5,0 cc., e in qualche caso quella di 10,0 cc. determina netto acceleramento. Così in un allevamento di 100 cc. di acqua di mare + 5,0 cc. soluzione isotonica di NaSCN, la blastula ancora negli involucri, a ca. 20 ore di età, misurava 109,0 μ di diametro con blastocele di 49,8 μ , mentre nel controllo il diametro della blastula era 97,8 μ , quello del blastocele 40,1 μ .

Lo stesso si ottiene col blu di metilene. Con questo colorante vitale ho saggiato soluzioni all'1 $\cdot 10^{-4}$ %, 3 $\cdot 10^{-2}$ %, 1 $\cdot 10^{-2}$ %, 3 $\cdot 10^{-3}$ %, 1 $\cdot 10^{-3}$ % in acqua di mare. La prima di queste soluzioni si è palesata ritardante, tutte le altre acceleranti più o meno lo sviluppo. La differenza tra i controlli e le forme trattate corrisponde a quella osser-

vata con NaSCN e NaI . Anche col blu di metilene può osservarsi una schiusa più precoce.

Il risultato delle presenti ricerche, eseguite nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Milano, ospitato presso la Stazione Zoologica di Napoli, è pertanto un'altra identità di risposta degli embrioni all'azione di SCN' e I' da una parte, dei coloranti vitali e nitrofenoli dell'altra. L'azione accelerante sullo sviluppo, già nota per coloranti vitali e nitrofenoli, può osservarsi anche con SCN' e I' .

INTERPRETAZIONE RELATIVISTICA DELLE AZIONI ELETTRODINAMICHE (*)

(Con due figure)

SANTE MALATESTA

SUMMARY. — Relativisticis animadversionibus ostendit Auctor electrodynamicas actiones non esse habendas nisi vires apparentes, quas relativus motus inter onera electrica et relationis systema, in quo observationes producuntur, gignat. Ex quo efficitur ut magnetica actio explicari possit, et singulae vectorum \mathbf{H} et \mathbf{B} proprietates aperte perspici.

1. — Si abbiamo due fascetti di elettroni, paralleli, nel vuoto; gli elettroni si muovano di moto uniforme con velocità v e w , per cui i due fascetti possono rappresentarsi con due file, a e b , di cariche, parallele, indefinite, spostantesi uniformemente con le velocità v e w (fig. 1). Siano i_a e i_b le correnti, per cui le cariche distribuite sull'unità di lunghezza dei fascetti, apprezzate da uno sperimentatore posto in un sistema di riferimento S fermo, sono rispettivamente: $q_a = \frac{i_a}{v}$ o $q_b = \frac{i_b}{w}$.

Vogliamo calcolare l'azione che si esercita fra la fila a e un elemento dl della fila b , la cui carica è $q_b dl$.

Supponiamo che la fila a sia solidale con un sistema S_1 in moto uniforme con velocità v nella stessa direzione e verso di a . Se l'osservatore in S vedeva la carica q_a nell'unità di lunghezza, vuol dire che, nel sistema in moto, la carica q_a è distribuita su una lunghezza:

$$[1] \quad l_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\text{dove } \beta = \frac{v^2}{c^2} \right).$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi, il 20 maggio 1945.

Ne risulta che nel sistema S_1 in moto, il campo elettrostatico, prodotto dalla fila a in un punto P_1 , alla distanza r da essa, è:

$$[2] \quad E_1 = \frac{q_a}{2\pi\epsilon_0 r} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

L'azione di questo campo su una carica $q_b dl$ che passi dal punto P_1 è indipendente dalla velocità della carica stessa ⁽¹⁾; essa può dunque essere calcolata come se la carica $q_b dl$ fosse ferma in P_1 :

$$[3] \quad dF_1 = - \frac{q_a q_b dl}{2\pi\epsilon_0 r} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Un osservatore nel sistema di riferimento fermo S apprezzerà, sulla stessa carica, una forza dF la quale dipende dalla velocità v di S_1 e dalla velocità w di $q_b dl$ secondo la formola di trasformazione ⁽²⁾:

$$[4] \quad dF = \frac{1 - \frac{vw}{c^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} dF_1.$$

Dalla [3] e dalla [4] si ottiene:

$$[5] \quad dF = - \frac{q_a q_b dl}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{vw}{c^2}\right) = - \frac{q_a q_b dl}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{q_a q_b vw dl}{2\pi\epsilon_0 r c^2}.$$

L'osservatore nel sistema fermo S , attribuisce il primo addendo all'azione elettrostatica, che egli calcola non tenendo conto del movimento, e il secondo a un'azione elettrodinamica fra le correnti:

$$[6] \quad dF_{ed} = \frac{q_a q_b vw dl}{2\pi\epsilon_0 r c^2} = \frac{\mu_0 i_a i_b dl}{2\pi r}.$$

Essa è attrattiva o repulsiva a secondo che v e w hanno lo stesso segno o segno contrario e coincide con la forza elettrodinamica calcolata con la formola di LAPLACE. Questo ragionamento mostra che l'azione elettrodinamica può considerarsi una forza apparente dovuta al moto relativo degli elettroni rispetto al sistema di riferimento in cui si compiono le osservazioni.

⁽¹⁾ E. M. LEMERAY. *Le principe de Relativité*. Paris, 1916. Cap. V, pag. 85.

⁽²⁾ *Loc. cit.*, nota 1, pag. 84, form. XV.

2. - Passiamo ora ad esaminare le azioni non più fra fascetti di elettroni ma fra correnti nei conduttori. Possiamo rappresentare schematicamente una corrente in un conduttore con una fila di cariche

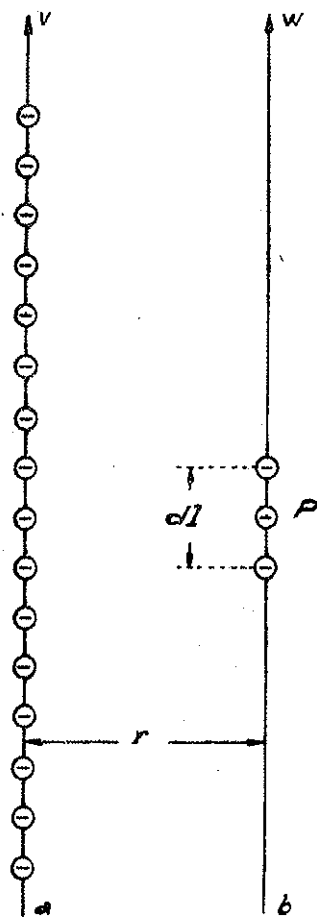


FIG. 1.

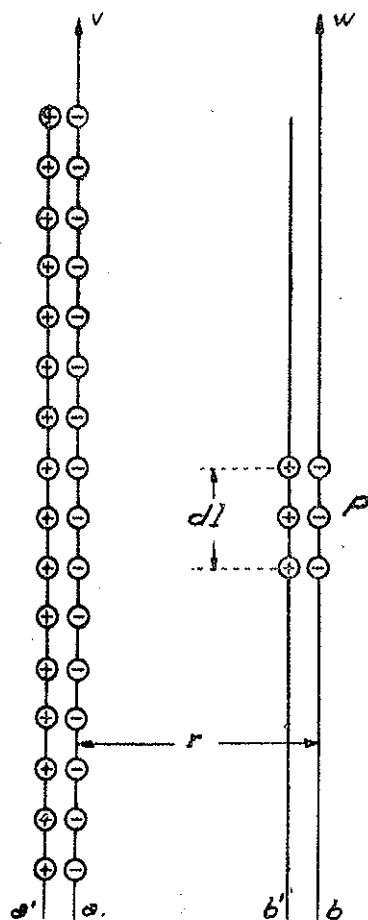


FIG. 2.

negative che scorre con velocità v accanto a una fila di cariche positive ferme rispetto al conduttore. Poichè per un osservatore posto in un sistema di riferimento fermo S , il conduttore fermo appare allo stato neutro, in questo sistema la carica positiva per unità di lunghezza deve considerarsi uguale alla carica negativa, e tale eguaglianza rimane anche quando il conduttore è percorso da corrente.

Supponiamo di avere due conduttori paralleli, indefiniti, a distanza r , percorsi rispettivamente dalle correnti $i_a = q_a v$ e $i_b = q_b w$. Essi sono rappresentati dalle file a, a' e b, b' della figura 2; per l'osservazione precedente è: $q_a = q_{a'}$, $q_b = q_{b'}$. Del conduttore bb' , consideriamo un tratto elementare dl e calcoliamo separatamente l'azione delle file a e a' sulle file b e b' .

Per il calcolo dell'azione della fila a , in moto con velocità v , su b e b' , procediamo nello stesso modo usato per i fascetti di elettroni. In un sistema S_1 , in moto uniforme con la velocità v , la fila a è ferma e produce in un punto P_1 il campo elettrostatico dato dalla [2]. Questo agisce sulla carica $q_b dl$, di b o di b' , nel punto P_1 , con una forza:

$$[7] \quad dF_1 = \mp \frac{q_a q_b dl}{2\pi \varepsilon_0 r} \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Un osservatore posto nel sistema di riferimento fermo, troverà sulla stessa carica una forza diversa, che si calcola applicando alla [7] la formola di trasformazione [4], tenendo presente che la velocità della fila b è w , mentre quella della fila b' è zero. Si ottiene così:

$$[8] \quad dF_{ab} = - \frac{q_a q_b dl}{2\pi \varepsilon_0 r} \left(1 - \frac{vw}{c^2}\right);$$

$$[9] \quad dF_{ab'} = \frac{q_a q_b dl}{2\pi \varepsilon_0 r}.$$

Il calcolo dell'azione che la fila a' , ferma sul sistema di riferimento S , esercita sulle file b e b' è immediato, non occorrendo passaggi da un sistema all'altro. Si ha:

$$[10] \quad dF_{a'b} = \frac{q_a q_b dl}{2\pi \varepsilon_0 r};$$

$$[11] \quad dF_{a'b'} = - \frac{q_a q_b dl}{2\pi \varepsilon_0 r}.$$

L'azione complessiva fra i due conduttori sarà la somma delle singole azioni fra le file di cariche; si ha perciò:

$$[12] \quad dF = \frac{q_a q_b vw dl}{2\pi \varepsilon_0 r c^2} = \frac{\mu_0 i_a i_b dl}{2\pi r}.$$

Essa si è dunque ridotta alla sola azione elettrodinamica fra le due correnti. Osserviamo ora che nei conduttori di rame è praticamente impossibile mantenere intensità di campo elettrico superiori a 10^{-1} V/m e in corrispondenza a questo campo la velocità di migrazione degli elettroni è dell'ordine di 0,3 mm/sec. Può dunque sembrare strano applicare le formole relativistiche a sistemi animati da moti così lenti; ciò nonostante il calcolo conduce all'azione elettrodinamica ⁽¹⁾. Normalmente, quando le velocità sono così piccole, nell'espressione $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ viene trascurato $\frac{v^2}{c^2}$ di fronte a 1, per cui si ricade nella relatività galileiana. Nel nostro caso, invece, sarebbe erroneo trascurare $\frac{vw}{c^2}$ nella formola [8] in quanto, nel calcolo dell'azione complessiva, il termine di confronto, 1, scompare e $\frac{vw}{c^2}$ rimane considerato a sè stante. Si può poi osservare, dalla formola [12], che l'azione elettrodinamica non risulta necessariamente molto piccola, perchè la velocità degli elettroni è sempre moltiplicata per q , cioè, in definitiva, per il numero degli elettroni che è molto grande.

3. - Visto qual'è la natura delle azioni elettrodinamiche, cerchiamo qual'è l'origine della teoria classica del magnetismo e il significato dei vettori \mathbf{H} e \mathbf{B} .

Consideriamo la corrente come il flusso di un vettore \mathbf{i} , densità di corrente, attraverso una sezione del conduttore. Accanto a \mathbf{i} consideriamo il vettore \mathbf{K} , tale che: $\text{curl } \mathbf{K} = \mathbf{i}$. Sia L una linea chiusa che circondi il conduttore e m una superficie qualunque che si appoggi ad essa. Per il teorema di STOKES si ha:

$$[13] \quad \int_m [\text{curl } \mathbf{K} d\mathbf{m}]_s = \int_L [\mathbf{K} d\mathbf{L}]_s .$$

Ma:

$$[14] \quad \int_m [\text{curl } \mathbf{K} d\mathbf{m}]_s = \int_m [\mathbf{i} d\mathbf{m}]_s ,$$

⁽¹⁾ A causa della impossibilità attuale di documentarci, non sappiamo se questo risultato sia stato altre volte messo in luce.

e $\int_m [\mathbf{i} d\mathbf{m}]_s = i$ è la corrente nel conduttore. La relazione [13] diviene perciò:

$$[15] \quad \int_L [\mathbf{K} d\mathbf{L}]_s = i .$$

Da questa formola appare che il vettore \mathbf{K} è quello che normalmente viene chiamato « intensità del campo magnetico » e viene indicato con \mathbf{H} ; mentre $\int_L [\mathbf{K} d\mathbf{L}]_s$ è la cosiddetta « forza magnetomotrice ». In realtà, l'esistenza del campo di \mathbf{H} non è che una diversa interpretazione matematica dell'esistenza di una corrente elettrica. Applichiamo queste considerazioni al calcolo delle azioni elettrodinamiche: nel caso di un conduttore rettilineo ed indefinito, l'intensità di \mathbf{H} in un punto P, a distanza r dall'asse del conduttore, è $H = \frac{i}{2\pi r}$.

Sostituendo questo valore nella espressione [12] si ha:

$$[16] \quad dF_{ed} = \frac{\mu_0 i_a i_b dl}{2\pi r} = \mu_0 H i_b dl = B i_b dl .$$

Confrontiamo questa formola con l'espressione dell'azione elettrostatica fra una fila indefinita di cariche e un tratto elementare dl di un'altra fila di cariche, ad essa parallela e a distanza r :

$$[17] \quad dF_{es} = \frac{q_a q_b dl}{2\pi \epsilon_0 r} = E q_b dl .$$

È evidente l'analogia formale fra le due espressioni. È tale analogia che dà origine alla teoria classica dell'elettromagnetismo: in questa, l'adozione del vettore $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ consente il calcolo delle azioni fra correnti, cioè, in definitiva, lo studio del magnetismo, senza ricorrere alle considerazioni relativistiche.

Ringrazio il Prof. NELLO CARRARA e il Prof. TITO FRANZINI per l'aiuto e i consigli che mi hanno dato nello svolgimento del lavoro.

ULTERIORI RICERCHE SUL METABOLISMO DELLA RETINA (*)

ARMANDO SANTONI

SUMMARIVM. — Auctor exponit quid invenerit de retinae humanae permutatione, experimentis factis in tribus hominibus quorum retinae fere incolumes erant; quibus experimentis magna constat retinae glycolytica, anaerobica et aerobica operositas. Sequuntur conclusiones quaedam de retinae permutatione in vivo.

Le nostre conoscenze sul metabolismo della retina sono entrate in una nuova fase da quando l'impiego di nuovi e più esatti metodi di ricerca, ha permesso di mettere in luce alcune interessanti particolarità che diversificano il ricambio retinico *in vitro* da quello degli altri tessuti normali e patologici. Notevoli sono stati anche i tentativi di mettere in rapporto le particolarità metaboliche messe in luce per la retina *in vitro* con le varie fasi della sua funzione nell'organismo.

Mi piace ricordare che allo studio della questione importanti contributi hanno portato autori italiani (Lo CASCIO e coll. CALIFANO MAZZA e LENT). Partendo dalla constatazione iniziale di WARBURG che dimostrava la elevata capacità del tessuto retinico a glicolizzare, sia in ambiente anaerobico che in ambiente aerobico, CAMPOS, in base ad una vasta serie di ricerche, compiute sulla retina di vari organismi della scala animale, dimostrava come la elevata glicolisi del tessuto retinico, più che espressione di un danneggiamento portato

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gaetano Quagliariello il 19 luglio 1945.

sugli elementi costitutivi del tessuto, dovesse essere interpretata come una caratteristica metabolica fondamentale del tessuto; a CALIFANO e LENTI dobbiamo interessanti ricerche sul meccanismo della glicolisi nel tessuto retinico che sembra svolgersi con modalità differenti da quelle del tessuto muscolare: Lo CASCIO infine, in collaborazione con BORDIGA, ha messo in luce alcune particolarità del ricambio delle retine di animali munite solo di coni rispetto a quelle munite solo, o prevalentemente, di bastoncelli, giungendo alla conclusione che è possibile mettere in luce *in vitro* un comportamento metabolico dei due tipi di retine corrispondente alla differente funzione che essi hanno negli organismi viventi. Se ancora non può dirsi chiarito il significato che gli elevati valori della glicolisi aerobica, riscontrati per il tessuto retinico *in vitro*, assumono per la funzione dell'organismo, è probabile che la incapacità dei prodotti di scissione del glucosio, formati nel corso della glicolisi retinica, a rientrare nel ciclo ossidativo, sia in rapporto con la loro particolare natura; i processi enzimatici di cui dispone il tessuto non troverebbero, in altri termini, nei prodotti terminali o intermedi della scissione dei carboidrati, substrati adatti a venire riutilizzati. Potremmo quindi spiegarci come, ad onta di un sistema ossidativo in buona efficienza, l'effetto della reazione di PASTEUR-MEYERHOF, sia nullo o scarso.

* * *

Le nostre conoscenze sul metabolismo della retina umana hanno segnato un progresso dopo l'importante monografia di CAMPOS. In essa troviamo dei fatti che riguardano il metabolismo della retina umana, sia in condizioni normali, che in condizioni patologiche. L'Autore perviene alle seguenti conclusioni: Retine di occhi umani enucleati o exenterati nei quali non esistevano profonde alterazioni, hanno dimostrato che la retina umana possiede un tipo di ricambio che si avvicina molto a quella di coniglio, cioè forte respirazione:

$$Q_{O_2} = -26,5 \sim -36,4 .$$

intensa glicolisi aerobica:

$$Q_{CO_2}^{O_2} = +26 \sim +36 .$$

glicolisi anaerobica quasi eguale a quella aerobica:

$$Q_{\text{CO}_2}^{\text{N}_2} = + 26 \sim 40,4 .$$

Come risultanza di questi dati la retina umana non presenta eccessi di fermentazione, essendo anzi i valori di U fortemente negativi: il quoziente di MEYERHOF, molto basso, vicino allo 0, indica che praticamente non si ha svolgimento della reazione di PASTEUR-MEYERHOF.

Ricerche comparative eseguite ricercando il consumo di ossigeno e la glicolisi anaerobica della regione centrale (maculare o paramaculare) e di regioni periferiche della retina, hanno dimostrato che queste ultime posseggono un ricambio più elevato negli occhi con glaucoma secondario di data recente, mentre negli occhi con glaucoma assoluto di vecchia data, data la respirazione e la glicolisi anaerobica della porzione centrale sono circa di intensità doppia (glicolisi) e quadrupla (respirazione) di quella delle regioni periferiche.

Nessun altro dato esiste nella letteratura sul metabolismo della retina umana; è perciò che abbiamo ritenuto opportuno rendere noti i risultati di alcune ricerche eseguite nella Clinica Oculistica della Università di Napoli.

* * *

Le retine sono state ottenute da alcuni soggetti i cui occhi si dovettero enucleare, come risulta dalle relative storie cliniche, per affezioni non strettamente oculari, quali tumori diffusi secondariamente all'orbita, o da questa dipartiti, e quindi su retine in stato di completa, o quasi completa conservazione. Le retine sono state prelevate immediatamente dopo l'avvenuta enucleazione. Ho usato il metodo di WARBURG. Circa la tecnica generale si rimanda al lavoro di CAMPOS o alla recente monografia di DEOTTO. Nei casi in esame l'esperienza, per quanto riguarda la misurazione della glicolisi aerobia, è stata allestita nel modo seguente:

Nella vaschetta di un manometro [1] si trovano cc. 3 di liquido di RINGER + 0,2% di glucosio ed una sezione di tessuto di peso p_1 e nel pozzetto centrale cc. 0,2 di KOH al 10%. Nella vaschetta di un altro manometro [2] cc. 3 di liquido ed una sezione di tessuto di peso p_2 , e nel pozzetto centrale cc. 0,2 di RINGER. Durante l'espe-

rienza il CO_2 prodotto dalla sezione p_1 viene assorbito dalla potassa ed il manometro 1 segna una diminuzione progressiva di pressione corrispondente al consumo di ossigeno. Nel manometro 2 la pressione registrata è evidentemente la risultante della somma algebrica « consumo di O_2 + produzione di CO_2 ». Essa, a seconda dei rapporti reciproci di questi due valori, può essere positiva, nulla o negativa.

Siano H^1 la diminuzione di pressione nel manometro 1, H^2 la variazione di pressione registrata nel manometro 2, $K_{\text{O}_2}^1$, $K_{\text{O}_2}^2$ e $K_{\text{CO}_2}^2$ le costanti per l'ossigeno e per l'anidride carbonica nei due rispettivi manometri: avremo che il consumo di ossigeno X_{O_2} sarà eguale a:

$$X_{\text{O}_2} = H^1 \frac{p_2}{p_1} \cdot K_{\text{O}_2}^1$$

La diminuzione di pressione che si sarebbe verificata nel manometro 2, se questo avesse contenuto potassa ($\text{H}_{\text{O}_2}^2$) sarebbe stata evidentemente:

$$H_{\text{O}_2}^2 = \frac{X_{\text{O}_2}}{K_{\text{O}_2}^2}$$

L'aumento di pressione nel manometro 2, dovuto alla produzione di anidride carbonica $H_{\text{CO}_2}^2$ sarà eguale alla somma di $H_{\text{O}_2}^2$ (valore assoluto: segno +) con H^2 (segno - o +) cioè:

$$H_{\text{CO}_2}^2 = + H_{\text{O}_2}^2 + (H^2)$$

ed X_{CO_2} sarà calcolabile secondo la formula:

$$X_{\text{CO}_2} = H_{\text{CO}_2}^2 \cdot K_{\text{CO}_2}^2$$

ESPERIMENTO n. 1. - L. Vincenzo di anni due e mezzo, accolto in Clinica in data 10. VI. 1942. Genitori sani e viventi. Primogenito, senza altri fratelli. A 11 mesi ha sofferto disturbi intestinali: circa 3 mesi fa di un ascesso alla regione anteriore del collo.

Da circa un mese la madre ha cominciato a notare una protusione progressiva del bulbo oculare destro. Attualmente presenta in O. D. esoftalmo non molto accentuato con bulbo oculare spostato in basso ed all'esterno. Alla palpazione non si rileva nulla di particolare. Nulla agli annessi. Bulbo oculare sano, sia nel segmento anteriore che nel fondo. Esame otoiatrico: non si rileva nulla a carico dei paranasali.

Esame radiologico: non si rilevano alterazioni evidenti a carico della volta e della base del cranio.

Riaccolto in Clinica in data 28. VII. 1942 con esoftalmo notevole aumentato. Alla palpazione si avverte una massa di consistenza molle, elastica che riempie il cavo orbitario. Bulbo oculare con pupilla non reagente alla luce. All'esame oftalmoscopico papilla ottica intensamente iperemica con fenomeni di stasi incipienti.

5. VIII. 1942 operato di exenteratio orbitae a destra (prof. Lo Cascio) in narcosi cloroformica. Il tumore è di consistenza encefaloide e riempie tutto il cavo orbitario senza essere delimitato da una capsula evidente. Si riporta per esteso il protocollo dell'esperienza, anche per maggiore illustrazione del metodo seguito.

L. Vincenzo. Anni due e mezzo.

Tumore encefaloide orbita sinistra. Incipiente papilla da stasi, forse cecità.

Tempo	1 3 cc. R ₂₀ Barometro	2 3 cc. R ₂ + glucosio retina 0,2 KOH, aria	5 3 cc. R ₂ + glucosio retina aria	7 3 cc. R ₂₀ + glucosio retina 5% CO ₂ in N ₂
0	179	215	185	186
10'	178 — 1	208 — 6	197 + 13	227 + 42
20'	174 — 4	297 — 7	210 + 17	262 (156) + 39
30'	171 — 3	186 — 8	227 + 20	198 + 45
40'	168 — 3	176 — 7	239 + 15	231 + 36
50'	165 — 3	165 — 8	249 + 13	261 (162) + 33
60'	164 — 1	158 — 6	260 + 12	193 + 33
		mgr. 6,68	mgr. 4,60	mgr. 5,25
		H = — 42	H = + 90	H = + 227
		KO ₂ = 1,42	KO ₂ = 1,34	KCO ₂ = 1,49
		XO ₂ = — 59,2	KCO ₂ = 1,50	XCO ₂ = + 338
		XO ₂ per mgr. 4,60	HO ₂ = — 30,5	
		— — 41	HCO ₂ = + 120	
		QO ₂ = — 9	XCO ₂ = + 188	
			QCO ₂ = + 40	Q ^{N₂} CO ₂ = + 64,5

R₂ = Ringer secondo Warburg + 2 cc. di soluzione isotonica di NaHCO₃, 1,26% a 100 di Ringer.

R₂₀ = Ringer secondo Warburg + 20 cc. di soluzione isotonica di NaHCO₃, 1,26% a 100 di Ringer.

ESPERIMENTO n. 2. - D. C. Antonio, anni 45. Accolto in Clinica in data 9. II. 1941. Ammalato da circa 4 mesi, ha subito già un intervento chirurgico ed ha praticato cura radioterapica. Attualmente presenta a destra: palpebra inferiore quasi completamente distrutta, palpebra superiore distrutta nei $\frac{2}{3}$ interni; en., trambe fortemente aderenti al bulbo oculare che si esplora con difficoltà. Cornea esplorabile solo nella metà inferiore dove si presenta opaca. Visus = percezione luminosa.

Operato in data 25. II. 1941 di exenteratio orbitae. Per brevità si riportano solo i dati ottenuti per il consumo di ossigeno, la glicolisi aerobica e la glicolisi anaerobica. Sia gli esperimenti sulla glicolisi aerobica che gli esperimenti su quella anaerobica sono stati compiuti in doppia prova.

Aerobiosi		Anaerobiosi
I $Q_{O_2} = -15$	$Q_{CO_2}^{O_2} = +44$	$Q_{CO_2}^{N_2} = +43$
II » $= -11,6$	» $= +29$	» $= +38$
Media $= 13,3$	Media $= +36$	Media $= +40,50$

ESPERIMENTO n. 3. - M. Salvatore, anni 63. Accolto in Clinica in data 12. IX. 1940, ammalato da circa due anni, ha subito un intervento chirurgico ed ha praticato cure radioterapiche. Attualmente presenta O. D. vasta neoformazione ulcerata a fondo duro e sanguinante, con bordi duri ed infiltrati, che ha distrutto tutta la palpebra inferiore, ha invaso l'angolo interno, la parte mediale della palpebra superiore si estende al fornice inferiore con invasione delle porzioni anteriori del globo oculare. Questo si esplora con difficoltà. Visus = percezione della luce.

19. IX. 1940. Operato di exenteratio orbitae a destra. Sono stati studiati la respirazione col metodo diretto, separatamente sulla retina maculare e sulla retina periferica e la glicolisi anaerobica su frammenti di retina periferica. La respirazione della retina maculare riguarda esperimenti della durata di 40'.

Retina centrale Q_{O_2}	Retina periferica Q_{O_2}	I. $Q_{CO_2}^{N_2}$	II. $Q_{CO_2}^{N_2}$
per 40' $= -11,5$	per 40' $= -13,46$ per 1 h. $= -12,5$	+ 33,6	+ 32,9

Riassumendo in tabella i dati complessivamente ottenuti si ha:

N. Esperimento	Q_{O_2}	$Q_{CO_2}^{O_2}$	$Q_{CO_2}^{N_2}$
1	— 9	+ 40	+ 64,5
2	— 13,3	+ 40	+ 40,5
3 { Retina centrale 40'	— 11,5		+ 33,6
{ Retina periferica	— 13,4		

Qualche breve considerazione sui dati esposti. I valori ottenuti per la glicolisi aerobica e per quella anaerobica nei tre esperimenti rientrano nei limiti riscontrati da CAMPOS, e che sono stati già riportati, ove si eccettui il valore ottenuto per la glicolisi anaerobica nell'esperimento I in cui:

$$Q_{CO_2}^{N_2} = + 64,5 .$$

Non può affermarsi se tale valore superiore alla media dei valori ottenuti anche da me negli altri due casi, sia in rapporto con eventuali alterazioni intervenute nel tessuto retinico per effetto della compressione sul nervo ottico o con la giovane età del paziente e quindi con differenze legate a questo particolare momento. Alquanto più basse rispetto ai valori ottenuti da CAMPOS sono le cifre da me avute per la respirazione misurata con la modalità sopra esposta, le quali oscillano in limiti relativamente modesti. Il ricambio della retina della regione maculare, secondo l'unico esperimento riportato, sembra essere più esiguo di quello della retina periferica; il tessuto si esaurisce inoltre più rapidamente.

Al lume delle ricerche di CAMPOS e dei dati da me riportati che dimostrano come nella retina separata dall'organismo la fonte principale di energia sia sempre un metabolismo di scissione, appare difficilmente accettabile quanto viene sostenuto recentemente da WERWE e FISCHER circa il metabolismo della retina patologicamente distaccata

dall'epitelio pigmentato, come si verifica nel distacco idiopatico della retina. Gli Autori traggono le loro conclusioni dalle osservazioni compiute sul potenziale di ossido-riduzione del liquido sottoretinico. Viene ammesso che quello della retina distaccata corrisponda a quello del liquido che la bagna. Il potenziale di ossido-riduzione sarebbe basso nella retina normale, si eleverebbe nella retina distaccata per la ossidazione non più reversibile, di tutti i complessi cellulari che mantengono normalmente il ruolo delle ossido-riduzioni cellulari ossidandosi e riducendosi alternativamente, secondo una serie di reazioni accoppiate. In particolare si avrebbe l'ossidazione definitiva del fermento glicolitico con l'interruzione della glicolisi. La retina distaccata avrebbe un metabolismo prevalentemente ossidativo, con la scomparsa del distacco, la retina riaccostandosi all'epitelio pigmentato, subirebbe un processo di riduzione, si avrebbe la riattivazione del sistema glicolitico e la ripresa della visione.

Tale osservazione sarebbe anche in contrasto con la presenza del fermento glicolitico nel liquido sottoretinico già riscontrata da CONTINO e sulla cui entità quantitativa sono in corso ricerche in questa Clinica.

BIBLIOGRAFIA

- BUMM E. und FEHRENBACH K., *Über verschiedene Wege des Zuckerabbaues im tierischen Organismus*, II, « Zeitschr. physiol. Chem. », 195, 101, 1931.
- BUMM E., *Zellstoffwechsel und Wachstum*. « Deutsche med. Woch. », 1173, 1934.
- CALIFANO L., *Ricerche sulla glicolisi della retina*, « Atti Acc. Naz. Lincei », VI, 93, 1937.
- CAMPOS R., *Ricerche sul ricambio della retina*, « Ann. di Oftalm. e Clin. Ocul. », 64, 1936.
- DEOTTO R., *Metodi manometrici*, L. Cappelli, Bologna, 1942.
- KISCH BR., *Beinflussung der Retina Atmung durch Aminosäures*, « Bioch. Zeitsch. », 244, 459, 1931.
- LENTI C., *La glicolisi nella retina*, « Arch. di scienze biol. », 25, 455, 1939.
- LO CASCIO G., *Metabolismo della retina*, « Riforma Medica », 124, 1936.
- LO CASCIO G. e BORDIGA A., *La respirazione della retina durante l'adattamento al buio*, « Atti Reale Accademia di Italia », Memorie della classe di scienze fisiche natur., vol. XIV, 505, 1943.
- POSSENTI G., *Prime ricerche sulla glicolisi retinica*, « Riv. di Patol. Speriment. », 15, 183, 1935.
- *Ricerche sul ricambio dell'acido piruvico nella retina*, « Riv. di Patol. Speriment. », 15, 229, 1935.
- SANTONI A., *Ricerche sulla struttura e sul metabolismo della retina di rana durante il processo di rigenerazione*, « Boll. di Ocul. », 18, 1939.
- *Il ricambio della retina dopo interruzione della circolazione retinica*, « Ann. di Oftalm. e Clin. Ocul. », 67, 229, 1939.
- *Ulteriori ricerche sul metabolismo della retina: metabolismo degli aminoacidi*, « Rass. Ital. Oftalm. », 9, 1940.
- *Sulla capacità del tessuto retinico di ossidare alcuni acidi grassi ed esteri metilici di acidi grassi in vitro*, « Ann. di Oftalm. e Clin. e Ocul. », 67, 1939.
- WIEWE H. J. M. et P. P. FISCHER, *Le métabolisme de la rétine décollée*, « Ann. d'Ocul. », 175, 817, 1938.
- WARBURG O., POSENER K., NEGBELIN E., *Über den Stoffwechsel der Karcinomzelle*. « Bioch. Zeitsch. », 152, 1924.
- *Über den Stoffwechsel der Tumoren*, Springer, Berlin, 1926.



PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA

Vol. IX - N. 5

pag. 37-64

MISURE MICROMETRICHE DI STELLE DOPPIE (*)

GIUSEPPE ARMELLINI

Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Brevibus praemissis notitiis de instrumentis et via adhibita, Auctor exponit quid ostenderint mensurationes micrometricae, quas ipse magno et medio aequatoriali Romanae Speculae astronomicae peregit super centum et viginti stellis duplicibus. Singulae stellae per plures noctes (plerumque tres quattuorve) observatae sunt; ter autem vel quater in singulis noctibus distantia inter duo sidera computata est, totiensque angulus positionis, ita ut in summa ter circiter millies anguli et distantiae observata sint.

1. **PRELIMINARI.** — L'importanza delle stelle doppie nell'astronomia è così nota, che sarebbe inutile di soffermarci ad illustrarla. Credo quindi di dovermi limitare soltanto ad alcuni cenni sopra l'origine e gli scopi di questo lavoro e sul metodo e gli strumenti che ho adoperato per eseguire le misure micrometriche che passo ad esporre.

Circa cinquanta anni fa, il compianto prof. FRANCESCO GIACOMELLI primo astronomo dell'Osservatorio del Campidoglio in Roma e mio caro maestro nell'astronomia pratica, eseguì numerose osservazioni micrometriche di stelle doppie, che vennero pubblicate ⁽¹⁾ nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ».

La bontà dello strumento adoperato — un modesto equatoriale di Merz, di soli 110 mm. di apertura, ma dotato di un obbiettivo di rara perfezione — e l'abilità grandissima che aveva il GIACOMELLI nell'osservare, resero queste misure degne di molta attenzione tra gli astro-

(*) Nota presentata il 14 giugno 1945.

(1) Cfr. « Rend. Accademia dei Lincei », 1890, sem. II, fasc. 5 e 9; 1891, sem. I, fasc. 2.

nomi. Così vediamo per esempio che il BURNHAM ⁽¹⁾, nel suo grande Catalogo di stelle doppie, riporta spesso integralmente i risultati del GIACOMELLI, anche a preferenza di quelli di altri astronomi che osservarono le medesime stelle con equatoriali molto più potenti.

Per tali ragioni, nel 1921, mi proposi di riesaminare le stesse stelle doppie già osservate trenta anni prima dal GIACOMELLI, valendomi del medesimo equatoriale Merz da lui usato, onde mettere in luce i movimenti avvenuti in questo intervallo di tempo. Più tardi, verso la fine del 1925, avendo ottenuto la direzione di quella Specola col succedere all'amato maestro e predecessore ALFONSO DI LEGGE titolare della Cattedra di Astronomia nell'Università Romana, potei impiantarvi un'equatoriale maggiore, di 155 mm. di apertura, che da allora in poi ho usato costantemente nelle misure micrometriche delle doppie, fino a che non ebbi a disporre di un grande equatoriale di 390 mm.

Le mie prime misure furono pubblicate nel 1922 e nel 1927, in due note apparse nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » ⁽²⁾ e comprendenti 96 stelle doppie, ognuna delle quali era stata osservata almeno in tre notti diverse, eseguendo ogni notte almeno tre misure della distanza e dell'angolo di posizione. I risultati, trovati prima del 1927, sono poi apparsi nel grande Catalogo delle doppie dell'AITKEN ⁽³⁾, che riporta appunto le principali determinazioni eseguite prima di quell'anno.

Ma le misure continuarono anche negli anni successivi ed anzi allargai il programma di lavoro, proponendomi di riosservare tutte le doppie del BURNHAM aventi distanze comprese tra 3" e 20" e splendore non inferiore all'ottava grandezza ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Cfr. S. W. BURNHAM, *A General Catalogue of Double Stars*, Washington, Carnegie Inst. 1906.

⁽²⁾ Cfr. G. ARMELLINI, *Angoli di posizione di 50 stelle doppie*, in « Rend. R. Acc. dei Lincei », 1922, sem. I; Id., *Misure di stelle doppie*, id. id., 1927, sem. II.

⁽³⁾ Cfr. R. AITKEN, *New General Catalogue of Double Stars*, Washington, Carnegie Inst. 1932.

⁽⁴⁾ In una mia terza nota *Misure di stelle doppie*, pubblicata nei « Rend. della R. Acc. dei Lincei » (1929, sem. II) si trovano riportate le sole medie generali preliminari di altre 55 doppie osservate fino all'8 luglio 1929. Poichè le osservazioni serali di queste doppie non erano ancora state pubblicate, esse sono state incluse nella tabella seguente che comprende quindi tutte le doppie da me osservate dal novembre 1927 al 30 giugno 1945. Le doppie osservate prima del novembre 1927 si trovano nelle due citate note in « Rend. Lincei », 1922, sem. I e 1927, sem. II.

Il 13 agosto 1937, l'Osservatorio veniva trasportato nella nuova sede sulla vetta di Monte Mario, dove potei avere finalmente a disposizione un potente equatoriale con obbiettivo Steinheil di mm. 390 di apertura, che mi permetteva di esaminare doppie strette o di debole splendore. Se non che, occorre parecchio tempo per la completa sistemazione dello strumento e della grande cupola, e anche dopo questi lavori fu necessario elettrificare il movimento di orologeria dell'equatoriale, giacchè il meccanismo esistente mosso da pesi si dimostrava insufficiente a muovere il grande cannocchiale. In conseguenza continuai ancora le misure con l'equatoriale di 155 mm. fino alla sera del 16 marzo 1944, quando potei adoperare per la prima volta il grande equatoriale di 390 mm. per osservare la μ Canis Majoris.

Ma, poco dopo, mi vidi costretto ad interrompere nuovamente il lavoro nel fondato timore che le milizie tedesche, prima di abbandonare Roma, potessero trasportare le grandi lenti e gli strumenti più importanti del R. Osservatorio. In conseguenza, valendomi della gentile offerta di questa Pontificia Accademia delle Scienze a cui rinnovo sensi di profonda gratitudine, inviai le grandi lenti e tutto ciò che avevamo di maggior pregio all'Osservatorio (compresi i cimeli più importanti del nostro Museo Astronomico) nella Città del Vaticano, in otto grandi casse che furono provvisoriamente sistemate nella sede dell'Accademia, alla Palazzina Pio IV. Liberata Roma il 4 giugno 1944 e cessato il pericolo, ogni cosa venne rimessa a posto e, valendomi sempre del grande equatoriale di 390 mm., ripresi le misure micrometriche di stelle doppie, che spero di continuare finchè le forze mi permetteranno di osservare.

2. STRUMENTO E METODO ADOPERATO NELLE MISURE. — Come ho già detto, tutte le misure eseguite prima della sera del 16 marzo 1944 (1944, 208) sono state compiute con l'equatoriale Cavignato con obbiettivo Cauchoix di mm. 155; le misure posteriori furono invece fatte sempre col grande equatoriale Cavignato con obbiettivo Steinheil di 390 mm. Ovviamente agli equatoriali era applicato un micrometro filare, per la misura degli angoli di posizione e delle distanze; nell'esecuzione delle misure ho tenuto il *campo illuminato* ed i *fili oscuri*, ciò che permette una maggior precisione.

Per quanto riguarda l'*ingrandimento*, GIACOMELLI ha adoperato costantemente il massimo che l'atmosfera potesse comportare. Per mio

conto, ho trovato più vantaggioso adoperare un ingrandimento alquanto minore onde aumentare la nettezza delle immagini e quindi, in generale, ho usato ingrandimenti di 150-300 diametri per le osservazioni fatte con l'equatoriale minore, e di 300-500 per quelle fatte col grande equatoriale, sempre in correlazione con lo stato atmosferico. Memore della nota massima di STRUVE, secondo cui *per ben osservare bisogna ben vedere*, ho osservato soltanto in serate veramente buone od almeno abbastanza buone, e generalmente in prossimità del meridiano onde avere le stelle alla massima altezza sull'orizzonte.

Nell'osservare, STRUVE suggeriva di tenere la testa verticale e tale consiglio fu generalmente seguito da GIACOMELLI. In tal caso però, poichè la congiungente i due occhi si mantiene sempre orizzontale mentre la congiungente i due astri del sistema binario che si osserva può avere una direzione qualsiasi, può nascere un errore personale variabile da stella a stella. Per eliminarlo, si può applicare all'oculare un piccolo prisma a riflessione totale ruotandolo in modo da rendere orizzontale la congiungente le due stelle che si osservano. Ma più semplicemente si può, come io ho generalmente fatto, tenere la testa in modo che la congiungente degli occhi sia *parallela* o *normale* alla direzione della congiungente i due astri del sistema binario; ciò che elimina del tutto, od almeno riduce grandemente per evidenti ragioni di simmetria, l'errore in parola.

Gli *angoli di posizione* ε sono stati osservati ponendo i due astri tra i due fili del micrometro paralleli e distanti pochi secondi tra loro, e ruotando il cerchio del micrometro in modo che la congiungente i due astri risultasse parallela ai fili stessi. La *distanza angolare* p è stata ottenuta col metodo della doppia misura. E cioè ruotavo il micrometro di 90° in modo che i due fili paralleli ora nominati si disponessero normalmente alla congiungente i due astri e quindi muovevo la vite micrometrica che comandava uno di essi (il così detto *filo mobile*) in modo che si disponesse esattamente sopra la stella principale, mentre l'altro filo (*filo fisso*) cadeva sopra la stella satellite. Leggevo quindi il tamburo della vite micrometrica e quindi, ruotandolo nuovamente, disponevo il filo fisso sopra la stella principale ed il filo mobile sopra la stella satellite, leggendo di nuovo il tamburo della vite. Ovviamente la differenza delle due letture, moltiplicata per il valore D della divisione del tamburo, dava la doppia distanza angolare tra le due stelle.

Come micrometro, ho adoperato sia un micrometro Cavignato adattabile al grande equatoriale con $D = 0'',1972$, sia un micrometro Merz con $D = 0'',1276$ quando si applica al grande equatoriale e $D = 0'',2814$ quando si applica all'equatoriale minore. Sarà in proposito inutile ricordare che il passo angolare della vite di un micrometro è eguale all'angolo con cui esso viene visto dall'obbiettivo ed è quindi inversamente proporzionale alla distanza focale del cannocchiale a cui si applica.

3. RISULTATI DELLE MISURE. - Col metodo ora esposto, ho osservato ciascun sistema binario propostomi generalmente in tre notti distinte ed alle volte in quattro o cinque notti. Il risultato di ciascuna notte è fondato generalmente su *tre misure almeno dell'angolo di posizione ed altrettante della doppia distanza*, onde ogni valore di ϑ e di ρ dato nella tabella che segue è eguale alla media di almeno tre misure.

Ciò posto, nella tabella che riporto, la prima colonna indica il numero progressivo, la seconda il numero che ha la doppia esaminata nel *New General Catalogue of Double Stars* di AITKEN, la terza dà la grandezza visuale delle due stelle componenti la doppia, la quarta il valore trovato per l'angolo di posizione ϑ nella notte indicata, la quinta il valore trovato per la distanza angolare ρ tra le due componenti, la sesta indica la notte di osservazione esprimendo la data in anni e millesimi di anno, l'ultima è riservata alle annotazioni.

La tabella contiene 120 doppie, delle quali però l'ultima (37 Andromedae) venne osservata in due epoche distinte, nel novembre 1930 e nel settembre 1944, la prima volta in 4 notti e la seconda in 3. Le *medie generali* sono segnate nell'ultima riga, dopo le osservazioni.

Ovviamente gli angoli di posizione ϑ sono sempre indicati in gradi e decimi di grado e le distanze ρ in secondi e decimi.

TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϵ	Data	Annotazioni
					1900 +	
1	1	6,0-7,3	71°,7	14",6	30,865	
			73,8	14,8	868	
			72,0	15,0	871	
			72,3	14,80	30,868	
2	36	7,2-9,3	303,4	3,7	44,733	
			300,6	3,2	988	
			301,8	3,7	991	
			302,1	3,1	994	
			302,0	3,43	44,939	
3	238	7,6-7,7	234,6	4,9	30,941	38 Piscium
			236,7	4,9	31,043	
			236,8	4,4	052	
			236,0	4,73	31,012	
4	252	7,2-8,0	249,0	5,2	30,873	69 Andromedae
			248,1	5,2	996	
			246,5	5,3	31,043	
			246,7	—	053	
			247,6	5,23	30,991	
5	582	7,0-7,2	335,7	5,6	28,054	
			333,8	4,8	057	
			334,7	5,2	087	
			334,7	5,20	28,066	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1445,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϵ	Data	Annotazioni
					1900 +	
6	688	6,0-6,0	297 ^o ,3	4",8	37,900	65. Piscium
			296,8	4,4	38,709	
			297,2	5,1	38,711	
			297,1	4,77	38,440	
7	923	6,7-7,5	322,8	4,4	27,840	160 Ceti
			320,3	3,5	843	
			321,1	3,3	878	
			321,4	3,73	27,854	
8	2042	7,4-7,7	117,7	3,7	30,054	
			119,3	3,5	057	
			121,3	3,6	060	
			119,4	3,60	30,057	
9	2475	7,9-8,0	252,9	7,8	30,057	
			252,6	8,0	060	
			252,7	7,90	30,058	
10	2926	7,0-7,9	128,1	7,1	29,027	
			129,4	7,6	032	
			129,4	6,9	046	
			129,0	7,20	29,035	
11	3019	7,7-7,7	188,1	5,5	29,032	
			189,4	5,8	041	
			188,5	5,4	046	
			188,7	5,57	29,040	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num,	Cat. Aitken	Grandezza	δ	α	Data	Annotazioni
					1900 +	
12	3185	6,0-7,5	61°,8	19",3	29,027	
			62,4	19,3	041	
			62,6	19,7	049	
			62,3	19,43	29,039	
13	3273	6,3-6,5	116,8	9,5	29,076	
			117,3	8,7	079	
			115,2	9,2	087	
			116,4	9,13	29,081	
14	3274	5,1-6,2	308,1	10,4	29,076	1 Camelopardalis
			309,8	10,6	079	
			308,5	10,5	087	
			308,8	10,50	29,081	
15	3279	6,8-7,7	255,9	9,8	29,076	
			256,3	10,1	079	
			255,6	9,4	087	
			255,9	9,77	29,081	
16	3318	7,0-8,0	259,4	12,9	29,098	
			259,1	12,9	106	
			259,3	12,5	125	
			259,3	12,77	29,110	
17	3353	6,5-6,5	195,0	4,0	29,095	4 Aurigae
			196,1	4,0	098	
			194,7	4,4	106	
			195,3	4,13	29,100	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϵ	Data	Annotazioni
					1900 +	
18	3355	6,7-7,2	172 ^o ,3	13",1	29,095	
			172,6	12,4	088	
			172,7	—	109	
			172,6	12,4	125	
			—	12,7	128	
			172,6	12,65	29,111	
19	3409	6,6-6,8	317,4	9,3	32,054	55 Eridani
			317,0	9,2	057	
			317,7	9,5	060	
			317,4	9,83	32,057	
20	3514	7,6-7,9	199,2	16,6	32,054	
			199,6	16,1	068	
			200,5	16,2	090	
			199,8	16,30	32,071	
21	3623	6,8-8,0	49,9	14,0	32,054	
			49,8	13,8	057	
			50,2	14,2	060	
			50,0	14,00	32,057	
22	3711	6,0-6,6	101,3	0,9	45,194	14 Orionis
			96,5	1,0	197	
			99,6	1,0	200	
			99,1	0,97	45,197	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϱ	Data	Annotazioni
					1900 +	
23	4004	7,3-8,0	342 ^o ,6	8",5	32,202	
			344,2	8,3	246	
			343,0	8,2	273	
			344,0	8,3	276	
			343,5	8,32	32,249	
24	4068	5,8-6,6	203,7	4,6	32,098	118 Tauri
			205,1	4,6	136	
			204,3	4,8	145	
			204,4	4,67	32,126	
25	4200	7,2-7,8	265,8	3,7	32,969	380 Tauri
			261,7	3,3	33,024	
			263,2	3,4	030	
			263,6	3,47	33,008	
26	4343	6,7-7,7	343,6	13,7	43,227	
			346,2	14,5	232	
			347,4	—	254	
			347,5	13,6	257	
			346,2	13,93	43,242	
27	5559	5,4-7,7	156,1	6,9	44,208	38 Geminorum
			157,2	7,0	213	
			154,4	7,1	222	
			152,9	7,2	230	
			155,1	7,05	44,218	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϵ	Data	Annotazioni
28	5605	4,7-8,0	346 ^o ,6	2",8	44,208	μ Canis Majoris
			349,1	3,1	213	
			344,7	3,1	222	
			346,7	—	241	
			346,8	3,00	44,221	
29	5983	3,2-8,2	219,6	6,3	45,205	δ Geminorum
			218,0	6,3	210	
			216,1	6,4	219	
			218,5	6,2	224	
			218,0	6,30	45,215	
30	6004	6,6-6,8	255,4	—	32,355	20 Lyncis
			254,4	13,9	33,011	
			—	13,4	125	
			256,0	14,6	131	
			255,3	13,97	32,905	
31	6012	5,3-6,6	315,3	14,3	32,355	19 Lyncis
			315,7	14,7	33,011	
			312,7	14,1	109	
			313,8	14,1	112	
			314,4	14,30	32,897	
32	6060	6,7-7,8	46,8	7,5	28,104	
			43,3	6,8	106	
			44,1	6,0	147	
			46,4	6,3	153	
			45,1	6,65	28,128	

Segue **TABELLA.** — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da*
G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	θ	ϱ	Data	Annotazioni
					1900 +	
33	6126	6,7-8,3	353 ^o ,0	2",8	45,200	
			353,1	2,2	205	
			354,2	2,5	210	
			353,4	2,50	45,205	
34	6175	2,7-3,7	197,7	4,0	45,227	Castore
			196,7	3,7	230	
			197,0	4,4	233	
			197,1	4,03	45,230	
35	6190	5,9-6,0	112,7	9,6	28,104	n Puppis
			112,4	9,9	107	
			112,2	9,5	125	
			112,4	9,67	28,112	
36	6319	7,1-7,1	186,9	16,0	28,106	
			186,3	15,2	117	
			187,3	15,3	147	
			186,8	15,50	28,123	
37	6348	6,2-7,0	340,1	17,7	28,161	2 Puppis
			340,3	16,7	210	
			340,4	16,7	213	
			340,3	17,03	28,195	
38	6569	6,5-7,4	349,2	3,1	28,161	17 Cancri
			348,4	3,2	183	
			348,6	3,3	197	
			348,7	3,20	28,180	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Numi	Cat. Aitken	Grandezza	ϑ	ϱ	Data 1900 +	Annotazioni
39	6650	5,5-5,7	59 ^o ,3	0",9	45,227	ζ Cancri AB
			59,7	1,0	230	
			60,3	0,9	233	
			59,8	0,93	45,230	
40	6650	5,0-5,5	97,1	5,8	45,227	ζ Cancri AB/2-C
			97,6	5,5	230	
			96,6	5,8	233	
			97,1	5,70	45,230	
41	6945	7,1-7,4	332,4	9,4	28,183	
			331,7	10,0	197	
			333,3	10,4	216	
			332,5	9,93	28,199	
42	6977	6,6-7,6	261,1	4,4	28,293	
			260,6	4,8	303	
			260,8	4,9	328	
			261,5	5,0	336	
			261,0	4,77	28,315	
43	7031	7,0-8,0	123,3	16,0	28,243	
			121,7	15,8	249	
			122,6	15,9	276	
			122,5	15,90	28,256	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	θ	ϱ	Data	Annotazioni
					1900 +	
44	7034	7,0-7,0	279,1	3",3	28,249	130 Lynceis
			278,7	3,7	276	
			279,4	3,8	293	
			279,1	3,60	28,273	
45	7067	7,5-7,6	53,5	3,6	28,303	
			52,5	4,0	328	
			51,2	3,9	364	
			52,4	3,83	28,332	
46	7073	7,4-7,9	140,3	9,6	28,320	
			137,8	9,5	328	
			139,3	9,6	336	
			139,1	9,57	28,328	
47	7187	6,7-7,1	201,4	8,2	28,320	194 Canceri
			200,1	8,3	328	
			200,4	8,2	364	
			200,6	8,23	28,337	
48	7354	7,0-8,0	310,1	5,3	28,339	21 Ursae M.
			311,2	5,0	399	
			311,8	5,5	402	
			311,0	5,27	28,397	
49	7425	7,2-7,3	69,6	10,7	28,366	
			69,2	10,7	339	
			69,0	10,5	399	
			69,3	10,63	28,385	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	θ	ϱ	Data	Annotazioni
					1900 +	
50	7446	7,0-7,0	130°,5	5",8	41,381	
			130,1	5,4	389	
			130,7	5,6	413	
			130,4	5,43	41,394	
51	7705	6,1-7,0	166,2	16,1	31,369	
			167,0	15,8	388	
			166,5	16,4	391	
			166,6	16,10	31,383	
52	7762	7,5-8,0	88,5	3,4	31,388	
			87,4	3,2	399	
			89,4	3,4	418	
			88,4	3,33	31,402	
53	7762	7,5-8,0	86,4	3,1	41,419	
			85,8	2,6	451	
			86,8	2,8	454	
			86,3	2,83	41,441	
54	7902	6,1-7,2	240,0	6,8	41,307	35 Sextantis
			240,6	6,2	326	
			241,0	6,7	330	
			240,5	6,57	41,321	
55	7936	7,2-8,0	9,8	2,7	45,355	40 Sextantis
			10,6	2,6	358	
			10,5	2,6	361	
			10,3	2,63	45,358	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	θ	ϱ	Data	Annotazioni
					1900 +	
56	7979	5,0-7,0	106,8	7",2	30,383	54 Leonis
			107,8	7,1	402	
			108,1	7,2	407	
			107,6	7,17	30,397	
57	8105	7,2-7,5	96,1	4,2	30,402	
			97,7	3,9	407	
			97,6	3,3	479	
			97,1	3,80	30,429	
58	8131	7,0-8,0	253,4	10,1	30,382	
			252,5	10,0	402	
			253,0	10,05	30,3 92	
59	8236	7,3-7,8	167,1	6,2	29,408	
			166,4	5,9	410	
			165,6	6,1	421	
			166,4	6,07	29,413	
60	8250	5,9-8,0	258,1	10,4	29,383	290 Ursae M.
			257,9	10,1	405	
			258,5	9,9	408	
			258,2	10,13	29,399	
61	8630	3,0-3,0	317,7	6,4	44,375	γ Virginis
			315,5	6,3	377	
			316,7	5,5	380	
			316,6	6,07	44,377	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϵ	Data	Annotazioni
					1900 +	
62	8974	5,7-7,6	106,2	1",5	45,430	25 Canum Ven.
			107,2	1,4	443	
			109,4	1,3	449	
			108,8	1,4	457	
			107,9	1,40	45,445	
63	9031	7,2-7,5	123,2	2,3	45,435	
			123,9	2,1	446	
			124,6	2,2	449	
			123,3	2,2	457	
			123,7	2,20	45,447	
64	9173	5,1-7,2	238,6	13,0	28,410	k Bootis
			235,4	13,0	419	
			237,9	13,3	421	
			237,3	13,10	28,417	
65	9237	7,0-7,0	173,8	5,9	28,405	
			172,4	5,8	410	
			173,3	6,0	413	
			173,2	5,90	28,409	
66	9251	7,2-7,3	335,8	9,2	28,405	
			336,3	8,9	410	
			336,0	9,05	28,407	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϵ	Data	Annotazioni
					1900 +	
67	9338	4,9-6,0	104°,8	6",4	28,405	π Bootis
			105,3	5,6	410	
			103,8	5,6	416	
			104,6	5,87	28,410	
68	9343	3,5-3,9	309,3	—	44,380	ζ Bootis
			307,3	1,1	386	
			313,3	1,5	389	
			312,6	1,1	405	
			310,6	1,23	44,390	
69	9346	7,0-8,0	44,2	7,2	28,435	
			42,1	7,4	438	
			44,1	8,1	440	
			43,5	7,57	28,438	
70	9375	5,2-7,1	130,3	8,3	28,443	54 Hydrae
			125,9	8,1	481	
			131,2	8,3	484	
			129,4	—	487	
			129,2	8,23	28,474	
71	9396	5,4-6,3	355,0	1,7	44,394	μ Librae
			356,2	1,7	399	
			355,5	1,3	402	
			355,6	1,57	44,398	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϵ	Data	Annotazioni
					1900 +	
72	9406	5,8-6,5	45 ^o ,1	3",1	28,435	39 Bootis
			43,6	2,9	438	
			46,7	3,7	440	
			43,7	3,3	443	
			44,8	3,25	28,439	
73	9493	7,0-7,0	347,9	9,9	28,432	
			348,4	9,7	438	
			347,7	9,6	440	
			348,0	9,73	28,437	
74	9507	7,0-7,0	212,0	3,9	28,449	
			212,0	4,0	470	
			212,8	4,4	473	
			212,3	4,10	28,464	
75	9580	6,2-7,6	169,9	13,2	28,481	
			170,3	13,2	485	
			169,9	13,0	490	
			170,0	13,13	28,485	
76	9727	7,3-7,7	294,5	4,8	29,449	
			292,6	4,9	454	
			294,6	4,7	460	
			293,9	4,80	29,454	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandozza	ϕ	e	Data	Annotazioni
					1900 +	
77	9728	6,3-6,4	189°,5	12",7	28,481	178 Librae
			189,8	11,7	484	
			189,9	11,7	487	
			189,7	12,03	28,484	
78	9731	7,3-7,4	83,8	14,6	29,449	
			84,7	15,1	454	
			85,1	14,6	463	
			84,5	14,77	29,455	
79	10146	7,1-7,9	89,9	16,1	29,446	
			91,0	16,3	454	
			90,0	16,8	463	
			90,3	16,40	29,454	
80	10266	6,0-8,0	231,1	4,6	29,465	
			230,5	4,8	482	
			231,1	4,8	487	
			230,9	4,73	29,478	
81	10849	7,8-7,8	326,8	2,9	28,591	
			327,2	2,9	596	
			324,3	3,1	599	
			325,1	3,3	602	
			325,9	3,05	28,597	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	θ	ϱ	Data	Annotazioni
					1900 +	
82	11005	5,0-5,7	266,9	2",5	44,591	τ Ophiuci
			266,1	2,2	605	
			265,0	2,1	613	
			266,0	2,27	44,603	
83	11046	4,1-6,1	110,8	6,7	44,643	70 Ophiuci
			110,4	6,5	646	
			109,5	6,1	649	
			110,2	6,43	44,646	
84	11168	7,5-8,0	123,3	7,0	40,579	
			120,3	8,1	583	
			120,6	7,5	605	
			121,4	7,53	40,589	
85	11336	4,7-7,7	357,2	3,7	29,490	39 Draconis AB
			354,6	3,7	501	
			353,9	3,8	517	
			357,9	4,3	520	
			357,2	3,87	29,507	
86	11336	4,7-7,1	20,2	88,7	29,490	39 Draconis AC
			20,4	88,8	526	
			20,3	88,75	29,508	
87	11353	5,5-7,8	317,3	3,6	28,605	59 Serpentis
			319,5	3,6	607	
			318,8	3,9	610	
			318,5	3,70	28,607	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	ϑ	ϱ	Data	Annotazioni
					1900 +	
88	11635	4,6-6,3	5 ^o ,2	3'',7	40,772	ϵ_1 Lyrae AB
			3,1	3,8	775	
			4,2	3,9	802	
			4,2	3,80	40,783	
89	11635	4,9-5,2	107,2	2,6	40,775	ϵ_1 Lyrae CD
			108,2	2,4	802	
			—	2,3	882	
			108,2	—	952	
			107,9	2,43	40,853	
90	11750	5,8-7,0	183,6	4,2	28,607	78 Tauri Pon.
			183,4	4,8	610	
			183,5	4,4	613	
			183,5	4,47	28,610	
91	11870	6,7-7,5	217,2	6,6	28,635	223 Draconis
			218,9	6,1	638	
			218,1	5,6	640	
			—	6,1	646	
			218,1	6,10	28,640	
92	12010	6,3-8,0	262,8	12,2	28,618	1 Vulpeculae
			262,4	11,9	651	
			262,9	11,0	657	
			262,7	11,70	28,642	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da*
G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ρ	Data	Annotazioni
					1900 +	
93	12037	7,1-7,8	290 ^o ,5	8",1	28,618	
			289,8	7,9	651	
			290,6	7,8	657	
			290,3	7,93	28,642	
94	12715	6,2-8,1	324,7	3,2	40,607	
			323,6	3,4	654	
			324,0	4,4	660	
			324,1	3,67	40,640	
95	12880	3,0-7,9	254,0	2,0	44,646	♌ Cygni
			254,1	2,2	649	
			—	1,7	662	
			253,5	1,7	668	
			253,6	2,4	706	
			253,8	2,00	44,666	
96	13050	7,6-7,6	139,1	4,5	29,490	
			142,5	4,0	520	
			142,5	4,0	528	
			142,2	3,7	539	
			141,6	4,05	29,519	
97	13148	5,0-7,5	176,9	3,5	44,700	♐ Cygni
			179,3	3,8	706	
			180,6	3,4	720	
			178,9	3,57	44,709	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	θ	ϱ	Data	Annotazioni
					1900 +	
98	13256	7,0-7,2	352,8	4",7	30,490	210 Aquilae
			353,3	4,5	509	
			354,7	4,4	553	
			353,6	4,53	30,517	
99	13330	7,7-7,9	223,5	5,7	30,490	
			224,6	5,7	509	
			224,8	5,6	553	
			224,3	5,66	30,517	
100	13506	7,1-7,4	206,7	3,6	30,566	
			207,5	3,6	575	
			208,1	3,2	577	
			207,4	3,47	30,573	
101	13524	4,0-8,0	123,3	6,8	30,670	k Cephei
			125,4	6,7	692	
			126,4	7,3	714	
			125,0	6,93	30,692	
102	13553	7,5-7,5	1,4	6,1	30,580	
			1,1	6,1	583	
			1,7	6,1	586	
			1,4	6,10	35,583	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Car. Aitken	Grandezza	θ	ϱ	Data	Annotazioni
					1900 +	
103	13574	6,2-7,7	234°,6	13",7	30,572	
			232,6	13,4	580	
			232,6	13,7	583	
			234,1	—	586	
			233,5	13,60	30,580	
104	13946	7,0-7,5	255,8	16,3	30,668	
			254,6	16,3	685	
			256,8	15,9	711	
			255,7	16,17	30,688	
105	14184	7,4-7,6	88,0	8,3	30,668	
			88,2	8,4	692	
			87,8	9,1	711	
			88,0	8,60	30,690	
106	14270	7,3-8,0	6,1	5,2	30,722	
			5,8	5,6	725	
			6,8	5,9	728	
			6,2	5,57	30,725	
107	14279	4,0-5,0	270,6	10,7	30,722	γ Delphini
			270,6	10,4	725	
			272,1	10,6	728	
			271,1	10,57	30,725	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϵ	Data	Annotazioni
					1900 +	
108	14686	5,6-6,3	135°,1	25",8	31,848	61 Cygni
			134,8	24,8	881	
			134,9	25,30	31,865	
109	14710	6,5-7,5	298,3	19,1	40,621	
			300,1	19,1	624	
			301,2	—	657	
			300,3	17,9	660	
			300,0	18,70	40,640	
110	19804	7,8-7,8	171,4	2,6	40,662	
			171,1	3,0	670	
			169,4	2,9	673	
			170,6	2,88	40,668	
111	15971	4,4-4,6	287,0	2,9	37,818	ζ Aquari
			288,9	2,9	821	
			289,5	2,8	865	
			288,5	2,87	37,835	
112	16519	6,8-8,0	146,1	8,7	28,867	
			145,3	8,5	880	
			144,4	8,3	890	
			145,3	8,50	28,879	

Segue **TABELLA.** — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,840 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	δ	ϵ	Data	Annotazioni
					1900 +	
113	16557	7,0-8,0	254 ^o ,5	15",8	28,919	
			255,0	15,1	925	
			255,5	15,7	933	
			255,0	15,53	28,926	
114	16579	7,2-7,2	280,7	3,8	28,876	284 Aquari
			279,9	3,7	914	
			279,3	3,5	933	
			280,0	3,67	28,908	
115	16666	5,2-7,8	207,4	3,5	44,799	o Cephei
			207,3	3,5	892	
			206,4	3,2	922	
			207,0	3,40	44,871	
116	16672	5,2-7,2	350,1	12,4	28,870	94 Aquari
			350,0	13,2	873	
			349,5	13,6	876	
			349,6	13,2	904	
			349,8	13,10	28,881	
117	16725	7,0-8,0	202,2	3,6	38,763	
			202,1	3,6	837	
			202,1	3,60	38,800	

Segue TABELLA. — *Misure micrometriche di stelle doppie eseguite da G. Armellini dal 1927,340 al 1945,457.*

Num.	Cat. Aitken	Grandezza	α	ϵ	Data	Annotazioni
					1900 +	
118	17054	7,0-7,0	88,6	5,4	29,019	28 Andromedae
			87,4	5,3	027	
			88,4	5,7	032	
			88,1	5,47	29,026	
119	17079	6,9-7,3	281,6	18,4	30,890	
			281,3	18,1	908	
			281,0	18,8	922	
			281,3	18,43	30,905	
120	17149	6,5-6,5	237,4	2,3	30,871	37 Andromedae
			237,2	2,2	873	
			238,8	1,9	900	
			239,4	1,8	903	
			238,2	2,05	30,887	
			254,9	1,6	44,725	
			257,4	1,7	739	
			257,6	1,7	758	
			256,6	1,67	44,741	

RICERCHE SULLA RIDUCIBILITÀ POLAROGRAFICA DEL PIRROLO E DEI PIRROLI SOSTITUITI (*)

G. B. BONINO

Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Inquirat Auctor in hac Nota de pirrolo et pirrolis substitutis eorumque omnium reducibilitate.

In un lavoro apparso nel « Bollettino Internazionale dell'Accademia Croata di Scienze e Belle Arti » nel 1941, il Dr. DEZELIC aveva riassunto alcune sue ricerche sulla riduzione polarografica del pirrolo e di suoi derivati.

DEZELIC sosteneva che mentre il pirrolo non sostituito non è polarograficamente riducibile nelle ordinarie condizioni di esperienza e cioè per esempio in soluz. N/10 di LiCl in alcool etilico all'80 % o in soluz. N/10 di NH₄Cl in alcool etilico al 50 % e per differenze di potenziale all'elettrodo a goccia di -1,8 o anche 2 volts, il tetrametilpirrolo è polarograficamente riducibile nelle stesse condizioni.

DEZELIC, che aveva lavorato nel laboratorio di H. FISCHER, metteva questi suoi risultati in relazione con la variazione dell'aspetto chimico e chimico fisico del nucleo pirrolico sostituito rispetto al nucleo fondamentale non sostituito. E ciò seguendo alcune vedute espresse in proposito da BONINO e dai suoi allievi tra il 1934 e il 1940.

(*) Nota presentata nella Riunione privata del 19 luglio 1945.

Queste conclusioni del DEZELIC non trovarono però in accordo il BONINO il quale, pur ammettendo la diversità dell'aspetto chimico fisico del nucleo pirrolico sostituito e non sostituito, non era d'accordo sul fatto che tali differenze potessero così semplicemente essere rivelate per via polarografica in pirroli sostituiti soltanto con radicali alchilici.

Sembrava strano perciò al BONINO che se il pirrolo non si riduceva polarograficamente, si riducesse invece, come affermava il DEZELIC, il tetrametilpirrolo.

Il BONINO fece allora intraprendere al proprio allievo e collaboratore prof. SCARAMELLI una serie di ricerche sperimentali sulla riducibilità polarografica del pirrolo e di altri pirroli sostituiti come 1-metilpirrolo, 2-metilpirrolo, 1-allilpirrolo, 2,4-dimetilpirrolo, 2,5-dimetilpirrolo, 3-metil, 4-etilpirrolo, 2,3,5-trimetilpirrolo, 2,5-dimetil, 3-etilpirrolo, 2,4-dimetil. Nè il pirrolo nè i sovrannominati pirroli sostituiti si sono ridotti polarograficamente nelle condizioni sperimentali sovraccennate.

In collaborazione con la prof. GHIGI venne allora preparato anche il 2,3,4,5-tetrametilpirrolo sia con il metodo di PILOTY e HIRSCH condensando l'aminobutanone con metiletilchetone in soluzione alcalina, sia per azione del metilato di potassio sul trimetilpirrolo.

Quest'ultimo metodo ha fornito tetrametilpirrolo purissimo il quale studiato fuori del contatto dell'aria non si è mostrato polarograficamente riducibile contrariamente a quanto aveva sostenuto DEZELIC.

Viceversa il tetrametilpirrolo ottenuto con il metodo di PILOTY ed HIRSCH (il quale contiene come è noto impurezze più o meno grandi di tetrametilpirazina) mostrava un'onda polarografica di riduzione che però coincideva con quella della tetrametilpirazina ed era molto verosimilmente da attribuirsi a detta impurezza.

Anche il tetrametilpirrolo purissimo (e non riducibile polarograficamente) se lasciato all'aria comincia ad imbrunire ed allora mostra una netta onda polarografica di riduzione.

Dall'insieme di queste esperienze si può trarre la convinzione che il tetrametilpirrolo, come del resto gli altri pirroli sostituiti con radicali alchilici non sia riducibile polarograficamente.

I risultati contrari pubblicati da DEZELIC vanno perciò riveduti nel senso di controllare molto accuratamente la purezza dei composti studiati.

Ad ogni modo l'Autore ritiene per ora prematuro trarre dalle esperienze di DEZELIC materia per fare delle discussioni teoriche sulla costituzione del pirrolo e dei suoi derivati.

NOTA PREVENTIVA SUL MECCANISMO D'AZIONE DELLE CORDE VOCALI NELLA FONAZIONE (*)

A. GEMELLI, O. F. M.

Accademico Pontificio

(Dal Laboratorio di Psicologia sperimentale dell'Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano)

SYMMARIVM. — Auctor summam exponit permultorum experimentorum (de quibus fusius in alia commentatione aget), quae ideo perfecit, ut interpretatur qua ratione chordae vocales in phonatione efficienda operentur. Opinatur auctor largugem veluti oscillatorem se gerere, qui agit ex eo quod vocales chordae operiuntur vel clauduntur; attenuatis autem vibrationibus, quae a larynge oriuntur, superponuntur supertoni quos pharynx et os praestant.

Nelle numerose ricerche compiute per determinare il meccanismo d'azione delle corde vocali nella fonazione non si può dire che i numerosi autori che, specie in questi ultimi anni, ne hanno fatto oggetto di studio, abbiano raggiunto l'accordo dando una descrizione di esso che permetta di stabilire un rapporto tra il modo di comportarsi delle corde vocali e la forma delle vibrazioni dell'aria che vengono trasmesse a quella porzione del tubo fonatorio che si trova al di sopra della rima glottidea. Senza dubbio la stroboscopia e la radiografia stratigrafica hanno permesso di acquistare nuove conoscenze; la cinematografia ultrarapida purtroppo non ha corrisposto alle speranze concepite dopo i lavori di PANCONCELLI CALZIA; ad ogni modo, questi ed altri metodi dei quali possiamo disporre sono metodi indiretti, cosicchè è necessario ricorrere ad ipotesi che, connettendo i fatti osservati, diano ragione del meccanismo d'azione delle corde vocali. La questione è particolarmente complessa per ciò che si riferisce alla formazione delle vocali, alle quali restringo la mia esposizione ⁽¹⁾.

(*) Nota presentata nella Riunione privata del 19 luglio 1945.

(1) Mi propongo di pubblicare al più presto la memoria ampiamente documentata e illustrata nella quale i fatti qui esposti verranno distesamente descritti.

W. ed F. TRENDELENBURG e i loro collaboratori, VULLSTEIN, HARTMANN, MÜLLER ed altri, affrontarono direttamente la questione apportandovi, essi ritennero, un contributo risolutivo; essi cioè studiarono la laringe isolata di vitello e di uomo; parve dapprima che essi avessero dato una dimostrazione positiva della dottrina di HELMHOLTZ; bisogna affermare che questo risultato non fu raggiunto. Secondo le ricerche di W. TRENDELENBURG, le corde vocali darebbero vibrazioni uniformi che si ripeterebbero un determinato numero di volte in un secondo, ossia la rima glottidea si aprirebbe altrettante volte quanti sono i periodi ciclici che costituiscono le vocali; le sezioni del tubo fonatorio superiore alla rima glottidea avrebbero il compito di formare quelle vibrazioni che sono caratteristiche come toni parziali delle vocali; aggiungendosi e sovrapponendosi alla fondamentale originata dalla rima glottidea danno luogo ai cicli caratteristici costituenti le vocali.

In questa teoria però riesce incomprensibile come la sezione media e superiore del tubo fonatorio possono, come risonatori, dare origine alle numerose vibrazioni che caratterizzano una vocale aggiungendosi e sovrapponendosi, come si è detto, alla fondamentale; infatti le vibrazioni delle corde vocali sono, secondo W. TRENDELENBURG, nettamente sinusoidali.

Anche la tecnica usata da W. TRENDELENBURG lascia luogo a qualche dubbio. Egli isola la laringe; stimola la rima glottidea con una corrente d'aria e registra, mediante un ingegnoso dispositivo, l'aprirsi e il chiudersi periodico della rima glottidea. Inoltre, valendosi del metodo del microfono condensatore, con il quale BACKHAUS ha studiato le vibrazioni proprie della cassa del violino, W. TRENDELENBURG ha registrato le vibrazioni delle corde vocali. In terzo luogo, registrando in pari tempo le vocali emesse dalla bocca e le aperture e le chiusure della rima glottidea, W. TRENDELENBURG ha dimostrato che l'inizio di ciascuno dei periodici ciclici dai quali è costituito ogni vocale coincide con l'apertura della rima glottidea.

Se non che è da obbiettarsi che: 1) i risultati delle ricerche compiute sul cadavere non si possono senz'altro trasportare sul vivente; 2) il meccanismo delle corde vocali non può essere considerato a sè, ma quale elemento di un tutto, e cioè di un organo complesso quale è il tubo fonatorio; basta infatti ricordare gli effetti di

accoppiamento delle varie sezioni del tubo fonatorio, ovvero i caratteri dei vari registri per cavarne come conseguenza che non è possibile considerare il meccanismo delle corde vocali come a sè stante e pretendere di interpretarlo come un fatto isolato.

Per queste considerazioni le ricerche di HUSSON e TARNEAUD, nonchè quelle di STERN, di WEISS compiute soprattutto con l'esame stroboscopico, hanno il merito di aver cercato di mettere in luce che il meccanismo delle corde vocali è dipendente dalla impostazione che, per la fonazione, viene data alle varie parti del tubo fonatorio. Per altro verso le ricerche di RUSSEL e di CURRY hanno precisata l'influenza che l'impostazione delle corde vocali ha nella emissione delle vocali sui diversi registri.

Guidato da questi concetti fondamentali, ho compiuto due ordini di ricerche:

1) Mediante un microfono piezoelettrico ho registrato le vibrazioni trasmesse dalla cavità laringea alla faccia esterna della cartilagine tiroidea. Questa registrazione era già stata fatta da altri autori e anche da me; ma poichè venivano impiegati microfoni tali che l'aerea di cui era registrata la vibrazione trasmessa era troppo ampia, ne seguiva che veniva registrato non solo ciò veniva prodotto per opera delle vibrazioni delle corde vocali, ma anche le vibrazioni delle parti del tubo fonatorio superiori alla rima glottidea. Ho perciò costruito microfoni molto piccoli, di grandezza, variabile a seconda dei soggetti per i quali venivano usati, da due a cinque cm. Una adatta amplificazione permetteva la registrazione esclusivamente delle vibrazioni trasmesse dalla laringe. Contemporaneamente veniva registrato il suono emesso dalla bocca. Delle vibrazioni trasmesse dalla laringe ho fatto un'analisi sia mediante un analizzatore automatico elettrico che ho descritto altrove, sia mediante l'analisi meccanica degli oscillogrammi. Gli oscillogrammi delle vibrazioni trasmesse dalla laringe si presentano come una curva a periodi costanti costituiti da una fondamentale, e da uno, da due, al più da tre sopratoni. Quanto più è bassa la voce, maggiore è il numero dei sopratoni; in alcune voci maschili giunge fino a tre. Quanto più la voce è elevata, tanto minore è il numero dei sopratoni che si riducono anche ad uno.

Quale è il significato di queste registrazioni? come si debbono interpretare questi oscillogrammi? A mio modo di vedere la laringe,

per il fatto della apertura e chiusura ritmica della rima glottidea, opera come un oscillatore che entra in giuoco per la pressione esercitata dalla ventilazione polmonare e per la contrazione dell'apertura glottica; però la cavità laringea, chiusa in basso dalle corde vocali e in alto dalle false corde vocali, deve considerarsi come un risonatore a due aperture mobili a seconda della posizione delle corde vocali vere e false. In questo modo di considerare le corde vocali false viene attribuita ad esse una importante funzione, mentre sin qui dai varî autori ad esse non si dava alcun significato. I ventricoli di MORGAGNI costituiscono parte importante di questo risonatore.

I toni parziali registrati da me giungono nell'uomo sino a 980 e nella donna sino a 1220. È evidente che le corde vocali, costituite come sono da muscoli, non possono avere vibrazioni così elevate. Bisogna dunque ammettere che le corde vocali vengono ritmicamente e rapidamente premute l'una contro l'altra così da chiudere la via d'uscita all'aria; poscia si allontanano distendendosi più lentamente l'una dall'altra. L'altezza del suono, ossia la sua frequenza, è in ragione diretta del grado di costrizione dello sfintere glottideo, ossia del modo come le corde vocali sono premute l'una contro l'altra. È da osservarsi che gli oscillogrammi registrati ponendo il microfono sulla faccia esterna della laringe sono costituiti da onde sinusoidali con un caratteristico e costante decremento; è lo stesso grado di decremento che si osserva nelle vocali quando sono registrate all'uscita dalla bocca; questo decremento si deve al modo caratteristico di comportarsi del risonatore costituito dalla cavità laringea.

Siamo forse nel caso di ancie battenti? Non mi sembra; io ritengo che confrontare il meccanismo delle corde vocali con quello di varî strumenti musicali, come hanno fatto varî autori, non conduca a risolvere il problema; se proprio, come fanno taluni, si vogliono paragonare le corde vocali ad ancie battenti, bisogna dire che sono ancie che premono fortemente l'una contro l'altra, più o meno a seconda della vocale per dare la quale il tubo fonatorio è impostato.

2) Questi fatti sono stati confermati da una serie di radiografie che io ho potuto compiere in posizione antero-posteriore (ipofaringografia) valendomi dell'aiuto di un esperto radiologo, il prof. CIGNOLINI PIETRO. È in fondo la tecnica di Retli, perfezionata dal CIGNOLINI stesso, ossia

si tratta di introdurre la pellicola radiografica in faringe e di eseguire la radiografia durante l'emissione di suoni.

Dalle radiografie eseguite risulta:

a) in ciascuna delle tre vocali *a*, *i*, *u* (che nelle mie ricerche sulle vocali ho dimostrato essere le fondamentali, alle quali tutte le altre vocali possono essere ridotte), le corde vocali hanno un diverso atteggiamento. Mentre nell'*a* le corde vocali sono maggiormente premute l'una contro l'altra e sono come ispessite nei loro margini, invece nell'*i* il riavvicinamento delle due corde è minimo e minimo è pure il loro spessore; nell'*u* abbiamo invece un intermedio accollamento delle due corde vocali e le corde vocali hanno un ispessimento medio del loro margine;

b) parallelamente si ha un diverso comportamento delle altre parti della laringe; nell'*a* il ventricolo è quasi scomparso e le pliche ventricolari sono esse pure avvicinate ed ispessite; l'epiglottide è allargata; nell'*u* i ventricoli sono al massimo distanziati; hanno fondo arrotondato e quasi rigonfia, mentre l'epiglottide è moderatamente allungata; nell'*i* l'epiglottide è al massimo allungata ed i ventricoli sono meno distanziati che in *a* e in *u* ⁽¹⁾.

Concludendo: non si possono considerare le corde vocali come a sè stanti e non si può rendere ragione del loro meccanismo considerando a sè; se ci si vuole rendere conto del loro meccanismo, bisogna considerare le corde vocali come uno degli elementi delle parti molli del tubo fonatorio, le quali tutte prendono un caratteristico atteggiamento per ciascuna vocale; perciò il paragonare la laringe ad uno strumento musicale è fondato sull'erroneo concetto della isolata funzionalità delle corde vocali; a dare le differenti vocali concorrono, insieme con la tensione delle corde vocali e con il loro ispessimento, anche l'allungamento o l'allargamento dell'epiglottide, la dilatazione dei ventricoli, l'ispessimento delle pliche.

La laringe adunque agisce come un tutto, ossia come un oscillatore dato dall'aprirsi e chiudersi periodico delle corde vocali; alle vibrazioni smorzate che si formano per opera della laringe si sovrapp-

(1) Non mi soffermo a descrivere le modificazioni dell'atteggiamento delle corde vocali in rapporto con i diversi registri, perchè questo sarà descritto nella memoria in cui i fatti verranno distesamente descritti.

pongono poi i sopratoni originati per opera del risonatore medio (faringe) e superiore (bocca).

Ci si può rendere conto, considerando questa cooperazione varia delle parti molle della laringe ad assumere una diversa conformazione nella impostazione del tubo fonatorio per dare le singole vocali, del fatto che le vibrazioni che si formano nella laringe quando si emettono le singole vocali e che vengono trasmesse alla superficie esterna della laringe, non sono tutte dello stesso tipo, ma presentano differenze caratteristiche da vocale a vocale.

Le vocali dunque cominciano a differenziarsi nella laringe e il resto del tubo fonatorio superiore alla rima glottidea completa arricchisce queste differenze tra vocale a vocale.

Ometto di dare le indicazioni bibliografiche che verranno date nella memoria nella quale i concetti qui sommariamente esposti verranno sviluppati ed illustrati.

DESCRIZIONE DI INTERCASTE
DI *SYNTERMES GRANDIS* (RAMBUR)
CAUSATE DA UN PROTOZOO MICROSPORIDIO (*)

(Con sei figure)

FILIPPO SILVESTRI

Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Describit Auctor, imaginibus additis, duas peculiare insectorum formas (quarum proprietates mediae sunt inter opifices et milites), quas ipse *Syntermes grandium* (Rambur) nido prope Tres Lagoas (Matto Grosso, in Brasilia) collegit; hae formae confectae sunt ex eo quod in coelomate magno numero adest quidam parasitus protozoous microsporidius, quod videtur generis *Thelohantiarum*.

Durante il mio viaggio del 1935 nel Sud America mi occupai molto di raccolte di Termiti e Termitofili e di osservazioni su tali insetti e il 21 luglio aprendo un nido di *Syntermes grandis* nelle vicinanze di Tres Lagoas (Matto Grosso) ebbi la sorpresa di vedere tra gli operai ed i soldati alcuni individui che ricordavano un poco i *Myiagenii* da me descritti dell'isola di Luzon (Filippine) ⁽¹⁾ e che si distinguono sopra tutto per il colore giallastro ⁽²⁾ e per la forma del capo. Non ebbi tempo e forza per esaminare da solo tutto il nido, perciò non posso precisare quanti potevano essercene, ma tra qualche migliaio di operai, soldati e ninfe e larve riuscii a raccoglierne 15, quindi essi erano in numero assai scarso.

(*) Nota presentata nella Riunione privata del 19 luglio 1945.

(1) Descrizione di particolari individui (*Myiagenii* di *Termes gilvus* Hag. parassitizzati da larva di Dittero. Boll. Lab. Zoologia, Portici XIX (1926), pagg. 3-18 con 8 figure nel testo.

(2) Un colore simile ma meno diffuso lo assumono anche vecchi operai, che hanno il tessuto adiposo infarcito di concrezioni sferiche di composti urici.

Tornato in Italia esaminai tali esemplari e fui colpito dal vedere già attraverso il tegumento, per trasparenza, uno strato compatto di corpiccioli sferici o quasi che occupavano tutta la cavità del corpo sotto il tegumento sopra l'intestino. Estratte alcune di tali sferette e spappolate in blù di metilene al 5 % vidi subito al microscopio che si trattava di cisti di protozoi piene di spore. Allestiti preparati microscopici con sezioni colorate ebbi la conferma che tutte tali sferette erano cisti di un protozoo microsporidio, riferito poi, almeno provvisoriamente, ad una nuova specie di *Thelohania* (*T. termitum* sp. n.).

È questo il primo caso di individui di Termiti, che hanno acquistato speciali caratteri per essere parassitizzati da un microsporidio. Nemmeno tra le formiche sono note intercaste per la presenza di tali parassiti; perciò credo opportuno far conoscere tali intercaste nei loro caratteri.

Nella colonia di *Syntermes grandis* si trovano normalmente, oltre alla coppia reale, ad ova, larve e ninfe in vari stadi di sviluppo, operai di 3 sorta: grandi, medi e piccoli e soldati.

Operaio piccolo

(Fig. I, 1 e Fig. II)

Corpo di colore paglierino, col capo ed il pronoto di colore crema e l'addome in gran parte cenerognolo per il colore del contenuto dell'intestino che si vede per trasparenza.

Il capo è poco più largo (circa $\frac{1}{8}$), alla base delle mandibole, che lungo e sopra è fornito di brevi e brevissime setole sparse; non ha accenno visibile di occhi nè di ocelli; le antenne sono moniliformi, composte di 19 articoli, dei quali il 3° è nudo, appena più corto del 2°, quasi il doppio più lungo del 4°, il 5° è poco più lungo del 4°, i seguenti dal 6° al 12° vanno leggermente aumentando in lunghezza, dal 12° al 18° sono subuguali, il 19° è poco più lungo del precedente ed è alquanto subellittico, tutti gli articoli eccettuato il 3° sono provvisti di alcune brevi setole e dall'8° anche di brevissime setole distali gradatamente fino al 13° più numerose e poi in tutti molto numerose. Più frequentemente l'operaio piccolo ha antenne di 20 articoli, il 3° dei quali è nudo ed è alquanto più corto del 2°, perchè ha dato origine

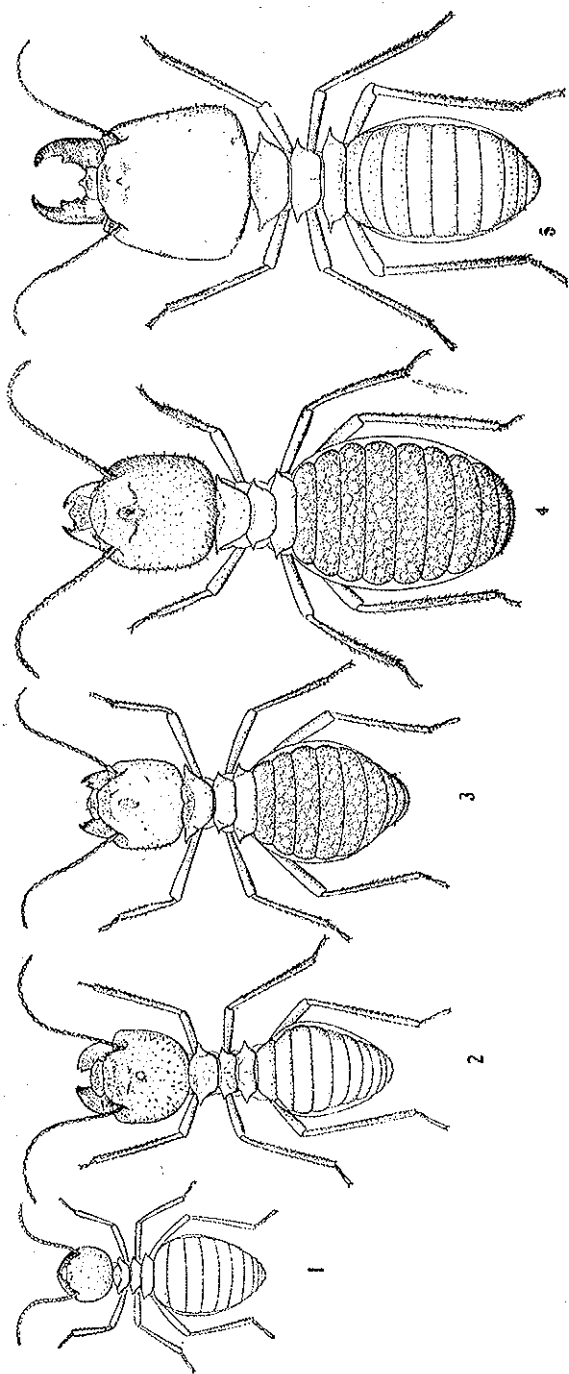


FIG. 1.

Syntermes grandis: 1. operaio piccolo; 2. operaio grande; 3. intercasta piccola; 4. intercasta grande; 5. soldato (figure egualmente ingrandite).

ad un altro articolo (3° di questa antenna a 20 articoli) uguale al 3° dell'antenna a 19 articoli.

Il labbro superiore è poco più largo (anteriormente) che lungo, anteriormente è convesso, poi avanti alla parte mediana si restringe un poco e sulla faccia dorsale ha un certo numero di setole brevi e brevissime.

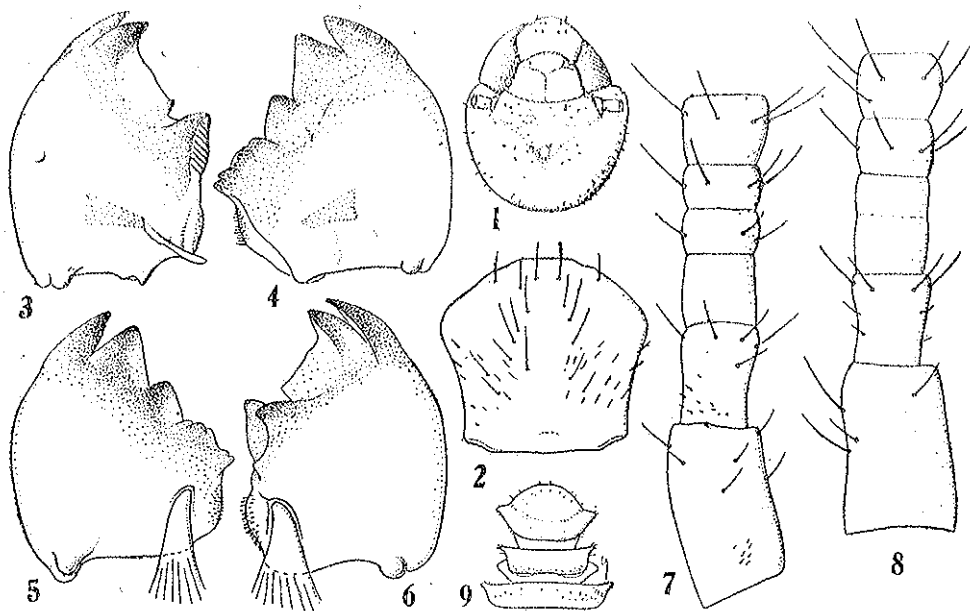


FIG. II.

Syntermes grandis, operaio piccolo: 1. capo prono; 2. labbro superiore; 3-4, mandibole viste dalla faccia dorsale; 5-6, le stesse viste dalla faccia ventrale; 7. parte prossimale di antenna destra di 20 articoli; 8. parte prossimale di antenna destra di 19 articoli (figura variamente ingrandita).

Le mandibole sono brevi, robuste, la destra ha 3 denti acuti e una breve parte molare a superficie tuberculata, la sinistra ha pure 3 denti, ma il 2° è molto largo, a margine obliquo, con una punta grandetta all'apice distale e uno brevissimo all'apice prossimale, il 3° dente è triangolare ed è coperto alla faccia superiore dalla mola, che sporge a dente subtriangolare in avanti.

Le mascelle del 1° piano hanno il lobo interno poco più corto dell'esterno ed armato di un forte e acuto dente preapicale.

TORACE. - Il pronoto ha il lobo anteriore a margine largamente arrotondato e fornito sulla faccia inferiore di brevissime setole spiniformi sparse e sulla faccia superiore, specialmente lungo il margine, di setole brevi e di setole più corte delle brevi, lo scuto (o parte posteriore) ha pure un buon numero di setole brevi e alcune più corte e gli angoli laterali prolungati in fuori in forma di processo lungo (misurato dalla base del lobo anteriore) mm. 0,38 circa e provvisto sul margine anteriore di 2 setole brevi; il mesonoto è alquanto più stretto del pronoto, ha setole brevi posteriori e si prolunga lateralmente in processo più breve del pronotale, il metanoto è più largo e un poco più lungo del mesonoto, è fornito di setole, come le mesonotali, posteriori e alcune subposteriori, e si prolunga pure lateralmente in processo simile a quello del mesonoto.

Zampe fornite di buon numero di setole brevi e più brevi, sottili e lungo il margine interno delle tibie anche di buon numero di setole brevi robuste disposte in 1-2 serie.

ADDOME. - I tergiti sono forniti di 2-3 serie di setole brevi e più brevi posteriori e subposteriori, gli sterniti hanno anche setole brevissime sparse, abbastanza numerose, e 4 setole lunghette posteriori; i cerci hanno il 2° articolo conico, acuto all'apice.

Lunghezza del corpo mm. 10; larghezza del capo 3,30; lunghezza delle antenne 4,60; della mandibola destra 1,30; larghezza del metanoto coi processi spinosi mm. 1,20; delle tibie posteriori, 3,40.

Operaio grande

(Fig. I, 2 e Fig. III)

Si distingue dall'operaio piccolo innanzi tutto per le dimensioni che sono:

Lunghezza del corpo mm. 12; larghezza del capo 4, lunghezza delle antenne 8, della mandibola destra 1,10, larghezza del metanoto coi processi spinosi mm. 3; lunghezza delle tibie posteriori 5,20.

Il colore del capo è testaceo-ferrugineo, il resto del corpo al dorso ocracco pallido, al ventre paglierino, ma l'addome appare alquanto fosco per il colore del contenuto dell'intestino, che si vede per trasparenza.

Le antenne sono composte di 20-21 articoli: nel primo caso col 3° il doppio più lungo del 2° e avente un accenno distale di divisione, nel secondo caso quasi $\frac{1}{3}$ più lungo del 2° e intero ed è il doppio o quasi più lungo del 4°.

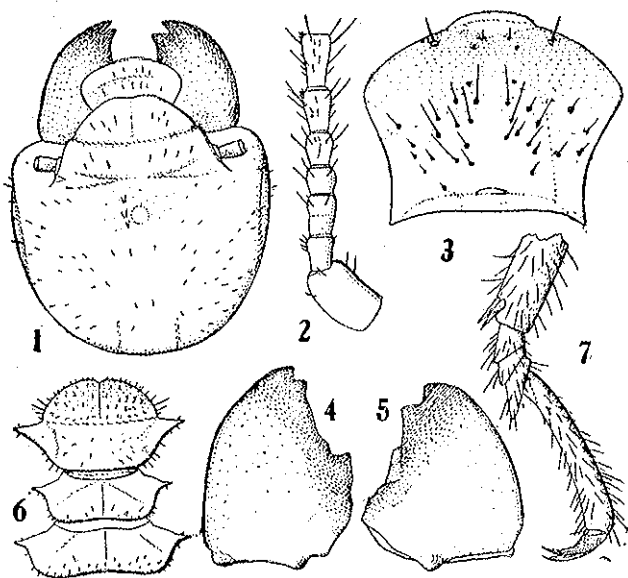


FIG. III.

Syntermes grandis, operaio grande: 1, capo prono; 2, parte prossimale di antenna; 3, labbro superiore; 4-5, mandibole viste dalla faccia dorsale; 6, torace prono; 7, parte apicale della tibia, tarso e pretarso di zampa posteriore (figura variamente ingrandita).

Labbro superiore e appendici boccali come nell'operaio piccolo e solo proporzionalmente più grandi, eccetto le mascelle del 1° paio che hanno il lobo interno più lungo dell'esterno per il tratto dal forte dente preapicale all'apice.

TORACE. - Tutti e 3 gli scuti toracici sono prolungati ai lati in un processo spiniforme acuto lungo al pronoto, misurato dalla base del lobo anteriore, mm. 0,50; chetotassi simile a quella dell'operaio piccolo.

Zampe e addome come nell'operaio piccolo.

Soldato

(Fig. I, 5 e Fig. IV)

Corpo ocraceo, colla parte dorsale del torace ed il capo ferruginei e l'addome macchiato più o meno di colore fosco per il colore del contenuto dell'intestino che si vede per trasparenza.

Il capo è quasi tanto lungo che largo posteriormente, ha gli angoli posteriori arrotondati, i lati dall'indietro all'avanti un poco convergenti, la superficie fornita di setole brevissime sparse, è un poco rialzata obliquamente a lato interno delle antenne; apertura ghiandolare frontale appena sporgente, subgene fornite di leggero spigolo longitudinale laterale e un poco depresse nel resto; le antenne, se ripiegate in dietro, sorpassano di poco l'occipite, composte di 20 articoli, col 3° articolo intero e poco più lungo del 2° oppure col 3° circa $\frac{1}{3}$ più lungo del 2° e avente un accenno di divisione distale più o meno distinto.

Il labbro superiore è quasi tanto lungo che largo subanteriormente, è subtriangolare alla parte anteriore e a lati leggermente convergenti dall'angolo laterale anteriore al posteriore, sulla superficie è fornito di varie setole lunghette e di altre brevi e più brevi.

Le mandibole sono lunghe quanto la metà della lunghezza del capo, sono molto robuste, colla parte apicale alquanto arcuata, attenuata, acuta e la destra ha un robusto dente submediano, la sinistra un dente simile un poco più avvicinato all'apice, nonchè un dente grandetto subacuto molare. Le mascelle del 1° paio hanno il lobo interno pochissimo più corto dell'esterno e provvisto di piccolissimo dente tuberculiforme preapicale visibile solo dalla faccia superiore.

TORACE. — Tutti e 3 gli scuti toracici sono prolungati lateralmente in un processo spiniforme, acuto, lungo al pronoto (misurato dalla base del lobo anteriore) circa mm. 0,80.

Zampe e addome simili a quelli dell'operaio grande.

Lunghezza del corpo mm. 18, del capo 10; larghezza dello stesso 6; lunghezza delle mandibole 3,4 delle antenne 8; larghezza del metanoto coi processi spiniformi mm. 4,20; lunghezza delle tibie posteriori 6,20.

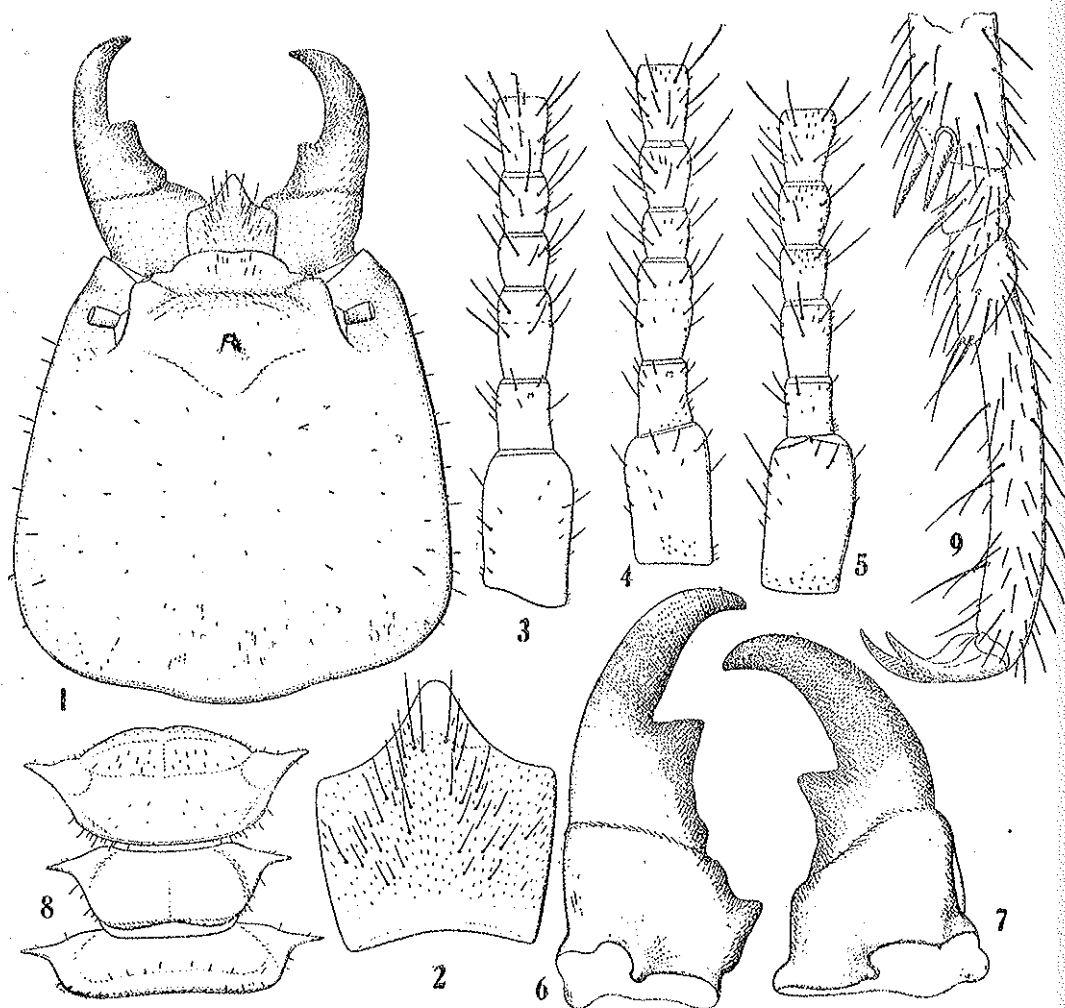


FIG. IV.

Syntermes grandis, soldato: 1. capo prono; 2. labbro superiore; 3. antenna destra di 20 articoli; 4. antenna destra di altro esemplare di 20 articoli; 5. antenna destra di altro esemplare di 20 articoli; 6-7. mandibole viste dalla faccia dorsale; 8. torace prono; 9. parte apicale della tibia, tarso e pretarso della zampa posteriore (figura variamente ingrandito).

Intercasta grande

(Fig. I, 4 e Fig. V)

Corpo ocraceo col capo ed il dorso del torace di colore testaceo-ferrugineo, addome di colore crema o ocrroleuco per il colore delle cisti dello sporozzo, che si vedono per trasparenza. Il capo è poco più largo che lungo, ha i lati subparalleli e gli angoli posteriori arrotondati, sulla superficie ha brevissime setole sparse, la fontanella stretta e pochissimo allungata, le subgene leggermente carenate-convesse ai lati, piane sul resto.

Antenne di 21 articoli, col 3° subuguale al 2° o appena più lungo dello stesso e quasi il doppio più lungo del 4° oppure il 3° alquanto più lungo del 2° avente un accenno di divisione distale ed è un po' meno del doppio più lungo del 4°; labbro superiore alquanto più largo alla parte subanteriore che lungo, coi lati dalla base in avanti fino alla parte subanteriore un poco divergenti, angoli allargati, leggermente arrotondati, parte anteriore a margini laterali convergenti fino al margine apicale che è larghetto e troncato quasi a linea retta, la superficie è fornita di setole brevi e di selole più brevi come si vede nella figura.

Le mandibole sorpassano alquanto il labbro superiore e ambedue hanno un forte dente acuto poco innanzi all'apicale e la regione molare della sinistra leggermente sporgente a tuberocolo acuto.

Le mascelle del 1° paio sono più lunghe circa 1 millimetro di quelle dell'operaio grande, che le ha subuguali a quelle del soldato e hanno il lobo interno poco più corto dell'esterno e fornite di un forte dente preapicale acuto. Il labbro inferiore ha il mento coi lobi circa $\frac{4}{7}$ più lunghi di quelli dell'operaio grande ed il submento colla gola circa $\frac{1}{3}$ più lungo e più largo, mentre nel soldato colla lunghezza del capo è sviluppata, quasi per la stessa lunghezza, la gola.

TORACE. — Tutti e 3 gli scuti toracici sono prolungati lateralmente in un processo spiniforme lungo al pronoto misurato dalla base del lobo anteriore, mm. 0,70.

Zampe, simili a quelle dell'operaio grande.

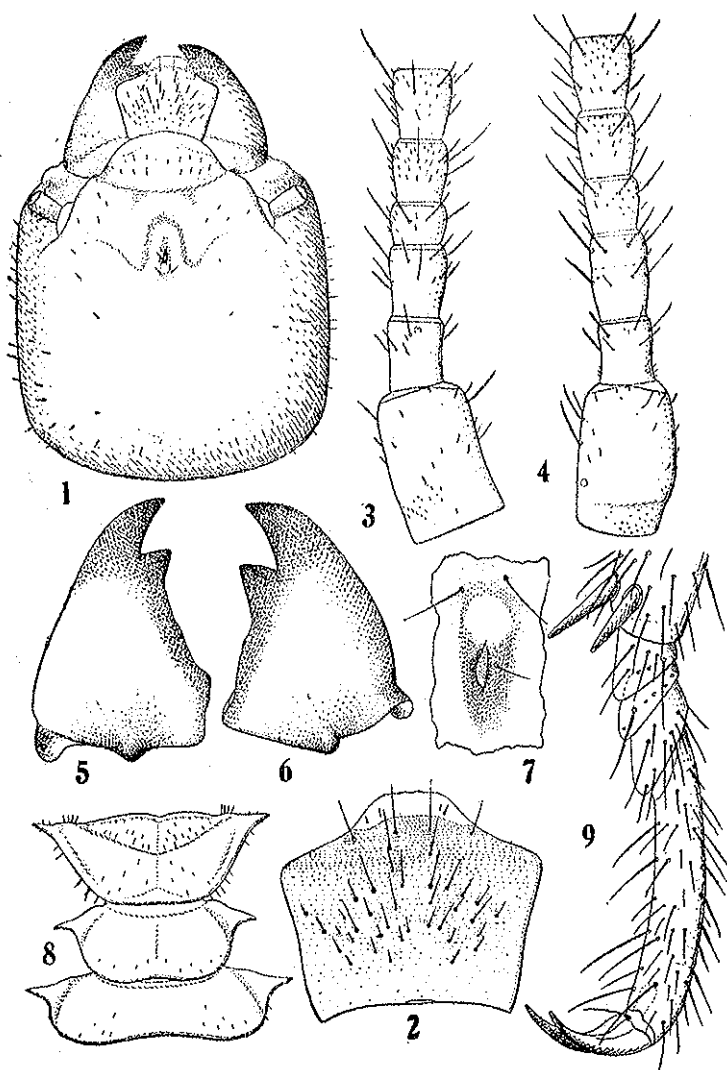


FIG. V.

Syntermes grandis, intercasta grande: 1. capo prono; 2. labbro superiore; 3. parte prossimale di antenna destra di 21 articoli; 4. parte prossimale di altra antenna destra di 21 articoli; 5-6. mandibole viste dalla faccia dorsale; 7. parte della fronte in corrispondenza alla fontanella; 8. torace prono; 9. parte apicale della tibia, tarso e pretarso di zampa posteriore (figure variamente ingrandite).

Lunghezza del corpo mm. 18, lunghezza del capo 6, larghezza dello stesso 4,5, lunghezza delle mandibole 2,40, delle antenne 8,5; larghezza del metanoto coi processi spiniformi mm. 4,10; lunghezza delle tibie posteriori 5,20

Intercasta piccola

(Fig. I, 3 e Fig. VI)

Corpo di colore ocraceo col capo e la parte dorsale ferrugini o ferrugini-testacei e l'addome ocroleuco per il colore delle cisti della *Thelohania*, che si vedono per trasparenza.

Il capo ha una forma simile a quella dell'intercasta grande, antenne di 19-21 articoli e nel 1° caso il 3° è quasi il doppio più lungo del 2°, ed ha un manifesto accenno di divisione in 2, nel 2° caso, il 3° articolo è subuguale al 2°, il 4° è subuguale al 3° o appena più lungo dello stesso ed ha un accenno di divisione in 2; la mandibola destra ha un breve rudimento del 1° dente prossimale.

Gli altri caratteri, eccettuati quelli delle dimensioni, appresso indicati, sono simili a quelli dell'intercasta grande.

Lunghezza del corpo mm. 13, lunghezza del capo 4,80, larghezza dello stesso 3,60; lunghezza delle antenne 6,5, delle mandibole 2, lunghezza dei lati del pronoto dalla base del lobo anteriore all'apice del processo acuto mm. 0,50; lunghezza del metanoto coi processi spinosi mm. 3,10; lunghezza delle tibie posteriori 5,20.

OSSERVAZIONE

Dall'esame dei caratteri esterni dell'operaio grande con quelli dell'intercasta grande risulta che questa ha dimensioni nettamente maggiori, un capo più sviluppato, di forma anche diversa avendo i lati subparalleli, antenne di 21 articoli col 3° almeno un poco più lungo del 2°; mandibole il doppio più lunghe e armate soltanto di 2 denti (apicale e preapicale); passando poi ai caratteri interni (visibili per la parte immediatamente sotto il tegumento) si nota che mentre l'operaio ha l'intestino visibile per trasparenza, perchè ha un tessuto adiposo

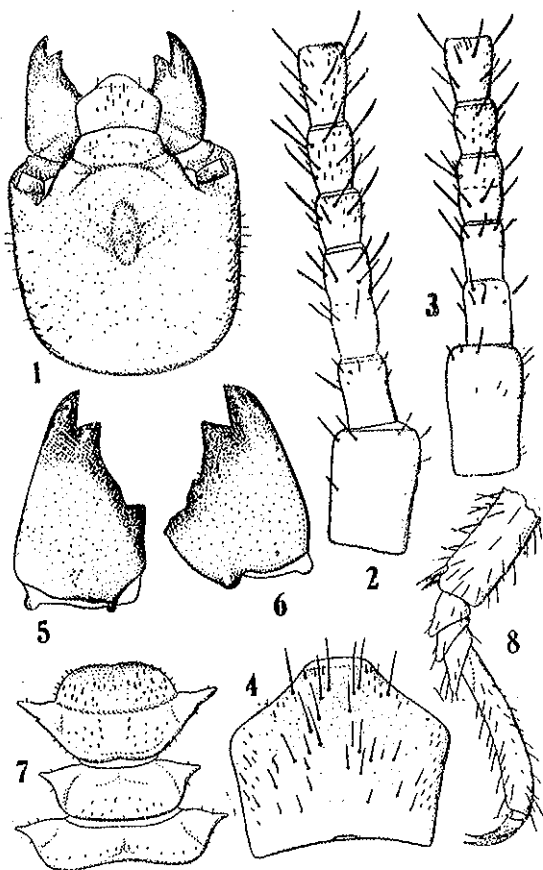


FIG. VI.

Syntermes grandis, intercasta piccola: 1. capo prono; 2. parte prossimale di antenna di 19 articoli; 3. parte prossimale di antenna di 20 articoli; 4. labbro superiore; 5-6. mandibole viste dalla faccia dorsale; 7. torace prono; 8. parte distale della tibia, tarso e protarso di zampa posteriore (figure variamente ingrandite).

ridotto a gruppi di cellule sottili, vacuolizzate e non formanti uno strato continuo, gli individui dell'intercasta hanno sotto il tegumento una massa compatta di cisti contenenti spore di *Thelohania* estesa a tutta la parte dorsale e laterale del metatorace e dell'addome e anche al ventre eccettuata la parte corrispondente agli urosterniti 3° a 7° che ne è più o meno estesamente libera. Tali cisti negli esemplari più infestati si spingono in piccolo numero fino ai lati dell'esofago dietro

il capo; sono sferiche o quasi, misurano in diametro mm. 0,20-0,60, e sono distribuite in vari strati sottoposti gli uni agli altri sotto il tegumento dorsale fino a 4-5 e lateralmente vanno diradandosi fino a scomparire, come ho detto, sopra una parte più o meno estesa ventrale dell'addome. Ciascuna cisti contiene un numero immenso di spore di *Thelohania* ⁽¹⁾.

Anche l'intercasta minore ha dimensioni (eccettuata la larghezza del capo) alquanto maggiori dell'operaio grande e sopra tutto le mandibole più lunghe (quasi il doppio di quelle di detto operaio); quindi tanto che si consideri l'intercasta grande che la piccola si ha rispetto anche dell'operaio grande uno sviluppo più progredito rispetto a quello degli operai e un capo di forma alquanto diversa e provvisto di mandibole più lunghe.

Se passiamo ad un confronto delle intercaste col soldato notiamo dimensioni minori e sopra tutto minore sviluppo del capo e delle sue appendici; perciò le intercaste vanno considerate forme intermedie tra operai e soldati, e siccome sono più progredite nello sviluppo rispetto agli operai e meno rispetto ai soldati vanno anche considerate come soldati arrestati nel loro sviluppo dal microsporidio, a causa della sottrazione di sostanze trofiche oppure anche per qualche elaborato di esso.

(¹) Io ho esaminato queste cisti isolate e anche in sezioni sottili e colorate; data la conservazione degli esemplari in semplice alcole a 70° posso soltanto accertare, che esse oltre a qualche residuo non definibile sono ripiene di spore, le quali hanno una forma cilindrica convessa ai poli, misurano in lunghezza μ 6 e in larghezza μ 3.

Le cisti sezionate e le spore hanno una grande somiglianza colle cisti e le spore di *Thelohania ephestiae* Mattes quali furono disegnate da O. MATTES («Zeit. wiss. Zool.», vol. 132, pagg. 526-582, Taf. IX-XII).

Io do il nome provvisorio di *Thelohania termitum* sp. n. alla forma da me trovata nel *Syntermes*. È da augurare che qualche zoologo vivente nel Brasile possa studiare lo sviluppo di tale parassita e precisarne tutti i caratteri.

SULL'ESISTENZA, SOPRA LE SUPERFICIE ALGEBRICHE, DI SISTEMI CONTINUI COMPLETI INFINITI, LA CUI CURVA GENERICA È A SERIE CARATTERISTICA INCOMPLETA (*)

GUIDO ZAPPA

SUMMARIVM. — Cum, sicut SEVERI praeviderat, iam constet non omnibus continuis systematibus curvarum super superficiem esse seriem propriam completam, Auctor primum exhibet exemplum systematis continui completi infiniti, cuius propria series est incompleta in generica curva.

Esempi di curve algebricamente isolate a serie caratteristica non completa sopra una superficie algebrica furono dati recentemente da SEVERI ⁽¹⁾, il quale successivamente, prevedendo che il fenomeno della incompletezza della serie caratteristica potesse presentarsi anche per curve algebricamente non isolate, mi propose di ricercare esempi del genere sopra una rigata algebrica. In una mia Nota precedente ⁽²⁾, ho dato l'esempio di una curva, appartenente ad una rigata di genere 2 e ordine 6 dello spazio ordinario, giacente in un sistema continuo ∞^1 , e dotata di serie caratteristica incompleta. La curva generica del sistema continuo era però sempre a serie caratteristica completa, solo per una curva particolare di esse presentandosi il fenomeno dell'incom-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 30 luglio 1945.

⁽¹⁾ *Intorno ai sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica*. « Commentarii mathematici Helvetici », 15 (1943), pag. 138-248.

⁽²⁾ *Sull'esistenza di curve algebricamente non isolate, a serie caratteristica non completa, sopra una rigata algebrica*. « Pontificia Academia Scientiarum », Acta, 7 (1943).

pletezza. Rimaneva pertanto aperta la questione di sapere se possono presentarsi sistemi continui completi infiniti, la cui curva *generica* sia a serie caratteristica incompleta.

La presente Nota risolve il problema fornendo un esempio di un sistema continuo completo ∞^1 , situato sopra una rigata algebrica d'ordine 8 e genere 2 dell' S_5 , la cui generica curva è a serie caratteristica incompleta.

Ultimamente SEVERI ⁽¹⁾ ha dimostrato il teorema della completezza della serie caratteristica, con metodi puramente algebrici, per le curve di sistemi continui soddisfacenti ad ipotesi di generalità (le quali naturalmente, nel nostro caso non si verificano).

Consideriamo una rigata F , d'ordine 10 e genere 2 dell' S_7 , ottenuta congiungendo i punti omologhi di due curve proiettive d'ordine 5 e genere 2 situate in due S_3 sghebbi dell' S_7 . Sulla F esiste un sistema lineare ∞^1 di curve C d'ordine 5 e genere 2, senza punti base, completo sia come sistema lineare che come sistema continuo: è quello definito dalle due quartiche iniziali. La sua serie caratteristica, d'ordine e dimensione zero, è senz'altro completa.

Proiettiamo F , in un S_5 generico, da una retta l che si appoggi, in due punti generici A_1 e A_2 , a due generatrici r_1 ed r_2 costituenti un generico gruppo canonico entro il fascio delle generatrici di F . Otterremo una rigata \bar{F} d'ordine 8 di S_5 , birazionalmente equivalente alla F . Ai singoli punti di r_1 ed r_2 corrispondono rispettivamente le direzioni uscenti dai punti semplici P_1 e P_2 in cui r_1 ed r_2 incontrano \bar{F} . Ogni curva C di $|C|$ si proietta in una curva \bar{C} , d'ordine 5 e genere 2, di \bar{F} , passante per P_1 e P_2 ; onde il gruppo P_1, P_2 è nello stesso tempo un gruppo canonico e un gruppo caratteristico di \bar{C} .

Consideriamo il sistema continuo $\{|C|\}$, e facciamo vedere che esso è un sistema ∞^1 , costituito unicamente dalle proiezioni delle curve di $|C|$. Ogni curva di $\{|C|\}$ deve infatti essere proiezione o di una direttrice d'ordine 5 di F , o di una direttrice d'ordine 6 passante per

⁽¹⁾ *Sul teorema fondamentale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.* « Annali di Matematica », serie IV, tomo XXIII, 1944, pag. 149. SEVERI dimostra ivi che il teorema della completezza vale per tutte le curve *emiregolari* (curve sulle quali le curve canoniche impure della superficie segano serie lineari complete).

uno dei due punti A_1 e A_2 , o una direttrice d'ordine 7 passante per A_1 e A_2 . Orbene, le direttrici d'ordine 5 di F hanno necessariamente grado zero ⁽¹⁾ e quindi la loro serie caratteristica ha ordine zero e dimensione zero; onde ciascuna di esse appartiene ad un sistema continuo ∞^1 . Le direttrici d'ordine 6 di F hanno grado 2, e quindi la loro serie caratteristica è, o una g_2^0 , o la g_2^1 canonica; onde ogni tale direttrice appartiene ad un sistema continuo al più ∞^2 . Data la genericità di A_1 su F , le direttrici d'ordine 6 per A_1 sono al più ∞^1 . Le direttrici d'ordine 7 di F hanno grado 4, la loro serie caratteristica è una g_4^2 , e pertanto ciascuna di esse appartiene ad un sistema continuo ∞^3 . Data la genericità di A_1 su F , le direttrici d'ordine 7 per A_1 sono ∞^2 ; e data la genericità di A_2 su r_2 , la direttrice generica d'ordine 7 per A_1 non passa per A_2 ; onde le direttrici d'ordine 7 per A_1 e A_2 sono al più ∞^1 . Di qui segue che $\|C\|$ è ∞^1 , e pertanto si riduce al sistema delle direttrici del 5° ordine di \bar{F} proiezioni delle curve di $|C|$. La serie caratteristica di \bar{C} è quindi ∞^0 , e perciò è incompleta, individuando il gruppo P_1, P_2 la g_2^1 canonica. Abbiamo così *un sistema continuo completo ∞^1 , la cui curva generica è a serie caratteristica incompleta.*

⁽¹⁾ Ved. SEVERI, *Sulla classificazione delle rigate algebriche*. « Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni », serie VI, vol. 2, 1941.

STRUTTURA INTRINSECA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO (*)

GIOVANNI GIORGI

Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Auctor, perpendens proprietates campi electromagnetici in spatio-tempore relativistico, pervenit ad conclusiones novas, quod attinet ad figuram geometricam intrinsecam, qua campus definitur et ad consecratorum relativisticorum coarctationem in omnibus spatii regionibus, in quibus campus electromagnetice extenditur.

1. — Per caratterizzare il campo elettromagnetico, si fa uso comunemente dei noti vettori, uno elettrico e uno magnetico. Ma sappiamo che questi non sono elementi intrinseci riguardati nello spazio-tempo relativistico, sono componenti di entità intrinseche, prese relativamente a piattaforme speciali di riferimento.

Quali sono dunque le strutture intrinseche proprie del campo?

MINKOWSKI per rappresentare il campo ha dato una matrice $\|f_{rs}\|$, che ha denominato *Raum-Zeit Vektor 2-ter Art*, e questa denominazione allude già a un ente geometrico del cronotopo; ma la sua trattazione è stata puramente analitica, e la figura geometrica è rimasta non descritta e non sono state dedotte le conseguenze. Gli autori successivi hanno sviluppato la stessa trattazione, denotando l'ente stesso come *sestivettore*: pregevole ed estesa, a questo riguardo è l'esposizione contenuta nel trattato di LAUE, che pure non si discosta dalla trama minkowskiana. Le denominazioni originali non devono venir conservate, perchè ora si usano in altro significato, e perchè potrebbero indurre in errore, per esempio, in quello che si tratti di un areale (un bivettore), altro ente a sei componenti nell' S_4 ; il che non è.

(*) Nota presentata il 19 luglio 1945.

La metrologia che hanno adoprato MINKOWSKI e molti altri trattatisti, è quella abbreviata, ancor più sincopata di quella di GAUSS-HERTZ; perchè non solamente vengono identificate all'unità numerica le costanti ϵ_0 , μ_0 dello spazio-etero, ma viene anche eguagliata ad una la velocità della luce. Con questo si sopprime la differenza fra i due vettori elettrici \mathbf{E} e \mathbf{D} , e quella fra i due vettori magnetici \mathbf{H} e \mathbf{B} , e viene ad aversi un unico vettore elettrico $\mathbf{e} = \sqrt{\mathbf{D}\mathbf{E}}$, e un unico vettore magnetico $\mathbf{m} = \sqrt{\mathbf{H}\mathbf{B}}$; e questi due vettori, che elevati a quadrato danno un'energia in un volume, finiscono per avere la stessa dimensione fisica, di carattere puramente meccanico. È sempre facile ridurre le formole complete a formole sincopate cancellando dei coefficienti e indicando con lo stesso simbolo due grandezze diverse; ma non è ugualmente facile, e si incontra ambiguità, quando si vuol fare il passaggio inverso, che è necessario per tradurre in valori pratici i risultati.

In quanto segue farò uso della metrologia moderna, completa, che riconosce una dimensione fisica *sui generis* alle grandezze elettromagnetiche. Le relazioni che sto per esporre varranno ugualmente per lo spazio libero e per un dielettrico ideale riguardato macroscopicamente, ma terrò presente solo il primo dei due casi. Pur distinguendo, anche nello spazio libero, \mathbf{E} da \mathbf{D} ed \mathbf{H} da \mathbf{B} , come grandezze fisiche di natura diversa, farò uso occasionale dei vettori sincopati \mathbf{e} , \mathbf{m} , in qualche formola di passaggio ⁽¹⁾. Con queste notazioni, procedo a riscrivere le formole di MINKOWSKI, e ricavare la figura geometrica corrispondente alla matrice $\|f_{rs}\|$, e metterla in relazione con le grandezze effettivamente osservabili.

2. - Cominciando a fare uso dei vettori sincopati \mathbf{e} , \mathbf{m} , e dello spazio euclideo con una componente immaginaria avente:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict,$$

⁽¹⁾ Per le notizie e discussioni sopra le diverse metrologie, e sul modo di definire le diverse grandezze del campo, mi riferisco a quanto ho scritto sotto il titolo *Grandezze e Unità Elettriche*, «Memorie della Reale Accademia d'Italia», Classe di scienze fisiche, vol. VIII (aprile 1937), estratto n. 7, pag. 319-396.

formiamo la matrice $\|f_{rs}\|$ così

$$\begin{aligned} f_{11} &= f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0 \\ f_{23} &= m_x = -f_{32}; \quad f_{31} = m_y = -f_{13}; \quad f_{12} = m_z = -f_{21} \\ f_{44} &= -ie_x = -f_{41}; \quad f_{34} = -ie_y = -f_{42}; \quad f_{34} = -ie_z = -f_{43} \end{aligned}$$

La matrice è antisimmetrica e definisce un tensore intrinseco nello S_4 euclideo; denotiamo con

$$\Phi = \|f_{rs}\|$$

tanto la matrice quanto il tensore, e la trasformazione lineare che da esso deriva.

Dalla teoria delle matrici sappiamo che una Φ antisimmetrica in un S_4 euclideo è dello stesso tipo di quella che ivi definirebbe un generale atto di moto rigido a origine fissa; cioè essa matrice applicata ai vettori di posizione dei singoli punti, darebbe le loro velocità in un tale atto di moto. Sappiamo pure che un tale moto, quando è del tipo più generale, consiste in due simultanee velocità di rotazione ω_1, ω_2 in due giaciture, fra loro iperortogonali (cioè tali che ogni direzione giacente nell'una è ortogonale a ogni direzione giacente nell'altra). La figura geometrica della Φ è così trovata: si tratta di una coppia di piani iperortogonali uscenti dall'origine, e di due grandezze scalari associate a questi piani; si ha così uno speciale covariante o invariante geometrico, e due invarianti scalari.

L'esistenza dei due invarianti scalari era già stata additata da MINKOWSKI, senza però alcun accenno alla figura geometrica. Per trovarli con un metodo diretto, basta scrivere l'equazione caratteristica di CAYLEY a cui la Φ deve soddisfare identicamente

$$\Phi^4 + Q\Phi^2 + P^2 = 0$$

dove Q è la somma dei determinanti minori principali di secondo ordine, cioè

$$Q = f_{12}^2 + f_{24}^2 + f_{13}^2 + f_{23}^2 + f_{44}^2 + f_{34}^2$$

mentre P^2 è il determinante della matrice, a sua volta uguale al quadrato del « pfaffiano », che è

$$P = f_{12}f_{34} + f_{13}f_{42} + f_{14}f_{23}.$$

Questi due P, Q formano una coppia di invarianti razionali, equivalente alla coppia dei due invarianti non razionali, ω_1, ω_2 già menzionati. Volendo ricavare questi ultimi esplicitamente, non vi è che da sostituire un'incognita scalare $i\omega$ in luogo della Φ nell'equazione caratteristica. Quindi

$$\omega^4 - Q\omega^2 + P^2 = 0$$

donde

$$\left. \begin{matrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^2}$$

risultato di cui in questa Nota non avremo però occasione di fare uso.

Per avere una rappresentazione visibile, pensiamo all'iperpiano all'infinito, o, ciò che è lo stesso, alla stella entro cui opera la Φ . L'uno e l'altro equivalgono a un S_3 ellittico, entro cui la Φ , rappresentativa di un atto di moto rigido generico, definirebbe un motore, di quelli studiati da CLIFFORD; quindi equivalgono anche a una coppia di rette, coniugate rispetto all'assoluto, con due scalari associati alle medesime; sono le rette che, proiettate dall'origine dell' S_4 danno i due piani iperortogonali.

Gli autori, studiando l'insieme $\|f_{rs}\|$ dal punto di vista puramente analitico, hanno menzionato un caso singolare. In realtà, se ne possono verificare due: uno di degenerescenza di prima specie quando $P=0$, il che porta di conseguenza l'annullarsi di uno dei due ω , l'altro, di degenerescenza di seconda specie, quando $P=0, Q=0$ simultaneamente; questo secondo è il caso singolare menzionato dagli autori. Vedremo più oltre a quali relazioni fisiche corrispondono i due casi.

3. - A questo punto si deve proseguire passando al cronotopo reale, e ai vettori fisici.

Conservando da principio i vettori sincopati, la matrice, nel cronotopo $Oxyzt$, soppresso il coefficiente immaginario i , che più non ci occorre, e soppresso il segno meno nell'ultima colonna, diviene:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & m_z & -m_y & e_x \\ -m_z & 0 & m_x & e_y \\ m_y & -m_x & 0 & e_z \\ e_x & e_y & e_z & 0 \end{array} \right\|$$

Qui i piani che si descrivevano come iperortogonali nell' S_4 euclideo, divengono nell' $Oxyzt$ pseudoeuclideo, due piani coniugati rispetto all'ipercono assoluto. Per trovarli facciamo una scelta particolare del quadriedro normale di riferimento, in modo da far coincidere Oxy con uno di essi piani, Ozt con l'altro. Nella matrice, restano solo m_x, e_z così:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & m_z & 0 & 0 \\ -m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_z \\ 0 & 0 & e_z & 0 \end{array} \right\|$$

Ciò equivale a scegliere una piattaforma di riferimento tale che il vettore elettrico e il vettore magnetico risultino sovrapposti fra loro. Questo è sempre possibile quando la matrice non è degenera di seconda specie, perchè col cambiamento di piattaforma, cioè con l'imprimere al sistema di riferimento un moto opportuno, si fanno nascere i termini *mozionali* (la forza elettrica indotta data dal vettorprodotto del vettore magnetico e della velocità di trascinamento, e la duale forza magnetica indotta), i quali aggiungono o sottraggono componenti ortogonali ai vettori del campo.

Con la scelta di tale piattaforma K_0 abbiamo ridotti i vettori \mathbf{e} , \mathbf{m} ad essere paralleli secondo una direzione che viene assunta come asse Oz . Il piano spaziale Oxy normale (nel senso ordinario, euclideo) a quell'asse è uno dei piani privilegiati che si ricercano; l'altro è il piano coniugato a questo, cioè un piano spazio-temporale Ozt , che taglia l'ipercono assoluto in due generatrici. La piattaforma K_0 non è unica, perchè ad essa si può imprimere un qualunque moto traslatorio secondo

Oz senza che i due vettori del campo si alterino; vi è un sistema ∞^4 di tali piattaforme: a tutte queste corrisponde lo stesso Oxy , ma passando da una all'altra varia Ot , che costituisce la linea oraria della piattaforma, e conseguentemente anche Oz (varia, in quanto si inclina verso Ot , ma spazialmente resta lo stesso); e questi due assi percorrono quel piano spazio-temporale che è stato denominato con Ozt .

4. - Passando ora alla metrologia completa, non abbreviata, con quattro vettori $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$, le conclusioni relative all'invariante geometrico non esigono di essere formulate diversamente, perchè \mathbf{E} è sempre sovrapposto a \mathbf{D} , e similmente \mathbf{H} è sovrapposto a \mathbf{B} .

La matrice viene a essere composta così

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & ; & \sqrt{\mu_0} H_x & ; & -\sqrt{\mu_0} H_y & ; & \sqrt{\epsilon_0} E_x \\ -\sqrt{\mu_0} H_x & ; & 0 & ; & \sqrt{\mu_0} H_x & ; & \sqrt{\epsilon_0} E_y \\ \sqrt{\mu_0} H_y & ; & -\sqrt{\mu_0} H_x & ; & 0 & ; & \sqrt{\epsilon_0} E_x \\ \sqrt{\epsilon_0} E_x & ; & \sqrt{\epsilon_0} E_y & ; & \sqrt{\epsilon_0} E_z & ; & 0 \end{array} \right\|$$

Gli invarianti prendono queste espressioni

$$icP = E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z$$

$$Q = HB - ED$$

Dunque un invariante è il prodotto scalare della forza elettrica e della forza magnetica di campo; l'altro è il doppio della differenza fra energia magnetica ed energia elettrica contenute nell'unità di volume. La degenerescenza di prima specie si verifica quando i due vettori \mathbf{E}, \mathbf{H} sono ortogonali fra loro. Pel fatto che il loro prodotto scalare è invariante, tale ortogonalità permane con qualunque cambiamento di piattaforma; ma si può trovarne una speciale (anzi ∞^4 speciali) nelle quali uno dei due vettori si annulli; o infatti fisicamente è palese, che quando si abbiano \mathbf{E}, \mathbf{H} , ortogonali, qualunque moto

di traslazione ortogonale ad entrambi, fa incrementare uno dei due vettori a spese dell'altro. Però, siccome un altro invariante è la differenza fra energia elettrica ed energia magnetica, due casi diversi si presentano secondo che l'una o l'altra è prevalente; se prevale l'energia elettrica, si può con una velocità traslatoria finita normale al piano di \mathbf{E} e di \mathbf{H} arrivare ad una piattaforma in cui esiste solo il vettore elettrico \mathbf{E} , mentre con nessuna velocità minore di c si ottiene l'effetto reciproco. Se invece prevale l'energia magnetica, si arriva a una piattaforma in cui esiste solo \mathbf{H} . In entrambi i casi, ottenuta la piattaforma nella quale vi è un vettore di campo unico, tutto prosegue come nel caso non degenerare; cioè scelta la direzione di quel vettore come asse Oz , si ha nel piano perpendicolare Oxy uno dei due piani privilegiati; e tutte le infinite piattaforme che differiscono per una velocità di traslazione lungo Oz godono in comune delle stesse proprietà, perchè passando da una all'altra il vettore di campo non si altera.

Il caso limite fra quei due, nei quali prevale rispettivamente l'energia elettrica o quella magnetica, è quello della degenerescenza di seconda specie, cioè dei due invarianti entrambi nulli. I vettori \mathbf{E} , \mathbf{H} sono allora non solamente ortogonali, ma portano uguali quantità di energia, e ciò in qualunque piattaforma; e la riduzione a un vettore solo non è possibile. Questo è il caso che si verifica nelle così dette onde elettromagnetiche pure, come quelle della radiazione solare, e in generale tutte quelle che sono pervenute lontane dalla loro sorgente.

L'elemento geometrico associato al campo degenera anch'esso in questo caso, ma non scompare.

5. - Una conseguenza notevole risulta da tutta questa analisi.

Ricordiamo che nello spazio vuoto, e in assenza di campo elettromagnetico, il principio di relatività consiste in questo, che in una plaga galileiana, o in una cellula galileiana dello spazio-tempo, fra le ∞^3 piattaforme inerziali (le quali differiscono l'una dall'altra per un arbitrario moto di traslazione uniforme) non ve n'è alcuna privilegiata, non vi è modo di distinguere una da un'altra. Questa proprietà è stata generalmente enunciata senza mettere in evidenza la restrizione per le piattaforme inerziali, quantunque dalle equazioni di EINSTEIN della seconda relatività e dai risultati dell'esperimento la restrizione

risulti. Ora constatiamo che occorre dire di più: in presenza di campo elettromagnetico, vi è un insieme privilegiato di ∞^4 piattaforme, il quale insieme è individuato dal campo: quindi *il campo elettromagnetico restringe in un certo senso la relatività*.

È ovvio che in presenza di materia ordinaria la relatività è contrastata dal fatto che una piattaforma privilegiata singola, valevole per certi fenomeni, ovviamente esiste, quella attaccata localmente alla materia stessa. Il campo elettromagnetico ha dunque un carattere intermedio fra quello dello spazio libero neutro (cioè privo di campo) e quello della materia ordinaria; perchè ivi si può individuare una piattaforma privilegiata determinata a meno di un parametro arbitrario. Le conseguenze di questa constatazione possono condurre molto lungi.

OSSERVAZIONE. - Dicendo degenerescenza di prima e di seconda specie, non s'intende di significare degenerescenza semplice e doppia. In entrambi quei due casi la matrice è degenerare doppiamente, e non più che doppiamente, perchè fa perdere due dimensioni allo spazio a cui viene applicata quale trasformazione affine.



KONSTRUKTION UND KLASSIFIKATION DES ACHTZELLS 3^4 (*)

(Mit 4 Figuren)

ALBERT ZIRWES S. I.

SUMMARIVM. — Investigatur problema, utrum et quomodo numeri seriei naturalis 1 usque p^n (vel cuiuscunque seriei arithmeticae) in spatio n -dimensionali distribui possint, ita ut statui aequilibrui indifferentis aequiparari queant. Dantur formulae generales et exemplis 3^3 et 3^4 evolvuntur secundum theoriam numerorum et grupporum duae methodi, quibus resolvitur quaestio, quae simul classificationem et enumerationem solutionum necnon generalisationem p^n permittunt. Exemplum maximae symmetriae accuratius discutitur.

EINFÜHRUNG.

Das regelmässige Achtezelle Z_8 ist der Masskörper des 4-dimensionalen euklidischen Raumes R_4 , so wie Quadrat und Würfel es im R_2 und R_3 sind (¹). Die Anzahl N der q -dimensionalen Begrenzungselemente für den allgemeinen n -dimensionalen « Würfel » ist gegeben durch

$$[1] \quad N = 2^{n-q} \binom{n}{q} \quad \text{für } q = 0, 1, 2, 3 \dots n,$$

sodass die Gesamtzahl der Begrenzungselemente, also

$$\sum_q 2^{n-q} \binom{n}{q} = 3^n,$$

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 25 settembre 1945.

(¹) Für die geometrischen Ausführungen im folgenden vgl. etwa P. H. SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, Lpz., 1905.

immer eine Potenz von 3 ist. Es ist eine bekannte Aufgabe der additiven Zahlentheorie, die ersten 9 natürlichen Zahlen so den Ecken, Kantenmitten und der Flächenmitte eines Quadrates zuzuordnen, dass in dem entstehenden quadratischen Zahlenschema die Summe der 3 Zahlen in den Reihen, Spalten und den Diagonalen immer die gleiche, und zwar $= 15$ ist. Es gibt nur eine Lösung, nämlich

$$\begin{array}{ccc} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{array}$$

wenn man die Zahlenverteilung, die durch Rotation oder Spiegelung aus der ersten hervorgeht, als identisch ansieht. Man spricht von einer indifferenten Gleichgewichtslage der Zahlen, eine Ausdrucksweise, die dadurch gerechtfertigt erscheint, dass die Summe der statischen Momente in bezug auf eine beliebige Gerade durch den Mittelpunkt beiderseitig die gleiche ist. Legt man z. B. eine Gerade durch 5,

$$\begin{array}{ccc} 8 & 3/4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{array}$$

die zwischen 3 und 4 einerseits und 6 und 7 anderseits hindurchgeht, so haben die Zahlen 1 und 9 die doppelte Entfernung von der Geraden wie 3 und 6 oder 4 und 7; die Zahlen 8 und 2 haben die dreifache Entfernung, sodass die Summe der statischen Momente beträgt:

$$\begin{aligned} (3+6) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot 3 &= (4+7) \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 35 &= 35 \end{aligned}$$

In der vorliegenden Arbeit soll die Verallgemeinerung für höhere Dimensionen untersucht werden; denn für die Verallgemeinerung in der Ebene, also für die höheren Zahlenquadrate $4^2, 5^2$ usw. gibt es viele systematische Lösungen, auf die deswegen nicht weiter eingegangen sein soll ⁽¹⁾. Mit der Verteilung der natürlichen Zahlen in Zahlenkuben hat sich sicher schon FERMAT beschäftigt. In einem Brief an Rev. Père MERSENNE de l'Ordre des Minimes (undatiert, wohl

⁽¹⁾ Vgl. z. B. verschiedene Abhandlungen in Vol. 7 der Series I. von L. EULERI, *Opera omnia*, Lipsiae et Berolini, 1923, und die in der dortigen Einleitung angeführte neuere Literatur.

um 1640) schreibt er: ⁽¹⁾ « Je passe bien plus outre en passant aux solides qui le sont effectivement, j'ay trouvé une regle generale pour ranger tous les cubes à l'infiny, en telle façon que toutes les lignes de leurs quarrez tant diagonales, de largeur, de longueur, que de hauteur, fassent un même nombre et determiner outre cela en combien de façons differentes chaque cube doit être rangé, ce qui est, ce me semble, une des plus belles choses de l'Arithmetique » ... Wie so öfters bei FERMAT ist uns nichts Näheres über die erwähnte Verteilungsregel und das Abzählprinzip überliefert; und das dem Brief beigefügte Beispiel 4^3 scheint nicht den aufgestellten 72 Forderungen entsprochen zu haben; denn in einem späteren Brief an denselben Pater bemerkt er zu den Einwendungen FRÉNICLES: « Pource qui est des cubes, je n'en say pas plus que Monsieur Frenicle, mais pourtant je puis les ranger tous à la charge que les Diagonales seules de quarrez que nous pouvons supposer paralleles à l'Horison, seront égales aux côtez des quarrez, ce qui n'est pas peu de chose ». Es ist sogar unwahrscheinlich, dass FERMAT die Zahlenverteilung für 3^3 gekannt hat; sonst lässt es sich nur schwer erklären, dass bis in die heutige Zeit eine Verteilung der Zahlen 1 bis 27 in dem Würfel 3^3 gewöhnlich als unmöglich angegeben wird, obwohl 4 verschiedene Lösungen existieren. Im Sinne FERMATS ist eine Lösung allerdings nicht möglich, weil er die Forderungen für die Flächendiagonalen und nicht für die Körperdiagonalen des Würfels stellt.

I. FORMULIERUNG EXAKTER BEDINGUNGEN.

Weil bei den höher-dimensionalen Körpern noch die Zelldiagonalen usw. hinzukommen, ist eine genaue Angabe notwendig, für welche Diagonalen die Forderung gleicher Zahlensumme gestellt wird. Beim n -dimensionalen Masskörper p^n (d. h. einem solchen, bei dem in jeder Kante p Zahlen stehen), ist die Anzahl der verschiedenen Diagonalen

$$[2] \quad D_k = 2^{k-1} \binom{n}{k} p^{n-k} \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

wo D_k die Gesamtheit aller Zahlenreihen parallel den n Dimensionsachsen,

⁽¹⁾ *Varia Opera Mathematica*, Tolosae, 1679, pp. 174, 177.

- D_2 die Flächendiagonalen in allen Schichten,
 D_3 die Würfeldiagonalen in allen p^3 ,
 D_4 die Zelldiagonalen in allen p^4 bedeutet usw.

Ist p ungerade, so ist der Mittelpunkt des p^n mit einer Zahl besetzt. Die Gesamtheit der D_k -Richtungen durch diesen beträgt also, da sie unabhängig von p ist,

$$[3] \quad \sum_k 2^{k-1} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} (3^n - 1) .$$

Wir stellen jetzt die Minimalforderung auf: Die gleiche Summe der p Zahlen ($p > 2$) soll vorhanden sein

- | | |
|--|---|
| 1) für alle p^n | in allen D_1 und D_n ; |
| 2) für ungerades p | auch in allen D_k durch den Mittelpunkt; |
| 3) für $p \geq 2^n - 1$ | in allen D_k überhaupt; |
| 4) für $p \geq 2^n + 1$
(p ungerade) | auch in allen Parallelen zu den D_k , den
sogenannten Nebendiagonalen. |

Unter Berücksichtigung, dass in der Formel [3], die für die Forderung 2) gilt, die D_1 und D_n durch den Mittelpunkt mitgezählt sind, ergeben sich für die Fälle 3^3 und 3^4 37 bzw. 144 Bedingungen.

II. KONSTRUKTION DES 3^3 IM R_3 NACH ZWEI METHODEN.

Nach diesen allgemeinen Klarstellungen sei der Anschaulichkeit halber die Konstruktion des Würfels 3^3 vor der des Achtzells 3^4 behandelt. In einem Würfel seien die Ecken, Kantenmitten usw. mit einer der Zahlen 0, 1 oder 2 bezeichnet, wie es Figur 1 angibt. In den Kantenmitten steht die fehlende Zahl, in den Flächenmitten entweder 0 oder 2, derart dass eine Flächendiagonale alle 3 Zahlen enthält, die andere also dieselbe Zahl dreimal. Im Körpermittelpunkt stehe 1. Wir stellen fest, dass die Summe der 3 Zahlen in allen D_1 und D_3 die gleiche ist, nicht aber in allen D_2 in den Flächen, wohl in denen durch den Mittelpunkt. Unter Beibehaltung der zur Körperdiagonalen 1, 1, 1 senkrechten « Einerebene » gibt es noch eine andere Lösung, eben die, in der die Zahlen 0 und 2 vertauscht sind. Wir bilden jetzt

dreiziffrige Zahlen in den verschiedenen Punkten des Würfels. Die erste Ziffer sei gegeben durch irgend eine Lage des Würfels, die zweite und dritte durch andere Raumlagen des Würfels, die durch Drehung oder Spiegelung hervorgehen, wobei nur darauf zu achten ist, dass die Körperdiagonale 1, 1, 1 jedesmal eine andere Lage hat. Da für jede

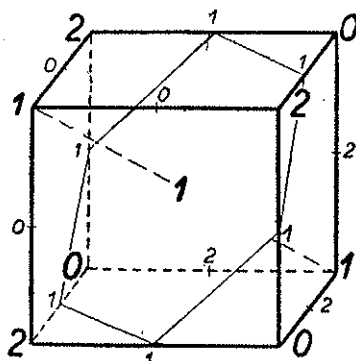


FIG. 1.

der 4 möglichen Richtungen 2 Zahlenverteilungen zur Verfügung stehen und die Reihenfolge der Auswahl beliebig ist gibt es also $\binom{4}{3} \cdot 2^3 \cdot 3!$ Lösungen, die aber nicht alle von einander verschieden sind. Um nur verschiedene Lösungen zu erhalten, ist noch durch die Ordnungszahl der erweiterten Bewegungsgruppe des Hexaeders (also durch 48) zu dividieren. Man erhält daher 4 verschiedene Zahlenverteilungen. Die orthogonalen Transformationen mit $\Delta = -1$ können zur Bewegungsgruppe gezählt werden, weil z. B. eine Spiegelung im R_3 eine wirkliche Bewegung im R_4 ist; ein Würfel a^3 lässt sich im R_4 durch eine Doppeldrehung um ein Paar zu einander orthogonaler Ebenen so bewegen, dass alle seine Eckpunkte in die gegenüberliegenden überführt werden. Man überzeugt sich sofort, dass durch die oben angegebene Zahlenbildung alle 27 Kombinationen von 000 bis 222 vorkommen müssen. Bezeichnet man sie der Grösse nach mit 1, 2, ... bis 27, oder was dasselbe ist, geht man vom Dreiziffersystem unter Addition von 1 zum Zehnziffersystem über, so sind die Zahlen 1 bis 27 so im Würfel verteilt, dass sie den 37 Bedingungen genügen.

Eine andere Art der Lösung ist folgende. Wir sahen oben in Fig. 1, dass in den Flächenmitten, also in den Koordinatenachsen, nur die Ziffer 0 oder 2 vorkommt. In den Flächenmitten des endgültigen Würfels können also nur solche Zahlenkombinationen vorkommen, die im Dreiziffersystem keine 1 enthalten. Solcher Kombinationen gibt es aber nur 4 Paare, nämlich die den Zahlenpaaren 1/27, 3/25, 7/21 und 9/19 zugeordneten. Unter einem Zahlenpaar verstehen wir hier 2 diametral gegenüberliegende Zahlen. Für die 3 Koordinatenachsen ist also eine Auswahl aus vieren zu treffen, sodass die Anzahl der Lösungen $\binom{4}{3} = 4$ ist. Mit der Festlegung von 3 Zahlenpaaren in den Flächenmitten sind auch alle anderen Zahlen eindeutig bestimmt, ohne dass man auf das Dreiziffersystem zurückgehen muss. Eine Lösung sei als Beispiel gegeben, und zwar die, welche durch Rotation des Würfels der Fig. 1. um eine Körperdiagonale 0-2 entsteht:

1	17	24	15	19	8	26	6	10
23	3	16	7	14	21	12	25	5
18	22	2	20	9	13	4	11	27

Die 3 Zahlenquadrate hat man sich über einander zu denken. Für das Oktaeder der Flächenmitten wurden hier die Zahlenpaare 3/25, 7/21 und 9/19 gewählt. Im mittleren Quadrat stehen in den Ecken die arithmetischen Mittel der beiden nicht anliegenden Kantenmitten; so ist 15 der Mittelwert von 9 und 21. Das gleiche gilt für die Quadrate, die in den anderen Koordinatenebenen liegen. Das fehlende Zahlenpaar 1/27 kommt in zwei der 8 frei gebliebenen Ecken zu stehen, und zwar dorthin, dass die Verbindung 1-3 und 25-27 dieselbe Lage hat wie etwa 7-9 oder 19-21, die die gleiche Differenz haben. Die restlichen Zahlen können dann durch Differenzenbildung ausgefüllt werden. Auf die Gleichgewichtslage der Zahlen wird später in der Arbeit noch eingegangen werden.

Die Bedingungen 1) und 2) wurden oben als Minimalforderungen bezeichnet. Es gibt nämlich im Würfel noch andere Weisen, in der man die gleiche Summe von je 3 Zahlen bilden kann. Ein Würfel kann auf 4 Arten in einem regelmässigen Sechseck geschnitten werden,

nämlich senkrecht zu einer Körperdiagonalen durch 6 Kantenmitten und den Körpermittelpunkt. Im obigen Beispiel sind die 4 Schnitte

16 22	22 23	23 17	17 16
8 14 20	13 14 15	20 14 8	15 14 13
6 12	5 6	11 5	12 11

Die Summe der 3 Zahlen, die in den Schnitten die Ecken eines regelmässigen Dreiecks bilden z. B. 8, 22, 12, ist 42, wie in den D_4 und D_3 . Von den 4 Schnitten ist einer jeder Lösung eigen (dieser enthält nur gerade Zahlen); während jeder der 3 anderen auch bei einer anderen der 4 Lösungen vorkommt.

III. KONSTRUKTION DES 3^4 IM R_4 NACH DER ERSTEN METHODE.

Bei der Konstruktion des 3^3 in beiden Lösungsarten wurden eingehender gerade die Einzelheiten behandelt, die einer induktiven Verallgemeinerung fähig sind. So genügt es jetzt, die Konstruktion

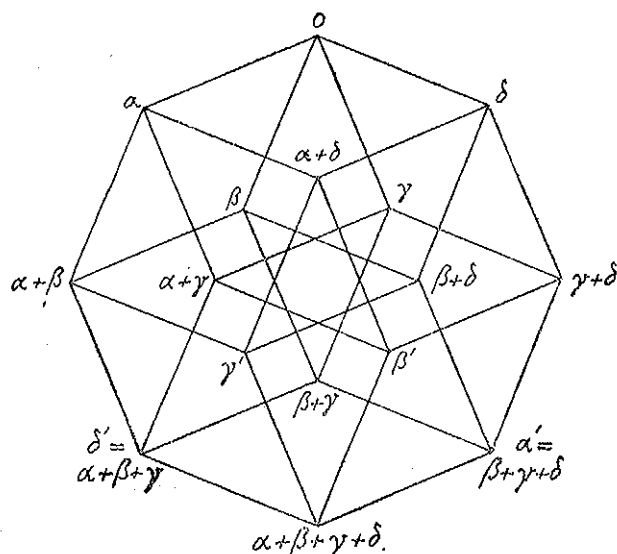


FIG. 2.

des 3^4 in Kürze anzudeuten. Das Achtzell ist nach Formel [1] begrenzt von 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Quadratflächen und 8 Würfeln. Figur 2. stellt eine orthogonale Projektion desselben auf eine Ebene dar⁽¹⁾. Irgend ein Eckpunkt sei mit 0 bezeichnet; an den Enden der von dieser Ecke ausgehenden Kanten sollen die von 0 verschiedenen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stehen. Durch « Vektoraddition » findet man die Zahlen an allen anderen Ecken. Zwei diametral gegenüber stehende Zahlen haben als Summe immer $\alpha + \beta + \gamma + \delta$. Da, wie beim Würfel der Fig. 1, einer 0 immer eine 2 gegenüber stehen muss, ist $\alpha + \beta + \gamma + \delta \equiv 2 \pmod{3}$ zu wählen. Es gibt 5 Lösungen für die Kongruenz, nämlich

	α	β	γ	δ	Σ	
1.	2	2	2	2	$8 \equiv 2$	(mod 3)
2.	2	1	1	1	$5 \equiv 2$	
3.	1	2	1	1	$5 \equiv 2$	
4.	1	1	2	1	$5 \equiv 2$	
5.	1	1	1	2	$5 \equiv 2$	

Wählt man etwa die letzte Reihe, also $\alpha = \beta = \gamma = 1$ und $\delta = 2$, so erhält man eine Zahlenverteilung, wie sie Figur 3. angibt. Noch an weiteren 4 Eckpunkten tritt hier eine 0 auf, und zwar derart, dass gerade die 4 anderen Lösungen der Kongruenz alle vertreten sind. Das ist bei jeder Auswahl aus den 5 Lösungen der Fall, sodass es wesentlich nur eine derartige Zahlenverteilung gibt. Die Zahlen in den Kanten-, Flächen- und Körpermitten werden bestimmt, wie für den Würfel angegeben wurde. In der Zellmitte steht eine 1. Wir stellen auch hier fest, dass in den 4 Koordinatenachsen, also in den 8 Würfelmittelpunkten nur die Zahlen 0 oder 2 vorkommen. Die Summe in den 8 Zelldiagonalen D_4 ist die gleiche wie in allen D_4 . Die Ebenen, die durch den Zellmittelpunkt und die beiden Eckpunkte α und β , bzw. β und γ oder α und γ , bestimmt sind, enthalten jede neunmal die Zahl 1 in quadratischer Anordnung. Bei den R_4 -Bewegungen zur Bildung vierziffriger Zahlenkombinationen darf eine solche « Einerebene » höchstens noch einmal mit sich selbst oder einer an-

⁽¹⁾ s. S. L. VAN OSS, Verh. d. K. Ak. d. Wetensch. Amsterdam, Deel VII, 1, (1901).

deren zusammenfallen. Auszuschliessen sind also solche wiederholte Drehungen, bei denen diese Ebenen als Rotationsebenen ganz in Ruhe bleiben; wie auch solche, bei denen sie in sich selbst um den Mittelpunkt rotieren; endlich auch solche, bei denen sie ineinander über-

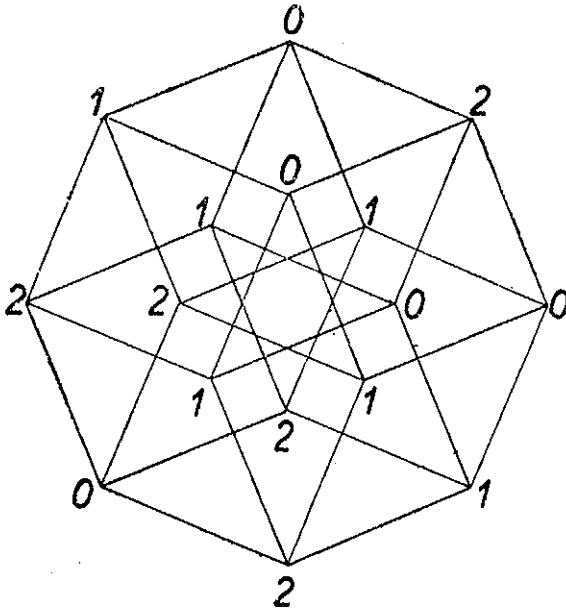


FIG. 3.

geführt werden ⁽¹⁾. Die Ordnung der erweiterten Bewegungsgruppe ist $2^4 \cdot 4! = 384$, sodass trotz der obigen Einschränkungen noch sehr viele Bewegungen und daher auch Lösungen möglich sind. Zur genauen Bestimmung der Anzahl und zur Klassifikation der Lösungen bedienen wir uns der zweiten Lösungsmethode.

⁽¹⁾ Eine genauere Definition für den Ausschluss wird später gegeben werden.

IV. KLASSIFIKATION UND KONSTRUKTION NACH DER ZWEITEN METHODE.

Rein schematisch kann eine quadratische Anordnung von 81 Zahlen, wie sie in den weiter unten stehenden Lösungen zur Anwendung kommt, ein Zahlenachtzell darstellen. Im folgenden Quadrat, wo jeder Buchstabe wieder ein Quadrat von 9 Zahlen vertritt, hat man sich A über B und C als Würfel vorzustellen und zugleich in der 4. Dimension A auch über D und G. Ebenso D über E und F;

-	-	-	-	-	-	-
-	A	-	-	B	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	+	-	-
-	D	-	+	E	+	-
-	-	-	-	+	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	G	-	-	H	-	-
-	-	-	-	-	-	-

B über E und H; dann noch G über H und J, und endlich C über F und J. Von den 4 Koordinatenachsen gehen 2 durch die mit einem + bezeichneten Punkte, die 3. durch F und D; die 4. durch B und H. Das sind die Mittelpunkte der 8 Grenzwürfel. Zur Besetzung dieser Punkte mit Zahlen stehen 8 Paare zur Verfügung, die in den zugeordneten Viererkombinationen des Dreiziffersystems keine 1 enthalten, und zwar

1/81 3/79 7/75 9/73 19/63 21/61 25/57 27/55.

Die hier zu treffende Viererauswahl ist aber nicht mehr ganz willkürlich, wie es beim 3^3 der Fall war. Wählt man etwa für die Konstruktion des Würfels D, E, F 3 Zahlenpaare aus und bestimmt durch Mittelwert- und Differenzenbildung die anderen Zahlen dieses Würfels, so kann es vorkommen, dass die Zahlen eines der 5 restlichen Paare schon in diesem Würfel auftreten, also für die Besetzung der 4. Koor-

dinatenachse nicht mehr in Frage kommen. Das ist immer und nur dann der Fall, wenn bei den ausgewählten 4 Paaren (sie seien nur noch mit der kleineren Zahl bezeichnet) dieselbe Differenz zweimal auftritt. So gibt es 12 Ausnahmefälle:

6 Fälle:	1-3 7-9 1-3 19-21 1-3 25-27	7-9 19-21 7-9 25-27 19-21 25-27	} mit gleicher Zweierdifferenz,
1 Fall:	3-7 21-25		
4 Fälle:	1-7 19-25 1-7 21-27	3-9 19-25 3-9 21-27	} mit gleicher Sechserdifferenz,
1 Fall:	1-9 19-27		
			mit gleicher Achterdifferenz.

Die Gesamtzahl der Auswahlmöglichkeiten und somit der verschiedenen Lösungen beträgt also $\binom{8}{4} - 12 = 58$. Die Klassifikation erfolgt nach den verschiedenen räumlichen Lagen, die die nicht ausgewählten Zahlenpaare im Achtzell einnehmen können. Zu diesem Zweck teilen wir die 8 Zahlenpaare in zwei Klassen ein, je nachdem bei ihnen im Dreiziffersystem die Ziffern 0 und 2 in gerader (I. Klasse) oder ungerader Anzahl (II. Klasse) vorhanden sind.

I. Klasse: 1/81 9/73 21/61 25/57 von der Form $4m + 1$

II. Klasse: 3/79 7/75 19/63 27/55 von der Form $4m + 3$

Erster Fall: Aus einer Klasse seien alle, aus der anderen also kein Zahlenpaar zur Besetzung der Würfelmittelpunkte gewählt. Es gibt

$2 \cdot \binom{4}{4} \cdot \binom{4}{0} = 2$ Möglichkeiten. In beiden Fällen stehen die nicht gewählten 4 Zahlenpaare symmetrisch in 8 Ecken des Achtzells.

Zweiter Fall: Aus einer Klasse seien 3, aus der anderen also noch 1

Zahlenpaar gewählt. Es gibt $2 \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{4}{1} = 32$ Möglichkeiten. Das in einer Klasse nicht gewählte Paar steht in einer Ecke, die drei anderen in Kantenmitten.

Dritter Fall: Aus beiden Klassen seien je 2 gewählt; hier treten die erwähnten Ausnahmefälle auf. Stehen die gewählten Paare im obigen Klassenschema beide über einander oder ganz getrennt, so treten

gleiche Differenzen auf. Diese beiden Fälle sind also auszuschließen, sodass es noch $\binom{4}{2} \cdot \left(\binom{4}{2} - 2 \right) = 24$ Möglichkeiten gibt. Die

nicht gewählten Paare treten nur in Kantenmitten auf.

Durch die Festlegung von 4 Zahlenpaaren für die Würfelmittelpunkte sind wie beim 3^3 auch alle anderen Zahlen eindeutig bestimmt. Seien X diese 8 Zahlen, so finden sich durch Mittelwertbildung zwischen diesen alle mit einem * bezeichneten Zahlen. Es sind die Flächen-

-	-	-	-	*	-	-	-	-
-	*	-	*	X	*	-	*	-
-	-	-	-	*	-	-	-	-
-	*	-	*	X	*	-	*	-
*	X	*	X	-	X	*	X	*
-	*	-	*	X	*	-	*	-
-	-	-	-	*	-	-	-	-
-	*	-	*	X	*	-	*	-
-	-	-	-	*	-	-	-	-

mittelpunkte des Achtzells oder auch die Ecken der Quadrate, die in den 6 Koordinatenebenen liegen. Da, wie wir oben sahen, die Zahlenpaare mit gleicher Differenz auch gleiche Raumlage haben, so kann man die fehlenden Zahlenpaare (wenigstens in 56 von 58 Fällen) sofort in das Schema eintragen, wie in den beiden letzten der nun folgenden 4 Beispiele zu der obigen Klassifikation zu ersehen ist. Alle anderen Zahlen lassen sich durch Differenzenbildung finden, oder auch durch Mittelwertbildung allein zwischen allen Zahlen der I. und II. Klasse. Die konstante Summe von je 3 Zahlen in den D_1 und D_4

e	k	e	k	f	k	e	k	e
k	f	k	f	w	f	k	f	k
e	k	e	k	f	k	e	k	e
k	f	k	f	w	f	k	f	k
f	w	f	w	z	w	f	w	f
k	f	k	f	w	f	k	f	k
e	k	e	k	f	k	e	k	e
k	f	k	f	w	f	k	f	k
e	k	e	k	f	k	e	k	e

beträgt beim Achtzell 123. Nach den früher aufgestellten Bedingungen muss sie sich wenigstens 144 Mal bilden lassen. In den beiden Lösungen des 1. Falles hat ausserdem je eine Diagonale der 24 Grenzquadrate diese gleiche Summe. Zur leichteren Übersicht in den Zahlenbeispielen sei die Lage der verschiedenen Achtzellpunkte noch einmal zusammengestellt. Es bedeuten:

e = 16 Eckpunkte
 k = 32 Kantenmittelpunkte
 f = 24 Flächenmittelpunkte
 w = 8 Würfelmittelpunkte
 z = 1 Zellmittelpunkt.

14 48 61	52 59 12	57 16 50	14 46 63	54 59 10	55 18 50
36 67 20	65 27 31	22 29 72	34 69 20	65 25 33	24 29 70
73 8 42	6 37 80	44 78 1	75 8 40	4 39 80	44 76 3
28 71 24	69 19 35	26 33 64	30 71 22	67 21 35	26 31 66
77 3 43	7 41 75	39 79 5	77 1 45	9 41 73	37 81 5
18 49 56	47 63 13	58 11 54	16 51 56	47 61 15	60 11 52
81 4 38	2 45 76	40 74 9	79 6 38	2 43 78	42 74 7
10 53 60	51 55 17	62 15 46	12 53 58	49 57 17	62 13 48
32 66 25	70 23 80	21 34 68	32 64 27	72 23 28	19 36 68

Die beiden Lösungen des ersten Falles

X - -	- - -	- - 27	- - -	- - -	- - -
1 44 -	42 73 -	- - -	- - -	42 73 -	79 - -
50 57 X	61 14 -	X - -	- 55 -	61 14 -	- - -
- - -	- 19 -	- - -	- - -	- 19 -	25 32 -
- 3 -	7 - 75	- 79 -	- 1 44	7 - 75	38 81 -
- - -	- 63 -	- - -	- 50 57	- 63 -	- - -
- - -	- 68 21	- 25 32	- - -	- 68 21	- 27 -
- - -	- 9 40	- 38 81	- - 8	- 9 40	- - -
55 - -	- - -	- - -	- - -	- - -	- - -

Zweiter Fall

Dritter Fall

V. EINZELHEITEN ZU DEN 3 KLASSIFIKATIONSFÄLLEN.

Es lohnt sich, etwas näher auf den ersten Fall einzugehen, weshalb auch beide Lösungen gebracht wurden. Er zeigt von den drei Fällen die grösste Symmetrie. Ein Achtzell kann den Eckpunkten nach in zwei 16-Zelle (Z_{16}) zerlegt werden, analog wie der Würfel in zwei Tetraeder. Ein Z_{16} ist ein reguläres Polytop des R_4 , das von 16 Tetraedern begrenzt wird und 8 Ecken hat; es ist das duale Gebilde zum Z_8 . Die Kanten der beiden Z_{16} sind die Flächendiagonalen des Z_8 . Achten wir zunächst auf die gesetzmässige Verteilung der geraden und ungeraden Zahlen. Die Zahlen der I. und II. Klasse sind nur ungerade Zahlen. Sie stehen in den Würfelmittelpunkten (w), (die der Lage nach auch ein Z_{16} bilden), und in den 8 Eckpunkten (e) eines der beiden Z_{16} . Die 8 Eckpunkte (e) des anderen Z_{16} enthalten nur gerade Zahlen; im Dreiziffernsystem entsprechen ihnen solche Kombinationen, die dreimal eine 1 enthalten; (sie seien fernerhin als Zahlen einer III. Klasse bezeichnet). Die beiden Lösungen unterscheiden sich dadurch, dass die Zahlen der ersten und zweiten Klasse vertauscht werden, während das Z_{16} mit geraden Zahlen beiden gemeinsam ist. In den 32 Kantenmitten (k) stehen nur gerade und in den 24 Flächenmitten nur ungerade Zahlen. Beim Z_{16} mit ungeraden Eckzahlen steht in der Mitte der 24 Kanten immer das arithmetische Mittel der beiden Ecken. So sind z. B. die 6 von Ecke [1] ausgehenden Kanten (Flächendiagonalen): 1-5-9; 1-11-21; 1-13-25; 1-37-73; 1-31-61; 1-29-57. Die 8 Ecken des anderen Z_{16} mit geraden Zahlen sind die arithmetischen Mittel zwischen den zwei Zahlen der I. und II. Klasse, die auf den 4 von einer Ecke ausgehenden Körperdiagonalen der Grenzwürfel liegen: z. B. ist die Ecke [14] Mittelwert von 27 und 1; von 19 und 9; von 7 und 21; von 3 und 25. Sie sind auch die Mittelwerte von den 3 Paaren Flächenzahlen (f), die dem Diametralpunkt am nächsten liegen; so ist [14] Mittelwert von 13 und 15, von 5 und 23, von 11 und 17. Auf Grund dieser Eigenschaft wurde die Stellung aller Eckzahlen in den beiden Lösungsschemata bestimmt. Wie schon erwähnt wurde, beträgt die Summe der 3 Zahlen in den Kanten des zweiten Z_{16} immer 123. Von Ecke [14] z. B. gehen folgende 6 Kanten (Flä-

chendiagonalen) aus: 14-59-50; 14-65-44; 14-67-42; 14-69-40; 14-71-38; 14-77-32. An jeder Ecke des Z_8 stossen 6 Grenzquadrate zusammen; in diesen Quadraten sind die Ecken des zweiten Z_{16} (die Zahlen der III. Klasse) wieder die arithmetischen Mittel der nicht anliegenden Kantenmitten; so ist [14] Mittelwert von 8 und 20, von 12 und 16, von 6 und 22, von 24 und 4, von 18 und 10, von 2 und 26. Die Kanten der beiden Z_{16} schneiden sich in den 24 Flächenmittelpunkten (f) des Z_8 . Diese 24 Punkte bilden die Ecken eines regelmässigen 24-Zells, eines zu sich selbst dualen Polytops, das von 24 Oktaedern begrenzt wird. Es kann in 3 Z_{16} zerlegt werden, die zu je zweien ein Z_8 bilden. Auf eine Zahlenverteilung in diesem Gebilde soll hier nicht weiter eingegangen werden, da sie auch wesentlich komplizierter ist.

Bei der als Beispiel für den zweiten Klassifikationsfall gewählten Lösung sind die 3 mittleren Quadrate D, E, F identisch mit den darüber stehenden. Die frühere w -Zahl 27 wird zur Eckzahl; und zwar kann sie bei den 4 hier ableitbaren Lösungen eine der Stellen x einnehmen, je nachdem statt 73 die Zahlen 61, 57 oder 1 als w -Zahlen gewählt werden. Das gleiche wie für 27 gilt auch für die anderen w -Zahlen (3, 7, 19) und für die aus der zweiten Lösung des ersten Falles sich ergebenden Ableitungen, sodass die Gesamtzahl gleich $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ ist. Die Eckzahlen des früheren Grenzwürfels A, B, C rücken in einen Würfel 2^3 zusammen, in dessen Körperdiagonale 50-73 noch die Zahl 27 steht. Mittelwert dieser 9 Zahlen ist 41. Auch hier sind dieselben Mittelwert- und Differenzenbildungen wie früher möglich; jedoch ist die topologische Lage der Zahlen eine andere, weil keine Symmetrie mehr vorhanden ist.

Der dritte Fall leitet sich aus dem zweiten ab, indem man die 3 Quadrate B, E, H beibehält und eine der Zahlen 1 oder 57 zur w -Zahl macht. Die Zahlen 3 und 55 nehmen jetzt Kantenmitten ein. Auch hier gehören zum gleichbleibenden mittleren Quadrat E 4 Lösungen, da 61 auch an Stelle von 73 treten kann. Entsprechend den $\binom{4}{2}$

Kombinationen für das Quadrat E gibt es also $6 \cdot 4 = 24$ Lösungen. Aus Symmetriegründen sind die aus der zweiten Lösung des ersten Falles ableitbaren Lösungen mit den obigen 24 identisch. Die 4 Zahlenpaare in den Kantenmitten (61, 55, 57, 3) vertreten die 4 Dimensionsrichtungen, während im zweiten Falle die 4 Dimensionen durch

die 3 Zahlenpaare in Kantenmitten (61, 57, 1), die der Ecke 50 benachbart sind, und durch die Kante 50-55 vertreten sind. Beim dritten Fall ermöglichen die Zahlen der III. Klasse, (die hier alle in Flächenmitten stehen), sowohl mit den Kanten- als Würfelzahlen einen geschlossenen Zug unmittelbar benachbarter Zahlen:

$$14 \begin{smallmatrix} 61 \\ 73 \end{smallmatrix} 42 \begin{smallmatrix} 79 \\ 7 \end{smallmatrix} 38 \begin{smallmatrix} 25 \\ 81 \end{smallmatrix} 32 \begin{smallmatrix} 27 \\ 19 \end{smallmatrix} 68 \begin{smallmatrix} 21 \\ 9 \end{smallmatrix} 40 \begin{smallmatrix} 3 \\ 75 \end{smallmatrix} 44 \begin{smallmatrix} 57 \\ 1 \end{smallmatrix} 50 \begin{smallmatrix} 55 \\ 63 \end{smallmatrix} 14.$$

VI. SCHNITTE DURCH DAS ACHTZELL UND GLEICHGEWICHT DER ZAHLEN.

Zur Bestimmung der Gleichgewichtslage der Zahlen im Achtzell, Würfel und Quadrat sind die Abstände paralleler Schnitte von einem Schnitt durch die Mitte des Gebildes in Betracht zu ziehen. Als Beispiel seien in allen 3 Fällen Schnitte senkrecht zu einer Diagonalen D_n gewählt. Das Achtzell (von der Kantenlänge 4) ist durch parallele R_3 -Räume zu schneiden. (s. Fig. 4). Der Mittelschnitt (0) ist ein regelmässiges Oktaeder von der Kantenlänge $4\sqrt{2}$. Im Abstand ± 1 wird das Z_8 in Tetraedern von der Kantenlänge $6\sqrt{2}$ geschnitten, deren Ecken so abgeschnitten sind, dass von ihren 4 Seitenflächen noch regelmässige Sechsecke übrig bleiben. Die Schnitte sind also 12-eckige halbrekuläre Körper von der Kantenlänge $2\sqrt{2}$. In den Abständen ± 2 und ± 3 sind die Schnitte vollständige Tetraeder mit Kanten $4\sqrt{2}$ bzw. $2\sqrt{2}$. Im Abstand ± 4 nehmen die Schnitträume nur noch die Endpunkte der Zelldiagonalen auf. Eine Zusammenstellung der Schnitte, eingeordnet in das frühere Zahlenschema, ist hier

4	3	2	3	2	1	2	1	0
3	2	1	2	1	0	1	0	-1
2	1	0	1	0	-1	0	-1	-2
3	2	1	2	1	0	1	0	-1
2	1	0	1	0	-1	0	-1	-2
1	0	-1	0	-1	-2	-1	-2	-3
2	1	0	1	0	-1	0	-1	-2
1	0	-1	0	-1	-2	-1	-2	-3
0	-1	-2	-1	-2	-3	-2	-3	-4

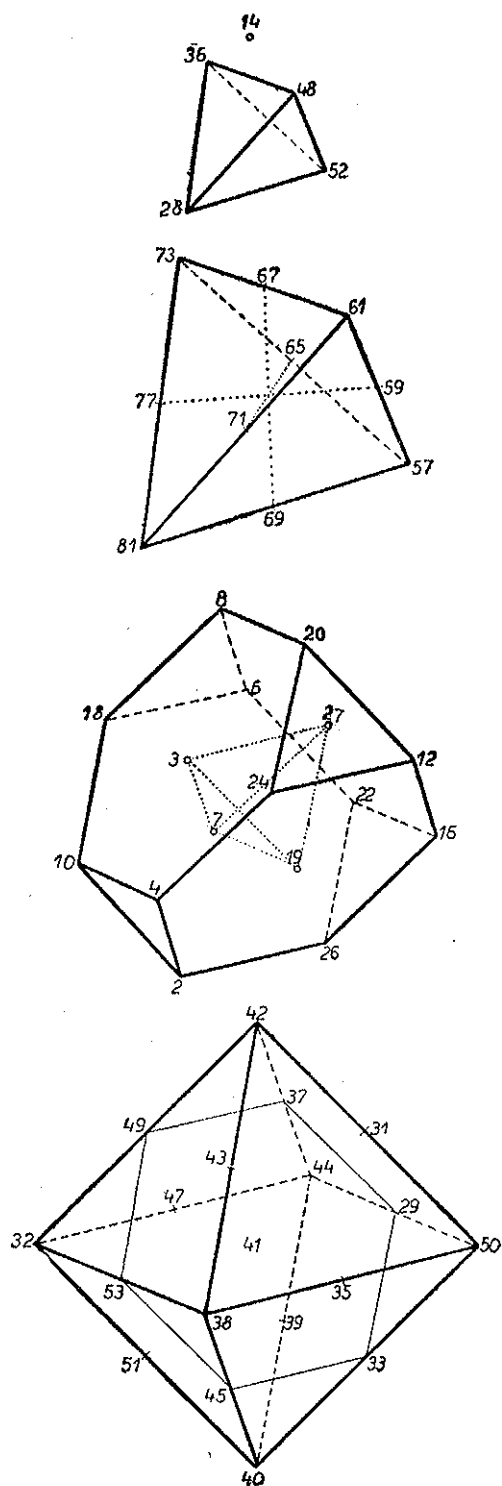


FIG. 4.

gegeben. Die Zahlen bedeuten die absoluten Abstände vom Mittelschnitt 0. Die statischen Momente sind die Produkte der Zahlen des Achtzells mit den Abstandszahlen, die sich in gleicher Lage im neuen Schema befinden. Die Gesamtsumme ist in allen Lagen des Achtzells bei allen Lösungen immer Null, was eben Gleichgewicht bedeutet. Der « erste Fall » zeigt auch bei den Schnitten Sonderheiten, die den anderen Lösungen nicht eignen. An Hand der Fig. 4, die ausser dem Mittelschnitt die Hälfte der anderen Schnitte senkrecht zur Zelldiagonalen 14-68 wiedergibt, sei auf diese hingewiesen. Das Oktaeder zeigt ganz die Eigenschaften, auch in bezug auf seine vier- und sechseckigen Schnitte, wie sie früher beim Würfel 3^3 erwähnt wurden⁽¹⁾. Zusammen mit den Verbindungen nach den Endpunkten der Zelldiagonalen 14-68 bildet es das Z_{16} mit den geraden Eckzahlen. Beim Schnitt des halbrekulären Achtfächners sind die Eckpunkte von jeder gemeinsamen Kante der Sechsecke von Zahlen besetzt, deren Mittelwert 14 ist. In den Mittelpunkten der Sechsecke stehen die Zahlen der II. Klasse, die das Z_8 eindeutig bestimmten; auch ihr Mittelwert ist 14. Beim grösseren Tetraeder steht der Mittelwert je zweier Ecken in den Kantenmitten, die ihrerseits immer 68 zum Mittelwert haben. Beim kleinen Tetraeder ist der Mittelwert der Ecken gleich 41, der Zahl im Zellmittelpunkt. In anderer Form wurde auf diese Sachverhalte teilweise schon hingewiesen. Wählt man die Schnitte senkrecht zu einer anderen Zelldiagonalen, etwa 57-25, die dem Z_{16} mit ungeraden Zahlen angehört, so treten andere Symmetrieeigenschaften auf, die im einzelnen festzustellen dem Leser überlassen sei. Hier ist z. B. der Mittelwert von 5 Zahlen, dem Endpunkt der Diagonalen (57) und den 4 benachbarten Eckpunkten des grösseren Tetraeders (14, 50, 44, 40) immer gleich 41. In den Kantenmitten dieses Tetraeders stehen Zahlen, die je zwei Eckzahlen zur Summe 123 ergänzen; gegenüber liegende Kantenzenahlen $\begin{smallmatrix} 29 & 33 & 39 \\ 69 & 65 & 59 \end{smallmatrix}$ werden ihrerseits durch 25 (die Zahl am anderen Ende der Zelldiagonalen) zu 123 ergänzt. Es besteht also eine gewisse Dualität zwischen Mittelwert- und Differenzenbildung bei den zwei 16-Zellen, in die das Achtzell zerlegt werden kann.

⁽¹⁾ Mit den Zahlen einer arithmetischen Reihe ist aber eine solche Verteilung nicht möglich.

Während die zuletzt genannten Zahlen im ersten Lösungsschema scheinbar zerstreut liegen, wie z. B. das Tripel 39, 25, 59, erscheinen sie bei der zweiten Lösung in symmetrischer Anordnung.

Beim oben gegebenen Schema der Abstandszahlen können die 3 mittleren Quadrate D, E, F auch die Schnitte in relativen Abständen durch einen Würfel 3^3 versinnbilden. Angewandt auf das früher gegebene Beispiel sind die Schnitte senkrecht zur Körperdiagonalen 1-27 folgende:

		24	16 8	2 21 10		
1	17	3 19	22 14 6	9 25	18 5	27
	23 15	18 7 26	20 12	4	11	

Auch hier verschwindet die Summe der statischen Momente, denn

$$1 \cdot 3 + 55 \cdot 2 + 97 \cdot 1 + 0 - 71 \cdot 1 - 29 \cdot 2 - 27 \cdot 3 = 0.$$

Beim Quadrat (E) ist es ebenso, was eine unmittelbare Folge der Mittelwertbildung ist:

$$8 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 - 16 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Man könnte mit demselben Ergebnis die Schnitte auch in anderer Weise durch das Achtzell legen. Doch sei darauf nicht weiter eingegangen, vielmehr kehren wir noch einmal zu den beiden Konstruktionsmethoden des Achtzells zurück.

VII. VERGLEICH DER BEIDEN LÖSUNGSARTEN.

Vergleicht man die beiden Lösungsmethoden mit einander, so hat die zweite (die der Mittelwert- und Differenzenbildung) für eine praktische Durchführung des Problems sicher den Vorzug; während man für Beweise und eine tiefere Einsicht immer die erste Methode (Bewegungstransformationen des Achtzells der Fig. 3) anwenden wird. Betrachten wir den so ausführlich behandelten «ersten Fall» auch kurz in der anderen Methode. Wenn A eine $\frac{1}{4}$ -Drehung des Achtzells

um eine der 6 Koordinatenebenen bedeutet, so ist A^2 die $\frac{1}{2}$ -Drehung und $A^3 = A^{-1}$ die $\frac{1}{4}$ -Drehung im entgegengesetzten Sinn um dieselbe Ebene. B bedeute die entsprechende Drehung um eine andere Koordinatenebene und zwar um die, die mit der ersten nur den Ursprung, keine Achse gemeinsam hat; z. B. die $x_1 x_3$ -Ebene und die $x_2 x_4$ -Ebene. In diesem Falle ist die Multiplikation der Operationen auch kommutativ, also $A \cdot B = B \cdot A$. Die vierziffrigen Zahlenkombinationen in den Z_8 -Punkten kommen auf folgende Weise zustande:

die 1. Ziffer durch die Identität oder Umwendung	J	oder	$A^2 \cdot B^2$
» 2. » » » Doppeldrehungen	$A \cdot B$	»	$A^{-1} \cdot B^{-1}$
» 3. » » » »	$A \cdot B^{-1}$	»	$A^{-1} \cdot B$
» 4. » » » einfachen $\frac{1}{2}$ -Drehungen	A^2	»	B^2

In der zweiten Spalte stehen die mit $A^2 \cdot B^2$ multiplizierten Transformationen der ersten Spalte. Beide Spalten ergeben dieselbe Lösung; wählt man aber in den 4 Reihen einmal oder dreimal die im Schema rechts stehende Transformation, so erhält man die andere Lösung des ersten Falles. Diese 8 Transformationen zusammen bilden eine Gruppe G_8 , die eine Untergruppe der alternierenden Gruppe des Achtzells ist. Wegen der Gruppeneigenschaft kann die Reihenfolge der 4 Ziffern bei den Kombinationsbildungen auch ganz beliebig gewählt werden. Entsprechend den 3 Paaren der Koordinatenebenen gibt es 3 solcher G_8 , die aber immer zu einer der beiden Lösungen führen. Auch 4 von den 8 sogenannten Vierergruppen von F. KLEIN und deren Kombinationen unter einander führen zu den Lösungen des ersten Falles. Die anderen 4 Vierergruppen bestehen aus Operationen, die die « Einerebenen » der Fig. 3. in verbotener Weise transformieren, sodass deren Ausschluss sich gruppentheoretisch genau definieren lässt. Die 8 Vierergruppen mit den 3 oben erwähnten G_8 bilden eine Gruppe G_{32} . Eine KLEINSche Vierergruppe besteht in geometrischer Deutung ausser der Identität aus 3 verschiedenen $\frac{1}{2}$ -Drehungen um Ebenen, die 2 Paare gegenüber liegender Flächendiagonalen enthalten; 4 Eckpunkte des Z_8 sind also Ruhepunkte der Transformationen. In den ebenen Figuren 2. und 3. wäre eine Rechts-Links-Spiegelung eine solche

Operation. Es gibt 12 von diesen Rotationsebenen. Ihre Gleichungen sind von der Form

$$x_i \pm x_j = x_k \pm x_m = 0,$$

wo i, j, k, m eine Permutation von 1, 2, 3, 4 ist.

VIII. DIE ZWEI LETZTEN BEDINGUNGEN FÜR EINE VERALLGEMEINERUNG.

Zum Abschluss der Untersuchung seien hinreichende Bedingungen angegeben, die eine Erweiterung des Problems im Sinne der 3) und 4) Forderung (bei Formel [3]) ermöglichen. Wir beschränken uns auf den Fall, dass die Kanten mit einer ungeraden Anzahl p von Zahlen besetzt sind. Für gerades p ist die Lösungsmethode in manchen Punkten verschieden; für p von der Form $4m$ einfacher, und für $p = 4m + 2$ etwas umständlicher. Auch ist die Frage offen gelassen, ob die Bedingung 4) im Falle $p = 4m + 2$ erfüllbar ist oder nicht (¹). Nach der Bedingung 3) lässt es sich beim Achtzell im Falle $p = 15$ zum ersten Mal verwirklichen, dass die Flächen- und Körperdiagonalen in allen Schichten und Würfeln die gleiche Summe der p Zahlen haben. Gehen wir zurück zur Fig. 2. Von Punkt 0 gehen nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 4 Kanten parallel den 4 Dimensionsrichtungen aus; ebenso $\binom{4}{2} = 6$ Flächendiagonalen nach den Punkten $\alpha + \beta; \gamma + \delta$ usw., dann $\binom{4}{3} = 4$ Körperdiagonalen nach den Punkten $\alpha + \beta + \gamma; \beta + \gamma + \delta$, usw., endlich 1 Zelldiagonale nach $\alpha + \beta + \gamma + \delta$. Das gleiche gilt für jeden anderen Eckpunkt. Auf allen Verbindungslinien und den Parallelen dazu muss die Summe der p Zahlen gleich sein. Die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ihre additiven Verbindungen erhalten jetzt noch eine andere Bedeutung. Ausser dass sie die Zahlen in den Eckpunkten bezeichnen, geben sie auch die Differenz in den arithmetischen Reihen an, mit denen die Verbindungen der Ecke 0 mit den anderen Eckpunkten und die Parallelen dazu zu besetzen sind. Würden also zwei Ecken gleiche Zahlen

(¹) Vgl. « Am. J. of Math. 19 », (1897), pp. 99 ff.

enthalten, so wären auch alle Zahlen der Verbindungslinie mit diesen gleich. Die Parallelen zu dieser Verbindungslinie enthielten dann auch gleiche, von den vorigen aber verschiedene Zahlen, sodass die Summe in allen Parallelen niemals dieselbe sein kann. Deshalb ist es notwendig, dass $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und ihre additiven Verbindungen alle verschieden sind. Gleiche Zahlen dürfen höchstens in einer Zelldiagonalen D_n auftreten, weil zu diesen keine Parallelen existieren. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ müssen auch relativ prim zu p sein; denn sonst würden sich in den Kanten gleiche Zahlen gruppenweise wiederholen. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Potenzen von 2, also $2^0, 2^1, 2^2, 2^3$ wählt. Zweckmässig ist es im Falle $p = 2^n - 1$, statt der höchsten Potenz von 2 die um 1 kleinere Zahl zu wählen, weil dann in der Zelldiagonalen mit gleichen Ziffern sofort die richtige Summe auftritt. Ist p keine Primzahl, so müssen in der natürlichen Zahlenfolge Umstellungen vorgenommen werden, sodass z. B. für $p = 15$ auch bei Dreier- und Fünfersprüngen von jeder Zahl aus sich die gleiche Summe bilden lässt. Dem Gedankengang nach sei jetzt die Lösung für die Fälle 15^4 und 17^4 gegeben. Es sei $p = 15$; $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 4, \delta = 7$. In den von 0 ausgehenden Kanten stehen also die arithmetischen Reihen

nach α :	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
nach β :	15	13	11	9	7	5	3	1	14	12	10	8	6	4	2
nach γ :	15	11	7	3	14	10	6	2	13	9	5	1	12	8	4
nach δ :	15	8	1	9	2	10	3	11	4	12	5	13	6	14	7

Statt der Zahl 15 ist die kongruente Zahl 0 zu setzen; negative Zahlen sind im Schema schon durch die (mod 15) kongruenten positiven ersetzt. Die letzte Spalte enthält die für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gewählten Werte. Stellt man die additiven Verbindungen zusammen und zwar geordnet nach gegenüber liegenden Punkten, so ersieht man, dass alle 15 Zahlen in den 16 Eckpunkten vorkommen und die Summe in der Zelldiagonalen 7, 7, 7, ... die gleiche wie in anderen Reihen oder Diagonalen ist.

$\alpha = 1,$	$\beta + \gamma + \delta = 13;$	$\alpha + \beta = 3,$	$\gamma + \delta = 11;$
$\beta = 2,$	$\alpha + \gamma + \delta = 12;$	$\alpha + \gamma = 5,$	$\beta + \delta = 9;$
$\gamma = 4,$	$\alpha + \beta + \delta = 10;$	$\alpha + \delta = 8,$	$\beta + \gamma = 6;$
$\delta = 7,$	$\alpha + \beta + \gamma = 7;$	$0 = 0,$	$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 14.$

Um zu erreichen, dass in der natürlichen Zahlenreihe 0 bis 14 bei Dreier- oder Fünfersprüngen keine Gruppen mit verschiedenen Zahlenwerten auftreten, (was in manchen Diagonalen vorkommt), ordnen wir die Zahlen in ein rechteckiges Schema ein, derart dass in Reihen

$$\begin{array}{r|l} 4 & 13 & 14 & 3 & 1 & = 35 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & = 35 \\ 12 & 2 & 0 & 10 & 11 & = 35 \\ \hline 21 & 21 & 21 & 21 & 21 & \end{array}$$

und Spalten sich je gleiche Summen ergeben. Die ursprünglichen Zahlen werden dann durch eine dem Schema gesetzmässig entnommene Zahlenfolge ersetzt, wobei die Zahl 7 erhalten bleibt:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 6 & 0 & 3 & 9 & 12 & 13 & 7 & 10 & 1 & 5 & 2 & 14 & 8 & 11 \end{array}$$

Wenn bei den 4 Bewegungstransformationen des Achtzells (zur Bildung vierziffriger Kombinationen im Zahlensystem mit der Basis 15) die Zelldiagonale mit gleichen Ziffern nicht mehrmals zusammenfällt, und wenn die Dimensionsrichtungen durch die Bewegungen zyklisch vertauscht werden, dann kommen alle Kombinationen wirklich zustande, sodass für 15^4 die Aufgabe gelöst ist.

Bei 17^4 wählt man $\delta = 8$; (allgemein bei noch grösseren Zahlen p , $\delta = \frac{p-1}{2}$). In den Ecken tritt keine Zahl mehr zweimal auf, und weil 17 Primzahl ist, kann die Reihenfolge der Zahlen ganz beliebig genommen werden. Der Sinn der Bedingung 4) sei an einem Beispiel der Ebene gezeigt. Das folgende Quadrat setzt sich aus vier gleichen

$$\begin{array}{cccccccc} 15 & 10 & 3 & 6 & 15 & 10 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 16 & 9 & 4 & 5 & 16 & 9 \\ 14 & 11 & 2 & 7 & 14 & 11 & 2 & 7 \\ 1 & 8 & 13 & 12 & 1 & 8 & 13 & 12 \\ 15 & 10 & 3 & 6 & 15 & 10 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 16 & 9 & 4 & 5 & 16 & 9 \\ 14 & 11 & 2 & 7 & 14 & 11 & 2 & 7 \\ 1 & 8 & 13 & 12 & 1 & 8 & 13 & 12 \end{array}$$

Quadraten zusammen. Wie man auch ein 4^2 herausgreift, immer sind auch in den Diagonalen die Bedingungen für ein Zahlenquadrat erfüllt. Setzt man in ähnlicher Weise 16 gleiche Z_8 zu einem linear doppelt so grossen zusammen, so kann jede Zahl zum Mittelpunkt des Zells gewählt werden. Bestimmt man die Anzahl der verschiedenen Diagonalen mit den jetzt hinzugekommenen Nebendiagonalen, so ändert sich Formel [2] in

$$[2a] \quad D'_k = 2^{k-1} \binom{n}{k} p^{n-1} ,$$

sodass $\sum D'_k$ angibt, auf wie viele Weisen sich die konstante Summe von p Zahlen bilden lässt:

$$[3a] \quad \sum_k D'_k = \frac{1}{2} (3^n - 1) p^{n-1} .$$

Im Falle 17^4 ist die Anzahl 196 520, gegenüber 23 400, die durch die Forderungen 1) bis 3) verlangt werden.

SULLE SUPERFICIE UGUALMENTE ILLUMINATE DA UNA SORGENTE LUMINOSA (*)

GIOVANNI SANSONE

SYMMARIUM. — Auctor aequationem differentialem partialem cuiusvis superficiei, quae a puncto lucido aequalem ubique luminis quantitatem accipit, integrat.

1. — Nel quarto dei suoi opuscoli analitici PIETRO PAOLI ⁽¹⁾ determinava le curve piane Γ i cui punti sono tutti ugualmente illuminati da una sorgente luminosa O appartenente al piano della curva.

Riferito il piano di Γ ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y con l'origine in O , poichè la distanza di O dalla retta tangente alla curva Γ in un suo punto (x, y) ha l'espressione $\frac{x dy - y dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ e l'intensità dell'illuminamento prodotto da O in (x, y) è proporzionale a $\frac{x dy - y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2} \sqrt{dx^2 + dy^2}}$, le coordinate del punto (x, y) di Γ debbono soddisfare l'equazione di PAOLI ⁽²⁾

$$[1] \quad \frac{x dy - y dx}{(x^2 + y^2)^{3/2} \sqrt{dx^2 + dy^2}} = 1 .$$

Passando dalle coordinate cartesiane x, y alle coordinate polari ρ, θ

$$[2] \quad x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 26 agosto 1945.

⁽¹⁾ PIETRO PAOLI *liburnensis*, *Opuscula Analytica* (Liburni, 1786), pagg. iv + 175 + 1 tavola; Opusculum IV, De problemata Optica, ubi de quibusdam aequationibus differentialibus, pagg. 168-173.

⁽²⁾ Cfr. P. PAOLI, *op. cit.* in ⁽¹⁾, pag. 168.

e come dice L. MASCHERONI ⁽¹⁾ operando con la trasformazione di PAOLI [2], dalla [1] si ottiene l'equazione differenziale a variabili separabili

$$\sqrt{1 - \rho^4} d\theta = \rho d\rho ;$$

questa possiede l'integrale

$$[3] \quad \rho = 1$$

cui corrisponde la circonferenza con centro nell'origine O e raggio unitario, e l'integrale dell'equazione differenziale

$$(1 - \rho^4)^{-1/2} d\rho^2 = d(2\theta)$$

il quale vale

$$\arccos \rho^2 = 2\theta + c, \quad (c = \text{cost.}),$$

ovvero

$$[4] \quad \rho^2 = \cos(2\theta + c).$$

Questo problema fu ripreso nel 1781 da VITTORIO FOSSOMBRONI nel suo *Saggio di ricerche sull'intensità del lume* ⁽²⁾; egli osservava esplicitamente che la [4] è l'equazione della lemniscata di GIACOMO BERNOLLI ⁽³⁾.

Il FOSSOMBRONI considerava altri problemi della stessa natura e chiudeva il suo lavoro ⁽⁴⁾ determinando l'espressione analitica dell'illuminamento prodotto da una sorgente luminosa situata nell'origine O su un elemento della superficie S di equazione.

S: $z = z(x, y)$, $[x, y, z]$ coordinate cartesiane ortogonali, di centro (x, y, z) .

Poichè la distanza dell'origine O dal piano tangente alla S in (x, y, z) vale

$$\frac{\left| x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z \right|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}},$$

⁽¹⁾ L. MASCHERONI, *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*, P. I, Pavia 1790 (pagg. 66-71); Pavia 1792 (pagg. 55-58); Cfr. L. EULERI, *op. Omnia*, (I), XII, (pagg. 482-487), pag. 483; (pagg. 539-542), pag. 539. Cfr. anche G. VIVANTI, *Nuovi esercizi di Analisi infinitesimale tratti dalle Matematiche Applicate*, (Pavia, 1916), pagg. 273-274.

⁽²⁾ Arezzo, 1781, pag. xxviii + 112 + 1 tavola.

⁽³⁾ V. FOSSOMBRONI, *op. cit.*, pag. 58.

⁽⁴⁾ Cfr. V. FOSSOMBRONI, *op. cit.*, pag. 106.

l'illuminamento prodotto da O sull'elemento considerato è proporzionale a

$$\frac{\left| x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z \right|}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}},$$

talchè l'equazione delle superficie ugualmente illuminate dall'origine O in ogni loro punto si ottiene integrando l'equazione alle derivate parziali

$$[5] \quad \frac{\left| x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z \right|}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2}} = 1. \quad (1)$$

Il FOSSOMBRONI nel lavoro ricordato non andava oltre nella questione, e scopo della presente nota è appunto l'integrazione dell'equazione [5] che non sembra sia stata da altri conseguita.

2. - Passando dalle coordinate cartesiane x, y, z alle polari ρ, θ, φ con il polo in O e l'asse polare coincidente con l'asse z si ha

$$[6] \quad x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta,$$

e se

$$S: \rho = \rho(\theta, \varphi)$$

è l'equazione della superficie S si ha anche⁽²⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-\rho \sin^2 \theta \cos \varphi + \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}{\left(\rho \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \sin \theta}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-\rho \sin^2 \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \cos \varphi \frac{\partial \rho}{\partial \varphi}}{\left(\rho \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \sin \theta}, \end{aligned}$$

(1) Evidentemente se S è una superficie che soddisfa il problema, qualunque superficie omotetica ad S rispetto al centro O , soddisfa il problema stesso.

(2) Cfr. ad es. G. SANSONE, «Lezioni di Analisi Matematica», II (Padova 1941), Cap. II, n. 19, pag. 118.

e la [5] tenendo conto delle [6] e di quest'ultime diventa

$$\rho^2 \left[\rho^2 \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2 \right] = \sin^2 \theta ,$$

ovvero

$$[7] \quad (\rho^2)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \rho^2}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \rho^2}{\partial \varphi} \right)^2 = 1 .$$

Posto

$$[8] \quad \boxed{\rho^2 = \cos 2\tau}$$

dalla [7] si trae per $\tau(\theta, \varphi)$ l'equazione

$$\left[1 - \left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \sin^2 2\tau = 0 ,$$

e perciò $\tau = 0$ e

$$[9] \quad \boxed{\rho^2 = 1} ,$$

la quale rappresenta la sfera con centro nell'origine e raggio unitario, oppure

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varphi} \right)^2 = 1 .$$

Da questa otteniamo

$$[10] \quad \frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \sin \lambda , \quad \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \sin \theta \cos \lambda ,$$

e le condizioni di integrabilità di questo sistema danno per la funzione $\lambda(\theta, \varphi)$ l'equazione alle derivate parziali

$$[11] \quad \boxed{\sin \theta \sin \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \cos \lambda \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} = \cos \theta \cos \lambda} ,$$

talchè se $\lambda(\theta, \varphi)$ è una soluzione di questa equazione, dalle [10] otteniamo

$$[12] \quad \tau(\theta, \varphi) = (\sin \theta) \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \lambda(\theta, \varphi) d\varphi + \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \lambda(\theta, \varphi_0) d\theta + c , \quad [c = \text{cost}] .$$

Abbiamo dunque che le superficie S cercate, oltre le sfere unitarie⁽¹⁾, sono le superficie di equazione [8], ove $\tau = \tau(\theta, \varphi)$ è determinata dalla [12], [2], essendo in quest'ultima $\lambda(\theta, \varphi)$ una soluzione dell'equazione [11].

3. — È facile conseguire l'integrazione dell'equazione [11]. Si osservi infatti che a tale equazione è associato il sistema differenziale ordinario

$$[13] \quad \frac{d\lambda}{\sin \theta \sin \lambda} = \frac{d\varphi}{\cos \lambda} = \frac{d\lambda}{\cos \theta \cos \lambda}.$$

Si ha da questo

$$\operatorname{ctg} \theta d\theta = \operatorname{tg} \lambda d\lambda, \quad d \log \sin \theta \cos \lambda = 0,$$

quindi

$$[14] \quad \sin \theta \cos \lambda = c_1, \quad (c_1 = \text{cost.}),$$

perciò

$$d\varphi = \frac{d\lambda}{\cos \theta} = \frac{\cos \lambda d\lambda}{\sqrt{\cos^2 \lambda - c_1^2}} = \frac{d(1 - c_1^2)^{-1/2} \sin \lambda}{\sqrt{1 - [(1 - c_1^2)^{-1/2} \sin \lambda]^2}},$$

da cui

$$[15] \quad \varphi = \arcsin \frac{\sin \lambda}{\sqrt{1 - c_1^2}} = c_2, \quad (c_2 = \text{cost.}).$$

Le [14] e [15] integrano il sistema differenziale [13], e poichè si ha da esse

$$\sin \theta \cos \lambda = c_1, \quad \varphi = \arcsin \frac{\sin \lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \lambda}} = c_2$$

ne viene che l'integrale generale dell'equazione [11] (come si può peraltro verificare direttamente) ha l'espressione

$$[16] \quad \varphi = \arcsin \frac{\sin \lambda}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \lambda}} = F(\sin \theta \cos \lambda)$$

dove F è una funzione arbitraria del suo argomento⁽¹⁾.

(1) Cfr. ad es. a) U. DINI, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, II, (2ª parte), (Pisa 1915), pagg. 892-893; b) É. GOURSAT, *Cours d'Analyse Mathématique*, II, (Paris, 1925), pag. 575.

Per le cose dette se $\lambda = \lambda(\theta, \varphi)$ è una soluzione di questa equazione, la superficie $\rho^2 = \cos 2\tau(\theta, \varphi)$, dove $\tau(\theta, \varphi)$ si determina con la [12] fornisce una superficie S la quale gode la proprietà richiesta.

4. - È facile vedere come si determina la F quando si prescrive alla superficie S il passaggio per una curva

$$\Gamma: \quad \rho = \rho_0(\varphi), \quad [0 \leq \rho_0(\varphi) \leq 1]$$

del piano (x, y) , $\left[\theta = \frac{\pi}{2}\right]$.

Definita infatti la funzione $\tau_0(\varphi)$ coll'equazione

$$\tau_0(\varphi) = \frac{1}{2} \arccos \rho_0^2(\varphi)$$

si ha dalle [8] e [12], ponendo in quest'ultima $\theta = \frac{\pi}{2}$,

$$\tau_0(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos \lambda \left(\frac{\pi}{2}, \varphi \right) d\varphi + c, \quad [c = \text{cost.}],$$

quindi

$$\lambda \left(\frac{\pi}{2}, \varphi \right) = \arccos \tau'_0(\varphi),$$

e dalla [16]

$$\varphi - \frac{\pi}{2} = F[\tau'_0(\varphi)]$$

che determina appunto la funzione F .

Con lo stesso procedimento si determina la F quando si prescrive alla superficie S il passaggio per una curva appartenente al cono circolare con il vertice nell'origine, con l'asse coincidente con l'asse polare, e di angolo conico θ_0 .

5. - a) Esaminiamo i casi particolari in cui si abbia

$$[17] \quad \varphi - \arcsen \frac{\sen \lambda}{\sqrt{1 - \sen^2 \theta \cos^2 \lambda}} = \text{cost.}, \quad \sen \theta \cos \lambda = \text{cost.},$$

Nel primo caso, a meno di una rotazione attorno all'asse polare potrà suppersi

$$\varphi = \arcsen \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \lambda}},$$

da cui si ottiene

$$\operatorname{tg} \lambda = \cos \theta \operatorname{tg} \varphi$$

e il sistema [10] diventa

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \frac{\cos \theta \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \varphi}}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \varphi}},$$

quindi

$$\tau = \arcsen (\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta),$$

ed essendo $\rho^2 = \cos 2\tau = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \tau$ si ha $\rho^2 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta$ e moltiplicando per ρ^2 e tenuto conto delle [6] abbiamo infine

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + z^2 - y^2$$

che è l'equazione della superficie ottenuta ruotando di un giro completo attorno all'asse y la lemniscata di BERNOULLI $(y^2 + z^2)^2 - (z^2 - y^2) = 0$ del piano yz , con il nodo nell'origine, e il semiasse focale appartenente all'asse z e uguale a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

È manifesto del resto, per le cose dette al n. 1, che una tale superficie soddisfa il problema.

c) Valga ora la seconda delle [17], si abbia cioè

$$\operatorname{sen} \theta \cos \lambda = c, \quad (c = \text{cost.});$$

il sistema [10] si scrive

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta - c^2}}{\operatorname{sen} \theta}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} = c,$$

quindi

$$\tau = \int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta - c^2}}{\operatorname{sen} \theta} d\theta + c\varphi + c_1, \quad (c_1 = \text{cost.}),$$

e poichè

$$\int \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - c^2}}{\sin \theta} d\theta = \int \frac{\sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta - c^2}} d\theta - c^2 \int \frac{d\theta}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - c^2}} =$$

$$= -\operatorname{arc} \sin \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-c^2}} - c \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - c^2}}{\sqrt{1-c^2} \sin \theta},$$

le superficie S corrispondenti al caso in esame hanno l'equazione

$$\rho^2 = \cos 2 \left[c \varphi - \operatorname{arc} \sin \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-c^2}} - c \operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - c^2}}{\sqrt{1-c^2} \sin \theta} + c_1 \right]$$

con c e c_1 costanti.

Nel caso particolare di $c=0$ si ha $\rho^2 = \cos 2(\theta - \theta_0)$, $\theta_0 = \text{costante}$, e questa rappresenta l'equazione della superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare una lemniscata di BERNOULLI con il nodo nell'origine di semiasse focale $\frac{1}{\sqrt{2}}$, e in un piano per l'asse polare, di un giro completo attorno a tale asse.

I PRIMI RESTI DI PESCI RINVENUTI NEL TRIAS DELLA REGIONE DOLOMITICA (*)

(Con una tavola)

PIERO LEONARDI

SUMMARY. — Fossiles piscium reliquiae describuntur, quae circa «Cortina d'Ampezzo» paulo ante repertae sunt, cum antea in triadicis dolomiticae regionis depositis piscium reliquiae inventae sunt numquam.

Il signor RINALDO ZARDINI mi ha gentilmente affidato per lo studio una placca dentaria di selacio da lui rinvenuta qualche tempo fa nei dintorni di Cortina d'Ampezzo, e di ciò sentitamente lo ringrazio, poichè non essendo finora stati segnalati resti di pesci nei sedimenti triassici della regione dolomitica, l'esemplare in questione, assieme ad un altro rinvenuto dallo scrivente, di cui ci occuperemo in questa stessa Nota, presenta notevole interesse.

L'interessante fossile di Cortina è stato rinvenuto negli strati di Raibl affioranti alla base del Gruppo delle Tofane lungo la mulattiera che da Pocol sale al Rifugio Cantore. La roccia che lo conteneva è un calcare biancastro finemente oolitico e l'esemplare è stato rinvenuto nella roccia in posto, in modo che non c'è alcun dubbio circa il riferimento cronologico.

Esso è conservato soltanto parzialmente, ma la parte che rimane è in ottimo stato di conservazione e sicuramente determinabile.

Si tratta di una placca dentaria allungata, la cui superficie, sensibilmente convessa, presenta in tutta la sua estensione numerosi finissimi pori.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giorgio Dal Piaz il 14 novembre 1945.

Per quello che si può vedere del suo contorno e per i suddetti caratteri della sua superficie, il fossile corrisponde molto bene a due placche dentarie di *Asteracanthus* (= *Strophodus*) *magnus* Agassiz del Giurese medio dell'Inghilterra, figurate da SMITH WOODWARD⁽¹⁾.

Ritengo dunque che si possa senz'altro attribuire il nostro esemplare al genere *Asteracanthus* (= *Strophodus*), e ciò presenta un certo interesse, perchè, per quanto mi consta, questo genere non era stato finora segnalato non solo nel Trias delle Dolomiti, ma neppure nel Trias delle Alpi Orientali in generale.

Infatti W. DEECKE, nel fascicolo del « Fossilium Catalogus » relativo ai pesci triassici, lo cita soltanto per il Lettenkohle del Württemberg, per il Retico della Francia e per il Trias (Hosselkus Limestone) della California⁽²⁾, e neppure dopo di allora mi è nota alcuna segnalazione relativa alle Alpi Orientali.

Un altro resto fossile di pesce era stato rinvenuto dallo scrivente — come ho già accennato — alcuni anni prima nei sedimenti calcareo-marnosi raibliani affioranti lungo il sentiero che dalla casera Copada bassa conduce alla casera Copada alta, a sud della Forcella Cibiana, al confine tra lo Zoldano e il Cadore. Ma poichè le sue condizioni di conservazione non consentono una determinazione sufficientemente sicura, e nelle opere consultate non ho trovato alcun resto fossile di pesce che gli sia sicuramente paragonabile, ritengo opportuno limitarmi a segnalare il rinvenimento, che ha pure un certo interesse, trattandosi del *primo resto di pesce trovato nel Trias della Regione Dolomitica*.

(1) SMITH WOODWARD A., *Catalogue of the fossil fishes in the British Museum*, Part I, Elasmobranchii, London 1889, tav. XV, f. 6-7.

(2) DEECKE W., *Fossilium Catalogus*, Pars 33, *Pisces triadici*, Berlin, 1926, pag. 62.



Fot. R. Zardini

Placca dentaria di *Asteracanthus* cfr. *magnus* Agassiz del Raibliano dei dintorni di Cortina d'Ampezzo (Dolomiti orientali). Alquanto ingrandita.

BIBLIOGRAFIA ⁽¹⁾

- AGASSIZ L., *Recherches sur les poissons fossiles*, Neuchâtel, 1833-1843.
- ALBERTI F. VON, *Überblick über die Trias mit Berücksichtigung ihres Vorkommens in den Alpen*. Stuttgart, 1864.
- DEECKE W., *Fossilium Catalogus*, Pars 33: *Pisces triadici*. Berlin, 1926.
- D'ERASMO G., *Catalogo dei pesci fossili delle tre Venezie*. Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova, vol. VI, 1919-22.
- ENGEL TH., *Geognostischer Wegweiser durch Württemberg*. Stuttgart, 1908.
- SCHEMPER J., *Der Keuper Württembergs in den Landesgegenden von Rottweil, Tübingen, Stuttgart und Heilbronn*. Württembergische Jahreshefte des Vereins f. vaterlandische Naturkunde, vol. 28, Hefte 2-3.
- SMITH WOODWARD A., *Catalogue of the Fossil Fishes in the British Museum*, Part I, Elasmobranchii, London, 1889; *Traité de Paléontologie*, Paris, 1893.
- ZITTEL K. A. VON, *Grundzüge der Paläontologie (Paläozoologie)*. Vol. II, Vertebrata, München u. Berlin, 1923.

(¹) Do soltanto la bibliografia relativa alla placca dentaria di *Asteracanthus*, tralasciando di citare le numerose opere consultate inutilmente per l'altro esemplare.

AZIONI ELASTICO-DISSIPATIVE A CICLO D'ISTERESI ELLITTICO (*)

CARLO GATTANEO

SYMMARIVM. — Legem quamdam elastico-dissipativam, quae iam enunciata est de harmonicis vibrationibus, Auctor extendit ad quoslibet motus. Hac fretus lege quae experimentis innititur circa elasticam hysteresim peractis, breviter sed ordinata ratione generatim inquirat de parvis oscillationibus, cum in systematibus libertatis gradus finitos habentibus, tum etiam in systematibus continuis unius vel plurium dimensionum.

1. **PREMESSE.** — La proporzionalità tra forza e spostamento, caratteristica dell'elasticità ordinaria, è un'ipotesi limite solo imperfettamente aderente alla realtà fisica come lo è, del resto, qualunque altra corrispondenza biunivoca tra tensione e deformazione che sia subordinata a un potenziale elastico. L'esperienza dimostra che ogni fenomeno di moto elastico è regolarmente accompagnato da un disperdimento interno di energia meccanica e che l'esistenza di un potenziale di elasticità, nel senso abituale, non è rigorosamente ammissibile.

Se in linea qualitativa questa dissipazione è immediatamente accerlabile, più difficile è la sua traduzione in termini analitici, che non può dirsi stabilita in modo definitivo. Decisamente superata è oggi la concezione di una azione dissipativa dipendente dalla velocità di deformazione, perchè in aperto disaccordo coi risultati sperimentali relativi ai fenomeni di isteresi. La speciale natura di questi fenomeni

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini il 16 agosto 1945.

già da tempo ha condotto alla convinzione che una fedele rispondenza con la realtà possa ricercarsi nell'applicazione dei metodi generali della Fisica ereditaria, istituiti dal VOLTERRA⁽¹⁾. Senonchè le difficoltà, non lievi, e la conseguente incertezza che si incontrano nella determinazione sperimentale dei nuclei ereditari limitano notevolmente, almeno per ora, la portata applicativa di siffatti metodi.

Di fronte a queste difficoltà, sia pur d'indole pratica, è degna di rilievo per la sua grande semplicità un'ipotesi⁽²⁾ suggerita da accurate ricerche sperimentali (BECKER, FÖPPL) e già applicata in elevate questioni di ingegneria (KÜSSNER), che ci sembra suscettibile di utili generalizzazioni. L'ipotesi, basata sull'osservazione che i cicli d'isteresi elastica sono ben approssimabili con ellissi, dipendenti dall'ampiezza ma non dalla velocità delle deformazioni, almeno entro certi limiti di frequenza, consiste nell'ammettere che tra forza e spostamento elastico, supposti entrambi variabili sinusoidalmente, intercorra, come si ammette d'ordinario, una relazione di proporzionalità, salvo però uno sfasamento angolare α dell'uno rispetto all'altra, caratteristico del materiale. In termini precisi se lo spostamento ha, ad esempio, la forma $q = A e^{i\omega t}$ ⁽³⁾ alla forza elastica compete l'espressione $\Phi = -k A e^{i(\omega t + \alpha)}$ (α positivo e indipendente da ω). In modo equivalente può scriversi

$$[1.1] \quad \Phi = -k e^{i\alpha} q .$$

Effettivamente in tale ipotesi il lavoro L compiuto dalla forza elastica in un periodo, pur dipendendo dall'ampiezza delle oscillazioni, non dipende dalla loro frequenza:

$$[1.2] \quad L = -k\pi |A|^2 \sin \alpha .$$

⁽¹⁾ Cfr. ad es. G. KRALL, *Meccanica tecnica delle Vibrazioni*, Zanichelli, Bologna, 1940; vol. I, cap. III, pag. 161; cap. VI, pag. 335.

⁽²⁾ Cfr. G. KRALL, *op. cit.*, vol. II, cap. X, pag. 195.

⁽³⁾ Adotteremo di regola, seguendo l'uso degli elettrotecnici, la forma complessa per le grandezze variabili armonicamente. La stessa norma seguiremo anche nel caso di grandezze comunque variabili attraverso la considerazione di sviluppi in serie o integrale di FOURIER.

Si osservi per incidenza che una resistenza viscosa del tipo $-\beta\dot{q}$, in corrispondenza al medesimo moto e nello stesso tempo, eseguirebbe il lavoro

$$[1.3] \quad L' = -\beta\pi|A|^2\omega,$$

essenzialmente dipendente da ω .

La portata della [1.1], direttamente formulata nel caso che lo spostamento q sia una funzione sinusoidale del tempo, si può spontaneamente estendere senza alcuna modificazione al caso di moti qualunque attorno a una posizione di equilibrio libero. Basta infatti pensare espressa la q in serie (o integrale) di FOURIER (ammettere la possibilità di questo sviluppo non costituisce in pratica una grave restrizione) e applicare la [1.1] a ciascuna delle sue armoniche (finite o infinitesime); il principio di sovrapposizione degli effetti permette allora di ricostituire la stessa [1.1] con validità generale. Se poi il moto avviene attorno a una posizione d'equilibrio forzato (mantenuto da un'azione esterna invariabile) non c'è nulla da cambiare, pur di valutare gli spostamenti q a partire da codesta posizione; in tal caso la [1.1] dà la forza elastica *aggiuntiva* alla tensione statica che corrisponde alla posizione di equilibrio.

Formalmente questa legge elastico-dissipativa, da intendersi valida nell'ambito dinamico, comporta solo una lieve modificazione della legge di HOOKE: sostituzione del parametro di proporzionalità k col parametro complesso $ke^{i\alpha}$.

A dire il vero, anche prescindendo da ogni controllo sperimentale, una generalizzazione così assoluta presenta troppi elementi di arbitrarietà per non prestarsi a qualche critica. Ciononostante ci sembra che la [1.1], che ha già prestato utili servigi in qualche concreto caso applicativo, meriti di essere saggiata nella sua piena generalità. È per ciò che in questa Nota ci proponiamo di trattare, molto succintamente, il problema generale delle vibrazioni elastiche con la sistematica applicazione della legge [1.1]. In modo speciale ci soffermeremo sui sistemi a un grado di libertà; dei sistemi più complessi diremo, su di un tipico esempio, quanto basta a indicare le modalità di trattazione nel caso più generale. Mostreremo da ultimo una possibile estensione

della [1.1] a sistemi elastici continui, mettendone in rilievo qualche applicazione che ci è sembrata di particolare interesse, anche in riguardo a eventuali controlli sperimentali.

§ 1. - SISTEMI ELASTICI A UN GRADO DI LIBERTÀ.

2. VIBRAZIONI LIBERE E FORZATE. - Considerato un generico sistema elastico S a un grado di libertà, sia q un parametro lagrangiano che ne individui lo spostamento da una posizione di equilibrio, libero o forzato. Indicata con m la massa lagrangiana, con $F(t)$ la forza esterna (in forma complessa) e posto $\sigma^2 = \frac{k}{m}$, il moto di S è retto, secondo la [1.1], dall'equazione differenziale

$$[2.1] \quad \ddot{q} + \sigma^2 e^{i\alpha} q = \frac{F(t)}{m} .$$

In quanto precorre è implicito che nel computo della sollecitazione esterna $F(t)$ si deve prescindere da eventuali forze invariabili. La presenza di tali forze non avrà altro effetto che di spostare la posizione di equilibrio di S , dalla quale gli spostamenti vengono valutati.

Se la sollecitazione esterna manca (vibrazioni libere), la [2.1] ammette le soluzioni fondamentali

$$[2.2] \quad q = e^{-\sigma \sin \frac{\alpha}{2} \cdot t} e^{i\sigma \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t} ; \quad \bar{q} = e^{\sigma \sin \frac{\alpha}{2} \cdot t} e^{-i\sigma \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t}$$

Nella prima di esse sono evidenti i caratteri di un'oscillazione smorzata; la seconda soluzione, corrispondente a un moto vibratorio espansivo non rientra nella categoria delle funzioni sviluppabili in serie o integrale di FOURIER, nè, d'altronde, è *fisicamente accettabile*; essa va quindi scartata. La soluzione generale resta quindi, in veste reale,

$$[2.3] \quad q = e^{-\sigma \sin \frac{\alpha}{2} \cdot t} \left[a \cos \left(\sigma \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t \right) + b \sin \left(\sigma \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t \right) \right] .$$

Le costanti d'integrazione a e b si esprimono in funzione dei dati iniziali ($q_0 = q(0)$, $\dot{q}_0 = \dot{q}(0)$) così:

$$[2.4] \quad a = q_0, \quad b = \frac{\sigma \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot q_0 + \dot{q}_0}{\sigma \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Supponiamo ora che su S agisca una forza esterna sinusoidale $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ (F_0 reale). L'equazione [2.1] ammette in tal caso una soluzione particolare armonica sincrona colla forza esterna, soluzione che ha naturalmente uno speciale interesse, dato il carattere smorzato delle vibrazioni libere. Essa si scrive

$$[2.5] \quad q = A e^{i\omega t} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{m(\sigma^2 e^{i\alpha} - \omega^2)} = \frac{F_0 e^{i(\omega t - \psi)}}{m \sqrt{\sigma^4 + \omega^4 - 2\sigma^2 \omega^2 \cos \alpha}},$$

dove ψ sta ad indicare l'angolo

$$[2.6] \quad \psi = \arctan \frac{\sigma^2 \sin \alpha}{\sigma^2 \cos \alpha - \omega^2}.$$

Appare dalla [2.5] che lo spostamento è sfasato non solo rispetto alla forza elastica ma anche rispetto alla forza esterna, pur essendo diversi i due sfasamenti. Riguardo all'ampiezza della vibrazione $|A|$, si riconosce che, a differenza di quanto accade nell'ordinaria impostazione conservativa, essa rimane finita per qualsiasi valore di ω . Lo sfasamento α ha quindi, sull'ampiezza delle oscillazioni forzate, effetto analogo a quello di una resistenza viscosa; sia l'uno che l'altra attenuano, in misura maggiore al crescere della loro entità, il pericolo della risonanza quando la frequenza perturbatrice si approssima al suo valore critico. Tale valore, inteso come quello cui corrisponde la massima ampiezza di vibrazione, è nel caso presente dato da

$$[2.7] \quad \omega_{\text{crit}}^2 = \sigma^2 \cos \alpha$$

e ad esso corrisponde un'ampiezza

$$[2.8] \quad |A|_{\max} = \frac{F_0}{m \sigma^2 \sin \alpha}.$$

Il lavoro eseguito dalla forza esterna in un periodo, pari all'energia dissipata, risulta

$$L = \frac{\pi F_0^2 \sin \psi}{m \sqrt{\sigma^4 + \omega^4 - 2\sigma^2 \omega^2 \cos \alpha}} = -k\pi |A|^2 \sin \alpha,$$

in accordo con la [1.2].

Molto semplicemente si tratta anche il caso che la forza esterna sia una funzione generica, periodica o addirittura aperiodica, di t . Se ad es. la $F(t)$ è una funzione periodica di periodo T , si che valga lo sviluppo

$$[2.9] \quad F(t) = \sum_n F_n e^{\frac{2in\pi}{T}t}$$

basta sostituire nella [2.1] l'analogo sviluppo di $q(t)$ con coefficienti indeterminati q_n per riconoscere, mediante identificazione dei due membri, che il moto forzato di S sincrono colla forza esterna è rappresentato dalle formule

$$[2.10] \quad q(t) = \sum_n \frac{F_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}t - \psi_n\right)}}{m \sqrt{\sigma^4 + \frac{16\pi^4 n^4}{T^4} - 8 \frac{\sigma^2 \pi^2 n^2}{T^2} \cos \alpha}},$$

$$[2.11] \quad \psi_n = \arctan \frac{\sigma^2 \sin \alpha}{\sigma^2 \cos \alpha - \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}}, \quad (n=1, 2, \dots).$$

Confrontiamo le formule [2.3], [2.5], [2.6], [2.10], [2.11] con le analoghe che si ottengono nel caso di una resistenza interna di tipo viscoso $-\beta \dot{q}$. Posto

$$[2.12] \quad 2h = \frac{\beta}{m}, \quad v^2 = \sigma^2 - h^2, \quad \sigma^2 = \frac{k}{m},$$

risulta:

Vibrazioni libere

$$[2.13] \quad q = e^{-ht} [a \cos vt + b \sin vt] .$$

Vibrazioni sostenute da una forza sinusoidale $F_0 e^{i\omega t}$

$$[2.14] \quad q = \frac{F_0 e^{i(\omega t - \Theta)}}{\sqrt{(\sigma^2 - \omega^2)^2 + 4h^2 \omega^2}}$$

$$[2.15] \quad \Theta = \arctan \frac{2h\omega}{\sigma^2 - \omega^2} .$$

Vibrazioni sostenute da una forza periodica di tipo [2.9]

$$[2.16] \quad q = \sum_n^{\infty} \frac{F_n e^{i\left(\frac{2\pi n}{T} t - \Theta_n\right)}}{\sqrt{\left(\sigma^2 - \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}\right)^2 + 16h^2 \frac{\pi^2 n^2}{T^2}}}$$

$$[2.17] \quad \Theta_n = \arctan \frac{2h \frac{2\pi n}{T}}{\sigma^2 - \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}} \quad (n = 1, 2, \dots) .$$

È chiaro che tra la [2.3] e la [2.13] può stabilirsi completa identità purchè tra h ed α passi la relazione

$$[2.18] \quad h = \sigma \sin \frac{\alpha}{2} .$$

Verificata la [2.18] non c'è, per quanto concerne le vibrazioni spontanee, differenza alcuna tra le due impostazioni. Passando a paragonare le oscillazioni forzate sinusoidali si vede che la relazione [2.18] assicura l'uguaglianza tra le ampiezze di vibrazione ma non tra le rispettive fasi. È questa una differenza essenziale poichè ad essa fa riscontro una differenza nel lavoro periodico compiuto dalla forza esterna e cioè, in sostanza, nell'energia dissipata. La divergenza tra

le due impostazioni si accentua poi decisamente, anche in riguardo all'ampiezza dell'oscillazione totale, nel caso di una forza perturbatrice non sinusoidale, come un semplice esame delle [2.10], [2.11]; [2.16], [2.17] mostra chiaramente.

3. ESEMPIO. - Per fare un'applicazione molto semplice, ma espressiva, della [2.3] consideriamo un corpo C di massa m il quale urti con velocità w^- contro una parete elastica. Supposto l'urto centrale e diretto, e supposta trascurabile la forza viva indotta nella parete, il moto di C può ritenersi descritto, per tutta la durata del contatto, dalla [2.3] pur d'interpretare q come ascissa del suo baricentro G contata secondo la normale alla parete a partire dalla posizione di G medesimo al primo istante d'urto. Avendosi allora $q_0 = 0$, $\dot{q}_0 = w^-$, la [2.3] si scrive, avuto riguardo alle [2.4],

$$[3.1] \quad q = \frac{w^-}{\sigma \cos \frac{\alpha}{2}} e^{-\sigma \sin \frac{\alpha}{2} \cdot t} \cdot \sin \left(\sigma \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t \right).$$

Per avere la velocità w^+ posteriore all'urto basta valutare la $\frac{dq}{dt}$ all'istante $t = \frac{\pi}{\sigma \cos \frac{\alpha}{2}}$ in cui è ancora $q = 0$ e \dot{q} minima, con che si ricava

$$[3.2] \quad w^+ = -w^- e^{-\pi \tan \frac{\alpha}{2}}.$$

Si determina così molto semplicemente il cosiddetto « coefficiente di restituzione » (rapporto tra i valori assoluti delle velocità, posteriore e anteriore); esso risulta dipendere unicamente dalla costante dissipativa α e non dal modulo di elasticità k .

Osservazione. - Incidentalmente notiamo che, come caso limite, possono essere inquadrati nel nostro schema anche i sistemi « anelastici », comunemente caratterizzati da un coefficiente di restituzione nullo, assegnando loro per α il valore massimo π (cfr. la [3.2]). Adottato un tal valore, la formula [2.3] che regge il moto libero degenera nella forma $q = ae^{-\sigma t}$, contenente una sola costante arbitraria. La

seconda costante deve ritenersi puramente addittiva come quella che caratterizza la posizione di equilibrio spontaneo verso cui asintoticamente tende il sistema abbandonato a se stesso dopo un impulso iniziale (per un sistema anelastico infatti ogni posizione è da ritenersi posizione di equilibrio).

4. AGGRUPPAMENTO DI ORGANI ELASTICI. — Consideriamo lo schema tipico di un oscillatore e supponiamo che la massa m nel suo movimento deformi simultaneamente due o più molle, *poste in parallelo*, con caratteristiche elastico-dissipative distinte

$$k_1, \alpha_1; k_2, \alpha_2; \dots k_n, \alpha_n.$$

Un semplice calcolo mostra che il complesso delle n molle equivale ad un unico organo elastico di caratteristiche

$$[4.1] \quad k = \sqrt{\sum_{r,s}^n k_r k_s \cos(\alpha_r - \alpha_s)}$$

$$[4.2] \quad \alpha = \arctan \frac{\sum_{r=1}^n k_r \sin \alpha_r}{\sum_{r=1}^n k_r \cos \alpha_r}.$$

Se invece le molle (che ora per semplicità supporremo in numero di due) fossero accoppiate in serie si avrebbe

$$[4.3] \quad k = \frac{k_1 k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}}$$

$$[4.4] \quad \alpha = \arctan \frac{k_1 \sin \alpha_2 + k_2 \sin \alpha_1}{k_1 \cos \alpha_2 + k_2 \cos \alpha_1}.$$

Come è naturale, un diverso accoppiamento degli organi elementari costituenti può dar luogo ad organi complessivi assai differenti sia per i caratteri puramente elastici sia per l'angolo di sfasamento.

Se però gli organi elementari hanno tutti uguale costante di sfasamento, il medesimo valore di α compete all'organo globale.

Il carattere delle formule trovate è strettamente dinamico; in condizioni statiche tutte le α_r devono intendersi nulle e risulta, come d'ordinario,

$$k = \sum_1^n k_r$$

per l'aggruppamento in parallelo;

$$\frac{1}{k} = \sum_1^n \frac{1}{k_r}$$

per l'aggruppamento in serie.

§ 2. - SISTEMI A PIÙ GRADI DI LIBERTÀ.

5. OSCILLATORI ACCOPPIATI IN SERIE. - L'applicazione della legge elastico-dissipativa [1.1] a sistemi dotati di più gradi di libertà non presenta difficoltà alcuna. Tuttavia una trattazione riferita a coordinate lagrangiane arbitrarie non è possibile dato che, avendo in generale i vari organi elastici del sistema costanti di sfasamento diverse l'uno dall'altro, la scelta dei parametri lagrangiani è vincolata dalla condizione che a ciascuno di essi corrisponda uno, ben determinato, di detti organi. Per chiarire questo concetto ci riferiremo senz'altro a un esempio concreto, sufficiente del resto a indicare la via da seguire in ogni altro caso.

Consideriamo due oscillatori a molla accoppiati in serie (si tratta dello schema tipico d'una massa oscillante munita di un ammortizzatore). Sia m_1 la massa del primo di essi, *oscillatore principale*, m_2 la massa dell'altro, *oscillatore secondario*; le due molle abbiano caratteristiche k_1, α_1 e, rispettivamente, k_2, α_2 . Chiamiamo poi q_1 e q_2 le elongazioni (algebriche) dell'una e dell'altra molla, che assumeremo come coordinate lagrangiane. Ciò posto, la forza elastica esercitata dalla prima molla sulla massa m_1 sarà espressa da $-k_1 e^{i\alpha_1} q_1$. La se-

conda molla dal suo canto eserciterà sulla massa m_1 una forza $k_2 e^{i\alpha_2} q_2$ e una forza uguale e opposta sulla massa m_2 . Supposto, per semplicità, che la sollecitazione esterna si riduca a una forza sinusoidale $F_1 e^{i\omega t}$ agente sulla massa principale, le equazioni differenziali del moto si scriveranno

$$[5.1] \quad \begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 + k_1 e^{i\alpha_1} q_1 - k_2 e^{i\alpha_2} q_2 = F_1 e^{i\omega t} \\ m_2 (\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) + k_2 e^{i\alpha_2} q_2 = 0 \end{cases}$$

Il sistema [5.1] ammette una soluzione armonica in accordo di frequenza colla forza perturbatrice:

$$[5.2] \quad q_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad q_2 = A_2 e^{i\omega t};$$

fatte le sostituzioni si ricavano i valori delle costanti complesse A_1 e A_2 , i cui moduli danno l'ampiezza di oscillazione delle due masse.

A conti eseguiti, i quadrati di queste ampiezze risultano

$$[5.3] \quad \begin{aligned} |A_1|^2 &= F_1^2 \frac{(m_2 \omega^2 - k_2 \cos \alpha_2)^2 + k_1^2 \sin^2 \alpha_2}{D^2} \\ |A_2|^2 &= F_1^2 \frac{m_2^2 \omega^4}{D^2}, \end{aligned}$$

avendo posto

$$\begin{aligned} D^2 &= \omega^2 [m_1 m_2 \omega^2 + (m_2 - m_1) k_2 \cos \alpha_2 - m_2 k_1 \cos \alpha_1] + k_1 k_2 \cos (\alpha_1 + \alpha_2) \{^2 + \\ &+ \omega^2 [(m_2 - m_1) k_2 \sin \alpha_2 - m_2 k_1 \sin \alpha_1] + k_1 k_2 \sin (\alpha_1 + \alpha_2) \{^2. \end{aligned}$$

La discussione della dipendenza di $|A_1|$ dai parametri m_2 , k_2 e α_2 (caratteristiche dell'oscillatore secondario) avrebbe un notevole interesse per il problema dell'ammortizzazione dei sistemi vibranti, ma non è qui il caso di occuparsene.

Neppure insistiamo sull'esame esplicito delle vibrazioni spontanee alle quali compete il medesimo carattere smorzato già riconosciuto nel caso di un solo grado di libertà. Ci limitiamo a notare che per i sistemi a più gradi di libertà si accentua la divergenza già notata tra l'impostazione attuale e l'ordinaria impostazione dissipativa basata sull'intervento di resistenze viscosi.

§ 3. - SISTEMI CONTINUI.

6. VIBRAZIONI DI UN'ASTA. - Considerata una sbarra elastica AB di lunghezza l , fissata ad uno o ad entrambi gli estremi (mediante vincoli opportuni: appoggi, incastri, ecc.) e assunto su essa un sistema di ascisse di origine A, indichiamo con $c(x, \xi)$ lo spostamento trasversale statico provocato nel punto di ascissa x ad opera di un carico unitario concentrato nel punto di ascissa ξ (funzione di influenza o di GREEN). Per studiare il problema dinamico dell'asta nel nostro schema dissipativo basta, seguendo lo stesso criterio adottato nei paragrafi precedenti, modificare l'impostazione classica sostituendo a $c(x, \xi)$ la funzione complessa $e^{-i\alpha} \cdot c(x, \xi)$, α essendo una costante di sfasamento propria del materiale costituente la sbarra. È con ciò implicito che questa si suppone costituita omogeneamente mentre non è affatto escluso che siano variabili le sue dimensioni trasversali.

Indicata con $\mu(x)$ la densità lineare dell'asta e con $p(x, t)$ l'intensità del carico diffuso su di essa, lo spostamento elastico trasversale $w(x, t)$ è individuato dall'equazione integro-differenziale

$$[6.1] \quad e^{i\alpha} w(x, t) = \int_0^l c(x, \xi) \left[p(\xi, t) - \mu(\xi) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] d\xi.$$

Come nell'ordinario caso conservativo ⁽¹⁾ anche ora tutto il procedimento risolutivo della [6.1] è subordinato alla risoluzione dell'equazione integrale omogenea *associata*

$$[6.2] \quad u(x) = \sigma^2 \int_0^l c(x, \xi) \mu(\xi) u(\xi) d\xi,$$

cioè alla determinazione dei suoi autovalori

$$[6.3] \quad \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_e^2, \dots$$

⁽¹⁾ Cfr. ad es. G. KRALL, *op. cit.*, vol. II, cap. XIII.

e delle autosoluzioni

$$[6.4] \quad u_1(x), u_2(x), \dots, u_q(x), \dots$$

Le u_q costituiscono, come è noto, un sistema chiuso e completo di funzioni ortogonali, normalizzabili.

Supposti noti questi elementi e le u_q normalizzate, cominciamo a considerare le vibrazioni forzate. Ammesso che il carico vari armonicamente

$$[6.5] \quad p(x, t) = p_0(x) e^{i\omega t},$$

poniamo, come di consueto,

$$[6.6] \quad w(x, t) = v(x) e^{i\omega t}.$$

La [6.1] si riduce allora immediatamente a un'equazione integrale non omogenea che, posto

$$[6.7] \quad f(x) = \int_0^l c(x, \xi) p_0(\xi) d\xi,$$

si scrive

$$[6.8] \quad e^{i\alpha} v(x) = f(x) + \omega^2 \int_0^l c(x, \xi) \mu(\xi) v(\xi) d\xi.$$

Per risolverla tentiamo la posizione

$$[6.9] \quad v(x) = \sum_q A_q u_q(x),$$

le A_q essendo costanti complesse da determinarsi. Sostituendo nella [6.8] e tenendo conto che le u_q sono soluzioni della [6.2] (per $\sigma = \sigma_q$) ortogonali e normali, dall'identificazione dei due membri si ricavano immediatamente i valori delle A_q e quindi, ammessa la convergenza della serie, la ricercata soluzione $v(x)$. Tornando infine alla [6.6] e prendendone la parte reale, si ottiene per le vibrazioni forzate armoniche la soluzione

$$[6.10] \quad w(x, t) = \sum_q \frac{f_q \sigma_q^2 u_q(x) e^{i(\omega t - \theta_q)}}{\sqrt{\sigma_q^4 + \omega^4 - 2\omega^2 \sigma_q^2 \cos \alpha}}$$

con

$$[g.11] \quad \Theta_e = \arctan \frac{\sigma_e^2 \sin \alpha}{\sigma_e^2 \cos \alpha - \omega^2}, \quad f_e = \int_0^l f(x) \mu(x) u_e(x) dx.$$

Si tratta d'un movimento armonico di frequenza $\frac{\omega}{2\pi}$ costituito dalla sovrapposizione di infiniti moti armonici d'ugual frequenza ciascuno sfasato rispetto alla sollecitazione perturbatrice d'un angolo Θ_e variabile con l'indice ρ .

Se il carico $p(x, t)$ non variasse con legge sinusoidale, basterebbe analizzarlo armonicamente e poi applicare i risultati precedenti in corrispondenza a ciascuna armonica.

Collo stesso metodo dello sviluppo in serie di autofunzioni u_e possono studiarsi le vibrazioni spontanee. Se della [6.1], posto $p(x, t) \equiv 0$, si ricercano soluzioni elementari del tipo

$$[6.12] \quad w(x, t) = e^{zt} \sum_e B_e u_e(x),$$

si perviene facilmente, operando alla FOURIER, alla determinazione dei valori (complessi) della z e delle B_e , sì che in definitiva, passando dal complesso al reale, si ha per le vibrazioni libere la soluzione generale

$$[6.13] \quad w(x, t) = \sum_e u_e(x) e^{-\sigma_e \sin \frac{\alpha}{2} \cdot t} \cdot \left[a_e \cos \left(\sigma_e \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t \right) + b_e \sin \left(\sigma_e \cos \frac{\alpha}{2} \cdot t \right) \right].$$

L'isteresi elastica ha quindi per effetto, nel nostro schema, di smorzare ogni singola armonica in modo tanto più accentuato quanto più elevato è il suo tono. Il fattore di smorzamento è però semplicemente proporzionale alla frequenza, a differenza di quanto accade nell'impostazione viscosa in cui esso cresce col quadrato della frequenza ⁽¹⁾.

(1) Cfr. G. KRALL, *op. cit.*, vol. I, cap. VI, pag. 342.

7. SISTEMI CONTINUI TRIDIMENSIONALI. IMPOSSIBILITÀ DI PROPAGAZIONE DI ONDE DI DISCONTINUITÀ. — Le considerazioni precedenti si adattano anche ai sistemi continui tridimensionali introducendo un conveniente sfasamento nella classica corrispondenza che intercorre tra deformazioni e sforzi. Limitandoci ai corpi isotropi e omogenei, scriveremo la legge di Hooke in forma complessa introducendo in luogo dell'ordinario modulo E il modulo $E e^{ia}$

$$[7.1] \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{E e^{ia}}{1 + \kappa} \varepsilon_r - \frac{\kappa E e^{ia}}{(1 + \kappa)(1 - 2\kappa)} \sum_1^3 \varepsilon_s \\ \tau_r = \frac{E e^{ia}}{2(1 + \kappa)} \gamma_r \end{array} \right. \quad (r = 1, 2, 3)$$

(κ = modulo di Poisson).

Al cambiamento operato sulla legge di Hooke ne corrisponde uno analogo per le equazioni indefinite del moto le quali, adoperando in luogo delle ordinarie costanti di LAMÉ λ e μ , le costanti complesse λe^{ia} , μe^{ia} , si scrivono, in assenza di forze di massa:

$$[7.2] \quad e^{-ia} \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x_r} + \mu \Delta_2 u_r \quad (r = 1, 2, 3)$$

(u_r = componenti di spostamento; ρ = densità cubica; $\Theta = \sum_1^3 \frac{\partial u_s}{\partial x_s}$).

Di questa elastodinamica dissipativa ci limiteremo a indicare qualche carattere saliente.

In un mezzo elastico isotropo ordinario sono possibili, come è ben noto, due tipi distinti di onde di discontinuità (sia d'accelerazione che d'urto): onde longitudinali, propagantisi con velocità $\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ e onde trasversali, procedenti con velocità $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$. Come si modificano questi risultati nell'impostazione attuale? Posto

$$[7.3] \quad \left\{ \begin{array}{l} u_r = u'_r + i u''_r \quad (r = 1, 2, 3) \\ \Theta' = \sum_1^3 \frac{\partial u'_s}{\partial x_s}, \quad \Theta'' = \sum_1^3 \frac{\partial u''_s}{\partial x_s}, \end{array} \right.$$

ciascuna delle [7.2] si scinde nelle due equazioni

$$[7.4] \quad \rho \left(\cos \alpha \frac{\partial^2 u'_r}{\partial t^2} + \sin \alpha \frac{\partial^2 u''_r}{\partial t^2} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta'}{\partial x_r} + \mu \Delta_2 u'_r$$

$$[7.5] \quad \rho \left(\sin \alpha \frac{\partial^2 u'_r}{\partial t^2} - \cos \alpha \frac{\partial^2 u''_r}{\partial t^2} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta''}{\partial x_r} + \mu \Delta_2 u''_r$$

($r = 1, 2, 3$).

Vediamo se è possibile che nell'attraversamento d'una superficie mobile σ_i le sei funzioni u'_r, u''_r presentino, compatibilmente con le [7.4] e [7.5], una discontinuità del secondo ordine. Indicati con v_r ($r = 1, 2, 3$) i parametri di discontinuità, con a la velocità d'avanzamento della σ_i , con N_1, N_2, N_3 i coseni direttori della normale alla σ_i nel punto di attraversamento, orientata nel verso d'avanzamento della σ_i e con [] un simbolo di brusca variazione, le ben note condizioni di compatibilità geometrico-cinematica ⁽¹⁾ si scrivono per le u'

$$[7.6] \quad \left[\frac{\partial^2 u'_r}{\partial t^2} \right] = v_r' a^2, \quad \left[\frac{\partial^2 u'_r}{\partial t \partial x_j} \right] = -v_r' a N_j,$$

$$\left[\frac{\partial^2 u'_r}{\partial x_j \partial x_i} \right] = v_r' N_j N_i \quad (r, i, j = 1, 2, 3).$$

Formule analoghe, con altri parametri di discontinuità v_r'' valgono per le u'' . Tenuto conto di queste, le [7.4] e [7.5] danno le condizioni di compatibilità dinamica

$$[7.7] \quad \rho (\cos \alpha \cdot v_r' + \sin \alpha \cdot v_r'') a^2 = (\lambda + \mu) N_r \sum_1^3 N_s v_s' + \mu v_r'$$

$$- \rho (\sin \alpha \cdot v_r' - \cos \alpha \cdot v_r'') a^2 = (\lambda + \mu) N_r \sum_1^3 N_s v_s'' + \mu v_r''$$

($r = 1, 2, 3$).

Il sistema [7.7], lineare e omogeneo nelle sei incognite v_r', v_r'' ($r = 1, 2, 3$), non ammette, per α diverso da zero (e da π) e per a reale, soluzioni proprie (come si riconosce dall'esame del determinante

⁽¹⁾ Cfr. ad es. T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Zanichelli, Bologna, 1931.

dei coefficienti); ne concludiamo che nel nostro mezzo *non può propagarsi alcun'onda di discontinuità del secondo ordine, nè trasversale nè longitudinale*. Lo stesso potrebbe ripetersi per le onde d'urto.

Il risultato negativo, essenzialmente legato al carattere dissipativo del mezzo, può mettersi in relazione con alcune classiche conclusioni di DUHEM relative ai mezzi viscosi ⁽¹⁾. Naturalmente esso non esclude, come ora vedremo, la possibilità di propagazione di onde continue.

8. ONDE PIANE LONGITUDINALI. ASSORBIMENTO. — Cerchiamo, del sistema complesso [7.2] le soluzioni elementari corrispondenti ad altrettanti stati dinamici « rettilinei » paralleli per es. all'asse x_1 , tal che sia cioè

$$u_1 = u_1(x_1, t), \quad u_2 \equiv 0, \quad u_3 \equiv 0.$$

La prima equazione si riduce allora, tralasciando l'indice 1, divenuto superfluo, alla forma

$$[8.1] \quad e^{-i\alpha} \cdot \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

le altre due sono identicamente soddisfatte.

Col classico metodo della separazione delle variabili si riconosce una duplice serie di onde piane elementari compatibili colla [8.1], l'una a carattere espansivo e l'altra a carattere smorzato. La prima serie, fisicamente inaccettabile, va scartata per le stesse ragioni per cui al n. 2 è stata esclusa la seconda delle [2.2].

Rimane la serie delle onde smorzate (progressive o retrograde) la quale posto

$$[8.2] \quad w = \frac{\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}}{\cos \alpha},$$

⁽¹⁾ Cfr. P. DUHEM, *Recherches sur l'Hydrodynamique* (II e III parte), « Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 2^a serie, tomo III (1901) e tomo IV (1902). Cfr. anche: P. DUHEM, *Recherches sur l'Elasticité*, Paris, Gauthier-Villars, 1906.

si scrive, in forma reale,

$$[8.3] \quad u_e(x, t) = e^{\pm \frac{v_e}{w} \tan \frac{\alpha}{2} \cdot x} \left[a_e \cos v_e \left(t \pm \frac{x}{w} \right) + b_e \sin v_e \left(t \pm \frac{x}{w} \right) \right]$$

dove le frequenze v_e vanno naturalmente determinate in base alle condizioni ai limiti, (supposte compatibili collo stato « rettilineo »). Lo smorzamento, tanto più accentuato quanto più notevole è lo sfasamento α , cresce in ragione diretta delle frequenze v_e , con la conclusione che un mezzo dotato d'isteresi assorbe di preferenza le onde di frequenza elevata.

A titolo di esempio, molto semplice, consideriamo un semispazio elastico il cui piano limite assumeremo come piano $x=0$, orientando l'asse x verso l'interno. Ammettiamo poi che tutti i punti di questo piano siano mantenuti in vibrazione armonica e di uguale ampiezza parallelamente all'asse x . Si avrà allora la condizione al contorno:

$$[8.4] \quad u(0, t) = u_0 \cos \omega t .$$

Si vede subito che compatibile con tale condizione è una delle soluzioni elementari [8.3], pur di scegliere i segni inferiori e di porre $v_e = \omega$, $a_e = u_0$, $b_e = 0$:

$$[8.5] \quad u(x, t) = e^{-\frac{\omega}{w} \tan \frac{\alpha}{2} x} \cdot u_0 \cos \omega \left(t - \frac{x}{w} \right) .$$

Naturalmente per condizioni al contorno più complesse la soluzione si avrà mediante opportuna combinazione (per somma, serie, o integrale) di soluzioni elementari (in numero finito o infinito).



SULLE CAUSE DELLA VARIABILITÀ
DELL'*EPILACHNA CHRYSOMELINA* DI ROMA
E DEL CIRCEO (*)

CELSO GUARESCHI

SUMMARY. — Quod attinet ad *Epilachnam chrysomelinam*, Romae et ad Circaeum inventam, ex experimentis peractis Auctor concludit non posse geneticas relationes agnosci inter tres formas *Chrysomelinam*, *Nigrescentem*, et *Elaterios*, sed has esse phaenotypos ex loci statu productas. Interdum tamen loci diversitas efficere potest ut alia sit proportio inter tres formas, cum «stabiles mutationes», quae vocantur, eveniant.

I Coleotteri coccinellidi rappresentano un gruppo di insetti che per alcuni caratteri si prestano molto bene agli studi genetici. La grande variabilità presentata da alcune specie di tale famiglia, unita alla presenza di più o meno numerose razze geografiche, la facilità del riconoscimento e dello studio dei caratteri, costituiti soprattutto da differenze nella posizione, numero, forma e grandezza delle macchie presenti sulle elitre, hanno ridestato l'attenzione di molti genetisti.

Però i Coccinellidi sono molto spesso difficili ad allevare, soprattutto per il fatto che molte specie sono afidiofaghe, d'onde il forte ostacolo presentato dalla difficoltà a procurarsi gli afidi sufficienti a nutrire le schiere numerose di individui necessari ad una ricerca genetica (vedi anche FIORI, « Boll. zool. gen. agr. », Portici, 1929). Si comprende quindi perchè siano le specie del genere *Epilachna*, fitofaghe, quelle su cui soprattutto si sono polarizzate le ricerche di tale tipo.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Alessandro Ghigi il 19 novembre 1945.

Sono stati principalmente gli studiosi della scuola genetica tedesca (TIMOFÉEF-RESSOWSKY, TENENBAUM, ZARAPKIN, ecc.), che hanno utilizzato, per i loro studi, questi animali. Un esame completo dei loro risultati ci portebbero troppo lontano e verrà fatto in un lavoro in esteso di prossima pubblicazione; qui mi preme solo di ricordare le conclusioni della TENENBAUM, riportate da C. ed O. Vogt, nel loro « Sitz und Wesen der Krankheiten » 2^a parte, 1^a metà; « Zur Einführung in das Variieren der Tiere. Die Erscheinung der Variation » (1938), la quale arriva a considerare le tre forme con cui si presenta ordinariamente l'*Epilachna chrysomelina* come due vere e proprie razze genetiche (*typica* ed *elaterii*) ed un ibrido d'incrocio fra le due (*nigrescens*). Ricorderò inoltre che TIMOFÉEF-RESSOWSKY sostiene che a Roma si trova la forma *elaterii* e che gli esemplari di tale località, sottoposti durante lo sviluppo ad alte temperature (35°) danno origine, come estremo, ad individui della forma *nigrescens*, di quel tipo che io, in seguito, ho chiamato *b*, presentanti cioè la fusione contemporanea delle macchie II-III e V-VI (mentre la *a* presenta solo la fusione delle macchie V-VI).

Nel corso di osservazioni in natura, eseguite a Roma, su tale interessante Coccinellide, io potei notare come, in tale regione, contrariamente all'affermazione di TIMOFÉEF-RESSOWSKY, esista non solo la forma *elaterii*, ma anche la *nigrescens* e la *typica* ed anche come le proporzioni delle tre forme varino nei vari periodi dell'anno. Un semplice conteggio, eseguito nel 1939, mi diede infatti le seguenti cifre:

	Aprile	Giugno	Agosto	Settembre
<i>typica</i>	11,09 %	18 %	6 %	8 %
<i>nigrescens</i> . . .	53,33 %	64 %	52 %	52 %
<i>elaterii</i>	30,58 %	18 %	42 %	40 %

Per esprimere in maniera più precisa la variabilità di grandezza delle macchie ho misurato la superficie delle elitre di 50 individui di ogni lotto e quella del complesso delle macchie ed ho eseguito il rapporto delle due cifre ottenute. I risultati, in media sono i seguenti:

Aprile 2,17 Giugno 2,56 Agosto 2,36 Ottobre 2,25.

Tutto ciò fa pensare, come del resto aveva già visto per il fattore temperatura TIMOFÉEF-RESSOWSKY, ad una influenza notevole dei fattori ambientali sull'espressione fenotipica di tali animali. Ho voluto

perciò sperimentare, direttamente e per mezzo di un'allieva, EMMA LIBERATORE, l'azione di diverse cause, fatte agire nel periodo larvale e ninfale od anche solo durante quest'ultimo, ed ho usato a bella posta, in un primo tempo, una popolazione naturale, cioè non selezionata geneticamente.

Gli esemplari, che furono tenuti durante la ninfosi intorno ai 15° ed ai 35°, hanno dato i seguenti risultati:

	15°	35°
<i>typica</i>	0 %	22 %
<i>nigrescens</i>	30 %	76 %
<i>elaterii</i>	70 %	2 %
media rapporti elite-macchie	1,88	3,21.

L'azione di altri agenti (LIBERATORE) ha dato

	raggi U.V.	luce rossa	luce blu	umidità	aridità	oscurità	luce gialla	luce verde
<i>typica</i>	35 %	25 %	21 %	25,9 %	30 %	22 %	2 %	5,88 %
<i>nigrescens</i>	58 %	72 %	79 %	68 %	68 %	60 %	4 %	55 %
<i>elaterii</i>	6 %	2 %	0 %	6,1 %	2 %	18 %	94 %	38,92 %
rapporti	4,10	4,04	4,04	4,02	3,76	3,73	3,01.	2,78

Sono passato in seguito ad esperienze di selezione. Raccolte, alla fine dell'agosto 1941, 50 larve a termine, sempre nella stessa località, esse mi diedero 50 adulti dai quali con le solite osservazioni e calcoli ebbi i seguenti risultati:

<i>typica</i>	18 %
<i>nigrescens</i>	{ a 20 %
	{ b 44 %
<i>elaterii</i>	18 %
media dei rapporti elite macchie	2,52.

Allevando poi la discendenza di un'unica coppia *elaterii* (rapporto elite-macchie 2,01 e 1,83) ottenni nell'autunno la prima generazione filiale F_1 ; da una coppia *elaterii* della F_1 (rapporti 2,07 e 2,20) ottenni nella primavera seguente la F_2 ; da una coppia *elaterii* della F_2 (rapporti 1,97 e 1,83) la F_3 ; da una coppia di questa a rapporti 1,72 e 1,89 la F_4 , e da una coppia di quest'ultima a rapporti 1,93 e 1,93

la F_5 . I calcoli eseguiti su i primi 50 esemplari sfarfallati di ognuna di questa generazione dànno:

	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
<i>typica</i> . . .	10 %	14 %	16 %	12 %	16 %
<i>nigrescens</i> { <i>a</i>	4 %	6 %	4 %	8 %	38 %
{ <i>b</i>	14 %	48 %	54 %	44 %	26 %
<i>elaterii</i> . . .	70 %	30 %	20 %	34 %	20 %
rapporti . . .	2,47	2,35	2,37	2,24	2,61

Su un certo numero di esemplari della F_2 ho anche eseguito le prove di azione delle diverse temperature; ecco i risultati:

	30-35°	20°	9-14°
<i>typica</i> . . .	45 %	0 %	0 %
<i>nigrescens</i> { <i>a</i>	30 %	3,42 %	0 %
{ <i>b</i>	25 %	13,79 %	3,33 %
<i>elaterii</i> . . .	0 %	82,49 %	96,66 %
rapporti . . .	3,41	2,13	1,87

* * *

Nel frattempo (agosto 1941) mi ero recato, per ricerche di indole zoogeografiche, al Parco Nazionale del Circeo. Ivi, in zona molto calda ed arida, trovai una popolazione di *Epilachna chrysometina* che presentava i seguenti dati:

<i>typica</i>	92 %
<i>nigrescens</i> { <i>a</i>	8 %
{ <i>b</i>	0 %
<i>elaterii</i>	0 %
Media dei rapporti elitre-macchie . . .	3,76

Nell'aprile 1942, tornato nella stessa località, raccolsi un nuovo gruppo di animali che mi diedero i seguenti risultati:

<i>typica</i>	79,59 %
<i>nigrescens</i> { <i>a</i>	10,24 %
{ <i>b</i>	8,16 %
<i>elaterii</i>	0 %
media dei rapporti elitre-macchie . . .	3,16

Anche su questi esemplari ho eseguito esperienze di selezione (dopo averli trasportati a Roma) e di azione della temperatura. Ecco i risultati che mi hanno dato le prime esperienze eseguite tentando

di isolare la forma *typica* allevando la discendenza di una coppia di esemplari a rapporti 4,94 e 5,32 per avere la F_1 ; quelli di una coppia F_1 a rapporti 5,15 e 4,67 per avere la F_2 ; quelli di una coppia F_2 a rapporti 4 e 3,82 per avere la F_3 :

	F_1	F_2	F_3
<i>typica</i> . . .	62 %	48 %	26 %
<i>nigrescens</i> { <i>a</i>	4 %	2 %	6 %
{ <i>b</i>	24 %	24 %	34 %
<i>elaterii</i> . . .	6 %	22 %	32 %
rapporti . . .	3,07	2,81	2,46

Le seconde (azione della temperatura su esemplari della F_1) hanno condotto a questi risultati:

	9°	35°
<i>typica</i>	58 %	100 %
<i>nigrescens</i> . . { <i>a</i>	0 %	0 %
{ <i>b</i>	32 %	0 %
<i>elaterii</i>	10 %	0 %
rapporti	3	8,60

* * *

Da tutto il complesso di queste esperienze si possono ricavare le seguenti conclusioni:

1) L'*Epilachna chrysomelina* di Roma non appartiene esclusivamente alla « forma » *elaterii*, ma si presenta fenotipicamente come una miscela delle tre forme *typica*, *nigrescens* ed *elaterii*, in proporzioni variabili nelle varie stagioni;

2) Tali tre « forme » o aspetti fenotipici sono enormemente variabili ed intercambiabili gli uni cogli altri sotto l'influenza dei fattori ambientali;

3) L'*Epilachna chrysomelina* del Circeo si presenta sotto l'aspetto fenotipico di una popolazione *typica* con una scarsa percentuale, variabile pur essa nelle varie stagioni, di individui di *nigrescens*;

4) Anche su di essa le condizioni ambientali hanno un'azione preponderante su quelli genetici (per i caratteri sperimentati), provocando una permutabilità degli aspetti fenotipici dei diversi individui;

5) Le esperienze di selezione non hanno raggiunto alcun risultato; con la popolazione di Roma si sono avuti, nelle varie generazioni, forti cambiamenti nelle percentuali delle tre forme, ma esclusivamente dipendenti dall'andamento stagionale, cosicchè, dopo cinque generazioni selezionate, si sono avute di nuovo, all'incirca, le stesse percentuali che si ritrovano nella stessa epoca in natura a Roma;

6) Nelle esperienze di selezione dell'*Epilachna* del Circeo, condotte a Roma, si è avuto il risultato che dopo tre generazioni selezionate in senso *typica*, si è sviluppata una popolazione in cui sono frammiste le tre forme in proporzioni molto simili a quelle caratteristiche romane;

7) Per ottenere un tale risultato sono dovute però trascorrere tre generazioni; si deve quindi ritenere che il particolare ambiente (caldo-secco) del Circeo abbia influito sul soma degli esemplari studiati provocando su di essi una « modificazione durevole »;

8) Da quanto precede risulta chiaro che per l'*Epilachna chryso-melina* di Roma e del Circeo non possono accettarsi le relazioni genetiche ammesse dalla TENENBAUM. Il valore delle esperienze di tale Autore non può però essere dalle mie assolutamente negato, poichè non può escludersi che esistano regioni e popolazione dell'*Epilachna chryso-melina* in cui quegli aspetti che nelle popolazioni di Roma e del Circeo appaiono come semplici fenomeni fenotipici, rivestano invece i caratteri di mutazioni genotipiche. Non sarebbe il primo caso in letteratura di fenotipi coincidenti con certi genotipi.

NUOVE RICERCHE SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI A CURVE-SEZIONI CANONICHE

(Nota riassuntiva) (*)

GINO FANO

SVMMARIVM. — Iuxta alia eiusdem Auctoris edita studia, determinantur systemata linearia simplicia completa generis primi, quae existant in algebraicis trium dimensionum varietatibus, quarum curvae-sectiones sint conicae, cum huiusmodi curvae-sectiones ad genera quintum, sextum, vel octavum pertineant: nam praeter hos casus, iam rationalitas varietatum certa est.

Omnia haec systemata aequivalent systemati sectionum yperplanarum earumdem varietatum, vel alius sectionis eiusdem generis; si vero sectio sit generis octavi, systema aequivalet etiam systemati intersectionum formae cubicae generalis spatii quattuor dimensionum cum quadricis.

Ex quo constat omnes huiusmodi varietates esse irrationales, illa forma cubica non excepta, de qua questio iam quinquaginta abhinc annis nota est a geometriae algebrae studiosis.

Nella Memoria che, con lo stesso titolo, è in corso di pubblicazione presso questa Pontificia Accademia delle Scienze, continuo le mie ricerche sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche di genere $p(M_3^{2p-2})$ dello spazio S_{p+1} , in particolare nei casi di tuttora dubbia razionalità, $p=5, 6, 8$.

Fin dal 1908 ho dimostrata la irrazionalità delle due varietà generali M_3^4 di S_4 e M_3^6 di S_5 (casi $p=3, 4$; quest'ultima, intersezione generale di una quadrica e di una forma cubica) (1). Nel 1915 ne ho

(*) *Nota riassuntiva* della Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi nella Tornata del 21 febbraio 1943.

(1) *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli*, «Atti R. Accademia di Torino», vol. 43 (1907-1908), pag. 973.

data un'altra dimostrazione più semplice, e ho stabilito altresì che le due dette varietà sono birazionalmente distinte⁽¹⁾. Un contributo indiretto all'argomento ho portato con un'altra Memoria dello stesso anno⁽²⁾, mostrando che è razionale ogni varietà algebrica a tre dimensioni contenente un sistema lineare semplice di superficie razionali di grado superiore a tre; e che per conseguenza la forma cubica generale di S_4 , le cui intersezioni con quadriche formano un sistema rappresentante una M_3^{24} di S_{14} (caso $p=13$), se non è razionale, non contiene altri sistemi lineari semplici di superficie razionali che di grado 3.

Riprese queste ricerche attorno al 1925, ne ho fatta una comunicazione preliminare al Congresso Internazionale dei matematici a Bologna del 1928⁽³⁾. Poco dopo, trattando una questione di geometria della retta dello spazio a cinque dimensioni, ho riconosciuto che la varietà M_3^{14} di S_9 ($p=8$), sezione generica della Grassmaniana delle rette di S_5 ⁽⁴⁾, è birazionalmente identica alla forma cubica generale di S_4 , cioè alla M_3^{24} di S_{14} già menzionata ($p=13$)⁽⁵⁾.

Un nuovo gruppo di ricerche è contenuto in due Memorie pubblicate negli anni 1936-37⁽⁶⁾. Nella prima ho studiato i casi $p=5, 6, 7$,

⁽¹⁾ Osservazioni sopra alcune varietà non razionali aventi tutti i generi nulli, «Atti R. Accademia di Torino», vol. 50 (1914-1915), pag. 1067.

⁽²⁾ Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali, «Annali di Matematica» (3), vol. 24 (1915), pag. 49. Vedi anche: «Scritti matematici offerti a ENRICO D'OVIDIO» (Torino, Bocca, 1918), pag. 342.

⁽³⁾ Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli, «Atti Congr. internaz. di matematica», Bologna, vol. IV (1931), pag. 115.

⁽⁴⁾ F. SEVERI, Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare, «Annali di Matematica» (3), vol. 24, (1915), pag. 89.

⁽⁵⁾ Sulle sezioni spaziali della varietà Grassmanniana delle rette dello spazio a cinque dimensioni, «R. Accademia Lincei» (6), vol. 11 (1° sem. 1930), pag. 329. Le due varietà suindicate (M_{14}^3 di S_9 , V_3^3 di S_4) sono prive di punti multipli, e contengono soltanto superficie loro intersezioni complete con forme; su ciascuna di esse vi è un'unica curva fondamentale di prima specie, di genere uno.

⁽⁶⁾ Su alcune varietà algebriche e tre dimensioni aventi curve-sezioni canoniche, Scritti Matematici offerti a LUIGI BERZOLARI, Pavia, Tip. Rossetti, 1936, pag. 329. Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche, «Mem. R. Accademia d'Italia», vol. VIII (1937), n. 2. Queste due Memorie, ripetutamente citate in seguito, verranno indicate rispettivamente con «Berz.» e «Accad. It.»; i risultati principali della seconda erano già stati enunciati in una Nota dei

soprattutto per quanto concerne i loro caratteri proiettivi. Nella seconda ho dimostrato che le varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} esistono soltanto per $p \leq 37$, mentre si poteva pensare che la loro serie fosse illimitata, come per le superficie a curve-sezioni canoniche⁽¹⁾, e per $p > 10$ sono tutte razionali, all'infuori forse della M_3^{24} di S_{14} ($p=13$). Ultimamente ho ancora dimostrato che queste varietà, se contenenti solo superficie loro intersezioni complete con forme, sono pure razionali nei due casi $p=9, 10$ ⁽²⁾; e pertanto, la razionalità essendo già stata accertata nella stessa ipotesi per $p=7$ in « Berz. », n. 5, 6, 11, restava dubbia soltanto quella dei casi $p=5, 6, 8$ ⁽³⁾.

Nella Memoria di cui trattasi viene esaurita la ricerca per tre casi suddetti, e stabilito che le M_3^{2p-2} di S_{p+1} per $p=5, 6, 8$ contenenti soltanto superficie intersezioni complete con forme, *non* sono razionali, e sono anche fra loro birazionalmente distinte. E poichè la M_3^{14} di S_9 ($p=8$) è birazionalmente equivalente alla forma cubica generale (cioè priva di punti doppi) di S_4 ⁽⁴⁾, risulta anche accertata la irrazionalità di questa forma cubica; questione che si era affacciata nella geometria algebrica da circa mezzo secolo. La ricerca è fondata essenzialmente sulla determinazione dei sistemi lineari di superficie di genere uno contenuti nelle varietà suddette; sulle proprietà di questi sistemi, se segati da forme di ordine $n > 1$, di avere una linea di molteplicità $\geq n+1$ o un punto isolato di molteplicità $\geq 2n+1$ ⁽⁵⁾; su procedimenti di riduzione successiva di tali sistemi a altri, segati sulla stessa varietà o su una birazionalmente equivalente, da forme di ordine inferiore; sulla constatazione infine che questi sistemi si riducono a quelli segati sulle stesse M_3^{2p-2} o su altre del medesimo tipo, dagli iperpiani, e sulla V_3^3 di S_4 dalle quadriche, e sono quindi, nei vari casi, differenti fra loro e da quelli contenuti nello spazio S_3 .

« Rend. R. Accademia Lincei » (6), vol. 23 (1° sem. 1936), pag. 813. Una comunicazione ne è stata fatta anche al 1° Congresso dell'« Unione Matematica Italiana » (Firenze, 1937; Atti relativi, pag. 245).

(1) ENRIQUES, « Rend. R. Accademia Bologna », vol. 13 (1908), pag. 25; SIVIERI, « Atti R. Ist. Veneto » (7), vol. 68 (1908), pag. 256.

(2) *Su alcune varietà a tre dimensioni razionali e aventi curve-sezioni canoniche*, « Comm. Math. Helvetici », vol. 14 (1941-1942), pag. 203.

(3) Cfr. le ultime righe della mia Nota ultima cit.

(4) Cfr. il mio lavoro già cit. dei « Rend. Acc. Lincei », 1930.

(5) Cfr. la mia Nota cit. « Osservazioni . . . », pag. 1.

In massima, quando si conosca sulla M_3^{2p-2} una trasformazione birazionale che muti le sezioni iperpiane in superficie segate da forme di ordine k e aventi una linea C di molteplicità $k+1$, la trasformazione inversa (che, se la prima è involutoria, coinciderà con questa) basterà per ottenere una prima riduzione per i sistemi Σ di superficie segati da forme di un ordine qualsiasi n e aventi lungo C molteplicità $\geq n+1$ ⁽¹⁾. E più generalmente, quando si conosca comunque sulla M_3^{2p-2} un sistema lineare di superficie, anche segato da forme di ordine k e colla C di molteplicità $\geq k+1$, il quale rappresenti una varietà μ avente gli stessi caratteri proiettivi della M_3^{2p-2} , al sistema Σ su M_3^{2p-2} e ivi segato da forme di ordine n , corrisponderà su μ un sistema di ordine inferiore.

Per le trasformazioni birazionali incontrate sulle diverse M_3^{2p-2} non è emersa alcuna indicazione su quelle che potrebbero essere le operazioni generatrici del relativo gruppo ⁽²⁾. Credo tuttavia opportuno segnalare due tipi di corrispondenze di cui ho fatto uso di frequente: 1) ogni qualvolta una varietà contiene una congruenza del primo ordine di curve razionali, sono semplici e importanti le corrispondenze involutorie che ho chiamate «specchiamenti» rispetto a una superficie Ω bisecante tali curve, e nelle quali a ogni punto di una di queste curve viene associato il punto della stessa curva suo coniugato armonico rispetto alle due intersezioni di questa con Ω . Congruenze così fatte esistono per $p=5, 8$; mentre non ne ho incontrate (e forse non esistono nemmeno) sulla M_3^{10} di S_7 ($p=6$); 2) le corrispondenze che si ottengono quando sia nota una congruenza del primo ordine di curve ellittiche, su ciascuna delle quali si possa individuare una corrispondenza birazionale, involutoria o no. Se per esempio su ciascuna di queste curve sono razionalmente noti due gruppi di uno stesso numero di punti non equivalenti, si può applicare un procedimento usato da ENRIQUES per le superficie contenenti

⁽¹⁾ I casi di superficie con punto isolato di molteplicità $\geq 2n+1$ saranno pochissimi e semplici.

⁽²⁾ Gruppo che si compone in generale di più schiere continue, nessuna delle quali è però un gruppo continuo nel senso di S. LIE. Cfr. la mia Nota nei «Rend. Accademia Lincei» (6), vol. 15 (1° sem. 1932), pag. 3.

un fascio di curve ellittiche⁽¹⁾. Il più delle volte si incontreranno anche, sulle singole curve, trasformazioni di prima specie, perciò involutorie, cioè serie lineari g_2^1 , definite mediante un loro punto doppio, razionalmente noto. Trasformazioni più semplici ancora sono quelle che risultano dalla proiezione di una M_3^{2p-2} , per $p > 3$, da un conveniente S_{p-3} in un S_3 doppio.

Contrariamente a quanto forse si poteva pensare, per una M_3^{2p-2} di S_{p+1} il fatto di contenere soltanto superficie intersezioni complete con forme tende piuttosto a facilitarne, per così dire, la razionalità. Per esempio per $p=7$ la M_3^{12} di S_8 contenente soltanto superficie intersezioni complete è razionale⁽²⁾, mentre esistono altre M_3^{12} di S_8 irrazionali e contenenti superficie non del tipo indicato⁽³⁾. E mentre le M_3^{2p-2} di S_{p+1} contenenti soltanto superficie intersezioni complete sono tutte razionali per $p \geq 9$, ne esistono per $p=9$ o $p=13$, anche altre non razionali, sulle quali il sistema delle sezioni iperpiane è doppio del sistema lineare di superficie di ordine minimo.

⁽¹⁾ *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, «Rend. R. Accad. Lincei» (5), vol. 15 (2° sem. 1906), pag. 665.

⁽²⁾ Cfr. «Berz.», n. 11; nonché la mia Nota cit. dei «Comm. Mathem. Helv.», vol. 14, n. 2-4.

⁽³⁾ «Berz.», n. 12-13.

SUR L'ALLURE DES FONCTIONS ANALYTIQUES AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITÉ ESSENTIELLE^(*)

M. SILVIO MINETTI

SUMMARIVM. — Hic breviter referuntur enunciata permulta (quorum demonstratio in proxima commentatione dabitur) de ratione qua functio holomorpha se gerit prope aliquod suum punctum singulare essentielle, quae enunciata apparent inter simpliciores et inexpectatas analyticarum functionum proprietates. Hac ratione in magnam partem patefit influxus quem punctum singulare essentielle exercet in distributione valorum functionis circa ipsum.

INTRODUCTION

1. — Il s'agit simplement d'un bref Mémoire divisé en 4 parties successives dans lesquelles je donnerai des nouvelles propositions qui se rapportent d'un côté aux travaux esquissés, sur le sujet indiqué, de l'école scandinave et française (LINDELÖF-IVERSEN et MONTEL), d'un autre côté aux travaux, bien connus, sur le même sujet, de M. JULIA (droites de Julia) et de M. M. OSTROWSKY, BIEBERBACH, MILLOUX, CARLEMANN, VALIRON, NEVANLINNA etc. ⁽¹⁾. J'ai cherché pour tous ces

(*) Nota presentata dell'Accademico pontificio Ugo Amaldi il 19 novembre 1945.

⁽¹⁾ Pour s'orienter sur le sujet on peut consulter: VALIRON, « Mémorial des Sc. Math. », fasc. II, § 9 pag. 15; § 11 pag. 18; § 12 pag. 20; § 20 pag. 33, 34 et 35; § 21 pag. 35. — VALIRON, « Mém. des Scienc. Math. », fasc. XXXVIII, § 10 pag. 21, 22; § 11 pag. 23, 24 et 25; § 12 pag. 26. — JULIA, « Leçons sur les fonctions uniformes etc. », Paris G. V. 1923, dans l'espèce le § 62 pag. 97. — MONTEL, « Ann. Ec. Norm. Sup. », 1916. — JULIA, « Ann. Ec. Norm. Sup. », 1919. — Puis OSTROWSKY, « Math. Zeit. », Bd. 24, 1925. — Puis BIEBERBACH, « Math. Zeit. », t. II et t. III; MILLOUX, C. R. Ac. Sc., t. 176 et sa thèse: « Journ. de Math. », 1924. pag. 345. — NEVANLINNA R., « Acta Soc. Sc. Fennicae », t. 50. — VALIRON, « Bull. Soc. Math. », t. 45; C. R. Ac. Sc., t. 166; « Ann. Ec. Norm. », 1922. — CARLEMANN, « Archiv für Math. », t. 15.

problèmes de pousser mes investigations jusqu'aux bouts possibles et j'ai eu ainsi l'occasion de rencontrer dans l'Analyse, si l'on veut même par hasard, quelque théorème (et bien plus d'un) qui, depuis le célèbre théorème de M. LANDAU de 1904, semblent être parmi les plus remarquables et même les propositions les plus inattendues de la théorie des fonctions.

Je me bornerai ici à énoncer les résultats auxquels je suis parvenu et qui ont été déjà l'objet de discussions nombreuses et approfondies parmi l'école mathématique de Rome et, en particulier, de la part de M. M. les Proff. BOMPIANI, FANTAPPIÈ, PICONE et SEVERI⁽¹⁾.

Ce bref résumé ne contient d'autre part que quelques-uns des principaux théorèmes que j'avais établis depuis longtemps (Cagliari 1942) et qui, complètement remaniés et singulièrement accrus, figurent dans un important Mémoire, présenté à cette Académie dès le 20 juin 1944), Mémoire, qui n'a pas pu encore paraître dans les Commentationes de cette Académie à cause des circonstances.

DEUX MOTS D'ENSEMBLE

SUR LE CONTENU DES QUATRE PARTIES SUIVANTES: I, II, III, IV

Dans la I^{ère} partie après avoir donné quelques définitions j'introduis de nouveaux concepts qui jouent dans tout ce qui suit un rôle tout à fait essentiel.

Dans la II^{ème} nous verrons ce qu'il arrive pour une $f(z)$ dans un secteur S_{np} non privilégié⁽²⁾, dans lequel, c'est-à-dire, la $f(z)$ admet (outre que ∞) deux valeurs exceptionnelles finies et² distinctes a et b ($a \neq b$). L'école scandinave (LINDELÖF-IVERSEN) et l'école française

(1) Cela au cours de quatre conférences que j'ai tenues en Mai 1945 à l'Institut Royal de Hautes Math. de Rome. — Je saisis ici l'occasion de remercier publiquement en particulier M. le Prof. Picone pour les subtiles et sagaces observations qu'il bien voulut me faire à ce sujet et qui éclaircissent singulièrement les choses.

(2) On suppose ici: $f(z)$ fonction holomorphe ayant au point $z=0$ une singularité essentielle, S_{np} un secteur du plan des z ayant $z=0$ pour sommet. Voir pag. 138 et pag. 141.

(MONTEL) y avaient travaillé. On y verra surtout à côté de plusieurs nouvelles simples propriétés de limitation et de convergence, une propriété bien singulière de $f(z)$, à savoir: *sa convergence dans un S_{np} vers une valeur exceptionnelle est complètement indépendante des arguments de points de l'ensemble sur lequel cette convergence a lieu.*

Dans la III^{ème} nous étudierons le théorème de Picard dans un secteur, problème dans lequel rentrent d'un côté les recherches de M. LINDELÖF et IVERSEN et d'un autre côté plusieurs travaux de M. M. BIEBERBACH, VALIRON et MILLOUX.

On verra ici à quel degré de généralité nous avons eu occasion de parvenir dans ce genre de questions.

C'est dans cette partie que nous exposerons un théorème qui doit être considéré comme le théorème plus expressif de tout notre Mémoire.

On le verra à sa place, nous renonçons ici à le synthétiser.

Dans la IV^{ème} nous étudierons, enfin, la caractérisation de rayons privilégiés r_p , issus de $z=0$, tels que dans tout leur voisinage angulaire se produit le phénomène PICARD (¹). Ces rayons r_p sont donc, au moins probablement (²), plus généraux que ceux de M. JULIA.

Même ici apparaîtra un fait analytique nouveau et insoupçonné: *Un rayon r (issus de $z=0$) peut être caractérisé comme rayon privilégié r_p seulement de l'allure de la $f(z)$ sur des simples suites de points convergentes à zéro reposant « entièrement et seulement » sur r (³).*

Avertissement. — Dans tout ce qui suit j'ai cru convenable de reporter, argument pour argument, en premier lieu les résultats jusqu'ici connus a ce sujet, et puis, rapidement ceux que j'ai eu occasion d'établir.

Ceci rendra plus aisée l'évaluation immédiate du chemin parcouru.

(¹) Suivant lequel la $f(z)$ y acquiert, et un nombre infini de fois, toutes valeurs finies sauf une au plus.

(²) En vertu de la question Bloch soulevée dès 1926 (voir BLOCH, « Mém. Sc. Math. », fasc. XX, III, 15, pag. 16, septième ligne).

(³) Tandis que jusqu'ici, même pour la caractérisation des rayons r de Julia, qui sont au moins probablement moins généraux des rayons privilégiés r_p , on exigeait des conditions superficielles.

I^{ère} PARTIE

DÉFINITIONS ET NOUVEAUX CONCEPTS

1. — Soient une fois pour toutes :

a) *Définition du domaine* : S un secteur du plan des $z = \rho e^{i\varphi}$ de sommet, par exemple, $z = 0$ et ultérieurement défini par les inégalités $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$, $(\varphi_1 \neq \varphi_0)^{(1)}$.

b) *Définition de la fonction* : $f(z)$ une fonction holomorphe dans S mais ayant en $z = 0$ une singularité essentielle (qui, par rapport au plan des z , peut être isolée ou non).

c) *Définition des ensembles considérés* : E_α un ensemble de points $P_n = \rho_n^{(\alpha)} e^{i\varphi_n^{(\alpha)}}$ de S convergente à $z = 0^{(2)}$.

d) *Définition de convergence à zéro de l'intérieur du domaine* : On dira que E_α converge à $z = 0$ « de l'intérieur de S » si $\rho_n^{(\alpha)}$ tendant à zéro on a quel que soit l'indice n , $\varphi_0 + \sigma \leq \varphi_n^{(\alpha)} \leq \varphi_1 - \sigma$ avec $\sigma > 0$ fixé à l'avance et, bien entendu, tel que $\varphi_1 - \sigma > \varphi_0 + \sigma$. En outre : un couple d'ensembles E_1 et E_2 chacun du type E_α , et tous les deux convergents à zéro de l'intérieur de S, sera désigné par $C(E_1, E_2)$.

Tous les E_α que nous considérerons ensuite satisferont à la condition d).

e) *Définition de suite mixte bornée par rapport à une constante K* : Si E_1 et E_2 sont deux ensembles E_α , j'appellerai « suite mixte bornée » extraite du couple $C(E_1, E_2)$ une suite du type

$$\frac{\rho_p^{(1)}}{\rho_{q_p}^{(2)}}, (\rho_{q_p}^{(2)} \leq \rho_p^{(1)}) \text{ ou } \frac{\rho_p^{(2)}}{\rho_{q_p}^{(1)}}, (\rho_p^{(1)} \leq \rho_{q_p}^{(2)}), p = 1, 2, 3, \dots,$$

qui soit bornée ⁽³⁾.

(¹) Il apparaîtra évident de ce qu'il suit qu'on pourrait, plus généralement, considérer, au lieu de S, un domaine quelconque Δ simplement connexe duquel $z = 0$ soit point frontière.

(²) On verra aisément pourquoi j'adopte le symbole E_α , c'est-à-dire la lettre E affectée d'un indice α .

(³) L'élément générique $\rho_{n_{q_p}}^{(2)}$ de la suite des valeurs des ρ qui figure au dénominateur, on l'aurait pu indiquer, bien entendu, avec la notation, par exemple,

Et si la suite $\frac{\rho_{n_p}^{(1)}}{\rho_{n_{q_p}}^{(2)}}$ (par exemple), satisfait, quelle que soit la valeur de l'indice p , à la condition $\frac{\rho_{n_p}^{(1)}}{\rho_{n_{q_p}}^{(2)}} < K$, elle sera dite « suite mixte bornée par rapport à la constante K », et elle sera désignée par le symbole $\sigma(K)$.

2. — Cela posé, j'introduis les nouvelles définitions fondamentales suivantes qui jouent dans tout ce qui suit un rôle tout à fait essentiel:

I^{ère}) Un ensemble E_α sera dit *hypotendant à zéro* et désigné avec le symbole E_{hyp} si l'ensemble des valeurs $\frac{\rho_n^{(\alpha)}}{\rho_{n+1}^{(\alpha)}}$, $(\rho_{n+1}^{(\alpha)} \leq \rho_n^{(\alpha)})$ est borné.

II^{ème}) Dans le cas contraire E_α sera dit *hypertendant à zéro*.

III^{ème}) Le couple $C(E_1, E_2)$ sera dit *hypertendant à zéro* si avec les éléments de E_1 et de E_2 on ne peut pas donner naissance à aucune suite mixte bornée $\sigma(K)$.

IV^{ème}) Dans le cas contraire le couple $C(E_1, E_2)$ sera dit *normal*. E_1 et E_2 donneront donc naissance (avec leurs éléments) à, au moins, une suite mixte bornée $\sigma(K)$.

V^{ème}) Le couple $C(E_1, E_2)$ sera dit *régulier* si à chaque suite S_1 , extraite de E_1 , correspond une suite S_2 , extraite de E_2 , telle que $C(S_1, S_2)$ est normal, et réciproquement en changeant E_1 avec E_2 .

VI^{ème}) $C(E_1, E_2)$ sera dit, enfin, uniformément régulier si, $C(E_1, E_2)$ étant déjà régulier, il existe une même constante $K > 0$ telle que pour chaque suite S_1 extraite de E_1 il existe une suite S_2 extraite de E_2 telle que $C(S_1, S_2)$ donne lieu à, au moins, une suite mixte bornée par rapport à K , et réciproquement en changeant E_1 avec E_2 . Le couple $C(S_1, S_2)$ est donc normal. Quelquefois on précisera la chose en disant que le couple $C(E_1, E_2)$ est uniformément régulier par rapport à la constante K .

ρ_{m_p} mais je préfère la notation que j'ai adoptée. Dans cette notation, c'est-à-dire dans $\rho_{n_{q_p}}^{(2)}$, on doit entendre $q_p = q(p)$ avec $q(p)$ entier positif pour p entier positif.

3. - Il suit immédiatement que :

a) Si $E_1 \equiv E_2 \equiv E_\alpha$, $C(E_1, E_2) = C(E_\alpha, E_\alpha)$ n'est pas hypertendant à zéro.

b) Si E_2 est obtenu de E_1 seulement par variations arbitraires (égales ou différentes de zéro et même variables de point à point) des arguments des points de E_1 , $C(E_1, E_2)$ est un (particulier) couple d'ensembles uniformément régulier.

On démontre en outre la suivante

Propriété fondamentale. - Si E_1 est hypotendant à zéro, $C(E_1, E_2)$, est, quel que soit E_2 , normal.

Donc :

Condition nécessaire pour que $C(E_1, E_2)$ soit hypertendant à zéro est que ni E_1 , ni E_2 , soient hypotendant à zéro.

et :

Condition suffisante pour que $C(E_1, E_2)$ soit normal est que E_1 ou E_2 soit hypotendant à zéro.

Observation. - A ce point on peut bien justement se demander : La notion d'ensemble hypotendant à zéro (qui, comme on le verra dans la suite, joue dans notre spéculation analytique un rôle tout à fait essentiel) est-elle un pur artifice de calcul ou bien rentre-t-elle dans la nature des choses ?

Un beau théorème de M. Montel de 1916 ⁽¹⁾ et que j'avais, dans mes recherches, incidemment retrouvé éclaircit cette question fondamentale ; c'est le suivant :

« Si $f(z)$ est holomorphe autour de l'origine $z = 0$; si $z = 0$ « est un point singulier essentiel de $f(z)$; si dans le voisinage de $z = 0$, « $f(z)$ admet une valeur exceptionnelle finie, par exemple $f(z) = 0$; si « $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ sont les modules des racines de l'équation $f(z) - a = 0$, « ($a \neq 0$) rangés par ordre de grandeur décroissante on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = 1$ ».

(1) Voir MONTÉL, « Ann. Ec. Norm. Sup. », t. 33, 1916, pag. 253 et 254.

L'ensemble des racines de la $f(z) - a = 0$ [quel que soit $a \neq$ de la valeur exceptionnelle zéro que l'on a admise pour la $f(z)$] est bien donc, toujours, un ensemble hypotendant à zéro; il est, de plus, un bien particulier ensemble de ce type ⁽¹⁾.

II^{ème} PARTIE

SUR L'ALLURE DE $f(z)$ DANS LES SECTEURS S_{np} NON PRIVILÉGIÉS.

Cette deuxième partie se rapporte plus étroitement, comme on l'a déjà dit, aux travaux de l'école scandinave et française (LINDELÖF-IVERSEN et MONTEL). Introduisons ici explicitement la suivante:

Définition de secteur S_{np} non privilégié, et de secteur S_p privilégié. S_{np} c'est un secteur de sommet $z=0$ où $f(z)$ est holomorphe exception faite pour $z=0$ et où $f(z)$ admet deux valeurs exceptionnelles finies et distinctes a et b ($a \neq b$), (autre que l' ∞); au contraire S_p c'est un secteur où la deuxième de ces conditions n'est pas remplie: dans un S_p , donc, $f(z)$ acquiert toutes valeurs finies sauf une au plus.

A) Principaux résultats déjà connus à ce sujet.

Dans son classique Mémoire de 1916 M. MONTEL, OL étant un rayon issu de $z=0$ et intérieur à un secteur $S_{np} \equiv AOB$, dit précisément ainsi ⁽²⁾:

« Examinons maintenant le cas d'un secteur AOB, dans lequel
« une fonction $f(z)$ est holomorphe, sauf au point 0 et rappelons
« d'abord les résultats obtenus par M. LINDELÖF et ceux que j'ai obtenus
« précédemment relativement à l'ensemble des valeurs limites de $f(z)$
« lorsque z tend vers zéro en restant à l'intérieur du secteur.

« Supposons que z tend vers zéro en suivant le rayon OL, si
« l'une des valeurs limites de la fonction $f(z)$ qui ne prend dans le
« secteur ni la valeur zéro ni la valeur un est égale à 0, 1, ou ∞ , il

(1) Des ensembles de points hypotendants à zéro de ce type particulier avaient été déjà rencontrés, d'ailleurs, même par M. Ostrowsky (Math. Zeit., Bd 24, 1925).

(2) Voir MONTEL, « Ann. Ec. Norm. Sup. », t. 33, 1916, § 17, pag. 260.

« en sera de même sur tout autre rayon situé à l'intérieur du secteur AOB.

« Si sur le rayon OL, les valeurs de $f(z)$ ou de $\frac{1}{f(z)}$ ou de $\frac{1}{1-f(z)}$ ont leurs modules bornés, il en sera de même pour tout autre rayon OL'.

« Enfin, si sur OL, $f(z)$ a une limite unique α , $f(z)$ tend uniformément vers cette limite dans tout secteur A'OB', complètement intérieur à AOB ».

Puis M. MONTEL ajoute des nouvelles propositions à ce sujet mais de moindre importance que les précédentes.

Eh bien vis-à-vis de ces résultats je vais immédiatement présenter les théorèmes suivants :

B) Propositions nouvelles.

1) Même si sur un simple E_{hyp} (ensemble hypotendant à zéro) ⁽¹⁾ d'un S_{np} , $f(z)$ tend vers une quelconque de ses deux valeurs exceptionnelles finies a ou b , $f(z)$ est, à l'intérieur de S_{np} , bornée ⁽²⁾.

et bien plus généralement :

2) Si dans un S_{np} , $f(z)$ converge, même sur un simple E_{hyp} , vers une limite finie quelconque, $f(z)$ est, à l'intérieur de S_{np} , bornée ⁽³⁾.

3) Si donc $f(z)$ n'est pas bornée à l'intérieur d'un S_{np} , sur n'importe quel E_{hyp} de S_{np} , $f(z)$ ou bien ne converge pas, ou bien converge vers la valeur ∞ ⁽⁴⁾.

4) Si même sur un simple E_{hyp} d'un S_{np} , $f(z)$ converge vers une (quelconque) α de ses trois valeurs exceptionnelles (donc ou $\alpha = a$ ou $\alpha = b$ ou $\alpha = \infty$), $f(z)$, à l'intérieur de S_{np} , converge uniformément vers cette même limite α .

⁽¹⁾ Bien entendu, je le dis une fois pour toutes : « hypotendant à zéro de l'intérieur de S_{np} ».

⁽²⁾ Cela signifie exactement ça : $f(z)$ est bornée à l'intérieur de chaque secteur A'OB' de sommet $z = 0$ intérieur à $S_{np} \equiv AOB$; ($A'O \neq AO$, $B'O \neq BO$).

⁽³⁾ Ce théorème contient, comme cas particulier, le précédent.

⁽⁴⁾ Ce théorème est une conséquence immédiate du précédent; on l'a mis, toutefois, en évidence à cause de son expressivité et de son importance.

5) Si sur un *quelconque*⁽¹⁾ ensemble E_1 (de points de S_{np} tendant à zéro de l'intérieur de S_{np}) $f(z)$ converge vers une (quelconque) α de ses trois valeurs exceptionnelles a, b , ou ∞ , $f(z)$ converge de même vers α sur tout autre ensemble E_2 de S_{np} ⁽²⁾ tel que le couple $C(E_1, E_2)$ soit régulier.

Donc en particulier:

6) Si sur un *quelconque* ensemble E_1 de points de S_{np} tendant à zéro de l'intérieur de S_{np} , $f(z)$ converge vers une (quelconque) α de ses trois valeurs exceptionnelles (finies ou infini) a, b, ∞ , elle converge aussi vers α sur tout autre ensemble de points de S_{np} (toujours tendant à zéro de l'intérieur de S_{np}) qui s'obtient de E_1 par variations arbitraires (même variables de point à point) des arguments des éléments de E_1 .

En d'autres termes:

« La convergence de $f(z)$ à l'intérieur d'un S_{np} , sur des suites de points de S_{np} tendantes à zéro, vers une de ses (trois) valeurs exceptionnelles (finies ou infinie), est complètement indépendante des arguments de points de l'ensemble sur lequel cette convergence a lieu ».

De là évidemment, suit, comme cas très particulier, le premier théorème (de LINDELÖF-MONTÉL) énoncé dans A.

(1) C'est-à-dire hypo ou hypertendant à zéro.

(2) Qui, bien entendu, est, comme E_1 tendant à zéro de l'intérieur de S_{np} .

III^{ème} PARTIE.

LE THÉORÈME DE PICARD DANS UN SECTEUR.

A) Principaux résultats déjà connus à ce sujet.

a) École scandinave: Théorème de LINDELÖF-IVERSEN ⁽¹⁾.

« Soit T un domaine infini du plan des z limité par un seul contour sans points multiples et désignons par Γ' et Γ'' les deux branches infinies de ce contour.

« Soit d'autre part $f(z)$ une fonction monogène n'admettant à l'intérieur et sur le contour du domaine T d'autre singularité à distance finie que des pôles.

« Si cette fonction tend sur Γ' et Γ'' vers la même limite ou bien elle tend uniformément vers cette limite dans T , lorsque z augmente indéfiniment, on bien elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points compris dans T .

« Si la fonction $f(z)$ tend sur Γ' et Γ'' vers des limites distinctes elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points intérieurs à T ».

Remarque. — J'ai reporté ici textuellement l'énoncé de M. IVERSEN; il est évident, d'ailleurs, que les faits: 1^{er}) de considérer au lieu d'une fonction holomorphe une fonction méromorphe; 2^{ème}) de considérer au lieu d'un secteur le domaine T déclaré dans l'énoncé; 3^{ème}) de considérer le point singulier essentiel à l' ∞ au lieu de le considérer en $z=0$, comme nous le faisons, n'ont pas d'importance essentielle.

Ce qui joue, au contraire, un rôle dominant c'est le fait que l'on doit supposer la fonction régulière même sur le contour du domaine ⁽²⁾

⁽¹⁾ Cet énoncé est extrait de la thèse de M. IVERSEN (Helsingfors 1914) pag. 29. Il étend et précise, grâce à la représentation conforme un théorème de son Maître M. LINDELÖF (Helsingfors 1908); lire à ce sujet JULIA, « Ann. Ec. Norm. Sup. », t. 36, 1919, pag. 98.

⁽²⁾ Telle donc que si l'on applique le théorème au cas d'une fonction holomorphe, sur le contour de T la fonction doit être régulière au sens usuel du mot.

(sauf, bien entendu, au point singulier essentiel) et que $f(z)$ doit tendre sur les deux branches Γ' et Γ'' du contour vers *une limite unique*.

En d'autres mots les deux branches du contour du domaine T doivent être, pour la validité de la proposition, pas moins que deux chemins de détermination de la $f(z)$ ⁽¹⁾. Et l'on bien sait quel degré de difficulté présente l'étude, non seulement de la distribution, mais même de l'existence de ces chemins existence qui, d'autre part, n'a pas été abordée, et dans des cas extrêmement particuliers, que pour celui des singularités essentielles isolées.

b) *École mixte allemande-française*. (BIEBERBACH, MILLOUX, VALIRON) ⁽²⁾.

On y rencontre les théorèmes suivants :

1^{er}) « Soit $\theta(z)$, ($z = re^{i\varphi}$) une fonction admettant une singularité à l'origine, mais holomorphe dans un secteur S , $|z| < R_0$, $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + \frac{\pi}{\gamma}$; soit Δ un angle de sommet $z = 0$ intérieur à S ; soit $M(r, \Delta)$ le maximum de $|\theta(z)|$ pour les points $|z| = r$ appartenant à Δ ; soit $\rho = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log_2 M(r, \Delta)}{-\log r}$, ρ étant appelé l'ordre de $f(z)$ dans Δ .

« Cela posé: Si $\theta(z)$ est holomorphe dans un secteur S d'ouverture $\frac{\pi}{\gamma}$ et est d'ordre supérieur à γ dans un angle intérieur, elle prend toute valeur, sauf une au plus, sur un ensemble de points de S admettant l'origine pour point limite ».

C'est le théorème de BIEBERBACH.

2^{ème}) Dans le cas d'une $F(z)$ admettant le point ∞ pour point essentiel et holomorphe autour de ce point le précédent théorème s'applique dès que l'ordre ρ dépasse $\frac{1}{2}$: il existe au moins un angle (et même deux comme le remarque MILLOUX) d'ouverture $\frac{\pi}{\rho} + \varepsilon$, ε étant

⁽¹⁾ Lire à ce sujet JULIA, « Leçons sur les fonctions uniformes etc. », Paris Gauth.-Villars 1923, § 56 pag. 91, et aussi VALIRON, « Mém. des Sc. Math. », fasc. II, § 21 pag. 35.

⁽²⁾ Je reporte ici presque textuellement l'exposé sur ce sujet de M. VALIRON, « Mémor. de Sc. Math. », fasc. II, § 9 pag. 15.

positif et arbitrairement petit, dans lequel $F(z) - x$ s'annule une infinité de fois, sauf peut-être pour une valeur de x .

C'est un théorème de M. VALIRON.

3^{ème}) M. MILLOUX a complété ensuite le théorème 1^{er} en définissant dans S une suite de régions dans lesquelles les fonctions $F(z) - x$ s'annulent.

4^{ème}) Si $F(z)$ est d'ordre ρ supérieur à $\frac{1}{2}$ mais différent de ∞ , elle prend une infinité de fois toute valeur, sauf une au plus, dans un angle fixe mais arbitrairement placé dont l'ouverture est supérieure au plus grand des deux nombres $\frac{\pi}{\rho}$ et $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$.

C'est un beau théorème appartenant aussi à M. BIBERBACH.

B) *Propositions nouvelles.*

Vis-à-vis des précédents théorèmes je présente ici, en me bornant aux propositions principales établies dans mon Mémoire, les énoncés suivants:

1^{er}) Si $f(z)$ est holomorphe dans S ⁽¹⁾; si E_1 et E_2 sont deux simples ensembles de points de S tendant à zéro et tels que $E = E_1 + E_2$ tend à zéro de l'intérieur de S , le couple $C(E_1, E_2)$ étant normal, et si $f(z)$ sur E_1 tend vers une valeur v_0 et sur E_2 vers une valeur v_e ($v_0 \neq v_e$) v_e étant valeur exceptionnelle de $f(z)$ dans S , (finie ou infinie). $f(z)$ acquiert dans S , et un nombre infini de fois, chaque valeur finie sauf une au plus.

Dans S se produit, en d'autres mots, le phénomène PICARD.

Donc, en particulier:

2^{ème}) Si $C(E_1, E_2)$ est un simple couple normal, et si sur E_1 , $f(z)$ converge vers une limite finie, tandis que sur E_2 converge vers l'infini, dans S , *sans autre chose*, se produit le phénomène PICARD⁽²⁾.

(1) On ne suppose plus ici, et dans la suite, (bien entendu) que le secteur S soit un S_{np} .

(2) Ce théorème est un cas particulier du précédent, il est vrai, mais quoique moins général, il est plus expressif et plus compréhensif. Que l'attention du lecteur soit attirée sur cet énoncé.

Remarque. — Le 1^{er} théorème précédent conduit en outre à une conséquence considérable et immédiate qui cependant doit être ici signalée; c'est la suivante:

Si $C(E_1, E_2)$ est un couple normal et si $f(z)$ converge sur E_1 vers une limite v_0 et sur E_2 vers une limite v_e ($v_0 \neq v_e$) v_e c'est l'unique valeur exceptionnelle finie de $f(z)$ dans S .

3^{ème}) Si sur un E_{hyp} de S , $f(z)$ converge vers une limite finie et si dans l'intérieur de S , $f(z)$ n'est pas bornée, le phénomène PICARD se produit dans S (1).

Remarque. — Les points de l'ensemble E_{hyp} peuvent être, en particulier, les zéros d'une fonction entière, que je peux arbitrairement placer: d'ici des nombreuses conséquences sur lesquelles je ne peux pas ici m'entretenir.

4^{ème}) Si le couple $C(E_1, E_2)$ est régulier, $E = E_1 + E_2$ tendant à zéro de l'intérieur de S , et si une des valeurs limites de $f(z)$ sur E_1 est exceptionnelle, tandis que toute autre valeur limite v_0 de $f(z)$ sur E_2 est distincte de v_e , dans S se produit le phénomène PICARD.

Donc, en particulier mais d'une façon bien plus expressive:

5^{ème}) Si le couple $C(E_1, E_2)$ est régulier, $E = E_1 + E_2$ tendant à zéro de l'intérieur de S , il suffit seulement que sur E_1 , $f(z)$ soit bornée tandis qu'elle ne le soit pas sur E_2 , pour que dans S , $f(z)$ acquiert, et un nombre infini de fois, toutes valeurs finies sauf une au plus (2).

Et encore plus en particulier:

6^{ème}) Si les éléments correspondants des ensembles E_1 et E_2 tout ayant des modules égaux ont des arguments même tout à fait différents et si sur E_1 , $f(z)$ est bornée et sur E_2 ne l'est pas, ça suffit pour que dans S , $f(z)$ acquiert et infinie fois toutes valeurs finies sauf une au plus.

(1) C'est une conséquence du précédent théorème 2^{ème} et de la propriété fondamentale des ensembles de points énoncée pag. 4.

(2) Qu'on veuille bien réfléchir sur la portée, la simplicité et l'esthétique de cette proposition, même on se rappelant que de couples particuliers d'ensembles E_1, E_2 réguliers sont ceux où l'ensemble E_2 est obtenu de E_1 par des variations arbitraires (même variables de point à point) des arguments des éléments de E_1 (voir la proposition 6^{ème} suivante).

Mais il y a de plus:

7^{ème}) Si $C(E_1, E_2)$ est un couple régulier par rapport à une même constante K (ou uniformément régulier) et si $V_1 =$ borne supérieure des valeurs limites de $|f(z)|$ sur E_1 et V_2 est l'analogue de V_1 sur E_2 l'une des deux, par ex. V_2 , étant finie, il existe une constante $M > 0$, $M = M(K, V_2)$, telle que si $|V_1 - V_2| > M$, $f(z)$ acquiert dans S , et un nombre infini de fois, chaque valeur finie sauf une au plus.

Cette proposition est celle que nous avons déclarée comme devant être considérée la plus avancée dans nos recherches.

Ce qu'il y a d'étonnant dans son énoncé, c'est précisément ceci: *Est-ce que l'on aurait pu jamais soupçonner qu'un simple trop remarquable écart entre les valeurs maxima, ou bornes supérieures qu'elles soient, des valeurs limites de $|f(z)|$ sur deux simples ensembles de points du secteur tendants vers le point singulier, aurait pu, tout seul, provoquer dans le même secteur le phénomène Picard?*

Et pourtant cela arrive.

Il est évident, d'ailleurs, que ce nouveau fait analytique demande encore beaucoup de recherches.

IV^{ème} PARTIE

SUR LA CARACTÉRISATION DES RAYONS PRIVILÉGIÉS r_p .

Passons maintenant à la dernière partie:

A) Résultats déjà connus.

a) Le célèbre théorème de 1880 assure que le phénomène PICARD arrive dans le voisinage (complet) du point singulier; M. JULIA se demanda si on aurait pu préciser davantage son siège. D'où la notion de droites de JULIA; la voici ⁽¹⁾:

Soit $f(z)$ une fonction entière; soient les deux cercles $|z| = a$, $|z| = b$, $a > 0$, $b > 0$; $\frac{a}{b} > 1$; dans la couronne comprise entre les deux

⁽¹⁾ Je donne ici en deux mots cette notion en me plaçant, pour fixer les idées, dans le cas des fonctions entières.

cercles, il existe un point (dit point de Julia), au moins, où la famille $f(z\sigma^n)$ n'est pas normale. Le semi-droite joignant l'origine à un tel point est dite direction de JULIA de la fonction entière considérée⁽¹⁾. Cette définition est, en outre, indépendante du nombre σ ⁽²⁾.

Ceci étant bien clair que dans le voisinage d'une telle direction, toute valeur finie, sauf une au plus, est prise, et une infinité de fois, par la $f(z)$.

Le pas était achevé.

Deux observations. — Il faut cependant remarquer que :

1^{er}) Il est douteux que la réciproque soit exacte; c'est-à-dire que si dans tout voisinage (angulaire) d'un rayon issu du point singulier $f(z)$ acquiert toute valeur finie, sauf une au plus, le rayon soit un rayon de JULIA⁽³⁾.

2^{ème}) que dans tous les travaux de JULIA et de ses disciples pour décider si un rayon est du type indiqué, il faut s'assurer qu'il passe par un point P de la couronne dans lequel la famille $f(z\sigma^n)$ n'est pas normale, ce qui exige que soient vérifiées des *conditions superficielles*.

M. JULIA (1919-21) fit alors une étude approfondie des ensembles des points P où la famille n'est pas normale; beaucoup d'autres l'ont suivi et ont poussé les recherches dans cette direction.

b) La question de la caractérisation d'un rayon comme rayon de JULIA, qui est à la base de toutes ces spéculations analytiques, fut reprise six années après par M. OSTROWSKY dans son beau mémoire de 1925. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour

⁽¹⁾ Il est juste de remarquer que, d'un certain point de vue, le mérite principal sur ce sujet appartient à M. MONTÉL; ce fut lui, en effet, qui démontra le premier, que la famille $f(z\sigma^n)$ n'aurait pas pu être normale dans la couronne (voir MONTÉL, « Ann. Ec. Norm. Sup. », t. 33, 1916, Ch. II, § 12 pag. 252); ceci n'amoindrit pas, toutefois, la grande valeur des recherches de M. JULIA lequel, avec une rare intuition, prévint que l'observation suivant laquelle, dans ces conditions, il y aurait eu certainement au moins un point de la couronne où la famille n'aurait pu être normale, devait entraîner une foule de très importantes conséquences en particulier pour ce qui concerne une détermination du théorème de PICARD. M. JULIA ouvrit ainsi tout un nouveau chapitre de la théorie.

⁽²⁾ C'est ce qu'a démontré M. VALIRON (voir « Bull. Soc. Math. », 2^{ème} série, t. 49, pag. 68-73).

⁽³⁾ Question soulevée par BLOCH dès 1926.

qu'un point P soit un point de JULIA et, en conséquence, pour que le rayon OP soit une droite de JULIA⁽¹⁾. Cette condition qui est donc seulement suffisante pour juger si un r est un r_p est, d'autre part extrêmement compliquée et, tandis que pour la caractérisation des rayons r de JULIA elle a plutôt (même seulement) un intérêt théorique, pour celle des rayons r_p (au sens déclaré pag. 137¹⁷) en plus d'exiger des *conditions superficielles* elle glisse, par sa même nature, dans un krack complet⁽²⁾.

B) Propositions nouvelles.

Ceux qui ont bien suivi notre exposé devinent désormais sans peine ce qui suit: en effet, si les deux ensembles E_1, E_2 , de points de S , dont on parle dans les nouveaux théorèmes présentés dans la précédente III^{ème} partie sont tangentes⁽³⁾ à un même rayon r issus de $z=0$, ou si, en particulier, ces ensembles s'étendent totalement sur r , r est (il est bien évident) un r_p , c'est-à-dire, un rayon privilégié: dans tout son voisinage $f(z)$ acquiert, donc, et une infinité de fois, chaque valeur finie sauf une au plus, et le phénomène PICARD se produit.

Je n'insiste pas d'avantage sur ce point évident; je vais énoncer toutefois quelques théorèmes pris au hasard; ce sont les suivants:

1^{er}) Si E_1 et E_2 sont deux simples ensembles de points tendants à zéro tels que le couple $C(E_1, E_2)$ est normal, gisant en entier sur un rayon intérieur à S issus de $z=0$ (ou qui sont, tous deux, tangents à r au point $z=0$), il suffit que sur E_1 , $f(z)$ tende à une limite finie, tandis que sur E_2 tend à l'infini pour conclure que r est un rayon privilégié r_p ⁽⁴⁾.

2^{ème}) Dans les mêmes conditions si E_1 et E_2 sont tels, pour plus, que le couple $C(E_1, E_2)$ est régulier, à la convergence de $f(z)$

(1) Tel que, donc, dans tout son voisinage, se produise le phénomène Picard.

(2) Il serait long de justifier ici cette assertion; j'en ai exposées les raisons dans mes conférences de Mai 1945 tenues près le R. Institut d'Hautes Math. de Rome. Pour une claire exposition des conditions de OSTROWSKY lire VALIRON, « Mém. Sc. Math. », fasc. XXXVIII, § 10 pag. 21, 22 et 23.

(3) Avec une claire signification de ce mot.

(4) On pourrait ici remarquer qu'à l'aide des propriétés bien connues de la représentation conforme on pourrait considérer des chemins aboutissants au point

sur E_1 vers une limite finie et sur E_2 vers l'infini, on peut remplacer, tout simplement, ces deux conditions: sur E_1 , $f(z)$ est bornée; sur E_2 elle ne l'est pas.

et tout pareillement:

3^{ème}) Si E_1 et E_2 gisent toujours en entier sur r (ou sont tangents tous deux à r au point $z=0$) mais si le couple $C(E_1, E_2)$ est, cette fois, régulier par rapport à une même constante K (ou uniformément régulier) et si $V_1 =$ borne supérieure des valeurs limites de $|f(z)|$ sur E_1 et V_2 est l'analogue de V_1 sur E_2 ⁽¹⁾ il existe une constante $M > 0$ telle que si $|V_1 - V_2| > M$, le rayon r c'est, tout court, un rayon privilégié r_p (tandis qu'il est $M = M(K, V_2)$).

Le nouveau fait analytique annoncé pag. ~~137~~₁₄₁ est donc par le fait, bien mis en évidence.

Remarque. - Je pourrais désormais me taire; mais deux choses, toutefois, me poussent encore à poursuivre un instant; il s'agit de ceci:

Supposons, pour fixer les idées que la $f(z)$ admette, au point $z=0$, un point singulier essentiel isolé; que OL soit un rayon issu de $z=0$ sur lequel $f(z)$ soit bornée, au moins dans le voisinage de $z=0$, et qu'on ait placé su OL un appareil physique capable de déceler que sur OL , $f(z)$, dans ce voisinage n'est plus bornée, par exemple, avec l'allumage d'une lampe électrique; eh bien, les théorèmes tout à l'heure rappelés montrent que OL tournant autour de O à chaque allumage et à chaque extinction de la lampe correspond «un passage» de OL sur un rayon privilégié⁽²⁾.

singulier $z=0$ bien plus généraux que de simples rayons issus de ce point. C'est ce qu'a fait le premier, M. JULIA; mais cela, à mon avis, n'a pas d'importance essentielle. Il s'agit, en effet, en tout cas, de propriétés qui ont ce double caractère: 1^{er} elles sont satisfaites asymptotiquement tout le long du chemin considéré (ou mieux, dans une bande, si restreinte qu'elle soit, qui contient à son intérieur le chemin), donc dans une certaine direction issue de $z=0$; 2^{ème} elles sont satisfaites dans tout voisinage, si petit qu'il soit, du point singulier.

⁽¹⁾ L'une des deux, par ex., V_2 étant finie.

⁽²⁾ Pour être plus précis: chaque fois que OL en tournant autour de $z=0$, la lampe s'allume ou s'éteint, on est assuré, ou bien que l'on a surpassé, ou bien que l'on est sur un rayon privilégié r_p (réfléchir par exemple, à la $f(z) = e^{1/z}$ lorsque OL tourne autour de $z=0$).

J'ajoute enfin que les hypothèses rattachées aux théorèmes fondamentaux présentés dans la II^{ème} et la IV^{ème} parties ne sont pas, comme on pourrait raisonnablement le craindre, des hypothèses pratiquement irréalisables; elles sont au contraire, comme je l'ai démontré, certainement réalisées (par exemple dans le cas d'un point singulier essentiel isolé) même dans un secteur du plan complexe des z , qui n'envahit pas ce plan en entier.

Il n'y a donc rien d'illusoire dans ce que j'ai supposé, et j'achèverai ce bref exposé en remarquant que, vu les précédents résultats, jamais la reprise foncière de l'étude de l'allure d'une fonction analytique au voisinage d'un point singulier essentiel, ne s'est imposée comme en ce moment, en suivant les nouvelles directions ci-dessus indiquées.

SULLA SISTEMATICA DELLA ATTIVITÀ VESUVIANA (*)

FELICE IPPOLITO

SVMMARIVM. — Breviter exposita peculiari Vesuvii natura, qua a ceteris vulcanis differt, Auctor, doctrinae A. RITTMANN helvetii innixus, novam proponit rationem qua ordine definiri possunt eruptiones huius notabilis vulcani.

È nota la grave difficoltà che hanno incontrato i vulcanologi allorchè hanno tentato di stabilire una sistematica della attività vulcanica. Vari autori, tra i quali primo il MERCALLI, adottarono una sistematica basata sulle eruzioni caratteristiche di alcuni vulcani molto noti e parlarono, per esempio, di attività *hawaiana*, *stromboliana*, *vulcaniana* e *peleana*. Ma le ricerche più moderne hanno dimostrato che tutti i vulcani, ed in particolare quelli che diedero il nome ad un tipo di attività o, come anche si disse, ad una *fase*, presentano eruzioni di specie diversa ed attività variabile, onde è preferibile, ad evitare confusioni, bandire tali denominazioni di carattere geografico e tentare di stabilire una sistematica nella quale ogni denominazione definisca, magari convenzionalmente, il carattere proprio della manifestazione. Una classifica provvisoria di questo tipo è stata pubblicata da A. RITTMANN nel 1937 ⁽¹⁾ e successivamente nel 1944 ⁽²⁾; ma essa

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giorgio Dal Piaz il 7 ottobre 1944.

(1) RITTMANN A., *Vulkane und ihre Tätigkeit*, Stuttgart, 1937.

(2) ID., *Vulcani, attività e genesi*, E. P. S. A., Napoli, 1944.

naturalmente, per la varietà e vastità dei fenomeni che abbraccia, non può essere che molto approssimativa.

Maggiore precisione è invece possibile raggiungere nel caso in cui si voglia addivenire ad una sistematica della attività di un singolo vulcano perchè, per quanto molteplici possano essere, i fenomeni che ivi avvengono non abbracciano mai tutta la gamma dei fenomeni vulcanici. E qui potrebbe di nuovo essere ammessa una nomenclatura geografica, nel senso che, ad esempio, con *attività vesuviana* si potrebbe indicare, come facciamo, il complesso delle manifestazioni vulcaniche che hanno luogo al Vesuvio e che constano, come vedremo subito, di vari tipi di attività.

Nel 1934 lo stesso RITTMANN, trattando del meccanismo delle eruzioni ⁽¹⁾, propose una classifica sistematica dell'attività vulcanica vesuviana. Ma nel corso di un ampio studio al quale presentemente attendiamo ⁽²⁾ mi è sembrato opportuno riprendere l'argomento e modificare alquanto la sistematica del RITTMANN, come è indicato nelle quattro tabelle alligate.

Classificare l'attività del Vesuvio presenta in effetti notevole difficoltà perchè, come è noto, questo splendido vulcano, non è, come volgarmente si ritiene, il prototipo degli edifici vulcanici, ma anzi uno dei meno comuni.

In primo luogo esso non è un edificio vulcanico semplice bensì un vulcano misto e precisamente *un vulcano a strato composto con successione inversa*, perchè la successione delle forme costruttive è ivi inversa di quella dei normali vulcani composti. Mentre questi ultimi infatti iniziano la loro attività con eruzioni di magma meno viscoso e più basico per evolvere nel tempo verso un magma più viscoso e sempre meno basico fino ad acido, al Vesuvio, e ad altri vulcani ad esso affini, si riscontra una fenomenologia affatto inversa.

Col variare delle forme costruttive si osserva altresì notevole variabilità dei prodotti, quale non si verifica nella generalità dei vulcani oggi attivi, ma che trova solo riscontro nei prodotti di taluni vulcani ora estinti. Sia la variabilità delle forme costruttive che quella dei

⁽¹⁾ RITTMANN A., *Der Ausbruchmechanismus des Vesuvs*, « Die Naturwissenschaften », XXII, 1934, pag. 305.

⁽²⁾ RITTMANN A., *Il Vesuvio ed il suo magma* a cura di F. IPPOLITO (in corso).

prodotti emessi, dipendono naturalmente dalla variabilità delle condizioni fisico-chimiche del magma, che esplica la propria « capacità di eruzione » in una grande varietà dei fenomeni.

Nella sistematica qui proposta e che abbraccia solo l'attività « storica » del Vesuvio, cioè dal 79 ad oggi, ho tentato di distinguere gli *elementi* dell'attività dai *tipi* di attività, intendendo per « elemento » di attività la manifestazione semplice del fenomeno eruttivo, cioè quella che non può scindersi ulteriormente in più manifestazioni, mentre i « tipi » di attività constano dal persistere nel tempo di uno (attività persistente semplice) o più (attività persistente complessa) elementi di attività, ovvero dal succedersi o dal sovrapporsi in fase parossistica di vari elementi di attività (attività parossistica: eruzioni).

In questa classifica ho anche tentato di stabilire una nomenclatura precisa: ho indicato col nome di *esalazione* od *effusione* l'emissione tranquilla e continua; col nome di *lancio* l'emissione ritmica; col nome di *eiezione* l'emissione violenta e continua; col nome di *esplosione* l'emissione violentissima e breve. In base a questa classifica si verrebbe a restringere la denominazione di *eruzione* solo ai casi di attività parossistica nella quale, come ho ora accennato, si succedono con notevole violenza a breve distanza, o anche si sovrappongono, due o più elementi di attività; ma, per seguire l'uso ormai invalso da lungo tempo, ho lasciato il nome di *eruzione*, con l'aggiunta bensì della specificazione *lenta*, a quelle attività persistenti complesse, come ad esempio l'effusione terminale lenta accompagnata da lancio di scorie o di lava, che hanno al Vesuvio notevole importanza. A meglio intendere le tabelle ricorderò che il fenomeno si dice *centrale* se avviene alla bocca principale del vulcano, *terminale* se ad una bocca effimera nel cratere, *laterale* se ai fianchi del monte, *eccentrico* se nella regione pedemontana del vulcano. Nel caso però delle ultime due denominazioni è opportuno notare che la differenza fra attività laterale ed eccentrica non sta solo nella zona dove il fenomeno è in atto, bensì nel fatto che l'attività laterale attinge il materiale emesso dal condotto del vulcano, mentre quella eccentrica direttamente dal focolaio vulcanico attraverso un proprio condotto. Il che, come è chiaro, importa notevole diversità nei fenomeni.

TABELLA I. — *Elementi dell'attività vulcanica vesuviana.*

Carattere dell'emissione	Prodotto dell'emissione	Luogo dell'emissione	Denominazione dell'elemento di attività
Emissione tranquilla e continua	gas e vapori lava povera di gas lava ricca di gas	ovunque terminale, laterale ovunque	<i>esalazione</i> <i>effusione lenta</i> <i>effusione rapida</i>
Emissione ritmica	gas e vapori gas + blocchi gas + scorie gas + brandelli lavici	centrale laterale eccentrica ovunque	<i>lancio di gas e vapori</i> <i>lancio di blocchi</i> <i>lancio di scorie</i> <i>lancio di lava</i>
Emissione violenta e continua	gas gas + blocchi fino a sabbia gas + cenere gas + pomici gas + scorie gas + lava	solo centrale per lo più centrale, raramente eccentrica » » solo centrale » »	<i>eiezione di gas (getto di gas)</i> <i>eiezione di breccie</i> <i>eiezione di cenere</i> <i>eiezione di pomici</i> <i>eiezione di scorie</i> <i>eiezione di lava (getto o fontana di lava)</i>
Emissione violentissima e breve	gas gas + blocchi fino a sabbia	solo centrale »	<i>esplosione</i> <i>esplosione con espulsione di breccie</i>

TABELLA II. — *Tipi di attività persistente semplice al Vesuvio.*

Elemento di attività in atto	Descrizione dei fenomeni	Conseguenze morfologiche	Denominazione dell'attività	Esempi
Esalazione	Esalazione persistente, da fratture nel fondo o nelle pareti del cratere o anche sui fianchi esterni del vulcano	nessuna	<i>attività fumarolica</i>	molti
Esalazione	Esalazione persistente, di intensità crescente, localizzata alla bocca centrale otturata da detriti incoerenti	nessuna	<i>attività di gas e vapori crescente</i>	molti; caratteristica dell'inizio dello stadio di incubazione
Esalazione	Esalazione persistente, di intensità decrescente, dal condotto aperto dopo una eruzione	nessuna	<i>attività di gas e vapori decrescente</i>	molti; caratteristica dello stadio di esaurimento

TABELLA II. — *Tipi di attività persistente semplice al Vesuvio.*

Elemento di attività in atto	Descrizione dei fenomeni	Conseguenze morfologiche	Denominazione dell'attività	Esempi
Lancio di gas e vapori	Lancio di gas e vapori dalla bocca centrale - Colonna di fumo a boli	nessuna	<i>attività di lancio di gas e vapori</i>	<div> <div></div> <div> molti; caratteristica dello stadio di incubazione sempre più avanzato nel senso dalla freccia </div> </div>
Lancio di scorie	A condotto aperto, e con livello basso del magma nel condotto, gli sbuffi di vapore trascinano brandelli di lava che si consolidano durante il lancio sotto forma di scorie pomiciose	Scarso accrescimento del conetto centrale	<i>attività di lancio di scorie</i>	
Lancio di lava	A condotto aperto, e con livello alto del magma nel condotto, gli sbuffi di vapore trascinano brandelli di lava che cadono ancora fusi o parzialmente fusi, schiacciandosi nel cadere (scorie saldate)	Costruzione di un ripido cono di scorie saldate	<i>attività di lancio di lava</i>	
Lancio di blocchi	Frammenti delle pareti del condotto che franano vengono lanciati fuori dai gas e vapori	Piccolo allargamento della bocca; deposizione di detriti intorno al conetto	<i>attività di lancio di blocchi</i>	molti

TABELLA III. — *Tipi di attività persistente complessa al Vesuvio (eruzioni lente).*

Elementi di attività in atto		Descrizione dei fenomeni	Conseguenze morfologiche	Denominazione dell'attività	Esempi
nel cratere	fuori cratere				
Effusione lenta con lanci di gas e vapori, di scorie e di lava		Durante l'attività di lancio di lava si aprono delle bocche nel cratere dalle quali effluisce tranquillamente lava per settimane e fino per anni. La bocca centrale dà lancio di gas e vapori con singoli lanci di scorie e di lava con fiamme. Segue, con l'esaurimento, un lancio di scorie.	Riempimento del cratere con lava e accrescimento dei fianchi del vulcano se la lava trabocca dal cratere	<i>Eruzione lenta terminale</i>	1914 1933 e seguenti
Lancio di breccie Lancio di scorie Lancio di lava	Effusione lenta Effusione di breccie e di lava	L'attività di lancio di lava preesistente decresce rapidamente o smette improvvisamente; la bocca centrale crolla. Si apre, dall'alto in basso, sui fianchi del monte una frattura radiale dalla quale effluisce la lava. Contemporaneamente lanci di breccie liberano il condotto: seguono lanci di scorie e di lava. In questa fase il fenomeno dura per lungo tempo. Poi lentamente la frattura si chiude dal basso verso l'alto, mentre aumenta il lancio di scorie dalla bocca centrale.	Crolli nel cratere; accrescimento del cono netto e formazione sui fianchi del monte di correnti e cupole laviche (es. colle Umberto)	<i>Eruzione lenta laterale</i>	1895 a 1899

TABELLA IV. — *Tipi di attività parossistica al Vesuvio (eruzioni).*

Elementi di attività in atto		Descrizione dei fenomeni	Conseguenze morfologiche	Denominazione dell'attività	Esempi
nel cratere	fuori cratere				
Eiez. di breccie Eiez. di scorie Eiez. di lava Fontana di lava		Rapida diminuzione dell'attività precedente; crollo della bocca. Eiezione di breccie cui segue, con aumentata intensità, eiezione di scorie e di lava che diviene una vera fontana di lava. Stadio di esaurimento	Allargamento, per crollo, della bocca del condotto. Accrescimento della base del conetto	<i>Eruzione eietiva</i>	1900
idem + eiezione di cenere		Come la precedente, ma più violenta; infine eiezione di cenere	Distruzione del conetto	<i>Eruzione eietiva con cenere</i>	1779
Effusione rapida fino a eiezione di lava (fontana di lava); ev. esplosione		Lancio di lava crescente, afflusso lavico rapido centrale o terminale fino a eiezione e a fontana di lava; eventualmente esplosione. Stadio di esaurimento	Allargamento della bocca e riempimento del cratere con lava. Eventualmente accrescim. dei fianchi del vulcano se la lava trabocca dal cratere	<i>Eruzione effusiva terminale</i>	1929
idem + eiezione di cenere		Come la precedente, ma più violenta; infine eiezione di cenere	Come la precedente; in fine crolli nel cratere	<i>Eruzione terminale mista</i>	1810

ERUZIONI A CONDOTTO APERTO

Segue TABELLA IV. — *Tipi di attività parossistica al Vesuvio (eruzioni).*

Elementi di attività in atto		Descrizione dei fenomeni	Conseguenze morfologiche	Denominazione dell'attività	Esempi
nel cratere	fuori cratere				
Eiez. di scorie Eiez. di cenere Eiez. di gas (con breccie)	Eiezione di breccie e di lava. Effusione rapida	Lancio di lava crescente; si apre una frattura radiale dalla quale sgorga la lava sempre più in basso. Alla bocca centrale, contemporaneamente, eiezione di scorie e cenere; poi eiezione di gas (getto) con eiezione di breccie. Si chiudono le bocche laterali; l'eiezione di gas decresce e la cima del vulcano crolla. Segue lungo e profondo stadio di esaurimento	Accrescimento dei fianchi del monte e allargamento della bocca del condotto. Formazione di un grande cratere; il monte viene decapitato	<i>Eruzione laterale</i>	1872 1906
idem	idem	Simile alla precedente, ma meno violenta. La frattura è nelle parti più alte del cono	Come le precedenti, meno imponenti	<i>Eruzione subterminale</i>	1812
Esalazione o lancio di gas e vapori Eiezione di cenere	Eiez. di breccie Eiez. di lava Effusione rapida Lancio di scorie e di lava	Apertura di una bocca eccentrica preceduta da scosse sismiche locali. Eiezione di breccie e di lava poi effusione rapida; eventualmente eiezione di cenere. Lancio di scorie e di lava. Attività debole al condotto centrale; alla fine della eruzione, per lo più, eiezione di cenere. Stadio di esaurimento.	Formazione di coni parassiti con colate di lava. Eventualmente crollo del cratere centrale	<i>Eruzione eccentrica</i>	1861

ERUZIONI A CONDOTTO APERTO

Segue
TABELLA IV. — *Tipi di attività parossistica al Vesuvio (eruzioni).*

Elementi di attività in atto		Descrizione dei fenomeni	Conseguenze morfologiche	Denominazione dell'attività	Esempi
nel cratere	fuori cratere				
Eiez. di breccie Eiez. di scorie Eiez. di lava Eiez. di cenere Eiez. di gas	Come la precedente	Terremoti; violenta eiezione di breccie (eiezione del « tappo »), eiezione di scorie e di lava fino a fontana di lava; poi forte eiezione di cenere con getto di gas. Si aprono fratture radiali donde sgorga lava in vari punti, preceduta da eiezioni di scorie e di lava.	Come nelle eruzioni laterali, ma più imponenti	<i>Eruzione iniziata</i>	1631
Eiez. di breccie Eiez. di pomici Eiez. di cenere Eiez. di scorie Eiez. di lava Eiez. di gas Esplosione con o senza blocchi	Come la precedente	Simile alla precedente, ma di formidabile violenza. Dopo l'eiezione esplosiva delle breccie del tappo seguono imponenti eiezioni di pomici e di cenere, estremamente violenti. Eventualmente efflussi lavici eccentrici. Crollo generale del cono vulcanico	Accrescimento dei fianchi del vulcano. Vaste zone della regione circoscrivono sono coperte da pomici Formazione di una caldera	<i>Eruzione pliniana</i>	79

AZIONE DEI RAGGI RÖNTGEN SU EMBRIONI E LARVE DI ANFIBI (*)

NOTA II

TEODORO PERRI

SUMMARY. — Quid efficiant radii X in fetibus *Ranae esculentae* Auctor investigavit, germina transferens inter radiatos et normales fetus; in larvis autem *Ranae esculentae*, subministrans tiroideos sucos. In insitionibus inter normales et radiatos fetus perspexit Auctor magni momenti esse pronephrum in hydrope ex radiatione gignenda.

Le ricerche che dal 1944 ⁽¹⁾ vado eseguendo sull'azione dei raggi X su embrioni e larve di Anfibi, studiano la diversa röntgensuscettibilità dei vari abbozzi, indagandola con varie metodiche (trapianto di abbozzi tra embrioni irradiati e normali; innesti di ampie parti embrionali tra embrioni irradiati e normali; somministrazione di estratti tiroidei a larve irradiate; ecc.). Queste ricerche sono utili per meglio conoscere, nel loro aspetto morfologico e funzionale, le proprietà intrinseche dei vari abbozzi, le correlazioni tra le varie parti dell'organismo irradiato, ed implicitamente a distinguere le azioni dirette dei raggi X da quelle indirette.

Questa nota è un breve sunto dei risultati conseguiti nel 1945 ⁽²⁾,

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Filippo Silvestri il 12 gennaio 1946.

(1) « Acta », vol. 8, n. 9, 1945, pag. 67-72.

(2) Nell'Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Roma.

indagando su embrioni e su larve di *Rana esculenta* ⁽¹⁾. Ho irradiato con tensione di 40.000 volt, intensità di 3 milliampere, senza filtro, distanza degli irradiati dall'anticatodo di cm. 21,5 per gli embrioni e di cm. 10,5 per le larve. La quantità di raggi è stata somministrata in unica dose, o in più di una con brevi intervalli. Gli irradiati venivano tenuti in una vaschetta di vetro (sempre la stessa) con uno strato di mm. 4 di acqua comune.

Nelle esperienze che qui riferisco, gli embrioni sono stati irradiati allo stato di bottone codale appena accennato. Nella mia precedente nota ne riferii il comportamento generale; mi limito qui a ricordare che per irradiazioni di 30' o più gli embrioni muoiono con notevole idrope, e che per dosi di 25' possono morire dopo un tempo più lungo e senza idrope. Sia nelle esperienze di trapianto che di innesti ho sempre usato dosi di 30' o più. Il periodo di sopravvivenza, com'è noto, dipende dalla temperatura in cui sono tenuti gli embrioni dopo l'irradiazione. Mi sono accertato che le differenze di temperatura dell'acqua durante l'irradiazione, anche se di una diecina di gradi, non hanno una notevole influenza; e perciò non ho avuto, per una stessa dose, risultati differenti secondo il mese in cui ho irradiato.

* * *

Come ho già accennato al principio di questa nota, la principale linea direttiva delle mie esperienze è lo studio della diversa röntgen-suscettibilità dei vari organi. Le esperienze dell'anno scorso mi avevano mostrato che la vescicola ottica primaria è più resistente ai raggi X che non l'intero embrione; ed infatti se viene trapiantata da un embrione irradiato su uno normale, si ha che continua a svilupparsi mentre l'embrione cui apparteneva muore; solo se la irradiazione supera una

⁽¹⁾ Sperimentai anche su embrioni di *Bufo vulgaris*, *B. viridis*, ecc. Per essi mi limito a notare che in *B. viridis*, irradiando allo stadio di bottone codale per 40' o più, si osservano spessissimo due profonde fessure laterali che dalla regione buccale giungono sino alla cavità olfattoria; la parte dorsale compresa tra le fessure è stesa in avanti. Ho notato inoltre che in *B. vulgaris* ed in *B. viridis*, in confronto a *Rana esculenta*, la sopravvivenza all'irradiazione è maggiore e l'idrope insorge più tardivamente.

certa dose, l'occhio trapiantato va presto in disfacimento e viene riassorbito. Ho riconfermato questi risultati ed ho tenuto in vita l'embrione normale ospitante per più lungo tempo, anche per un mese e mezzo (arti posteriori già comparsi). In alcuni casi ho notato distruzione tardiva dell'occhio; in altri sopravvivenza in buone condizioni anche dopo un mese e mezzo ma con notevolissima riduzione di vo-

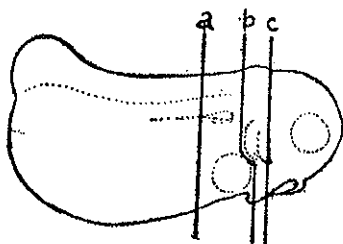


Fig. 1.

Schema mostrante le linee lungo le quali sono stati eseguiti innesti tra embrioni normali ed irradiati.

lume. Ho consigliato alla sig.^{na} N. FRONTALI, interna in questo Istituto, varie esperienze di trapianto dell'occhio irradiato nella cavità orbitaria di larva normale; i risultati già raggiunti confermano i miei e li estendono.

Queste esperienze di trapianto vanno evidentemente estese a quanti più abbozzi è possibile. Ho per ora notato che la regione branchiale e la regione buccale, trapiantate su embrione normale, presentano una röntgensensibilità maggiore che la vescicola ottica. Gli organi adesivi hanno invece una scarsissima röntgensuscettibilità: trapiantati infatti da embrione irradiato su normale compiono il loro ciclo in maniera sensibilmente normale, e questo per dosi sia debolissime che medie e forti.

Come si vede, la tecnica dei trapianti si profila di notevole utilità per lo studio della röntgensuscettibilità differenziale dei vari organi.

Collegate con queste esperienze, sono quelle di trapianti di abbozzi ma in senso inverso, cioè da embrione normale su embrione irradiato. La vescicola ottica, come avevo già notato nella mia precedente nota,

non risente in modo sensibile dell'influenza dell'embrione irradiato. La regione branchiale si sviluppa invece molto meno che nei trapianti tra embrioni normali; ma è da tener presente che negli embrioni irradiati sono notevolmente alterate (idrope) le condizioni di circolo, le quali (Ekman) hanno tanta importanza nello sviluppo delle branchie; ed ho potuto anch'io persuadermene asportando l'abbozzo cardiaco oppure i pronefri in embrioni giovani o avanzati.

Adunque un'azione diretta, diversa da quella ora prospettata, dell'embrione irradiato sugli abbozzi di embrione normale non è finora risultata.

* * *

Strettamente collegate con le esperienze di trapianto tra embrioni normali ed irradiati sono le esperienze di innesto tra una parte di embrione irradiato ed una parte di embrione normale sicchè l'embrione risulti completo. Queste esperienze d'innesti permettono in più di esaminare l'aspetto fisiologico del problema. Anche qui sperimentai su *Rana esculenta*, irradiando allo stadio di bottone codale con dosi sufficienti a portare a morte gli embrioni con notevole idrope. Il piano divisorio tra normale ed irradiato è all'incirca trasversale e situato a diversa altezza (vedi schema annesso).

Se la parte irradiata è quella posteriore, e giunge a comprendere il pronefro e l'abbozzo cardiaco (linea *b* dello schema), sia l'insorgenza dell'idrope che la sopravvivenza sono come nei controlli (embrioni normali irradiati con la stessa dose). Se invece comprende il pronefro ma non il cuore (ne ho studiati solo tre casi), l'idrope insorge più tardi ma la sopravvivenza nei miei casi è stata la stessa. Se, infine, non comprende nè il pronefro nè il cuore (linea *a* dello schema) non si ha idrope e la sopravvivenza è lunghissima.

Nei casi in cui la parte irradiata è quella anteriore, se essa si estende fino a comprendere il pronefro ed il cuore (linea *a* dello schema) tanto l'insorgenza dell'idrope che la sopravvivenza sono come nei controlli. Se comprende il cuore e l'encefalo ma non il pronefro, l'idrope insorge dopo un tempo nettamente maggiore e la sopravvivenza è più lunga. Se comprende l'encefalo, ma nè il cuore nè il pronefro (linea *b* dello schema), l'idrope insorge ancora più tardi, o più chiaramente che

nella combinazione precedente coincide con un notevole riassorbimento dell'encefalo irradiato, tanto che gli occhi possono giungere a contatto. A convalida, ricordo che asportando in embrioni normali la parte anteriore ad una linea passante caudalmente al midollo allungato e cefalicamente al cuore (cioè secondo la linea *b* dello schema) si ha, concordemente ad esperienze di D'ANCONA e NUTI, l'insorgenza dell'idrope. Infine, quando la parte irradiata giunge posteriormente a tagliare a mezzo la regione branchiale (linea *c* dello schema) non si ha idrope, e lo stesso si ha negli embrioni normali in cui venga asportata la parte corrispondente a quella irradiata (¹).

Risulta adunque la notevole importanza che ha il pronefro nel determinare l'idrope precoce; sull'influenza del cuore i dati non mi paiono ancora sufficienti. Non ho notato, neppure nelle combinazioni che non danno idrope, alcuna chiara influenza della parte irradiata sulla normale o viceversa.

Il VINTEMBERGER (²), in uova di rana rossa a due blastomeri, irradiandone uno solo, non osservò nel successivo sviluppo alcuna chiara influenza tra le due metà dell'embrione. La MISTRUZZI (³), in questo Istituto, ha osservato che un embrione irradiato con dose letale si avvantaggia dall'essere unito in parabiosi con uno normale, tanto che una coppia trattata con tiroide giunse alla metamorfosi; è da tener presente, per gli opportuni confronti, che nelle parabiosi alcune condizioni sono notevolmente diverse che negli innesti tra ampie parti embrionali.

* * *

Le stesse questioni di röntgensuscettibilità differenziale viste per gli embrioni, si hanno pure per lo stadio larvale. Questo stadio comincia con l'assunzione di alimento esterno e con l'inizio (Cotronei) dello stabilirsi delle correlazioni nervose ed endocrine. Anche qui trovano utile applicazione i trapianti che saranno estesi in questo senso. Ho iniziato esperienze che tendono allo studio di detto problema ma per via diversa, cioè osservando l'azione di estratti tiroidei (⁴) su

(¹) In queste condizioni di semplice asportazione (in embrioni normali di *Rana esculenta*) le due otocisti si avvicinano ed in parte si saldano.

(²) « C. R. Soc. de Biol. », vol. 99, 1928, pagg. 1590 e 1592.

(³) « Acta », vol. 8, n. 12, 1945.

(⁴) Ho usato l'Endotiroidina I. S. M.

larve giovani o giovanissime irradiate per un'ora. Premetto che le larve così irradiate risentono l'azione degli estratti tiroidei meno che le normali, e ciò in accordo con alcune esperienze del PUCKETT⁽¹⁾. Ma questa inibizione determinata dai raggi X è diversa nei diversi organi, si ha cioè una röntgensuscettibilità differenziale. Gli abbozzi degli arti non si sviluppano per nulla o quasi; invece l'encefalo, l'occhio, l'otocisti, ecc. risentono discretamente l'azione tiroidea e così possono raggiungere un grado di differenziamento nettamente più avanzato che le larve solo irradiate e fissate poco prima di morire; si ha un accentuarsi delle disarmonie da somministrazione tiroidea (Cotronei). È evidente che anche qui, al pari di quanto si è visto negli embrioni, la morte precoce dell'intero organismo impedisce agli organi meno röntgensensibili di estrarre tutte le capacità rimaste loro dopo l'irradiazione. Ricordo che mentre negli embrioni l'abbozzo lentogeno resiste all'irradiazione più dell'abbozzo retinico, invece nelle larve è meno resistente.

* * *

Numerose ricerche di vari Autori avevano mostrato una suscettibilità differenziale dei vari organi di fronte ai più svariati agenti sia fisici che chimici (anche per i raggi X); desidero qui ribadire che l'uso dei trapianti permette una visione dei fatti molto più completa, particolarmente nei casi ove la morte dell'intero organismo impedisce di seguire sino in fondo il destino di ciascuna parte di esso. E ciò verificasi non solo per i raggi X ma anche per altre condizioni: ricordo qui, perchè me ne vado occupando, l'azione della temperatura, ove già il BUCCIANTE (nel pollo) aveva usato la tecnica delle culture *in vitro*, e mie esperienze sul digiuno delle larve⁽²⁾.

⁽¹⁾ « Journ. of exper. Zool. », vol. 76, 1937.

⁽²⁾ In embrioni normali di *Rana esculenta*, sottoposti a rapido e notevole aumento di temperatura, in modo che riportati alla normale muoiano costantemente dopo alcuni giorni; ho notato che la vescicola ottica trapiantata su embrione normale continua a vivere ed a svilupparsi. Nelle larve normali giovanissime (di *R. esculenta*) per effetto del digiuno prossime a morire e non più capaci di rialimentarsi, ho osservato che l'occhio trapiantato su una larva normale continua nel suo sviluppo.

CONCLUSIONI

1° Queste esperienze hanno posto in evidenza una notevole röntgensuscettibilità differenziale tra i vari abbozzi embrionali, ove la tecnica dei trapianti ha mostrato che alcuni di essi (vescicola ottica, coda) possono sopravvivere anche a lungo alla morte dell'embrione cui appartenevano; e lo stesso comportamento si ha tra i vari abbozzi delle larve.

2° Esperienze di innesti pongono in rilievo la notevole importanza del pronefro nel determinare l'idrope, quale effetto dell'irradiazione.

CONTRIBUTO ALLA CONOSCENZA DEL MECCANISMO D'AZIONE DELL'ANTIBIOSI TRA MICROORGANISMI

(Nota riassuntiva) (*)

G. B. MARINI-BETTOLO ED ENRICO DEL PIANTO

SUMMARY. — Postquam Auctores animadverterunt nonnullas ex antibioticis substantiis, quae notae sunt, et plerosque metabolismi microorganismorum fructus, esse reversibilia oxydo-reductionis systemata, experimenta ex chinonibus fecerunt, quibus perspexerunt fere omnes chinones inhibenti vi in *Staphylococcus pyonem aureum* pollere.

L'antagonismo biologico tra microorganismi, e cioè la proprietà di alcuni funghi e batteri di inibire lo sviluppo di altri funghi e batteri, è già conosciuta da molto tempo in botanica ed in microbiologia [1], senza che ne sia stato approfondito il meccanismo di azione.

L'azione antibiotica, secondo WAKSMAN, può essere distinta in una azione diretta di un microorganismo sull'altro ed in un'azione indiretta dovuta ai prodotti del metabolismo di uno dei microorganismi. Esempi classici dell'antibiosi per azione diretta sono le osservazioni di PASTEUR, il quale riusciva a preservare gli animali da esperimento dall'infezione carbonchiosa, inoculando, insieme col bacillo del carbonchio, batteri banali.

Quanto agli esempi di antibiosi per azione indiretta, possiamo affermare che essi sono attualmente oggetto di numerosi studi, special-

(*) Nota riassuntiva delle Memorie presentate dall'Accademico Pontificio Francesco Giordani il 7 aprile e l'8 ottobre 1945.

Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica dell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.

mente dopo la scoperta della penicillina da parte di FLEMING [2] ed il suo impiego in terapia. Anzi i risultati oltremodo lusinghieri ottenuti con la penicillina hanno indotto in questi ultimi anni numerosi ricercatori ad estendere le attuali conoscenze sull'azione antibiotica presentata sia dai microorganismi che dai prodotti del loro ricambio. Sono state così successivamente scoperte l'actinomicina A e B, la tirotricina, la gramicidina, la piocianina, la gliotossina, la patulina, ecc., tutte sostanze ad azione batteriostatica anche elevata, ma che non sono ancora entrate nella pratica terapeutica perchè presentano, al contrario della penicillina, un'azione tossica sugli organismi superiori.

Solo di alcune di queste sostanze attualmente si conosce con esattezza la costituzione chimica; così ad esempio la piocianina e la olororafina sono semichinoni del gruppo della fenazina, la gliotossina è un derivato eterociclico azotato contenente anche zolfo.

Fino ad oggi il maggior numero di studi chimici sui prodotti del metabolismo dei microorganismi si deve al RAISTRICK, dell'Ospedale delle Malattie tropicali di Londra ed ai suoi Collaboratori, chimici e biologi, tra i quali si devono ricordare R. ROBINSON, A. E. OXFORD, H. HAWORTH e tanti altri ancora.

Esaminando e confrontando i risultati di tutti questi lavori, abbiamo osservato che i numerosi prodotti isolati si possono raggruppare, secondo la loro natura chimica, in sei gruppi distinti, e precisamente: in fenoli (e acidi fenolici), in chinoni (compresi gli antrachinoni), in derivati aliciclici, in derivati eterociclici (comprese le porfirine), in derivati dell'acido metiltetronico, in alcoli e acidi della serie alifatica.

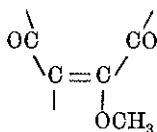
Data la brevità concessa a questa nota non ci soffermiamo ad esaminare singolarmente tutte queste sostanze, ma facciamo rilevare che il maggior numero di esse appartiene al gruppo dei chinoni (spinulosina, fumigatina, citrinina, ecc.) ed ai derivati dell'acido γ -metiltetronico (acido carlico, acido penicillico ecc.)⁽¹⁾.

Eseguendo il confronto tra le formule di costituzione di tali sostanze abbiamo osservato come gran parte delle sostanze antibiotiche

(¹) La completa bibliografia sull'argomento è raccolta nei lavori «in extenso» in corso di pubblicazione sulle «Commentationes Pont. Ac. Scien.».

conosciute nella loro struttura chimica, come pure alcuni prodotti del metabolismo dei microorganismi, appartengono a sistemi reversibili di ossido-riduzione, onde viene spontaneo chiedersi se l'azione antibiotica non possa essere, almeno in parte, legata a tale loro proprietà. Per questo motivo abbiamo rivolto la nostra attenzione allo studio delle sostanze organiche appartenenti a sistemi reversibili di ossido-riduzione, iniziandolo con quello dei chinoni.

Sui chinoni aveva già sperimentato A. Oxford [3], partendo dalla osservazione che la fumigatina, 3-ossi-4-metossi-toluenchinone, prodotto del metabolismo dell'*Aspergillus fumigatus*, possedeva una notevole azione batteriostatica. Per stabilire a quale aggruppamento dovesse attribuirsi tale azione, l'Oxford aveva eseguito prove comparative con quindici chinoni, giungendo alla conclusione che l'azione batteriostatica dei chinoni fosse da ascrivere al gruppo:



che è pure presente nell'acido penicillico. Questa ipotesi non spiega tuttavia il perchè dell'azione batteriostatica di altre sostanze (piocianina, olororafina, ecc.) nelle quali non è presente tale aggruppamento. Invece è interessante notare, come già abbiamo sopra accennato, che non solo i chinoni studiati da A. E. Oxford, ma molte altre sostanze batteriostatiche, che non rientrano nello schema precedente, come i derivati dell'acido γ -metiltetronico, la piocianina, la violaceina, ecc. costituiscono sistemi reversibili di ossido-riduzione.

Per questa ragione abbiamo intrapreso, sin dal gennaio 1945, una serie di esperienze sull'azione batteriostatica dei chinoni al fine di stabilire se effettivamente esista una relazione tra il potenziale di ossido-riduzione delle sostanze e l'azione batteriostatica e se altri chinoni possiedono azione batteriostatica ed in quale grado.

Le esperienze sono state condotte con ventotto chinoni contenenti nella loro molecola l'anello benzenico o i sistemi della naftalina, dell'antracene, del fenantrene e del crisene.

Abbiamo scelto, come primo teste batterico, lo *Staphylococcus pyogenes aureus* per le sue note qualità colturali, che ben si adattano alle

nostre esperienze. Questo infatti è un batterio aerobio e anaerobio facoltativo che tollera assai bene alti scarti di ph e che sviluppa molto rapidamente in terreni ordinari dando in brodo semplice, già nelle prime ore, un'intorbidamento omogeneo. Lo sviluppo delle colture è stato seguito comparando ad occhio nudo l'intorbidamento da esse raggiunto con quello delle colture di controllo.

Per seguire anche le minime variazioni di sviluppo, ci siamo serviti di un metodo nefelometrico, misurando al fotometro di Pulfrich l'intorbidamento raggiunto dalla coltura come valore di opacità relativa.

La semina è stata sempre eseguita con la stessa carica batterica [una goccia ($= \frac{1}{24}$ di cc.) di brodocoltura di 24 ore]. Si è cercato di usare in tutte le esperienze brodo della stessa composizione e comunque esso è stato sempre controllato rispetto a chinoni per i quali avevamo già fissato il potere batteriostatico.

Alcuni chinoni sono stati sperimentati a diversi potenziali di ossido-riduzione, facendo variare il ph del mezzo. Nella tabella alla pagina seguente sono riassunti i dati sperimentali.

Si può osservare che, sebbene non vi sia uno stretto parallelismo tra l'azione batteriostatica dei chinoni sullo *Stafilococco aureo* ed il loro potenziale di ossido-riduzione, tuttavia quasi tutti i chinoni sperimentati possiedono, in vario grado, proprietà batteriostatiche, indipendentemente dalla presenza o meno del gruppo che secondo A. E. Oxford è caratteristico.

Queste osservazioni avvalorano l'ipotesi da noi espressa che le proprietà suddette siano da attribuire più che alla loro formula di costituzione, alla loro particolare capacità di ossido-riduzione.

Come si può notare il fenantrenchinone ed il crisenchinone che hanno caratteristiche chimiche molto simili, possiedono uguale potere batteriostatico e cioè inibiscono completamente fino a concentrazioni di 1/200.000, mentre fanno risentire ancora l'azione ritardante sullo sviluppo dello *Stafilococco aureo* a concentrazioni di 1/1.000.000

Dalla tabella inoltre appare che l'azione batteriostatica dei chinoni viene diminuita dall'introduzione di un gruppo $-\text{NO}_2$, $-\text{SO}_3\text{H}$ ed $-\text{OH}$ e che ha inoltre influenza la posizione occupata dal gruppo NO_2 .

Numero	COMPOSTO	Concentrazione	Azione inibitrice
1	1 — 4 — benzoquinone	1/10.000	notevolissima
2	idrochinone	1/2000	completa a ph 8
3	acido bromanilico (2 — 5 diossi — 3 — 6 — — dibrochinone *	1/5000	nulla
4	hromanile (tetrabromochinone) *	1/85.000	»
5	2 — 3 — diclorochinone	1/10.000	completa
6	cloranile (tetraclorochinone)	1/30.000	nulla
7	2 — 6 — dimetossichinone	1/50.000	notevolissima
8	2 — 5 — dimetossichinone	1/50.000	»
9	timochinone (2 — metil — 5 — isopropil — — chinone)	1/27.000	completa
10	3 — 6 — diossi — timochinone	1/37.000	parziale
11	para — nitro — fenilchinone	1/11.000	completa
12	meta — nitro — fenilchinone	1/13.000	»
13	α — naftochinone	1/35.000	»
14	3 — ossi — α — naftochinone	1/15.000	parziale
15	5 — 8 — diossi — α — naftochinone . . .	1/9600	nulla
16	2 — 3 — dicloro — α — naftochinone . .	—	—
17	2 — metil — α — naftochinone	1/28.000	completa
18	2 — 3 — dimetil — α — naftochinone * .	1/25.000	»
19	lapacolo (2 — ossi — 3 amilen-naftochinone)	1/16.000	»
20	β — naftochinone	1/27.000	»
21	sale sodico dell'acido β — naftochinone — — 4 — solfonico	1/15.000	parziale
22	alizarina	1/30.000	»
23	9 — 10 — fenantrenchinone **	1/200.000	completa
24	9 — 10 — fenantrenchinone — diossima **	1/30.000	»
25	sale di potassio dell'acido fenantrenchi- none — 3 — solfonico	1/67.000	»
26	2 — nitro — fenantrenchinone	1/100.000	»
27	4 — nitro — fenantrenchinone	1/50.000	»
28	4 — ammino — fenantrenchinone	1/80.000	»
29	9 — 10 — crisenchinone	1/200.000	»

* Non si è potuto sperimentare a concentrazione superiore a causa della scarsa solubilità del composto.

** Le soluzioni alcoliche madri di tali composti danno intorbidamento se diluite con acqua per cui si deve ammettere che le concentrazioni effettive siano inferiori a quelle teoriche.

Abbiamo iniziato altresì lo studio sulle possibili reazioni che possono intervenire tra chinoni e ammino-acidi e tra chinoni e proteine per cercare d'interpretare il meccanismo d'azione di questi chinoni.

Dai nostri dati risulterebbe una certa relazione tra potere deidrogenante dei chinoni, quale era stato studiato da Langenbeck [5] e la loro azione batteriostatica.

In queste esperienze ci siamo limitati a prendere in esame i soli chinoni, ma desideriamo sin d'ora richiamare l'attenzione sul fatto che numerose sostanze di natura chinonica, pur non possedendo i gruppi $=CO$ caratteristici dei chinoni, ma possedendo sempre la struttura degli orto e dei para-chinoni, (ad esempio i derivati coloranti del difenil-metano, trifenil-metano, ossazina, tiazina, diazina, acridina, ecc.) vengono usate per la loro azione batteriostatica sia in batteriologia che in terapia. Non è qui il caso di addentrarsi nell'esposizione di numerosi esempi; per accennare solamente ai composti più noti si ricorderà il verde malachite, il verde brillante, il violetto oristalli, che sono tutt'ora usati per la preparazione di noti terreni isolanti per il gruppo tifo-coli; il violetto di metile, la fuosina basica, la pironina, la tionina, che vengono usate per la prova batteriostatica delle brucelle; il bleu di metilene, la cui azione antisettica è ben nota in terapia; ecc.

Molti altri esempi si potrebbero qui citare, ma su questo argomento torneremo in successivi lavori nei quali ci proponiamo di esaminare altri gruppi di composti costituenti anche essi sistemi reversibili di ossido-riduzione funzionanti in determinati intervalli di potenziale, al fine di vedere se anche essi possiedono proprietà batteriostatiche.

BIBLIOGRAFIA

- [1] WAKSMAN S. A., «Chron. Bot.», VI, n. 7, 1940.
- [2] FLEMING A., «Brit. Med. Journ. ex. path.», 10, 226, 1929.
- [3] OXFORD A. E., citato da M. KIESE in «Klinische Wochens.», 22 agosto 1945.
- [4] FISCHER E. e SCHRAEDER. «Ber. deut. Chem. Ges.», 43, 525, 1910.
COOPER E. A. e NICHOLAS S. D., «Journ. Ind. Chem.», 43, 59, 1927.
GULLAND J. M., «Biochem. Journ.», 26, 32, 1932.
HILPERT S., «Biochem. Zeit.», 166, 71, 1925.
- [5] LANGENBECK W., «Ber. deut. Chem.», 75, 1483, 1942.

SULL'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARI A DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE DI TIPO ELLITTICO (*)

LUIGI AMERIO

SUMMARIVM. — Auctor tradit rationem qua integrari possint aequationes lineares secundi ordinis, elliptici generis, directe adhibita Greeniana formula, secundum principia a PICONE inventa.

Nei suoi *Appunti di Analisi Superiore* il PICONE⁽¹⁾ ha mostrato come in virtù di una assai notevole interpretazione, da Lui stesso indicata, della formula di GREEN, i classici problemi al contorno della fisica-matematica vengano prospettati, per quel che riguarda la loro soluzione, da un unico punto di vista, qualunque sia l'ordine o il tipo dell'equazione lineare cui essi conducono.

La costruzione effettiva del procedimento nel quale tale interpretazione viene utilizzata per integrare un'equazione lineare del secondo ordine di tipo ellittico è stata poi da me indicata in una Memoria di prossima pubblicazione⁽²⁾, di cui qui riassumo i principali risultati.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 7 ottobre 1945.

Il lavoro è stato eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(1) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1940, pagg. 762-765. Vedasi anche, dello stesso Autore: *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti*. « R. Acc. delle Scienze di Torino », 1940, pagg. 413-426.

(2) Presso gli « Annals of Mathematics ».

1. - Sia

$$[1] \quad E(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \quad (a_{ik} = a_{ki})$$

un'equazione lineare del secondo ordine di tipo ellittico in m variabili (x_1, \dots, x_m) e supponiamo le a_{ik}, b_i funzioni di classe ⁽¹⁾ 2 e 1 rispettivamente, le c, f continue in dominio limitato τ dello spazio S_m . Inoltre il determinante $\|a_{ik}\|$ sia unitario, ciò che manifestamente non lede la generalità.

Introdotta l'operatore differenziale aggiunto di $E(u)$:

$$E^*(u) = \sum \frac{\partial^2 (a_{ik} u)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum \frac{\partial (b_i u)}{\partial x_i} + cu,$$

ammettiamo che il contorno σ di τ soddisfi a quelle condizioni che assicurano la validità della formula di GREEN per ogni coppia u, w di funzioni di classe 2:

$$[2] \quad - \int_{\tau} \left\{ u E^*(w) - w E(u) \right\} d\tau = \int_{\sigma} \left\{ u \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial u}{\partial \nu} - u w L \right\} d\sigma$$

dove ν è la direzione conormale ⁽²⁾ a σ , orientata verso l'interno di τ , e si è posto

$$L = \sum \cos(n x_i) \left\{ b_i - \sum \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \right\},$$

n essendo la normale a σ , orientata anch'essa verso l'interno di τ .

⁽¹⁾ Sia φ una funzione definita nell'interno di un dominio τ di S_m , continua con tutte le sue derivate parziali di ordine $\leq s$. Diremo (G. ASCOLI, *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*, Sansoni, Firenze, 1935, pagg. 52-53) che φ è di classe s in τ se è possibile prolungare la φ e tutte le sue derivate di ordine $\leq s$ anche sul contorno σ di τ in modo da risultare continue in tutto τ . Diremo poi che φ è di classe sH in τ se essa e le sue derivate di ordine $\leq s$ soddisfano in tutto τ a una condizione di HÖLDER. Scriveremo H invece di OH .

Infine diremo che una ipersuperficie di S_m è di classe s , o sH , se è definita mediante una rappresentazione (invertibile) delle coordinate dei suoi punti come funzioni di classe s o sH , di $m-1$ parametri variabili in un certo dominio, con matrice funzionale mai nulla. Più generalmente, si avrà in taluni casi (ad esempio, per le ipersuperficie chiuse) un complesso di rappresentazioni di tal tipo, in parte sovrapposte.

⁽²⁾ Ricordiamo che la funzione qui indicata con il simbolo $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ non coincide, in generale, con la derivata della u secondo la direzione ν , ma è ad essa proporzionale.

Risulta allora, per la [2], se u è un integrale della [1],

$$[3] \quad - \int_{\tau} u E^*(w) d\tau = \int_{\sigma} \left\{ u \left(\frac{\partial w}{\partial v} - wL \right) - w \frac{\partial u}{\partial v} \right\} d\sigma - \int_{\tau} f w d\tau,$$

classica relazione che viene dal PíCONE interpretata nel modo seguente.

Si voglia, ad esempio, risolvere per la [1] il problema di Dirichlet; siano cioè assegnati nei punti di σ i valori di u . In tal caso il PíCONE comincia col rilevare che

a) se si conosce una successione $\{v_r\}$ di integrali dell'equazione aggiunta

$$[4] \quad E^*(v) = 0$$

la quale sia chiusa ⁽¹⁾ su σ , dalla [3] si ricava il sistema di infinite equazioni di Fischer-Riesz:

$$[5] \quad \int_{\sigma} \left\{ u \left(\frac{\partial v_r}{\partial v} - v_r L \right) - v_r \frac{\partial u}{\partial v} \right\} d\sigma - \int_{\tau} f v_r d\tau = 0$$

e quindi si conoscono i coefficienti di Fourier dell'incognita $\frac{\partial u}{\partial v}$ rispetto alla successione $\{v_r\}$, chiusa su σ . Resta perciò individuata nei punti di σ la funzione $\frac{\partial u}{\partial v}$ ⁽²⁾.

Una volta ottenuta la $\frac{\partial u}{\partial v}$, il PíCONE osserva che

b) se si conosce una successione $\{z_r\}$ di funzioni di classe 2 in τ tali che la successione $\{E^(z_r)\}$ risulti chiusa in τ , dalla [3] si deduce il sistema di Fischer-Riesz:*

$$[6] \quad - \int_{\tau} u E^*(z_r) d\tau = \int_{\sigma} \left\{ u \left(\frac{\partial z_r}{\partial v} - z_r L \right) - z_r \frac{\partial u}{\partial v} \right\} d\sigma - \int_{\tau} f z_r d\tau$$

e quindi la u resta individuata nei punti di τ .

⁽¹⁾ Nelle ipotesi poste, basta la chiusura rispetto alla classe delle funzioni a quadrato sommabile su σ . Negli enunciati che seguiranno ometteremo l'indicazione, facilmente ricavabile, della classe di funzioni rispetto a cui si ha la chiusura.

⁽²⁾ Dedotta, in modo ben noto, dalla successione $\{v_r\}$ una equivalente successione $\{\bar{v}_r\}$ ortogonale e normale su σ , dalle [5], in cui si ponga \bar{v}_r in luogo di v_r , si ricavano i valori \bar{c}_r dei coefficienti di Fourier dell'incognita $\frac{\partial u}{\partial v}$ rispetto alla successione $\{\bar{v}_r\}$; ne segue $\frac{\partial u}{\partial v} \sim \sum \bar{c}_r \bar{v}_r$.

In modo analogo si ragiona per il problema di NEUMANN, nel quale la successione $\{v_r\}$ di integrali della [4] deve esser tale che risulti chiusa, su σ , la successione $\left\{\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - v_r L\right\}$. Se infine si suppone assegnata su una parte, σ_1 , di σ la u , nella rimanente parte, σ_2 , la derivata conormale $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, si richiede la chiusura, su σ , della successione $\{t_r\}$ ottenuta ponendo $t_r = -v_r$ nei punti di σ_1 , $t_r = \frac{\partial v_r}{\partial \nu} - v_r L$ nei punti di σ_2 .

Come si vede, la risoluzione dei problemi considerati, mediante le proposizioni a) e b) viene effettuata in due tempi successivi. Possiamo però indicare una terza proposizione, in virtù della quale le funzioni incognite possono determinarsi contemporaneamente.

Per questo cominciamo col ricordare che, come ha già rilevato il PICONE⁽¹⁾, la teoria usualmente esposta degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali e normali in un dominio appartenente allo spazio S_m continua a valere anche se le funzioni considerate non sono definite in un solo dominio a m dimensioni, ma in più insiemi I_1, \dots, I_k , aventi ciascuno un proprio numero $\leq m$ di dimensioni. Gli eventuali punti comuni a due, o più, di questi insiemi vanno considerati distinti e così pure saranno distinte, in tali punti, le definizioni delle funzioni. Seguendo il PICONE, se g_1, \dots, g_k sono funzioni definite negli insiemi I_1, \dots, I_k , assumeremo tali funzioni come componenti di un vettore g dello spazio S_k . Se g e ω sono due di tali vettori diremo poi loro *prodotto integrale*, e lo indicheremo col simbolo (g, ω) , la somma

$$[7] \quad (g, \omega) = \sum_1^k \int_{I_h} g_h \omega_h dI_h.$$

Infine, dati il vettore g e una successione di vettori $\{\omega_r\}$, i numeri $c_r = (g, \omega_r)$ si chiameranno i *coefficienti di Fourier* di g rispetto alla successione $\{\omega_r\}$.

Ad esempio, possiamo considerare un dominio τ di S_m e una (o più) ipersuperficie σ e definire una successione $\{\omega_r\}$ di vettori le cui

⁽¹⁾ M. PICONE, *Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della fisica-matematica*, «Atti del I Convegno di Mat. applicata», Roma, 1936; *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1940, pagg. 632-634.

componenti, su τ e su σ , saranno due successioni di funzioni $\{\omega'_r\}$ e $\{\omega''_r\}$, definite rispettivamente su τ e su σ .

I vettori ω_r si diranno *ortogonali* e *normali* se risulterà

$$(\omega_r, \omega_s) = \int_{\tau} \omega'_r \omega'_s d\tau + \int_{\sigma} \omega''_r \omega''_s d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{per } r=s, \\ 0 & \text{per } r \neq s, \end{cases}$$

e a un vettore g , di componenti g' e g'' , verrà a corrispondere lo sviluppo in serie di FOURIER $\sum c_r \omega_r$, intendendosi con tale simbolo, nei punti di τ , la serie $\sum c_r \omega'_r$ e, nei punti di σ , la serie $\sum c_r \omega''_r$. Inoltre se i numeri (g, g) , (ω_r, ω_r) sono finiti, la serie $\sum c_r^2$ è convergente e si ha

$$[8] \quad \sum c_r^2 \leq (g, g) = \int_{\tau} g'^2 d\tau + \int_{\sigma} g''^2 d\sigma.$$

Perciò le due serie

$$\sum c_r \omega'_r, \quad \sum c_r \omega''_r$$

convergono in media su τ e su σ rispettivamente, come risulta dal teorema di FISCHER-RIESZ, avendosi

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \left(\sum_p^q c_p \omega'_p \right)^2 d\tau &\leq \int_{\tau} \left(\sum_p^q c_p \omega'_p \right)^2 d\tau + \int_{\sigma} \left(\sum_p^q c_p \omega''_p \right)^2 d\sigma = \sum_p^q c_p^2, \\ \int_{\sigma} \left(\sum_p^q c_p \omega''_p \right)^2 d\sigma &\leq \int_{\tau} \left(\sum_p^q c_p \omega'_p \right)^2 d\tau + \int_{\sigma} \left(\sum_p^q c_p \omega''_p \right)^2 d\sigma = \sum_p^q c_p^2. \end{aligned}$$

La successione di vettori $\{\omega_r\}$ si dirà poi *chiusa* se l'unico vettore g ortogonale a tutti i vettori ω_r è il vettore nullo (cioè di componenti nulle, ovunque o quasi ovunque a seconda che le funzioni si suppongano continue o no). Inoltre, se la successione $\{\omega_r\}$ è chiusa, nella [8] vale il segno $=$ e le serie $\sum c_r \omega'_r$, $\sum c_r \omega''_r$, convergono in media, in τ e σ rispettivamente, a g' , g'' .

Ciò premesso e considerando, ad esempio, il problema di DIRICHLET, si ha, per la [3],

$$-\int_{\tau} u \mathbb{K}^*(w) d\tau + \int_{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} w d\sigma = \int_{\sigma} u \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - Lw \right) d\sigma - \int_{\tau} f w d\tau.$$

Definito allora un vettore g di componenti $g' = u$, $g'' = \frac{\partial u}{\partial v}$, e un vettore φ di componenti $\varphi' = -E^*(w)$, $\varphi'' = w$, si ha, per la [7],

$$[9] \quad (g, \varphi) = \int_{\sigma} u \left(\frac{\partial w}{\partial v} - Lw \right) d\sigma - \int_{\tau} f w d\tau$$

cioè è noto il prodotto integrale dei vettori g, φ .

Ne segue ⁽¹⁾:

c) se si conosce in τ una successione di funzioni $\{w_r\}$ tali che la successione di vettori $\{\varphi_r\}$, di componenti $\varphi'_r = -E^*(w_r)$, $\varphi''_r = w_r$, sia chiusa, dalla [9] si ricava il sistema di Fischer-Riesz:

$$[10] \quad (g, \varphi_r) = \int_{\sigma} u \left(\frac{\partial w_r}{\partial v} - Lw_r \right) d\sigma - \int_{\tau} f w_r d\tau$$

cioè si conoscono i coefficienti di Fourier dell'incognito vettore g rispetto alla successione $\{\varphi_r\}$. Risulta perciò determinato il vettore g e quindi le sue componenti u in τ , $\frac{\partial u}{\partial v}$ in σ ⁽²⁾.

Analoghi enunciati valgono per gli altri problemi al contorno.

Si presenta ora la questione di costruire le successioni $\{v_r\}$, $\{z_r\}$ e $\{w_r\}$. Tale questione è stata risolta nella Memoria i cui principali risultati formano l'oggetto della presente Nota.

Come vedremo, mentre la costruzione effettiva delle funzioni $\{v_r\}$ si presenta, in generale, assai ardua, le funzioni w_r sono semplicissime, potendosi prendere, ad esempio, $w_r = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$, con $\alpha_i = 0, 1, \dots$. Inoltre le funzioni w_r ottenute godono della proprietà che la successione $E^*(w_r)$ risulti chiusa in τ : si può perciò assumere $z_r = w_r$.

⁽¹⁾ Durante la redazione di questo lavoro non mi era noto che il Prof. PICONE, come Lui stesso mi comunica, aveva già rilevata (in una conferenza tenuta nel 1948 ma non pubblicata) l'esistenza della proposizione c) e degli analoghi enunciati per i problemi al contorno relativi a equazioni lineari di qualsivoglia ordine e tipo.

⁽²⁾ Dedotta in modo noto dalla successione $\{w_r\}$ una equivalente successione $\{\bar{w}_r\}$ tale che la corrispondente successione di vettori $\{\bar{\varphi}_r\}$, di componenti $\bar{\varphi}'_r = -E^*(\bar{w}_r)$, $\bar{\varphi}''_r = \bar{w}_r$, sia ortogonale e normale e detto \bar{c}_r il valore del secondo membro della [10], in cui si ponga $\bar{w}_r, \bar{\varphi}_r$ in luogo di w_r, φ_r , risulta $u \sim \sum \bar{c}_r E^*(\bar{w}_r)$, $\frac{\partial u}{\partial v} \sim \sum \bar{c}_r \bar{w}_r$.

Osserviamo infine che mentre, come facilmente si dimostra, le proposizioni a), c) presuppongono l'unicità della soluzione del problema considerato, le successioni $\{v_r\}$, $\{w_r\}$ che indicheremo permettono di ottenere in ogni caso la soluzione. Mediante tali successioni è stato inoltre risolto, nella sua forma più generale, il problema misto.

2. - Un primo procedimento per integrare l'equazione [1], supponendola a coefficienti costanti, si trova indicato in un mio lavoro di recente pubblicazione⁽¹⁾. Tale procedimento si basa sulla conoscenza della soluzione fondamentale della [4] (ben nota trattandosi di un'equazione a coefficienti costanti), e si può estendere a numerosi altri problemi al contorno relativi a equazioni lineari, in particolare all'integrazione della [1], supponendone variabili i coefficienti; in esso si fa uso della successione $\{v_r\}$, che risulta esplicitamente ottenuta.

Cominciamo con l'ammettere che le funzioni a_{ik} , b_i , c , si possano prolungare in un dominio τ' , contenente τ nel suo interno e avente per contorno una ipersuperficie σ' di classe 2, supponendo inoltre che in τ' le a_{ik} , b_i risultino di classe 2H, 1H rispettivamente, la c di classe H.

Supporremo inoltre che il contorno σ , di area finita, sia di tal natura che, per ogni coppia (u, w) di funzioni di classe 2 in τ , valga la formula [2] di Green. Inoltre ammetteremo che, escludendo al più da σ un insieme chiuso χ di misura (ipersuperficiale) nulla, in ogni punto M_0 di $\sigma - \chi$ esista la retta normale a σ e, assunto M_0 come iperpiano di equazione $x_m = 0$, il contorno σ , in un intorno completo di M_0 , abbia equazione $x_m = \varphi(x_1, \dots, x_{m-1})$, con φ funzione di classe 2.

Le condizioni ora poste sono largamente verificate nei casi pratici; si noti, in particolare, che σ può contenere anche infinite ipersuperfici distinte.

Se σ soddisfa alle condizioni indicate e se, detto M un punto mobile su σ , $A(M)$, $B(M)$ sono due funzioni sommabili su σ , diremo che σ , A , B appartengono all'insieme (α) .

(1) L. AMERIO, *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi*, Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LXXVIII, 1944-45.

Un secondo insieme, (β) , si definirà nel modo seguente, imponendo ulteriori condizioni a σ , A, B.

Supporremo, riguardo a σ , che gli integrali

$$J_1(R) = \begin{cases} \int_{\sigma} MR^{-(m-2)} d\sigma, & \text{per } m > 2, \\ \int_{\sigma} |\log MR| d\sigma, & \text{per } m = 2, \end{cases}$$

$$J_2(R) = \begin{cases} \int_{\sigma} \left| \frac{\partial MR^{-(m-2)}}{\partial n} \right| d\sigma, & \text{per } m > 2, \\ \int_{\sigma} \left| \frac{\partial \log MR}{\partial n} \right| d\sigma, & \text{per } m = 2, \end{cases}$$

risultino limitati al variare del punto R in un dominio τ' contenente τ nel suo interno. Il significato geometrico della limitatezza di $J_2(R)$ è chiaro quando si ricordi che, detto $d\omega_{M,R}$ l'angolo secondo cui è visto dal punto R l'elemento $d\sigma$ relativo al punto M, risulta

$$J_2(R) = \int_{\sigma} |d\omega_{M,R}|.$$

Se osserviamo poi che la continuità di $J_1(R)$ nei punti di $\sigma - \chi$ è ben nota, constatiamo come le condizioni relative a σ , anche se appartenente all'insieme (β) , sono assai larghe e risultano soddisfatte se σ presenta nei punti dell'insieme χ quelle singolarità che si incontrano usualmente nelle applicazioni.

Considerando ora le funzioni A(M), B(M), supponiamo la A(M) continua in tutti i punti di σ , la B(M) continua in tutti i punti di $\sigma - \chi$ e tale che, al variare di N su σ , l'integrale

$$J_3(N) = \begin{cases} \int_{\sigma} |B(M)| MN^{-(m-2)} d\sigma, & \text{per } m > 2, \\ \int_{\sigma} |B(M) \log MN| d\sigma, & \text{per } m = 2, \end{cases}$$

risulti funzione continua (si noti che questa condizione è soddisfatta nei punti di $\sigma - \chi$ e anche nei punti di χ , con le singolarità che si presentano nei casi pratici, se si fanno su B(M) ipotesi assai meno restrittive della continuità).

Ciò premesso, osserviamo che, in virtù delle ipotesi fatte sui coefficienti della [1], se R è un qualsiasi punto prefissato internamente a τ' e T un generico punto di τ' , l'equazione $E^*(v) = 0$, considerata relativamente alle coordinate di T , ammette la soluzione fondamentale⁽¹⁾ $F(T, R)$ (che si può ammettere soddisfi alla $E(u) = 0$ come funzione di R) e valgono, per ogni soluzione u della [1] di classe 2 in τ , le formule fondamentali di GREEN:

$$[11] \quad k_m u(P) = \int_{\sigma} \left\{ u(M) \left(\frac{\partial F(M, P)}{\partial v} - F(M, P) L(M) \right) - \right. \\ \left. - F(M, P) \frac{\partial u(M)}{\partial v} \right\} d\sigma - \int_{\tau} f(M) F(M, P) d\tau,$$

$$[12] \quad 0 = \int_{\sigma} \left\{ u(M) \left(\frac{\partial F(M, Q)}{\partial v} - F(M, Q) L(M) \right) - \right. \\ \left. - F(M, Q) \frac{\partial u(M)}{\partial v} \right\} d\sigma - \int_{\tau} f(M) F(M, Q) d\tau,$$

dove k_m è una costante $\neq 0$ e dipendente solo da m , P e Q indicano rispettivamente un punto interno e un punto esterno a τ , M è il punto, di τ o di σ , rispetto alle cui coordinate si effettuano le integrazioni.

Considereremo sempre, in quel che segue, solo la totalità degli integrali della [1] per cui valgano le [11], [12], i valori $u(M)$, $\frac{\partial u(M)}{\partial v}$, su σ , intendendosi definiti, nel caso più generale, quasi ovunque, come i limiti

$$\lim_{P \rightarrow M} u(P), \quad \lim_{P \rightarrow M} \frac{\partial u(P)}{\partial v},$$

dove $P \rightarrow M$ lungo la conormale in M , ed essendo sommabili su σ .

Se poniamo, su σ , $u(M) = A(M)$, $\frac{\partial u(M)}{\partial v} = B(M)$, dalla [12] segue che il soddisfare all'equazione

$$[13] \quad 0 = \int_{\sigma} \left\{ A(M) \left(\frac{\partial F(M, Q)}{\partial v} - F(M, Q) L(M) \right) - \right. \\ \left. - F(M, Q) B(M) \right\} d\sigma - \int_{\tau} f(M) F(M, Q) d\tau$$

⁽¹⁾ E. E. LEVI, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, vol. XXIV, 1907, pagg. 275-317. Vedasi anche G. ASCOLI, *loc. cit.*, (nota n. 1, pag. 214), pagg. 70-76.

è condizione necessaria per tutte le coppie A, B di funzioni coincidenti rispettivamente coi valori assunti su σ da un integrale u dalla [1] e dalla derivata conormale $\frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Ma tale condizione è anche sufficiente. Ho dimostrato infatti il seguente teorema.

I. - Sia A, B una coppia di funzioni soddisfacenti alla [13]. Considerata la funzione $u(P)$ definita nell'interno di τ dall'eguaglianza

$$[14] \quad k_m u(P) = \int_{\sigma} \left\{ A(M) \left(\frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu} - F(M, P) L(M) \right) - \right. \\ \left. - F(M, P) B(M) \right\} d\sigma - \int_{\tau} f(M) F(M, P) d\tau ,$$

questa è un integrale della [1] e inoltre, a seconda dell'insieme cui appartengono σ, A, B , vale l'una, o l'altra, delle proposizioni:

a) se σ, A, B appartengono all'insieme (α) , risulta quasi ovunque, su σ ,

$$[15] \quad \lim_{P \rightarrow M} u(P) = A(M) ,$$

$$[16] \quad \lim_{P \rightarrow M} \frac{\partial u(P)}{\partial \nu} = B(M) ,$$

dove $P \rightarrow M$ lungo la conormale ν a σ , spiccata dal punto M ;

b) se σ, A, B appartengono all'insieme (β) , risulta, in tutti i punti M di σ ,

$$[17] \quad \lim_{P \rightarrow M} u(P) = A(M) ,$$

comunque $P \rightarrow M$, e, in tutti i punti di $\sigma - \chi$,

$$[18] \quad \lim_{P \rightarrow M} \frac{\partial u(P)}{\partial \nu} = B(M) ,$$

dove $P \rightarrow M$ lungo la conormale a σ in M .

L'equazione [13] traduce perciò i DIRICHLET e di NEUMANN; inoltre ad essa ricondurremo anche il problema misto. Per risolverla, si può osservare che, indicata con $\{g_r(Q)\}$ una successione di funzioni continue, chiusa nel dominio $\tau'' = \tau' - \tau + \sigma$ (ad esempio la successione $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$, con $\alpha_i = 0, 1, \dots$), la [13] *equivale* al sistema di infinite equazioni

$$\int_{\sigma} g_r(Q) \left[\int_{\sigma} \left\{ A(M) \left(\frac{\partial F(M, Q)}{\partial \nu} - F(M, Q) L(M) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - F(M, Q) B(M) \right\} d\sigma - \int_{\tau} f(M) F(M, Q) d\tau \right] d\tau'' = 0 ,$$

cioè anche, posto

$$[19] \quad v_r(M) = \int_{\sigma} g_r(Q) F(M, Q) d\tau'' ,$$

al sistema di infinite equazioni di FISCHER-RIESZ

$$[20] \quad \int_{\sigma} \left\{ A(M) \left(\frac{\partial v_r(M)}{\partial \nu} - v_r(M) L(M) \right) - v_r(M) B(M) \right\} d\sigma - \\ - \int_{\tau} f(M) v_r(M) d\tau = 0 .$$

Se si considera ora il problema di DIRICHLET e se vale, in tale problema, per la [1] il teorema di unicità, si ha perciò, in virtù del teorema I, che la successione $\{v_r\}$ data dalla [19] è chiusa su σ e soddisfa, essendo v_r , nell'interno di τ , un integrale della [4], alle condizioni richieste dal PICONE. Supponiamo ora che il teorema di unicità non valga; in tal caso una successione $\{v_r\}$ di integrali della [4] chiusa su σ non può esistere, come segue immediatamente dalle [5], [11]; possiamo però affermare, per il teorema I, che le autosoluzioni sono *catterizzate* dall'essere le corrispondenti $B(M)$ ortogonali su σ alla successione $\{v_r\}$; da tale circostanza e dalle [20] si ricava perciò, anche se manca il teorema di unicità, la risoluzione del problema. Osserviamo infine che, *se il problema non ammette soluzione, nemmeno il sistema [20] ammette soluzione.*

La [14] dà poi l'integrale della [1] corrispondente a una determinata coppia A, B .

Le stesse considerazioni, riferite alla successione $\left\{ \frac{\partial v_r}{\partial v} - v_r L \right\}$, valgono per il problema di NEUMANN.

Si voglia ora risolvere per la [1] il problema misto, supponendo assegnati su σ i valori di una combinazione lineare D delle u e $\frac{\partial u}{\partial v}$:

$$[21] \quad D = hu + k \frac{\partial u}{\partial v}$$

con h, k funzioni note dei punti di σ , non contemporaneamente nulle, escluso al più, su σ , un insieme di misura (ipersuperficiale) nulla.

Posto, al solito, su σ , $A = u$, $B = \frac{\partial u}{\partial v}$, ammettiamo che σ, A, B appartengano all'insieme (α) e che σ si possa dividere in due parti, σ_1 e σ_2 , in modo che, su σ_1 , la funzione $\frac{D}{k}$ sia sommabile e risulti, quasi ovunque, $\left| \frac{h}{k} \right| \leq L_1$; su σ_2 sia sommabile $\frac{D}{h}$ e risulti, quasi ovunque $\left| \frac{k}{h} \right| \leq L_2$, con L_1, L_2 costanti positive.

Si ha poi, su σ_1 ,

$$[22] \quad B = -\frac{h}{k} A + \frac{D}{k}$$

e, su σ_2 ,

$$[23] \quad A = -\frac{k}{h} B + \frac{D}{h}.$$

Dalla [20] ricaviamo allora

$$[24] \quad \begin{aligned} \int_{\sigma_1} A \left\{ \frac{\partial v_r}{\partial v} - \left(L - \frac{h}{k} \right) v_r \right\} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} B \left\{ -\frac{k}{h} \frac{\partial v_r}{\partial v} + \left(\frac{k}{h} L - 1 \right) v_r \right\} d\sigma_2 = \\ = \int_{\sigma_1} v_r \frac{D}{k} d\sigma_1 - \int_{\sigma_2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial v} - v_r L \right) \frac{D}{h} d\sigma_2 + \int_{\tau} f v_r d\tau \end{aligned}$$

e quindi, definite su σ le funzioni C e t_r ponendo

$$[25] \quad C = \begin{cases} A & \text{in } \sigma_1, \\ B & \text{in } \sigma_2, \end{cases}$$

$$[26] \quad t_r = \begin{cases} \frac{\partial v_r}{\partial v} - \left(L - \frac{h}{k} \right) v_r & \text{in } \sigma_1, \\ -\frac{k}{h} \frac{\partial v_r}{\partial v} + \left(\frac{k}{h} L - 1 \right) v_r & \text{in } \sigma_2, \end{cases}$$

si ricava, indicato con γ_r , il secondo membro delle [24],

$$[27] \quad \int_{\sigma} C t_r d\sigma = \gamma_r$$

cioè si conoscono i coefficienti di FOURIER dell'incognita C rispetto al sistema $\{t_r\}$. Viceversa, sia C una soluzione del sistema [27]. Restaranno individuate, per le [25], le A, B su σ_1, σ_2 rispettivamente. Definiamo poi la B su σ_1 e la A su σ_2 mediante le [22], [23]. Eliminando dalle [24] la funzione D mediante le [22], [23] si ricava allora che le A, B ottenute soddisfano al sistema [20] e quindi alla [13]. Per il teorema I, l'integrale della [1] dato dalla [14] soddisfa allora alle [15], [16] e quindi, per le [22], [23], alla [21].

Infine, anche per il problema misto, si ha la chiusura, su σ , dalla successione $\{t_r\}$, definita dalle [26], se vale il teorema di unicità, mentre, se tale teorema non vale, le autosoluzioni sono caratterizzate dall'essere le corrispondenti C ortogonali, su σ , alla successione $\{t_r\}$.

3. - Il procedimento di integrazione ora indicato non richiede l'uso della successione $\{z_r\}$; esso però ammette che si conosca esplicitamente la soluzione fondamentale $F(T, R)$, la cui determinazione effettiva è, in generale, assai ardua. Per ovviare a tale inconveniente ho perciò indicato un secondo procedimento di integrazione della [1] [introducendo la successione $\{w_r\}$ richiesta nella proposizione c)], in virtù del quale l'uso di tale funzione è completamente eliminato, essendo sufficiente di conoscerne l'esistenza, ciò che avviene se i coefficienti a_{ih}, b_i, c soddisfano alle condizioni dianzi ricordate.

Per questo, poniamo nella [3], in luogo di w , le funzioni

$$w_r = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \quad (\alpha_i = 0, 1, \dots)$$

e, al solito, su $\sigma, u = A, \frac{\partial u}{\partial \nu} = B$.

Otteniamo in tal modo il sistema

$$[28] \quad - \int_{\tau} u E^*(w_r) d\tau = \int_{\sigma} \left\{ A \left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - L w_r \right) - w_r B \right\} d\sigma - \int_{\tau} f w_r d\tau,$$

per il quale ho dimostrato il seguente teorema.

II. - Se A, B, u è una terna di funzioni, le prime due sommabili su τ e soddisfacenti alla [13], la terza definita entro τ dalla [14], la stessa terna soddisfa al sistema [28].

Viceversa, se la terna A, B, u di funzioni, sommabili nei rispettivi insiemi di definizione, soddisfa al sistema [28], allora le funzioni A e B soddisfano alla [13] e la u , ove se ne alteri al più la definizione in un insieme di misura nulla, è data dalla [14].

In virtù di questo teorema possiamo risolvere i problemi al contorno per la [1] senza ricorrere alla soluzione fondamentale.

Consideriamo infatti dapprima il problema di DIRICHLET.

In tal caso è nota la A , sono incognite le u e B .

Ora, definito un vettore g di componenti $g' = u$ su τ , $g'' = B$ su σ e una successione di vettori $\{\varphi_r\}$, con $\varphi'_r = -E^*(w_r)$, $\varphi''_r = w_r$, segue dalla [28], per la [7], che g soddisfa al sistema di infinite equazioni di FISCHER-RIESZ

$$[29] \quad (g, \varphi_r) = \int_{\sigma} A \left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - L w_r \right) d\sigma - \int_{\tau} f w_r d\tau$$

cioè si conoscono i coefficienti di FOURIER dell'incognito vettore g rispetto alla successione $\{\varphi_r\}$. In virtù della [29] e dei teoremi I e II si determinano perciò contemporaneamente le incognite u e $B = \frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Inoltre, se vale il teorema di unicità, la successione $\{\varphi_r\}$ è chiusa; se tale teorema non vale, le autosoluzioni sono caratterizzate dall'essere i corrispondenti vettori g ortogonali alla successione $\{\varphi_r\}$. Infine se la soluzione non esiste, nemmeno il sistema [29] ammette soluzione.

Le stesse considerazioni si possono fare per il problema di NEUMANN nel quale occorre considerare la successione di vettori $\{\psi_r\}$, di componenti $\psi'_r = -E^*(w_r)$, $\psi''_r = -\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - L w_r\right)$, mentre l'incognito vettore g ha le componenti $g' = u$, $g'' = A$.

Consideriamo ora il problema misto. In tal caso, definita, su σ , una successione di funzioni $\{l_r\}$ mediante la [26] in cui si ponga w_r in luogo di v_r , si ricava per le [22], [23], [25], [28],

$$\begin{aligned} - \int_{\tau} u E^*(w_r) d\tau - \int_{\sigma} C l_r d\sigma &= - \int_{\sigma_1} w_r \frac{D}{h} d\sigma_1 + \\ &+ \int_{\sigma_2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - w_r L \right) \frac{D}{h} d\sigma_2 - \int_{\tau} f w_r d\tau \end{aligned}$$

e quindi, definita la successione $\{\chi_r\}$ di vettori di componenti $\chi'_r = -E^*(w_r)$, $\chi''_r = -L_r$, si ricava, per l'incognito vettore g , di componenti $g' = u$, $g'' = C$, il sistema di infinite equazioni di FISCHER-RIESZ

$$(g, \chi_r) = - \int_{\sigma_1} w_r \frac{D}{k} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - w_r L \right) \frac{D}{h} d\sigma_2 - \int_{\tau} f w_r d\tau$$

che risolvono il problema. Anche in questo caso infatti, per i teoremi I e II, se vale il teorema di unicità, la successione $\{\chi_r\}$ è chiusa; in caso contrario, le autosoluzioni sono caratterizzate dall'essere i corrispondenti vettori g ortogonali alla successione $\{\chi_r\}$.

Osserviamo infine che, in luogo della successione dei monomi $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$, si può assumere, sotto assai larghe condizioni, come successione $\{w_r\}$ una qualsiasi successione chiusa in un dominio τ' contenente τ nel suo intorno. Ad esempio si può porre

$$w_r = e^{2\pi i \sum \alpha_{k,r} \frac{x_k}{T_k}} \quad (\alpha_{k,r} = 0, \pm 1, \dots)$$

con T_1, \dots, T_m costanti positive tali che il dominio τ risulti interno a un iperparallelepipedo τ' avente gli spigoli paralleli agli assi e di lunghezze T_1, \dots, T_m .

In ogni caso, si ricava dal teorema II, supponendo $A \equiv B \equiv f \equiv 0$, che se risulta, per ogni r

$$\int_{\tau} u E^*(w_r) d\tau = 0,$$

la funzione u è quasi ovunque nulla in τ .

Se prendiamo perciò $z_r = w_r$, la successione $\{E^*(z_r)\}$ soddisfa alla condizione di chiusura richiesta nella proposizione b) del PICONE.



SUL PASSAGGIO DA CERTE EQUAZIONI ALGEBRICO-FUNZIONALI A QUELLE INTEGRO-FUNZIONALI ED ESTENSIONE DI ALCUNE PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL NUCLEO RISOLVENTE GENERALIZZATO (*)

GIULIO PLATONE

SUMMARY. — Auctor docet quomodo a quibusdam aequationibus algebrico-functionalibus transiri possit ad aequationes integro-functionales; determinat praeterea nonnullas praecipuas proprietates nuclei resolventis generalioris.

1. - Risolviamo anzitutto il sistema algebrico funzionale

$$[1] \quad \begin{cases} f(\lambda_1, z) - f(\lambda_2, z) \equiv (\lambda_1 - \lambda_2) f(\lambda_1 z) f(\lambda_2 z) \\ f(\lambda, 0) \equiv 0 & f(0, z) \equiv z \end{cases}$$

dove $f(\lambda, z)$ è una funzione analitica delle due variabili λ, z , regolare nell'intorno dell'origine $\lambda = z = 0$.

Intanto per le ipotesi poste la $f(\lambda, z)$ potrà ovviamente rappresentarsi con l'elemento

$$[2] \quad f(\lambda, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \lambda^i z^j = \sum_{j=1}^{\infty} A_j z^j$$

in cui si risulta:

$$a_{i,0} = 0 \quad a_{0,j} = \begin{cases} 0 & \text{per } j \neq 1 \\ 1 & \text{per } j = 1 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 5 giugno 1945.

e dove si è posto

$$[3] \quad A_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \lambda^i \quad (j = 1, 2, \dots)$$

Se ora rappresentiamo con A'_j e A''_j i valori che il secondo membro della [3] assume rispettivamente per $\lambda = \lambda_1$ e per $\lambda = \lambda_2$, ne consegue che se la [2] soddisfa la [1] dovrà necessariamente essere:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A'_j z^j - \sum_{j=1}^{\infty} A''_j z^j = (\lambda_1 - \lambda_2) \sum_{j=1}^{\infty} A'_j z^j \sum_{j=1}^{\infty} A''_j z^j$$

da cui, moltiplicando alla Cauchy (com'è lecito) e ponendo

$$P_j = A'_1 A''_{j-1} + A'_2 A''_{j-2} + \dots + A'_{j-1} A''_1$$

si ricava, per $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A'_j - A''_j}{\lambda_1 - \lambda_2} z^j = \sum_{j=1}^{\infty} P_j z^j$$

e risultando

$$\frac{A'_j - A''_j}{\lambda_1 - \lambda_2} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} (\lambda_1^{i-1} + \lambda_1^{i-2} \lambda_2 + \dots + \lambda_1 \lambda_2^{i-2} + \lambda_2^{i-1})$$

$$(j = 1, 2, \dots)$$

dovrà aversi, per il principio d'identità

$$[4] \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} (\lambda_1^{i-1} + \lambda_1^{i-2} \lambda_2 + \dots + \lambda_1 \lambda_2^{i-2} + \lambda_2^{i-1}) = A'_1 A''_{j-1} + A'_2 A''_{j-2} + \dots + A'_{j-1} A''_1$$

$$(j = 1, 2, \dots)$$

Da questa, tenendo presente che dev'essere $f(0, z) = z$, si ricava, per $j = 1$

$$a_{i,1} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq 0 \\ 1 & \text{per } i = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$A_i = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ii} \lambda^i = 1 ;$$

ed in generale

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{per } i \neq j-1 \\ 1 & \text{per } i = j-1 \end{cases}$$

e pertanto

$$A_j = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ii} \lambda^i = \lambda^{j-1} .$$

Dunque, se una funzione analitica, regolare nell'intorno del punto $\lambda = z = 0$ soddisfa la [1] è necessariamente della forma

$$[5] \quad f(\lambda, z) = z + \lambda z^2 + \lambda^2 z^3 + \dots = \frac{z}{1 - \lambda z}$$

e siccome risulta manifestamente

$$\frac{z}{1 - \lambda_1 z} - \frac{z}{1 - \lambda_2 z} = (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \frac{z}{1 - \lambda_1 z} \cdot \frac{z}{1 - \lambda_2 z}$$

ne consegue che la [5] è l'unica soluzione del sistema funzionale [1] nel campo delle funzioni analitiche di λ, z , regolari nell'intorno dell'origine $\lambda = z = 0$.

2. - Denotiamo⁽¹⁾ ora con $A(y) = A(y_1, y_2, \dots, y_r)$ una funzione sommabile nell'insieme E , limitato e misurabile secondo LEBESGUE, dello spazio $S_r^y(y_1, y_2, \dots, y_r)$.

Eseguiamo sulla [1], il che è lecito, una trasformazione di VOLTERRA estesa⁽²⁾. Sostituiamo cioè la variabile z con una funzione

(1) Per le notazioni mi attengo a quelle del Prof. PRIGONE ed a quelle da me usate nei lavori di cui alle note ⁽²⁾, ⁽³⁾.

(2) G. PLATON, *Sulle equazioni integrali a nucleo sommabile*, in corso di pubblicazione. In questa memoria estendo la teoria della composizione del VOLTERRA-PERÈS alla composizione col peso $A(y)$, di funzioni quasi continue e *pseudo-limitate*, da me introdotta.

$k(x, y) = k(x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_r)$ quasi continua⁽³⁾ e pseudo limitata⁽⁴⁾ nell'insieme $E^{(2)} \equiv E$. E dello spazio $S_{2r}^{x, y} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_r; y_1, y_2, \dots, y_r)$ e consideriamo i prodotti e le potenze della funzione come prodotti e potenze di composizione generalizzata col peso $A(y)$.

Si otterrà — per il teorema fondamentale del VOLTERRA sulla risoluzione delle equazioni integrali, nella forma da me estesa⁽⁵⁾ — che la relazione integro-funzionale

$$[1'] \quad \gamma(x, y; \lambda_1) - \gamma(x, y; \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_E A(\xi) \gamma(x, \xi; \lambda_1) \gamma(\xi, y; \lambda_2) d\xi$$

è soddisfatta, dalla serie di composizione col peso $A(y)$

$$[5'] \quad \gamma(x, y; \lambda) = k(x, y) + \lambda k^A(x, y) + \lambda^2 k^A(x, y) + \dots$$

dove $k(x, y)$ rappresenta una qualunque funzione quasi continua e pseudo limitata in $E^{(2)}$. Viceversa la [5'], che chiameremo ancora *nucleo risolvente* col peso $A(y)$ relativo alla funzione quasi continua e pseudo limitata $k(x, y)$, dà la soluzione generale (dipendente dall'arbitrarietà del nucleo $k(x, y)$) della [1'] nel senso che ogni soluzione della [1'] è un nucleo risolvente col peso $A(y)$.

Invero se $f(x, y; \lambda)$ è soluzione della [1] si ha:

$$[6] \quad f(x, y; \lambda_1) - f(x, y; \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_E A(\xi) f(x, \xi; \lambda_1) f(\xi, y; \lambda_2) d\xi$$

la quale, per $\lambda_1 = \lambda$ e $\lambda_2 = 0$, e ponendo

$$f(x, y; 0) = k(x, y),$$

ci dice che $f(x, y; \lambda)$ è soluzione dell'equazione di FREDHOLM estesa

$$[7] \quad f(x, y; \lambda) - k(x, y) = \lambda \int_E A(\xi) \gamma(x, \xi; \lambda) k(\xi, y) d\xi$$

(3) Quasi continua nel senso di TONELLI.

(4) Pseudo limitata nel senso di PICONE. (Cfr. PICONE, *Fondamenti di analisi funzionale lineare*, pag. 201).

(5) G. PLATONE, *mem. cit.* in (2), n. 12.

Ma, come ho dimostrato nella memoria di cui alle note ⁽³⁾ e ⁽⁴⁾, questa equazione ammette, nel campo delle funzioni $f(x, y; \lambda)$, quasi continue e pseudo limitate rispetto ad x, y per $|\lambda|$ sufficientemente piccolo, la *sola* soluzione

$$f(x, y; \lambda) = k(x, y) + \lambda \overset{A}{k}^2(x, y) + \lambda^2 \overset{A}{k}^3(x, y) + \dots$$

e pertanto, come avevamo anzi affermato, ogni soluzione di [1] è del tipo [5'], ossia è un nucleo risolvente col peso $A(y)$.

Del resto allo stesso risultato si può giungere anche dividendo ambo i membri della [6] per $\lambda_1 - \lambda_2$, passando al limite per $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$, e ponendo poi $\lambda_1 = \lambda$. Si ottiene così la relazione

$$\frac{df(x, y; \lambda)}{d\lambda} = \overset{A}{f}^{(2)}(x, y; \lambda)$$

anch'essa caratteristica per i nuclei risolvanti generalizzati col peso $A(y)$, dalla quale se ne ricava, successivamente

$$\frac{d(\overset{A}{f})^n}{d\lambda^n} = n! \overset{A}{f}^{n+1},$$

che ci ridà, per la soluzione $f(x, y; \lambda)$, lo sviluppo [5']. Pertanto la relazione integro funzionale [1'] è caratteristica per i nuclei risolvanti col peso $A(y)$.

Osservazione: Rilevo, per inciso, che per $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda$ la [6] ci dà ancora

$$k(x, y) - f(x, y; \lambda) = -\lambda \int_{\mathbb{E}} A(\xi) k(x, \xi) \gamma(\xi, y; \lambda) d\xi$$

e quindi, confrontando con la [7]

$$(k \times \gamma)_A = (\gamma \times k)_A;$$

ossia il nucleo risolvente, rispetto alla funzione peso $A(y)$, relativo alla funzione quasi continua e pseudo limitata $k(x, y)$ è *permutabile*⁽⁷⁾, con questa, rispetto alla funzione peso $A(y)$. (*Principio di Reciprocità*).

⁽⁶⁾ G. PLATONE, *Teorema d'unicità per le equazioni integrali a nucleo sommabile d'ordine $m \leq +\infty$* , in corso di stampa.

⁽⁷⁾ Cfr. C. PLATONE, *mem. cit.* in (2), n. 11.

FORMULE INTEGRALI E TOPOLOGIA NELLA TEORIA DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI COMPLESSE (*)

ENZO MARTINELLI

SYMMARIUM. — Adhibitis argumentationibus ex analysi situs desumptis, Auctor determinat, quod attinet ad functiones variabilium complexorum n , generales formulas integrales (quarum peculiares casus sunt theoremata Cauchiana), in quibus integrationis varietates qualibet sunt mensura, inter n et $2n - 1$ posita.

In una memoria di prossima pubblicazione mi propongo di esporre con i necessari dettagli i risultati più generali che ho recentemente conseguito in un ordine d'idee già da me iniziato in una nota del 1937 [6], sviluppato in lavori successivi di B. SEGRE [15] e miei [7], [8], [9], [10], [11], e altresì collegato con ricerche di W. WIRTINGER [18]. Questo scritto non è che una nota preventiva di tale memoria (1).

I TEOREMI DI CAUCHY ELEMENTARI

1. — Ricordiamo le due classiche formule che esprimono il 1° ed il 2° teorema integrale di CAUCHY per una funzione analitica $f(z)$ della variabile complessa $z = x + iy$:

$$[1] \quad \int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0 ,$$

$$[2] \quad (2\pi i) f(\zeta) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz .$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 27 gennaio 1946.

(1) Che apparirà prossimamente negli « Annali di Matematica ».

Si sa bene che le condizioni cui devono soddisfare il cammino d'integrazione Γ_1 ed il punto $O(\zeta)$ per la validità delle [1], [2], hanno carattere topologico, se pure trattasi di condizioni così elementari che non occorrono nozioni e linguaggio topologici evoluti per enunciarle. Se per esempio si suppone semplicemente connessa la regione di olomorfia R_2 di $f(z)$ nel piano d'ARGAND-GAUSS (x, y) , deve essere Γ_1 un cammino chiuso qualunque appartenente ad R_2 , ed O un punto di R_2 interno a Γ_1 .

Vedremo che, quando si cerca di estendere le [1], [2] alle funzioni di più variabili, a causa della maggior complessità e della mancanza di un'intuizione iperspaziale diretta, il lato topologico assume una posizione preminente.

Restiamo ancora per un momento nell'ambito delle funzioni di una sola variabile e lasciamo cadere l'ipotesi limitativa concernente R_2 . È cosa elementare come vadano modificate le condizioni per la validità delle [1], [2]; enunciamo però le nuove condizioni facendo uso del linguaggio topologico. Γ_1 indichi ora un 1-ciclo orientato qualunque (eventualmente riducibile, cioè composto di più parti ciascuna delle quali è già un ciclo). Per la [1] basta sapere che Γ_1 è omologo a zero ($\Gamma_1 \sim 0$) in R_2 . Le condizioni per la validità della [2] sono invece:

$$[I_1] \quad \Gamma_1 \subset R_2 - O, \quad (\subset \text{ vale notoriamente contenuto})$$

$$[II_1] \quad \Gamma_1 \sim 0 \text{ in } R_2,$$

$$[III_1] \quad \text{All}(\Gamma_1, O) = 1,$$

dove con $\text{All}(\Gamma_1, O)$ s'indica il *coefficiente d'allacciamento*⁽¹⁾ di Γ_1 col punto O , cioè l'*indice di KRONECKER* $[K_1, \Gamma]$, o numero algebrico di

⁽¹⁾ Cfr. LEFSCHETZ [4], Cap. IV, § 5, e ALEXANDROFF-HOPF [1], Cap. XI. Le definizioni dei coefficienti dall'allacciamento che appaiono nei due trattati citati differiscono per il segno. Qui adottiamo quella del secondo trattato. Se Δ_p, Γ_q sono due cicli di dimensioni duali dello spazio lineare S_r ($p+q=r-1$) ed M_{p+1} è una varietà contornata da Δ_p ($M_{p+1} \rightarrow \Delta_p$), poniamo cioè $\text{All}(\Delta_p, \Gamma_q) = [M_{p+1}, \Gamma_q]$, simboleggiando colla parentesi quadra l'indice di KRONECKER. Risulta allora $\text{All}(\Gamma_q, \Delta_p) = (-1)^{pq+1} \text{All}(\Delta_p, \Gamma_q)$. In particolare quando Δ_p si riduce ad un punto O ($p=0$), essendo K_1 una semiretta orientata uscente da O , si ha $K_1 \rightarrow -O$, onde segue: $\text{All}(\Gamma, O) = -\text{All}(O, \Gamma) = [K_1, \Gamma]$.

intersezioni, di una semiretta K_1 di origine O col ciclo Γ_1 . Se, invece della $[III_1]$, è soddisfatta la

$$[III_1] \quad \text{All}(\Gamma_1, O) = N,$$

in luogo della [2] vale la formula più generale

$$[4] \quad (2\pi i) N f(\zeta) = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz \quad (1).$$

ESTENSIONI DEL PRIMO TEOREMA DI CAUCHY

2. - Dopo queste premesse elementari, illustriamo rapidamente le note estensioni della [1] alle funzioni di n variabili $f(z_1, \dots, z_n)$. Accenniamo a queste perchè risulti più chiaro lo spirito delle estensioni delle formule [2] o [4], delle quali ultime estensioni vogliamo propriamente occuparci in questo lavoro.

Le variabili complesse z_1, \dots, z_n possono rappresentarsi sia sopra n piani d'ARGAND-GAUSS $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, sia sopra uno spazio euclideo reale a $2n$ dimensioni $S_{2n}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$. Se si fa uso della prima rappresentazione, apparentemente più comoda, si è tentati di ritenere come estensione soddisfacente della [1] la formula

$$[5] \quad \int_{\Gamma_1^{(1)}} \int_{\Gamma_1^{(2)}} \dots \int_{\Gamma_1^{(n)}} f(z_1, \dots, z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n = 0,$$

dove $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_1^{(2)}, \dots, \Gamma_1^{(n)}$ sono n 1-cicli degli n piani d'ARGAND-GAUSS sottoposti a condizioni analoghe a quelle occorrenti per la validità della [1]. Quando si faccia uso invece della rappresentazione in S_{2n} , l'integrale [5] s'interpreta come un integrale n -plo sopra un n -ciclo Γ'_n di S_{2n} , prodotto topologico di $\Gamma_1^{(1)}, \Gamma_1^{(2)}, \dots, \Gamma_1^{(n)}$. E appare così che l' n -ciclo Γ'_n ha caratteri topologici e di posizione in S_{2n} molto particolari.

(1) La formula vale anche per $N=0$; ma se si vuole una formula adatta ad esprimere il valore della f nel punto O , occorre supporre $N \neq 0$. Analoghe avvertenze devono aversi nel seguito.

POINCARÉ [14] ha mostrato come la [5] rientri nella formula ben più generale:

$$[6] \quad \int_{\Gamma_n} f(z_1, \dots, z_n) d(z_1, \dots, z_n) = 0, \quad (1)$$

dove Γ_n è un qualunque n -ciclo orientato di S_{2n} , omologo a zero eventualmente con divisione $(\Gamma_n \not\equiv 0)$ nella regione di olomorfia R_{2n} della $f(z_1, \dots, z_n)$.

Ma la [6] non dà ancora la più ampia estensione nota della [1]. Infatti la [6] esprime soltanto il primo teorema di una serie di n teoremi integrali distinti nei quali le varietà d'integrazione sono cicli di dimensioni rispettive $n, n+1, \dots, 2n-1$. Gli n teoremi sono compendati dalla formula:

$$[7] \quad \int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \dots, z_n) \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_l} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}) = 0$$

$$(l=0, 1, \dots, n-1),$$

dove Γ_{n+l} sono cicli $(n+l)$ -dimensionali omologhi a zero in R_{2n} , \bar{z}_α è il complesso coniugato di z_α , $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ è una combinazione ordinata di classe l degli interi $1, \dots, n$, e $\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ sono parametri complessi arbitrari⁽²⁾. Ciascuno dei precedenti teoremi, è altresì sufficiente a caratterizzare tra le funzioni *continue* $f(z_1, \dots, z_n)$, quelle che sono analitiche (estensione dei teoremi di MORERA [12] e di SEVERI [16]).

ESTENSIONI DEL SECONDO TEOREMA DI CAUCHY

3. - Veniamo finalmente alle estensioni della formula [2]. Dopo ciò che abbiamo detto nei confronti della [1], è ovvio che le più elementari estensioni della [2] cui si giunge immediatamente ponendosi dal punto di vista della rappresentazione delle variabili z_1, \dots, z_n sopra n piani, non possono venir considerate che molto particolari alla stessa stregua della [5]. Un risultato più generale, con un grado di generalità pari a quello della [6], è stato dato da me [6] per $n=2$ e per n

(1) Con $d(z_1, \dots, z_n)$ indichiamo il differenziale n -plo $dz_1 \dots dz_n$, e analogamente nel seguito, usando i simboli della teoria delle forme differenziali a moltiplicazione esterna di CARTAN (cfr. CARTAN [2], KÄHLER [3]).

(2) Per $l=n-1$ cfr. W. WIRTINGER [18]; per l qualunque e per i teoremi inversi cfr. il mio lavoro [7].

qualunque da B. SEGRE [15], il quale ha meglio precisato le condizioni topologiche occorrenti per la validità della formula, togliendo anche le ipotesi semplificative che io avevo introdotto. La formula è la seguente:

$$[8] \quad (2\pi i)^n N f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_n} \frac{f(z_1, \dots, z_n)}{(z_1 - \zeta_1) \dots (z_n - \zeta_n)} d(z_1, \dots, z_n) .$$

Per indicare le condizioni cui deve soddisfare l' n -ciclo d'integrazione Γ_n e per spiegare il significato dell'intero N , è necessaria qualche premessa topologica.

Consideriamo gli n spazi lineari *caratteristici* ⁽¹⁾ $(2n-2)$ -dimensionali, di equazioni rispettive:

$$z_1 = \zeta_1 ; \quad z_2 = \zeta_2 ; \quad \dots ; \quad z_n = \zeta_n .$$

Questi n spazi passano per il punto $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, che si suppone interno alla regione R_{2n} di olomorfia della $f(z_1, \dots, z_n)$, e costituiscono nel loro insieme una varietà $(2n-2)$ -dimensionale T_{2n-2} , sulla quale diviene singolare la funzione integranda che appare nella [8]. Onde una prima condizione cui deve soddisfare Γ_n , è di appartenere ad R_{2n} senza incontrare T_{2n-2} . Per un ciclo Γ_n siffatto, si può introdurre un carattere topologico intero N , che definisce la posizione di Γ_n rispetto a T_{2n-2} , o meglio la condizione d'allacciamento del ciclo con T_{2n-2} . Si consideri all'uopo l' n -edro *solido* rettangolo K_n , n -dimensionale, individuato ed orientato da n semirette t_1, \dots, t_n uscenti da O e parallele ordinatamente ai piani caratteristici $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_n y_n$ di S_{2n} (p.es. parallele od equiverse agli n semiassi positivi x_1, x_2, \dots, x_n). Il contorno orientato H_{n-1} di K_n appartiene a T_{2n-2} ed è, entro la varietà aperta T_{2n-2} , un $(n-1)$ -ciclo relativo, che si prova costituire di per sè solo una base per il gruppo di BETTI $(n-1)$ -dimensionale. Pertanto la condizione d'allacciamento di Γ_n con T_{2n-2} è definita dal coefficiente d'allacciamento di Γ_n coll'unico ciclo indipendente H_{n-1} di dimensione duale, appartenente a T_{2n-2} . Si pone così:

$$[III_{n,0}] \quad N = \text{All}(H_{n-1}, \Gamma_n) = [K_n, \Gamma_n] ,$$

⁽¹⁾ Seguendo LÉVY-CIVITA [5] e SEVERI [17], chiamiamo varietà caratteristiche $2k$ -dimensionali di S_{2n} quelle che rappresentano varietà analitiche a k dimensioni complesse dello spazio complesso (z_1, \dots, z_n) .

dove con la parentesi quadra si simboleggia anche qui l'indice di KRONECKER (o numero algebrico di intersezioni) ⁽¹⁾.

Ciò posto, le condizioni per la validità della [8] sono, oltre la $[\text{III}_{n,0}]$, le:

$$[\text{I}_{n,0}] \quad \Gamma_n \subset R_{2n} - T_{2n-2},$$

$$[\text{II}_{n,0}] \quad \Gamma_n \not\subset 0 \quad \text{in} \quad (R_{2n} - T_{2n-2}) + 0.$$

Per $n=1$, T_{2n-2} e H_{n-1} si riducono ambedue al solo punto O , e K_n ad una semiretta uscente da O sul piano d'ARGAND-GAUSS (x, y) ; pertanto la [8] si riduce alla [4] e le condizioni $[\text{I}_{n,0}]$, $[\text{II}_{n,0}]$, $[\text{III}_{n,0}]$ alle $[\text{I}_1]$, $[\text{II}_1]$, $[\text{III}_1]$.

4. - La formula [8] può considerarsi - come si è detto - parallela all'estensione del 1° teorema di CAUCHY espressa dalla [6], in quanto in ambedue le formule appare un'integrazione sopra una varietà n -dimensionale vincolata da sole condizioni topologiche.

Un'altra formula, sempre estensione della [4], che è invece parallela alla [7] per $l=n-1$, è la seguente, che ho dato in [7]:

$$[10] \quad \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} N f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_{2n-1}} \frac{f(z_1, \dots, z_n) \sum_{\beta} (-1)^{\beta-1} (\bar{z}_{\beta} - \bar{\zeta}_{\beta}) d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{\beta-1}, \bar{z}_{\beta+1}, \dots, \bar{z}_n)}{\left(\sum_{k=1}^n |z_k - \zeta_k|^2 \right)^n} \quad (2).$$

(1) Gli indici d'allacciamento e di KRONECKER s'intendono calcolati rispetto all'orientazione di S_{2n} definita dai semiasii positivi ordinati $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$.

(2) Nei lavori [8, 9] ho dato alla formula [10] il seguente aspetto più espressivo:

$$[10^*] \quad \frac{4\pi^n}{(n-2)!} N f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1, \dots, z_n) \left(\frac{\partial}{\partial n} + i \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{1}{r^{2n-2}} d\Gamma_{2n-1},$$

dove: r rappresenta la distanza del punto (z_1, \dots, z_n) variabile su Γ_{2n-1} dal punto $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$; $d\Gamma_{2n-1}$ è l'elemento di volume di Γ_{2n-1} ; $\frac{\partial}{\partial n}$ indica derivazione rispetto alla normale interna n a Γ_{2n-1} in (z_1, \dots, z_n) ; $\frac{\partial}{\partial s}$ indica derivazione rispetto alla direzione s , convenientemente orientata, che è tangente a Γ_{2n-1} ed appar-

Le condizioni cui deve soddisfare il ciclo $(2n-1)$ -dimensionale Γ_{2n-1} per validità della [10] sono:

$$\begin{aligned} [I_{n,n-1}] & \quad \Gamma_{2n-1} \subset R_{2n} - O, \\ [II_{n,n-1}] & \quad \Gamma_{2n-1} \sim 0 \text{ in } R_{2n}, \\ [III_{n,n-1}] & \quad N = \text{All}(\Gamma_{2n-1}, O) = [K_1, \Gamma_{2n-1}], \end{aligned}$$

indicando con K_1 una semiretta orientata uscente da O .

Si verifica subito che per $n=1$, anche la [10], come già la [8], si riduce alla [4], e le $[I_{n,n-1}]$, $[II_{n,n-1}]$, $[III_{n,n-1}]$, alle $[I_1]$, $[II_1]$, $[III_1]$.

5. - Passiamo finalmente alla formula generale, che comprende tutte le precedenti [2], [4], [8], [10]. In tale formula appare un'integrazione sopra un ciclo Γ_{n+l} di dimensione $n+l$ per $l=0, 1, 2, \dots, n-1$, onde essa risulta parallela alla formula [7]. Le [8], [10] corrispondono rispettivamente ai valori estremi di $l: 0$ ed $n-1$. Il caso $l=1$ l'ho già trattato in [11], e su di esso non mi fermo, rivolgendomi senz'altro al caso generale.

Premettiamo qualche considerazione topologica. Abbiamo visto che nelle [8], [10] le forme differenziali integrande presentano singolarità sopra varietà, T_{2n-2} ed O , rispettivamente di dimensione $2n-2$ e 0 . Nella formula generale, la corrispondente varietà singolare, che indichiamo con $T_{2n-2l-2}$, ha dimensione $2n-2l-2$. $T_{2n-2l-2}$ è costituita dagli $\binom{n}{l+1}$ spazi lineari caratteristici $(2n-2l-2)$ -dimensionali passanti per il punto $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, di equazioni

$$[12] \quad z_{\alpha_1} = \zeta_{\alpha_1}, \quad z_{\alpha_2} = \zeta_{\alpha_2}, \quad \dots, \quad z_{\alpha_{l+1}} = \zeta_{\alpha_{l+1}},$$

che si ottengono in corrispondenza alle combinazioni $\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}$ degli interi $1, \dots, n$.

tiene con n allo stesso piano caratteristico di S_{2n} . Si dimostra che le direzioni s individuano su Γ_{2n-1} un sistema ∞^{2n-2} di linee chiuse $\{s\}$. È quasi superfluo osservare che, per $n=1$, la [10*] ha la sua analoga nella nota forma che può darsi alla formula di CAUCHY elementare (cfr. p.es. PICARD [13], pag. 113):

$$-2\pi f(\zeta) = \int_s f(z) \left(\frac{\partial}{\partial n} + i \frac{\partial}{\partial s} \right) \log r ds.$$

Si riconosce che può costruirsi nel modo seguente una base per il gruppo di BETTI $(n-l-1)$ -dimensionale entro $T_{2n-2l-2}$. Riprendiamo in considerazione l' n -edro solido rettangolo K_n individuato dalle n semirette t_1, \dots, t_n di origine O , di cui già nel n. 3. Per rendere più immediati il linguaggio e l'immagine, pensiamo K_n come proiezione da O di un $(n-1)$ -simpleso k_{n-1} . Sopra k_{n-1} si considerino le $\binom{n}{l}$ faccie $(n-l-1)$ -dimensionali, che sono anch'esse semplici. Indichiamo con $k_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ la faccia i cui vertici sono proiettati da O colle semirette $t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_{n-l}}$. Sia $k_{n-l-2}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ lo $(n-l-2)$ -ciclo contorno di $k_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$. Per proiezione da O si ottiene lo $(n-l-1)$ -ciclo relativo $H_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, contorno dell' $(n-l)$ -edro $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ proiezione di $k_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$. Risulta $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ prodotto topologico di $t_{\beta_1}, \dots, t_{\beta_{n-l}}$: lo supponiamo orientato in conseguenza delle orientazioni delle semirette. Per il contorno $H_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ fissiamo l'orientazione che è in relazione positiva con quella determinata su $K_{n-l}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$. Ebbene gli $\binom{n}{l}$ cicli $H_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ appartengono a $T_{2n-2l-2}$, e costituiscono entro tal varietà la base per il gruppo di BETTI $(n-l-1)$ -dimensionale. Non si tratta di una base minima, giacchè tra i cicli passano le relazioni

$$[13] \quad \sum_j^{n-l+1} (-1)^{j-1} H_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \dots \beta_{n-l+1}} = 0 ,$$

per ogni combinazione $\beta_1, \dots, \beta_{n-l+1}$ degli interi $1, \dots, n$. Se ne deduce che il numero di BETTI $(n-l-1)$ -dimensionale vale $\binom{n-1}{l}$, ed una base minima è costituita dai cicli

$$[14] \quad H_{n-l-1}^{\gamma \beta_1 \dots \beta_{n-l-1}} ,$$

che si ottengono, per un γ arbitrariamente scelto tra $1, \dots, n$ e fissato, al variare della combinazione $\beta_1, \dots, \beta_{n-l-1}$ degli interi $1, \dots, \gamma-1, \gamma+1, \dots, n$.

Se ora Γ_{n+l} è un $(n+l)$ -ciclo di R_{2n} , non incontrante la varietà singolare $T_{2n-2l-2}$, la sua condizione d'allacciamento con $T_{2n-2l-2}$ risulta definita dai coefficienti d'allacciamento con i cicli $H_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, che hanno dimensione duale in S_{2n} . Porremo:

$$[15] \quad N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}} = \text{All} (H_{n-l-1}^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}, \Gamma_{n+l}) .$$

Gli (i^n) interi $N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$ risultano emisimmetrici rispetto agli indici; non sono fra loro indipendenti in quanto tra essi passano le relazioni seguenti che si deducono dalle [13]:

$$[16] \quad \sum_1^{n-l+1} (-1)^{j-1} N^{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \beta_{j+1} \dots \beta_{n-l+1}} = 0.$$

Si osservi inoltre che le [16] permettono di calcolare tutti gli $N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}$, una volta noti i coefficienti d'allacciamento $N^{\gamma \beta_1 \dots \beta_{n-l-1}}$ corrispondenti ai cicli di una base minima [14].

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l}$ è una permutazione degli interi $1, \dots, n$, e $\text{cls}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l})$ indica la sua classe, porremo anche:

$$[17] \quad \begin{aligned} H_{\alpha_1 \dots \alpha_l} &= (-1)^{\text{cls}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l})} H^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}, \\ N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} &= (-1)^{\text{cls}(\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_{n-l})} N^{\beta_1 \dots \beta_{n-l}}. \end{aligned}$$

Gli interi $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ risultano anch'essi emisimmetrici rispetto agli indici, ed è ovviamente:

$$[\text{III}_{n,l}] \quad N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \text{All}(H_{\alpha_1, \dots, \alpha_l}, \Gamma_{n+l}).$$

6. - Siamo ormai in grado di scrivere la formula generale. Conveniamo d'indicare tra parentesi quadra alcuni valori, come per es. $[k_1, \dots, k_l]$, per intendere ch'essi vanno esclusi nella variabilità di un indice nella successione degli interi $1, \dots, n$. Così i simboli \sum_i , \prod_i e simili $^{[k_1, \dots, k_l]}$, $_{[k_1, \dots, k_l]}$ e simili rappresenteranno somme e prodotti dove l'indice i percorra gli interi $1, \dots, [k_1, \dots, k_l] \dots, n$. Con $\sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l}$ s'intenderà che la somma è estesa a tutte le combinazioni ordinate degli indici $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ scelti tra $1, \dots, n$. Con $\sum_{\sum \varepsilon_r = l}$ s'intenderà infine che la somma è estesa in corrispondenza a tutti i gruppi di valori positivi o nulli degli interi ε_r soddisfacenti alla condizione $\sum \varepsilon_r = l$. Poniamo inoltre:

$$s_k = (z_k - \bar{z}_k)(\bar{z}_k - \bar{z}_k) = |z_k - \bar{z}_k|^2;$$

$$\sigma_{k_1 \dots k_l} = s_{k_1} + \dots + s_{k_l};$$

$$\pi_{k_1 \dots k_l} = \prod_i^{[k_1, \dots, k_l]} \frac{1}{\sigma_{k_1 \dots k_l} + s_i};$$

$$\omega_{k_1 \dots k_l}^{e_1 \dots [k_1, \dots, k_l] \dots e_n} = \prod_i^{[k_1, \dots, k_l]} \frac{1}{(\sigma_{k_1 \dots k_l} + s_i)^{e_i}} \quad (e_i \geq 0 \text{ interi});$$

$\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ parametri complessi *arbitrari* emisimmetrici rispetto agli indici.

La formula è la seguente:

$$[18] \quad \frac{(2\pi i)^n}{l!} (-1)^l \left(\sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \right) f(\zeta_1, \dots, \zeta_l) =$$

$$\int_{\Gamma_{n+l}} f(z_1, \dots, z_n) \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l} (\bar{z}_1 - \bar{\zeta}_1) \dots (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \dots (\bar{z}_n - \bar{\zeta}_n) \left\{ \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \pi_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \sum_{\Sigma e_r = l} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_l}^{e_1 \dots [\alpha_1, \dots, \alpha_l] \dots e_n} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \sum_{k \in [\alpha_1, \dots, \alpha_l]} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} k \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \pi_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} k \alpha_{j+1} \dots \alpha_l} \sum_{\Sigma e_r = l} \varepsilon_{\alpha_j} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} k \alpha_{j+1} \dots \alpha_l}^{e_1 \dots [\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, k, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_l] \dots e_n} \right\} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n);$$

e le condizioni per la sua validità sono, oltre la [III_{n,l}] le:

$$[I_{n,l}] \quad \Gamma_{n+l} \subset R_{2n} - T_{2n-2l-2};$$

$$[II_{n,l}] \quad \Gamma_{n+l} \not\subset 0 \text{ in } (R_{2n} - T_{2n-2l-2}) + 0.$$

In analogia con quanto si è avvertito al n. 1 per la formula elementare [4], se si desidera poter dedurre dalla [18] il valore di $f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$, occorre supporre:

$$\sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \neq 0.$$

È sempre possibile soddisfare questa disuguaglianza mediante conveniente scelta dei parametri arbitrari $\lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$, ad eccezione del caso in cui siano tutti nulli gl'indici $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ (il che accade soltanto quando sia $\Gamma_{n+l} \not\subset 0$ in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$).

Può riuscire talora utile di scrivere la [18] nella seguente forma complementare:

$$[19] \quad \frac{(2\pi i)^n}{(n-m)!} (-1)^{nm+n+m+\frac{m(m-1)}{2}} \left(\sum_{\beta_1 < \dots < \beta_m} N_{\beta_1 \dots \beta_m} \mu_{\beta_1 \dots \beta_m} \right) f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) =$$

$$\int_{\Gamma_{2n-m}} f(z_1, \dots, z_n) \sum_{\beta_1 < \dots < \beta_m} (-1)^{\Sigma r \beta_r} (\bar{z}_{\beta_1} - \bar{\zeta}_{\beta_1}) \dots (\bar{z}_{\beta_m} - \bar{\zeta}_{\beta_m}) \left\{ \mu_{\beta_1 \dots \beta_m} \pi_{\beta_1 \dots \beta_m} \sum_{\Sigma e_r = n-m} \omega_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\beta_1 \dots \beta_m} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{n-m} \sum_{h=1}^m \sum_{i \in [\beta_1, \dots, \beta_m]} \mu_{\beta_1 \dots \beta_{h-1} i \beta_{h+1} \dots \beta_m} \pi_{\beta_1 \dots \beta_{h-1} i \beta_{h+1} \dots \beta_m} \sum_{\Sigma e_r = n-m} \varepsilon_i \omega_{\beta_1 \dots \beta_{h-1} i \beta_{h+1} \dots \beta_m}^{e_1 \dots \beta_{h-1} i \beta_{h+1} \dots \beta_m} \right\} \cdot$$

$$\cdot d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, [\beta_1, \dots, \beta_m] \dots, \bar{z}_n),$$

dove si è posto:

$$\sigma = s_1 + \dots + s_n,$$

$$m = n - l;$$

$$\pi^{\beta_1 \dots \beta_m} = \prod_{j=1}^m \frac{1}{\sigma - s_{\beta_1} - \dots - [j] \dots - s_{\beta_m}};$$

$$\omega_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\beta_1 \dots \beta_m} = \prod_{j=1}^m \frac{1}{(\sigma - s_{\beta_1} - \dots - [j] \dots - s_{\beta_m})^{\varepsilon_{\beta_j}}};$$

$\mu^{\beta_1 \dots \beta_m}$ parametri complessi *arbitrari*, emisimmetrici rispetto agli indici.

7. - Si verifica facilmente che la [18] e la [19] si riducono alla [10], se si fa $l=n-1$ ovvero $m=1$ rispettivamente. La verifica è più comoda sulla [19]. Si osservi invero che in tal caso risulta:

$$\pi^\beta = \frac{1}{\sigma}, \quad \omega_\varepsilon^\beta = \frac{1}{\sigma^\varepsilon}$$

e che

$$N^1 = N^2 = \dots = N^n,$$

ciò che discende dalle [16]. Si riconosce inoltre che il valore comune dei coefficienti N^i uguaglia il coefficiente N definito dalla [III_{n, n-1}]. Pertanto la [19] diviene:

$$\frac{-(2\pi i)^n}{(n-1)!} (\sum_\beta \mu^\beta) f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \int_{\Gamma_{2n-1}} f(z_1, \dots, z_n) \sum_\beta (-1)^\beta (\bar{z}_\beta - \bar{\zeta}_\beta) \frac{1}{\sigma^n} \left\{ \mu^\beta + \frac{1}{n-1} \sum_{[\beta]} (n-1) \mu^i \right\} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n),$$

che, soppresso il fattore inessenziale $-\sum_\beta \mu^\beta$, coincide colla [10].

Colla stessa facilità si verifica che la [18] si riduce per $l=1$ alla formula già data in [II] ⁽¹⁾.

Qualche avvertenza occorre se si vuole ottenere la [8] come caso particolare delle [18] o [19], facendo in esse $l=0$ o $m=n$ rispettivamente. Invero, per tali valori di l e di m , una parte delle espres-

⁽¹⁾ Si tenga conto però che la definizione adottata nel lavoro cit. per i coefficienti d'allacciamento differisce per il segno da quella qui adottata.

sioni che appaiono nelle [18] o [19] perde significato. D'altronde se si trascura questa parte, si vede immediatamente che si ricade effettivamente nella [8].

8. - Accenniamo infine alle linee generali del procedimento col quale abbiamo stabilito la formula [18].

Il *teorema di dualità* di ALEXANDER assicura l'esistenza di due basi duali per i gruppi di BETTI $(n-l-1)$ -dimensionale e $(n+l)$ -dimensionale, entro $T_{2n-2l-2}$ ed entro $S_{2n}-T_{2n-2l-2}$ rispettivamente. Si costruisce nel modo seguente una base $(n+l)$ -dimensionale, duale di quella $(n-l-1)$ -dimensionale costituita dai cicli [14].

Si considerino la varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ di S_{2n} di dimensione $n+l$, definite dalle equazioni

$$[20] \quad \begin{aligned} |z_1 - \zeta_1| &= |z_2 - \zeta_2| = \dots [\alpha_1, \dots, \alpha_l] \dots = |z_n - \zeta_n| = r, \\ |z_{\alpha_1} - \zeta_{\alpha_1}| &\leq r, \dots, |z_{\alpha_l} - \zeta_{\alpha_l}| \leq r, \end{aligned}$$

per ogni combinazione $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ degli interi $1, \dots, n$. Supponiamo $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ orientata mediante l' $(n+l)$ -edro di direzioni uscenti dal punto $x_1 = \dots = x_n = r$, $y_1 = \dots = y_n = 0$, ordinatamente parallele agli assi positivi $y_1, \dots, y_n, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_l}$ ed orientate come questi. Le varietà

$$[21] \quad \Gamma_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \sum_{i=1}^{l+1} (-1)^{i-1} A_{n+l}^{\alpha_1 \dots [\alpha_i] \dots \alpha_{l+1}}$$

risultano allora $(n+l)$ -cicli, dei quali i seguenti $\binom{n-1}{l}$

$$[22] \quad \Gamma_{n+l}^{k \alpha_1 \dots \alpha_l}$$

per k arbitrariamente fissato ed $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ una qualunque combinazione degli interi $1, \dots, [k] \dots, n$, costituiscono una base $(n+l)$ -dimensionale cercata. I mutui coefficienti d'allacciamento delle due basi duali [14], [22] risultano:

$$[23] \quad \text{All} (H_{\gamma_1 \dots \gamma_l}, \Gamma_{n+l}^{k \alpha_1 \dots \alpha_l}) = \begin{cases} 0 & \text{per } (\alpha_1, \dots, \alpha_l) \neq (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \\ (-1)^l & \text{per } (\alpha_1, \dots, \alpha_l) = (\gamma_1, \dots, \gamma_l) \end{cases}$$

$$(\alpha_1 < \dots < \alpha_l, \gamma_1 < \dots < \gamma_l).$$

Ora, in virtù della condizione $[\Pi_{n,l}]$, in un intorno arbitrario di $O(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ può trovarsi un $(n+l)$ -ciclo Δ_{n+l} omologo in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$ ad un conveniente multiplo $p\Gamma_{n+l}$ del ciclo d'integrazione Γ_{n+l} (p intero non nullo). D'altra parte, assumendo abbastanza piccolo il numero reale r che appare nelle equazioni [20] delle varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$, si può fare in modo che i cicli base $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \dots \alpha_l}$ appartengano al predetto intorno di O ; onde risulta:

$$[24] \quad p\Gamma_{n+l} \sim \Delta_{n+l} \sim \sum_{[k]} c_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \dots \alpha_l} \text{ in } R_{2n} - T_{2n-2l-2},$$

dove $c_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$ sono convenienti interi.

Valutando gl'indici d'allacciamento delle varietà a primo e a terzo membro della [24] con i cicli $H_{\gamma_1 \dots \gamma_l}$, e tenendo conto delle [15], [17], [23], si ottiene $c_{\alpha_1 \dots \alpha_l} = (-1)^l p N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$. Pertanto la [24] può scriversi:

$$[25] \quad p\Gamma_{n+l} \sim (-1)^l p \sum_{[k]} N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \dots \alpha_l} \text{ in } R_{2n} - T_{2n-2l-2}.$$

Cio premesso, si dimostra che la forma differenziale integranda a secondo membro nella [18], che indicheremo succintamente con

$$\varphi = \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_l} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}),$$

risulta regolare ed *integrabile* in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$. Questo significa che il differenziale esterno di CARTAN $d\varphi$ è identicamente nullo in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$. In queste condizioni si può, per il calcolo dell'integrale, sostituire a Γ_{n+l} un ciclo omologo in $R_{2n} - T_{2n-2l-2}$, senza alterare il risultato. Pertanto, tenuto conto della [25], il secondo membro della [10] vale:

$$[26] \quad (-1)^l \sum_{[k]} N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \int_{\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \dots \alpha_l}} \varphi.$$

Ricordando la definizione [21] dei cicli $\Gamma_{n+l}^{k\alpha_1 \dots \alpha_l}$ e le relazioni [16] intercedenti fra gl'indici $N_{\alpha_1 \dots \alpha_l}$, la [26] si trasforma facilmente nella

$$(-1)^l \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \int_{\Delta^{\alpha_1 \dots \alpha_l}} \varphi;$$

ed infine, tenuto conto delle equazioni [20] delle varietà $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$, nella:

$$[27] \quad (-1)^l \sum_{\alpha_1 < \dots < \alpha_l} N_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \int_{A^{\alpha_1 \dots \alpha_l}} \varphi_{\alpha_1 \dots \alpha_l} d(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_{\alpha_1}, \dots, \bar{z}_{\alpha_l}).$$

Restano da calcolare gli integrali indicati sopra $A_{n+l}^{\alpha_1 \dots \alpha_l}$. Si riesce nello scopo facendo tendere r a zero, ciò che non altera il risultato globale data l'arbitrarietà di r . Si stabilisce per tal via che la [27] si riduce al primo membro della formula [18], la quale risulta così dimostrata.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. ALEXANDROFF-H. HOPF, *Topologie*. I (Springer, Berlin, 1935).
- [2] E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*. (Hermann, Paris, 1922).
- [3] E. KÄHLER, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*. (Teubner, Leipzig, 1934).
- [4] S. LEFSCHETZ, *Topology*. (A. M. S., New York, 1930).
- [5] T. LEVI-CIVITA, *Sulle funzioni di due o più variabili complesse*. « Rendiconti R. Acc. Lincei », 24 (1905).
- [6] E. MARTINELLI, *La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse*. « Rendiconti R. Acc. Lincei », 25 (1937).
- [7] — *Alcuni teoremi integrali per le funzioni analitiche di più variabili complesse*. « Memorie R. Acc. d'Italia », 9 (1938).
- [8] — *Intorno alla teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse*. « Atti II Congresso U. M. I. » (Bologna, 1940).
- [9] — *Studio di alcune questioni della teoria delle funzioni biarmoniche e delle funzioni analitiche di due variabili complesse mediante l'ausilio del calcolo differenziale assoluto*. « Memorie R. Acc. d'Italia », 12 (1941).
- [10] — *Sulla formula di Cauchy n -dimensionale e sopra un teorema di Hartogs nella teoria delle funzioni di n variabili complesse*. « Comm. Math. Helvetici », 17 (1944-45).
- [11] — *Formula di Cauchy $(n+1)$ -dimensionale per le funzioni analitiche di n variabili complesse*. « Comm. Math. Helvetici », 18 (1945-46).
- [12] G. MORERA, *Un teorema fondamentale nella teoria delle funzioni di variabile complessa*. « Rendiconti Ist. Lombardo », 19 (1886).
- [13] E. PICARD, *Traité d'analyse*. (Gauthier-Villars, Paris, 1926), t. II.
- [14] H. POINCARÉ, *Sur les résidus des intégrales doubles*. « Acta Mathematica », 9 (1887).

- [15] B. SEGRE, *Sull'estensione della formula integrale di Cauchy e sui residui degli integrali n -pli nella teoria delle funzioni di n variabili complesse*. « Atti I Congresso U. M. I. » (Bologna, 1937).
- [16] F. SEVERI, *Sur une propriété fondamentale des fonctions analytiques de plusieurs variables*. « Comptes rendus », 192 (1931).
- [17] — *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*. « Rendiconti Sem. Mat. Roma », 7 (1931).
- [18] W. WIRTINGER, *Ein Integralsatz über analytische Gebilde in Gebiete von mehreren Komplexen Veränderlichen*. « Monatshefte für Math. und Physik », 45 (1937).

SULLA FORMA E SULLE CONNESSIONI RECIPROCHE DELLE FIBROCELLULE MUSCOLARI LISCIE^(*)

(Con due figure)

GIACOMO ANDREASSI

SVMMARIVM. — Auctor invenit quasdam atypicas contextus muscularis laevis formas extare, quae constant cellularibus elementis paene rotundae vel stellaris figurae inter se iunctis per anastomoses veras, idest quibus insunt myofibrillae.

Si ritiene comunemente, sebbene sia stata avanzata qualche opinione discorde, che le fibrocellule muscolari lisce siano indipendenti l'una dall'altra e vengano mantenute insieme da una trama intercellulare formata prevalentemente da fibre reticolari. Si attribuisce inoltre di regola all'elemento muscolare liscio una forma fusata con le estremità talora bifide e con il nucleo pure allungato nello stesso senso del corpo cellulare.

Alcuni autori hanno però richiamato l'attenzione degli studiosi sulla possibilità di anastomosi tra le fibrocellule muscolari lisce con continuità delle rispettive miofibrille. Fra questi ricordo principalmente Mc GILL, BENNINGHOFF e FLORIAN, i quali hanno sostenuto che in vari organi di animali anche adulti fra le fibrocellule muscolari lisce possano intercedere anastomosi vere, contenenti, cioè, miofibrille, in confronto di altre, che, per l'assenza di miofibrille, vengono indicate come false anastomosi. Circa queste ultime mi limito a ricordare, poichè la questione esula alquanto dall'argomento che io intendo svolgere in

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Dante De Blasi il 21 marzo 1945.

questa comunicazione, che si discute se esse, ossia le false anastomosi, siano di natura ectoplasmatica, ovvero siano formate dal tessuto interstiziale. Circa la forma degli elementi alcuni studiosi hanno descritto qualche tipo che si allontana dal comune aspetto morfologico, analogamente a quanto si osserva in cellule muscolari coltivate *in vitro*, fra le quali si presentano degli elementi atipici.

MATERIALE E TECNICA

Le ricerche alle quali si riferisce la presente Nota furono eseguite su embrioni di uomo e di cavia a diverso periodo dello sviluppo, in feti umani di varia epoca e sul cordone ombelicale umano dal sesto al nono mese della vita intrauterina. Gli organi esaminati sono stati l'intestino, il polmone nei riguardi della muscolatura bronchiale, la vescica urinaria e i vasi ombelicali. Allo scopo di istituire confronti ho esaminato anche organi di adulti.

La fissazione fu fatta per una parte dei pezzi in Zenker acetico, per una parte in Susa e per una parte in formalina al 10 per cento. Alcuni embrioni furono colorati *in toto* con il carminio; altri (e così pure gli organi isolati) furono prima affettati e le fette furono colorate, una parte con l'ematossilina Carazzi e l'eosina, una parte con l'ematossilina ferrica di Heidenhain ed una parte infine con il Mallory o con l'Azan.

RISULTATI E DISCUSSIONE

Scopo della ricerca era quello di osservare se gli elementi muscolari lisci presentino ovunque una costanza di forma, ovvero se si possano riscontrare delle varietà rispetto alla forma tipica, come avevo avuto occasione di notare in ricerche precedenti intraprese per altri fini, e se esistano in taluni punti delle vere anastomosi fra gli elementi del tessuto muscolare medesimo, ossia con passaggio di miofibrille tra una cellula e l'altra, nonchè di porre tali particolarità di struttura in rapporto con speciali necessità funzionali.

L'esame dei preparati ha dimostrato che, se nella maggior parte degli organi, anche embrionali, la forma fondamentale delle fibrocellule muscolari lisce è, come del resto si poteva supporre, quella co-

mune, conosciuta fin dalle prime ricerche degli antichi istologi, di elementi, cioè, allungati, ecc., in alcune zone invece, in realtà non molto numerose, si riscontrano elementi muscolari lisci rotondeggianti o più spesso stellati; detti elementi sono talora isolati l'uno dall'altro, ma più frequentemente invece sono uniti da ponti, per la maggior parte dei quali si può dimostrare trattarsi di vere anastomosi, con passaggio cioè di miofibrille da un elemento all'altro. La forma, come è facile comprendere, è piuttosto rotonda, quando gli elementi si presentano isolati, mentre è stellata, quando essi sono in rapporto reciproco mediante le anastomosi suddette (vedi fig. 1).

Tali cellule, di forma, per così dire, atipica, si riscontrano di prevalenza nella parete dei vasi, anche talora di adulti. Credo opportuno rilevare che dette cellule non sono per i loro caratteri e per la loro posizione da confondere con quegli elementi di aspetto epitelioidi, che si riscontrano nell'intima delle arterie a cuscinetto e nelle anastomosi arterovenose. Esse infatti, oltre che essere situate prevalentemente nella media, sono distanziate l'una dall'altra e separate pertanto da quella caratteristica trama, che si osserva attorno alle cellule muscolari lisce, formata da fibre di aspetto reticolare (PLENK), fra le quali alcuni autori (HOLMGREN, VIRNO, ecc.) hanno dimostrato anche la presenza di fibre elastiche.

Alcuni di questi elementi molto caratteristici si rinvencono nella parete dei vasi ombelicali e specialmente delle arterie ed in grado massimo nello spessore delle cosiddette valvole, sia in corrispondenza, sia all'esterno dei lembi valvolari stessi. In queste cellule le miofibrille decorrono, circondando il nucleo posto centralmente, e passano nei prolungamenti anastomotici, che uniscono gli elementi fra di loro (vedi fig. 1).

Si potrebbe porre la domanda se i filamenti che in esse si osservano siano veramente delle miofibrille, data la questione sulla reale esistenza delle miofibrille *in vivo*, ovvero siano degli artefatti dovuti alla tecnica istologica. A me sembra che le immagini osservate siano veramente dovute alle miofibrille, come è anche suffragato dalle recenti ricerche di LEVI, che ha dimostrato l'effettiva presenza delle miofibrille nelle cellule muscolari lisce di espianti di amnios di embrioni di pollo e la loro corrispondenza con le immagini ottenute dai preparati fissati e colorati delle medesime cellule. Anche PENSA ammette la presenza

di miofibrille negli elementi muscolari lisci e striati, come parte caratteristicamente differenziata del citoplasma, e così anche la grande maggioranza dei istologi.

In alcuni elementi (pochi in realtà) di questo tipo non sono riuscito ad osservare formazioni filamentose da riportare a miofibrille, e qui pertanto si potrebbe dubitare che veramente si tratti di elementi muscolari lisci, se non venissero in aiuto altri caratteri, quali la loro forma, eguale a quella delle cellule di natura sicuramente muscolare, la loro grossezza, le proprietà tintoriali, la posizione, i rapporti reciproci e la natura delle formazioni interstiziali. A questo riguardo inoltre è noto che *in vitro* la miofibrille scompaiono in quegli elementi molto espansi in superficie, che hanno una notevole imbibizione del citoplasma e che sono dotati di intensi movimenti ameboidi. La dimostrazione delle miofibrille è certamente un dato di altissimo valore per giudicare della natura muscolare di un elemento, ma questa non deve essere senz'altro esclusa, quando gli altri caratteri, opportunamente vagliati, ci inducono ad ammetterla.

Mi appare pertanto giustificato affermare l'esistenza di vere anastomosi nei suddetti territori, dove ho potuto osservare le fibrocellule muscolari lisce in un solo strato, e dove esse erano distanziate l'una dall'altra e quindi era più facile seguire le miofibrille nel loro decorso attraverso i tratti anastomotici da un territorio cellulare all'altro. Infatti, poichè i detti elementi erano in un solo piano, come indicava anche la posizione dei nuclei, le anastomosi potevano essere vedute in tutta la loro estensione. Debbo aggiungere che ho osservato delle anastomosi anche in altre zone, per quanto molto rare e ristrette, dove gli elementi avevano una forma più vicina a quella tipica (vedi fig. 2).

Queste condizioni, è bene rilevare, sono limitate ad alcuni territori soltanto e non costituiscono un reperto generale, perchè in linea di massima, come è noto, le fibrocellule muscolari lisce hanno la caratteristica forma allungata, fusiforme ed appaiono isolate, mentre i ponti protoplasmatici, che talora sembrano unire gli elementi, sono in realtà un prodotto artificiale e costituiscono un'illusione ottica a causa dell'addensamento delle fibrocellule stesse, che rende difficile stabilire i limiti cellulari. Tuttavia, ripeto, in determinati, per quanto ristretti, territori le fibrocellule muscolari lisce presentano una forma diversa, sono, cioè, rotondeggianti o stellate ed unite da anastomosi reciproche, attraverso

le quali decorrono miofibrille da un territorio cellulare all'altro. Alcune anastomosi tuttavia si possono osservare anche in rare zone dove gli elementi hanno una forma piuttosto allungata.

Esiste quindi un certo grado di polimorfismo fra le fibrocellule muscolari lisce, verosimilmente in relazione con necessità funzionali. Nei territori, dove sono presenti dette forme, per così dire, atipiche, esse costituiscono insieme con il tessuto interstiziale una specie di membrana contrattile continua, similmente a quanto avviene in animali inferiori, con una particolare finalità funzionale.

Gli elementi della forma sopradescritta, che si riscontrano principalmente in embrioni e feti e, meno frequentemente, anche in adulti, per i loro caratteri potrebbero essere considerati più vicini al tipo embrionale. Negli espianti di tessuto muscolare liscio si osserva (LEVI, OLIVO, BUCCIANTE, BAUER, LEWIS W. H. e LEWIS M. R., ecc.) un cambiamento di forma nelle cellule che passano nella zona di migrazione, e a tale cambiamento si attribuisce generalmente un significato di sdifferenziamento. Da un confronto prudente (poichè si tratta di condizioni molto diverse) con questi fenomeni che avvengono nelle culture *in vitro*, il reperto di elementi muscolari lisci di forma differente da quella normale può, a mio giudizio, essere suscettibile di due interpretazioni: o le fibrocellule muscolari atipiche da me osservate rappresentano una fase di ritorno di elementi già differenziati verso il tipo embrionale sotto l'influenza di particolari stimoli, analogamente a quanto si verifica negli espianti, ovvero si tratta di elementi, i quali, sempre per l'azione di cause peculiari, hanno subito un arresto nella loro evoluzione, e pertanto sono rimasti in uno stadio più vicino a quello embrionale.

CONCLUSIONI

Le fibrocellule muscolari lisce, oltre alla forma allungata, fusiforme, che generalmente le caratterizza, possono presentare in singoli distretti, specialmente nell'embrione e nel feto e più raramente anche nell'adulto, una forma rotondeggiante o stellata con anastomosi vere, contenenti miofibrille che passano da un territorio cellulare all'altro. Anastomosi di questo tipo possono osservarsi, sebbene di rado e sempre

in distretti molto limitati, anche in fibrocellule muscolari più vicine alla forma ordinaria.

In detti territori le fibrocellule muscolari lisce insieme con il tessuto interstiziale formano delle membrane contrattili, che ricordano quelle analoghe che si riscontrano in animali inferiori.

Le fibrocellule muscolari lisce di forma, per così dire, atipica rappresentano degli elementi più vicini, almeno per alcuni aspetti, allo stato embrionale e pertanto possono essere interpretate o come elementi che non abbiano raggiunto il normale grado di differenziazione, ovvero come elementi già differenziati, che siano andati incontro ad un processo di anaplasia, tenendo presente anche quanto si osserva in espianti di tessuto muscolare liscio, ma senza tuttavia dimenticare che nelle culture *in vitro* si è in presenza di un ordine di fenomeni molto diversi da quelli normali.

LETTERATURA

- ANDREASSI G., *Sulla istogenesi e sulla struttura del funicolo e dei vasi ombelicali*. Ricerche di Morfologia, vol. XX-XXI, 1944.
- «Boll. Soc. Ital. Biol. sperim.», vol. XX, fasc. 4-5, 1945.
- «Boll. Soc. Ital. Biol. sperim.», vol. XX, fasc. 4-5, 1945.
- BAUER K., *Über Explantation in vitro*. «Ergebnisse der Biologie», vol. 16, 1939.
- BENNINGHOFF A., *Über die Formenreihe der glatten Muskulatur ecc.*, «Zeitschrift f. Zellforschung u. mikr. Anatomie», vol. 4, 1926.
- *Blutgefäße und Herz in Möllendorff, Handbuch der mikr. Anatomie des Menschen*, 1930.
- BUCCIANTE L., *Ulteriori ricerche sulle condizioni più adatte alla sopravvivenza dei vari tessuti embrionali di pollo, ecc.* «Arch. exper. Zellforschung», vol. 14, 1933.
- FLORIAN J., «Pub. de la Faculté de Med. de Brno», Vol. I, 1923.
- HOLMGREN E., *Laröbok i Histologi*, 1920.
- LEVI G., *Dimostrazione dell'esistenza delle miofibrille in cellule muscolari lisce viventi coltivate in vitro*. «Commentationes della Pontificia Academia Scientiarum», vol. VIII, n. 20, 1944.
- *La struttura della sostanza vivente*. «Minerva Medica», anno 84, vol II n. 84 (25 agosto 1945).
- LEVI G. e BUCCIANTE L., *Sulla natura delle colorazioni vitali studiata sulle cellule coltivate in vitro*. «Arch. exper. Zellforschung», vol. 7, 1929.
- LEVI G. e OLIVO O. M., *Le proprietà strutturali delle cellule e dei tessuti coltivati in vitro*. «Arch. f. exper. Zellforschung» vol. 6, 1928 (Congresso di Budapest).
- LEWIS W. H. e LEWIS M. R., *Behaviour of cells in tissue cultures. General Cytology*, Cowdry, Chicago, 1925.
- MC. GILL. C., *The structure of smooth muscle, ecc.* «Amer. Journ. of Anatomy». vol. 9, 1894.

- *The hystogenesis of smooth muscle in the alimentary canal and respiratory tract of the pig.* «Intern. Monatschrift f. Anatomie». Vol. 124, 1907.
- *The structure of smooth muscle, ecc.* «Anat. Anz.» vol. 30.
- OLIVO O. M., *Birifrangenza e miofibrille nei mioblasti del pollo.* «Boll. Soc. Ital Biologia Sperimentale». vol. VII, 1932.
- PENSA A., *Trattato di Istologia*, Milano 1940 o 1945.
- PLENK H., *Über argyrophile Fasern, ecc.* «Ergebnisse der Anatomie», (Zeitsch. gesamt. Anatomie), vol. 62, 1927.
- VIRNO V., *Sul significato delle strutture argentofile, ecc.* «Ricerche di Morfologia», vol. 14, 1936.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE DELLA TAVOLA I.

Fig. 1. — *Feto umano al 9° mese della vita intrauterina.*

Cordone ombelicale. Tratto di parete di un'arteria ombelicale in corrispondenza di una pseudo valvola. Si osservano alcune cellule muscolari lisce anastomizzate fra loro con passaggio di miofibrille da un elemento cellulare all'altro. Microfotogramma. Ingrandimento 1600×. Azan.

Fig. 2. — *Feto umano al 6° mese della vita intrauterina.*

Parete di un'arteria della vescica urinaria. Cellule muscolari lisce di forma stellata unite da anastomosi. Microfotogramma. Ingrandimento 1500×. Ematossilina ferrica.

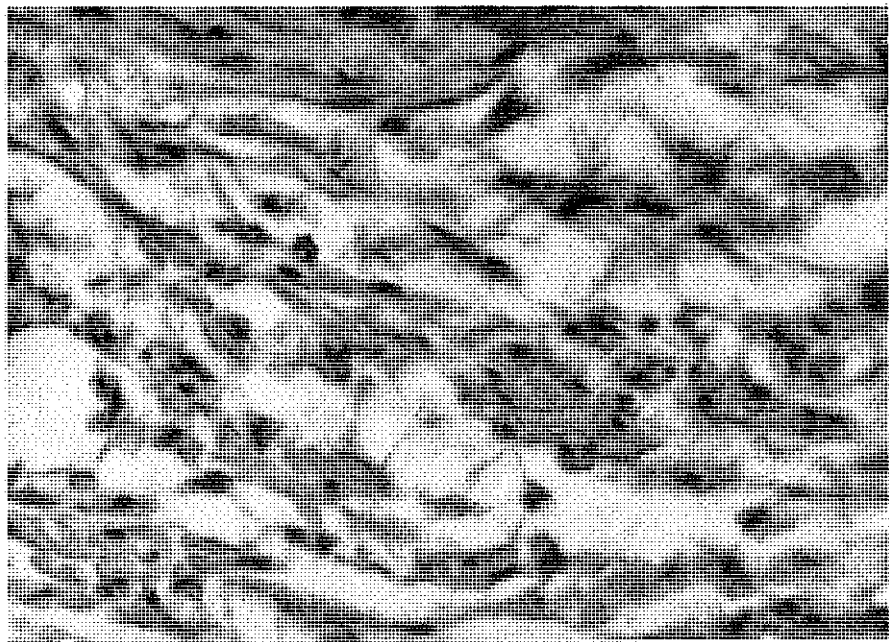


FIG. 1.

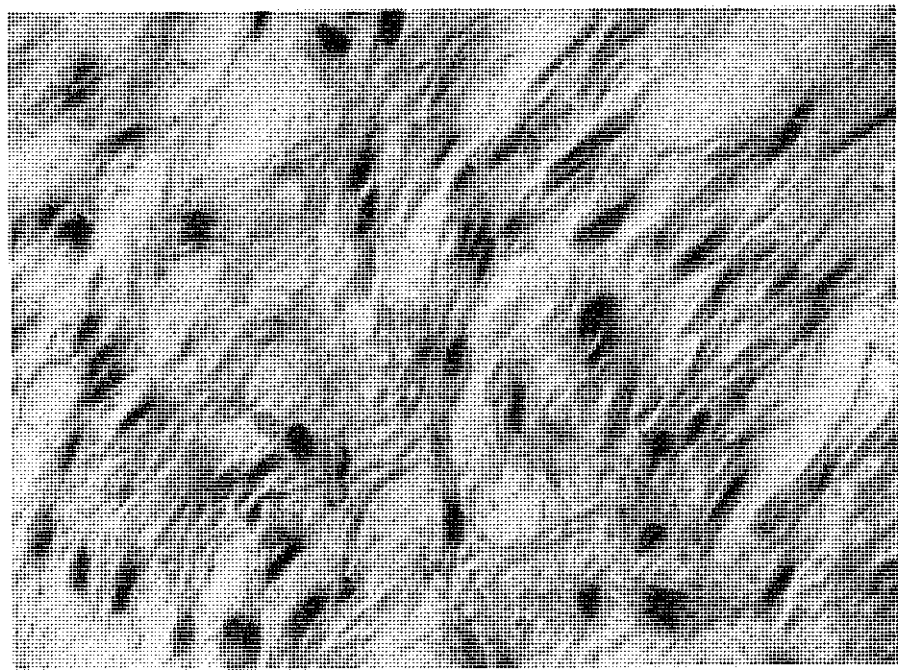


FIG. 2.

NUOVI ORIENTAMENTI DELLA SISTEMATICA (*)

LA VALUTAZIONE DELLE COLORAZIONI MEDIANTE SCALE CROMATICHE

(Con due figure e due tavole)

MARIO TIRELLI

SUMMARIVM. — In animantium speciebus describendis ad ea elementa, quae accurate definiri possint, praecipue attendi solet, imprimis quae quantitate aliave mensura perpendi valeant. Hac ratione qualitates quoque, aptis rationibus adhibitis, numeris exprimi possunt. Inter qualitates autem praesertim animalium colores accuratius significari possunt, quam adhuc factum est.

Auctor chromaticam familiae *Cerambycidae* scalam confecit; quae ratio ipsi videtur utilissime adhiberi posse, etiam ut systematica singularum notarum vis perpendantur, quemadmodum iam anno 1931 Auctor edocuit.

INTRODUZIONE. — In una serie di lavori [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] di cui il primo pubblicato nel 1931, prospettavamo la notevole importanza dei caratteri quantitativi o comunque esprimibili con numeri sia come elementi di classificazione delle specie sia in quanto consentivano di mettere in rilievo un ordinamento generale dei gruppi sistematici in relazione alla variabilità dei caratteri. Su tali concetti, e in modo diverso, tornavamo in un lavoro (1936, [15]) che prospettava i criteri adottati nella pratica sistematica per definire e descrivere le specie. In questo lavoro segnalavamo come agli incerti mezzi di valutazione diagnostica delle prime classificazioni si erano venuti aggiungendo nuovi e moderni elementi di diagnosi, i quali tuttavia non erano ancora entrati nell'uso corrente.

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Lepri il 10 gennaio 1946.

Scrivevamo infatti ([15], pag. 222).

« Non è nemmeno esatto che, nella pratica attuale, ci si valga di tutti gli elementi diagnostici di cui potremmo disporre, per l'esatta distinzione delle specie.

« Per la forza di inerzia, propria della mente umana, occorre un certo tempo prima che nuove conoscenze, utili dal punto di vista sistematico, siano universalmente accolte e comunemente e correttamente usate.

« Così nella definizione dei caratteri quantitativi specifici: ad esempio per le pinne dei pesci, si indica, nella descrizione, il numero medio dei raggi di una pinna e gli estremi di variabilità; ma di regola si trascura di indicare il numero di esemplari che hanno servito a fissare tali dati. Così pure avviene nella descrizione delle razze, e in parecchie monografie agrarie che vogliono essere moderne, abbiamo visto descrizioni di razze, principalmente secondo criteri biometrici (grandezza media di frutti, foglie, ecc.) senza nemmeno un accenno al numero di misurazioni eseguite per ottenere tali medie e ciò mentre le più elementari conoscenze biometriche indicano la necessità di tale indicazione.

« Maggiore incertezza esiste ancora nella definizione dei generi, la cui distinzione o creazione è basata, quasi esclusivamente, sul senso sistematico dello specialista che sa capire il limite tra le differenze di caratteri necessarie per la distinzione delle specie e le differenze che sono invece sufficienti a creare un nuovo genere ».

Nello stesso lavoro scrivevamo ancora ([15], pag. 222).

« Quali sono in conclusione i criteri che vengono attualmente impiegati nella distinzione pratica delle varie specie? Per quanto taluni biologi si illudano per l'entusiasmo in essi suscitato dalle ricerche cui ho accennato, tali criteri, in pratica, non sono essenzialmente diversi da quelli usati dall'inizio degli studi sistematici. Le specie, vogliamo dire, vengono ancora definite con criteri impressionistici e più che altro, soggettivi, che tengono naturalmente conto di tutti gli elementi diagnostici di cui siamo ora a conoscenza, ma la cui applicazione, nei singoli casi, non è regolata da canoni fissi, ma lasciata caso per caso, allo studioso competente ».

Per conseguenza, aggiungevamo, molto nella descrizione delle specie è ancora lasciato al *senso sistematico* del classificatore il quale sa co-

gliere le reali differenze che distinguono le buone specie e i caratteri utili per la differenziazione dei generi e delle razze.

Per questo, affermavamo, sono necessari gli specialisti sistematici al cui senso sistematico è affidata ancora in gran parte la classificazione dei gruppi difficili. In quest'ordine di lavori tuttavia si deve tendere sempre più e sempre meglio verso la scelta di criteri di diagnosi incontrovertibili ed esatti. Se ci è consentito un paragone, il sistematico attualmente è come il clinico medico del secolo scorso il quale doveva diagnosticare le malattie dai sintomi che il semplice esame obiettivo del malato gli permetteva di cogliere.

I bravi medici, dotati di quell'istinto clinico, frutto di capacità ed esperienza, che permetteva loro di fare diagnosi esatte erano rari. In seguito la clinica, a poco a poco, ha potuto valersi di un gran numero di analisi e di esami (chimici, batteriologici, radiologici, ecc.) che aiutano e facilitano la diagnosi, ed anche un clinico mediocre può fare ora con relativa sicurezza una diagnosi che un valente clinico del secolo scorso non era in grado di fare.

Analogo è il caso della sistematica: alla descrizione o per dire meglio alla valutazione delle specie lasciata al senso sistematico dello specialista, deve sostituirsi a poco a poco una valutazione o diagnosi sistematica basata su elementi e dati precisi e rilevabili con criteri e tecniche definite, e questo tanto per la diagnosi delle specie, quanto per quella delle razze, dei generi, delle famiglie, ecc.

Come tutti gli elementi diagnostici forniti dagli esami e dalle analisi di cui la medicina ora dispone, non potranno tuttavia sostituire l'opera del medico, che dovrà sempre valutare i risultati di tali esami ed analisi in relazione al malato e alle circostanze così i dati sistematici ottenuti con metodi esatti di valutazione sistematica, pur facilitando la diagnosi delle specie, dei generi, ecc. dovranno essere valutati dal sistematico.

TENDENZA A VALERSI DI CARATTERI QUANTITATIVI

Così stando le cose, quali sono gli orientamenti pratici che si prospettano per raggiungere questa migliore possibilità di diagnosi sistematica?

La tendenza a sostituire ai caratteri qualitativi caratteri quantitativi, o comunque ad esprimere i caratteri con numeri, deve ritenersi indubbiamente il più importante di tali nuovi orientamenti e quello che appare più promettente di proficui risultati.

La descrizione delle razze, delle specie, dei generi, nella pratica sistematica avviene ancora oggi prevalentemente in base a criteri descrittivi. La forma del corpo e delle sue varie appendici viene descritta con frasi e talvolta viene meglio delineata con paragoni, i quali tuttavia oltre a contenere sempre elementi soggettivi, risultano spesso imprecisi. Così dicasi della svariata e numerosa gamma di colorazioni degli organismi. Basta leggere le descrizioni di specie di insetti o molluschi o uccelli per renderci conto della virtuosità fraseologica necessaria per definire colori tanto svariati; dai termini di paragone più semplici e comuni si va sino ai più rari, complessi ed impensati, *nocciola*, *ceruleo*, *isabellino*, *cremeo*, *cremeo-grigio*, *limone*, *pisello*, *verde-grigio*, *cinereo*, *ocraceo*, *fulvo*, *fulvo-ocraceo*, *cenerognolo*, *cinereo-fulvo*, *ambrato*, *vinoso*, ecc.

Non è facile per il lettore farsi una idea delle tinte reali degli esemplari dalla lettura di queste varie denominazioni che, per una stessa specie a corpo multicolore, possono essere parecchie. Tanto più difficile ancora risulterà l'interpretazione di queste descrizioni ad uno straniero. È vero che nelle descrizioni di specie si deve usare il latino, ma in pratica spesso e specialmente nei manuali di più larga consultazione si usa la lingua corrente.

Tale prassi descrittiva, segnalata a proposito delle forme e dei colori, si ripete per altri caratteri fisiologici, biologici, ecc., e deve considerarsi imperfetta.

Nella descrizione delle specie sono indicati anche caratteri quantitativi, ma il loro uso risente ancora dei difetti seguenti: 1) sono usati in piccolo numero; 2) sono imperfettamente indicati; 3) da essi

non si trae dal punto di vista diagnostico tutto quanto se ne potrebbe ricavare.

1°) Per quanto riguarda il primo punto, nelle descrizioni sistematiche di regola ci si limita a segnalare alcuni caratteri quantitativi dimensionali come lunghezza e larghezza del corpo o di alcune sue parti, e qualche carattere quantitativo discontinuo come il numero di metameri o di segmenti del corpo o di alcune appendici o qualche altro.

2°) Sono imperfettamente indicati in quanto spesso viene segnalata la media dei caratteri senza indicare le oscillazioni estreme del carattere stesso e il numero dei casi osservati. L'importanza di questi ultimi dati è ovvia. Per ogni carattere quantitativo si dovrebbero indicare, infatti, oltre la media, i valori estremi, lo scostamento quadratico medio e l'errore probabile della media e dello scostamento. Talvolta il numero di casi osservati, cioè il numero di individui esaminati, è troppo esiguo per poter calcolare in modo significativo questi vari dati. A maggior ragione, in questi casi, bisogna indicare almeno il numero di individui esaminati; talvolta invece vengono riportate in descrizioni di specie e come caratteristiche della specie misure basate sull'esame di 1 o 2 individui, e senza nemmeno fare osservare che trattasi di un numero così esiguo di esemplari.

3) Dai caratteri quantitativi, anche se esattamente usati o segnalati, non si ricava sempre quanto si potrebbe. Questi caratteri, infatti, si prestano allo studio di rapporti e di indici il cui calcolo viene spesso trascurato.

Da quanto detto sinora gli orientamenti generali che si prospettano nel campo degli studi sistematici risultano pertanto i seguenti:

A) Migliore espressione dei caratteri quantitativi già adottati nelle descrizioni sistematiche di razze, specie, generi, ecc.

B) Uso più largo di altri caratteri quantitativi e valutazione quantitativa di caratteri qualitativi.

C) Più ampio sfruttamento di caratteri misurabili ai fini sistematici.

È stata principalmente la genetica con la necessità di valutare esattamente differenze anche piccole fra i caratteri, che ha fatto fare un passo notevole alla determinazione quantitativa dei caratteri.

Per quanto concerne i caratteri qualitativi, numerose tecniche ed accorgimenti sono stati infatti escogitati onde valutarli quantitativamente ed esprimerli con numeri. Ed a questo problema abbiamo noi stessi portato vari contributi per quanto concerne la valutazione di caratteri fisiologici del baco da seta [13], [14] e di vegetali [16]. Anche i disegni possono ora indicarsi con formule numeriche che costituiscono, quando non sia possibile dare una riproduzione in figura, una espressione sintetica e precisa, assai preferibile alle descrizioni fraseologiche [1], [17].

Quanto è stato fatto nel campo genetico deve ottenersi anche per la sistematica.

I caratteri quantitativi o quelli qualitativi ridotti a quantitativi offrono la possibilità di misurare esattamente la variabilità dei caratteri stessi e la misura della variabilità dei caratteri deve considerarsi come una delle basi della sistematica.

VALUTAZIONE DELLA IMPORTANZA SISTEMATICA DEI CARATTERI

È noto come in un gruppo di organismi omogeneo, ad esempio in una *linea pura*, gli individui si distribuiscono, rispetto a un dato carattere, secondo una curva di variabilità unimodale; quando la curva è bimodale e se non vi sono altri fattori di perturbazione della curva (di sesso, età, ecc.) si deve supporre che il gruppo di organismi considerato non sia omogeneo, ma costituito da due gruppi omogenei mescolati insieme: due *piccole specie* o due *linee pure*, ecc.

Le curve di variabilità bimodali o unimodali non si ottengono soltanto seriando gli individui di una razza o di una specie, secondo le modalità di un carattere di razza o di specie, ma si ottengono anche seriando i gruppi sistematici considerati come individualità di un gruppo sistematico superiore. Così, ad esempio, si possono costruire le seriazioni e le corrispondenti curve di variabilità delle specie o dei generi di una famiglia, distribuendo le specie o i generi secondo i valori medi di un carattere quantitativo che varii in modo caratteristico per ogni specie del genere o della famiglia.

La curva di variabilità della famiglia *Lumbricidae* fu da noi costruita [6] disponendone in seriazione le specie secondo il valore ordi-

nale del primo anello del clitello. In modo analogo furono costruite le curve di variabilità di altre famiglie o gruppi sistematici [11]. Tutto l'ordinamento sistematico appare quindi basato secondo un piano unico di variabilità. Curve di variabilità del tutto simili possono ottenersi seriando gli individui di una razza o le varie razze di una specie o le specie o generi di una famiglia, e così via, semprechè ciò sia consentito da un sufficiente numero di casi osservati. Teoricamente si potrebbe costruire anche la curva di variabilità delle classi di un tipo, seriando le classi secondo le varie modalità di un carattere quantitativo differenziale per le varie classi.

In realtà ciò non è possibile perchè le varie classi di un tipo sono poco numerose per costruire una curva di frequenza.

L'ordinamento sistematico teorico di un tipo è rappresentato dallo schema della figura 1. Il tipo comprende organismi che hanno in comune un carattere o un complesso di caratteri A; il tipo si divide in più classi ciascuna delle quali comprende organismi che presentano il carattere o complesso di caratteri A del tipo e inoltre un altro carattere o complesso di caratteri B, diverso per ciascuna classe (quindi B, o B_1 , B_2 , ... B_x , per quante sono le classi). Ogni classe a sua volta si divide in più ordini, ciascuno dei quali presenta il carattere o complesso di caratteri A del tipo, il carattere o complesso di caratteri B, o B_1 , o B_2 , ecc. della classe a cui appartiene e inoltre un carattere o complesso di caratteri C, o C_1 , o C_2 , ecc. caratteristico dell'ordine. In tal modo si giunge sino alla distinzione delle specie nel genere, delle razze nella specie e degli individui nelle razze (fig. 1). Tutti questi caratteri che distinguono gli individui di una razza, le razze di una specie, le specie di un genere, i generi di una famiglia, ecc. non sono fissi, ma presentano una caratteristica variabilità che si manifesta secondo un piano unico, cioè secondo curve degli errori, sia che si costruisca la curva di variabilità degli individui di una razza secondo un carattere di razza, sia che si costruisca la curva di variabilità delle razze di una specie secondo un carattere sistematico di specie (variabile nelle varie razze), sia che si costruisca la curva di variabilità delle specie di un genere o di una famiglia, secondo un carattere sistematico di genere o di famiglia, variabile nelle varie specie e così via (fig. 2).

Ma quali sono i caratteri da prescegliere per la classificazione? Se prescindiamo dai caratteri di tipo e di razza che rappresentano

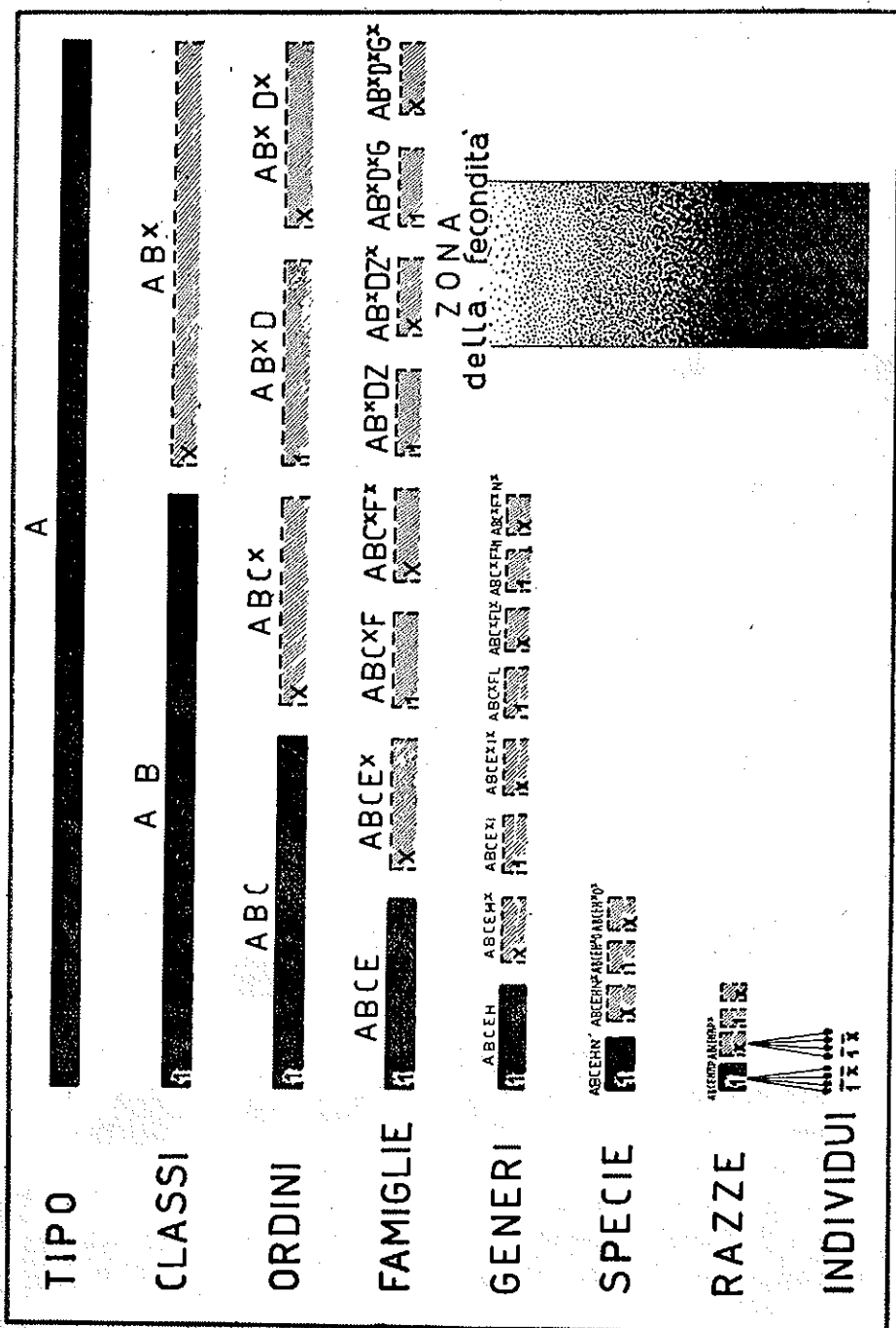


Fig. 1.

Schema dell'ordinamento sistematico di un tipo. Il tipo, caratterizzato dal complesso di caratteri A, comprende varie classi, caratterizzate dal complesso A e da caratteri o complessi di caratteri diversi B, B₁... B_x. Ogni classe comprende vari ordini e così via, sino alle popolazioni di individui che costituiscono le singole razze. La zona tratteggiata rappresenta la zona della fecondità, che è tanto più attenuata ove la colorazione è meno intensa.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Scala cromatica della famiglia *Cerambycidae* (Coleotteri). Ogni colorazione è indicata dalla lettera e dal numero della colonna e della linea corrispondenti. Se il colore è metallico, alla predetta indicazione si fa seguire l'attributo *metallico*.

	A	B	C	D	E
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					

Scala cromatica della famiglia *Cerambycidae* (Coleotteri). Ogni colorazione è indicata dalla lettera e dal numero della colonna e della linea corrispondenti. Se il colore è metallico, alla predetta indicazione si fa seguire l'etichetta "metallico".

l'aspetto morfologico e strutturale generale dell'organismo e che sono per lo più bene evidenti, scendendo verso i gradini inferiori della scala sistematica, è il sistematico stesso che deve saper trovare i caratteri differenziali dei vari gruppi.

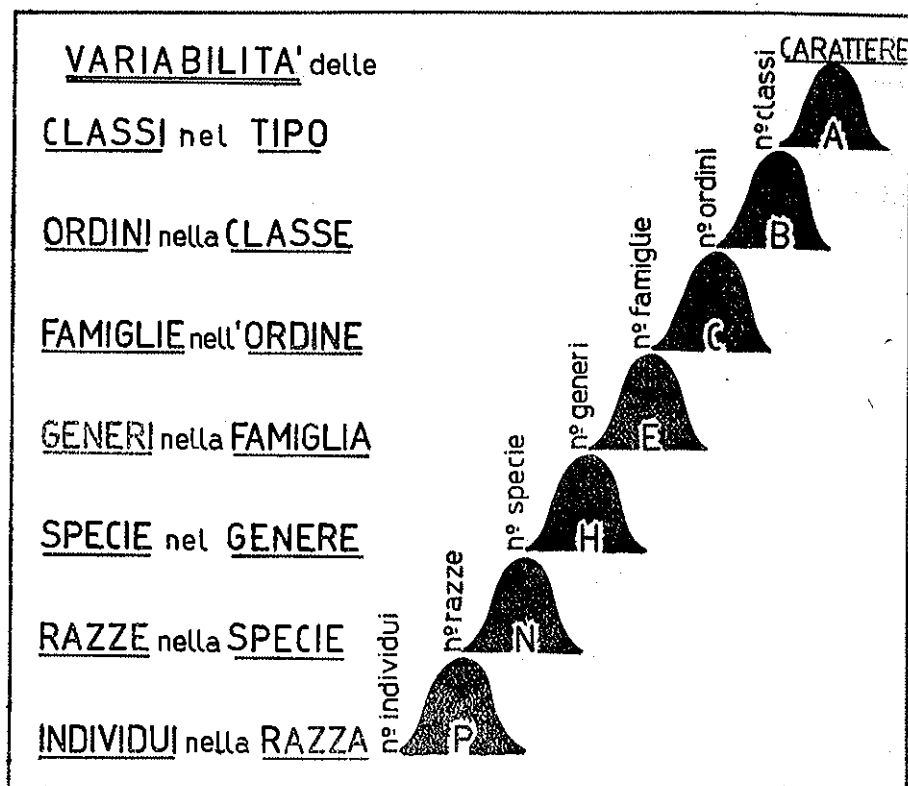


FIG. 2.

Schema della variabilità dei vari raggruppamenti sistematici di un tipo. Le curve di variabilità delle classi nel tipo, degli ordini nelle classi, sono curve teoriche, le curve di variabilità degli aggruppamenti sistematici inferiori sono curve reali. Comunque il piano di variabilità è unico in ogni aggruppamento sistematico. I caratteri indicati in ogni curva di variabilità si riferiscono ai caratteri segnalati nella fig. 1.

Come dunque effettuare questa scelta? Si è detto che i caratteri quantitativi riducibili a misura numerica sono preferibili, particolarmente perchè se ne può studiare la variabilità e lo studio della variabilità offre un mezzo di valutazione del carattere.

Già in un lavoro del 1931 [7] prospettavamo come l'aspetto delle curve di frequenza potesse fornire degli elementi di giudizio del va-

lore di un carattere. Scrivevamo infatti ([7], pag. 7):

« Il poligono tassonomico di frequenza ci permette ancora di giudicare della omogeneità o meno di un determinato gruppo sistematico. Questo è anzi il più importante risultato ottenibile. Se il poligono presentasse due vertici e la curva di conseguenza presentasse due mode, dovremmo ritenere il gruppo sistematico non omogeneo, o almeno, il carattere sistematico preso in esame non adatto o non valevole per una classificazione esatta.

« È ben noto che molte volte i sistematici sono costretti a scegliere come base per le classificazioni caratteri circa il valore dei quali non posseggono sufficienti elementi di garanzia.

« Molto sovente infatti classificazioni già compiute sulla base di determinati caratteri si sono poi dimostrate non giuste e sono state rimaneggiate od annullate per venire impiantate su basi diverse.

« Per ciò che riguarda i caratteri esprimibili quantitativamente crediamo che, nel valutare la loro importanza, come elemento di classificazione, possa riuscire di utilissima guida questo che vorremmo chiamare: saggio biometrico. Poniamo che, nel classificare le specie o i generi di un gruppo di organismi che abbiamo ragione di ritenere a priori omogeneo (così i Lumbricidi) ci si valga, come prima prova, di un carattere scelto a caso; e molte volte appunto per la grande omogeneità di un gruppo, riuscendo malagevole trovare dei caratteri differenziali di facile e sicura rilevazione, che servano di base per la sistematica del gruppo stesso, si procede a tentoni. Ebbene, se facendo il saggio biometrico ci si accorge invece che le specie appartenenti al gruppo considerato risultano disposte con irregolarità e senza ordine (e non secondo una curva binomiale) poichè nel caso che stiamo prospettando è più facile dubitare del valore sistematico del carattere che della omogeneità del gruppo, occorre trovare un carattere diverso su cui fondare la classificazione.

« In sostanza si tratta quindi di trovare dei metodi che consentano di valutare con esattezza il valore sistematico di un carattere ».

Nel 1931 scrivevamo ancora ([8], pag. 199): « In genere lo zoologo sistematico, nello stabilire la giustezza di una determinata classificazione è guidato da un complesso di elementi in gran parte di apprezzamento soggettivo. Egli è sprovvisto di un mezzo su cui si

possa basare, con notevole certezza, per saggiare il valore di una classificazione già adottata.

« In ogni modo anche senza questo mezzo, il sistematico intuisce che una determinata classificazione va riveduta, ritoccata, abolita, per venire sostituita con altra su basi diverse. Quando un mezzo di analisi precisa può intervenire a suffragare tale intuizione che al zoologo suggerisce l'esperienza, si ha ragione di ritenere che l'intuizione sia ben fondata. È questo il caso dei Gadidi. Già alcuni autori (JORDAN, D'ANCONA) hanno supposto che l'attuale raggruppamento non risponda alle necessità di una classificazione esatta; il saggio biometrico viene a confermare questa supposizione e a dare ad essa, con la precisione del metodo usato, un valore assai maggiore e a suggerire anche quale sia frattanto il ritocco che più urgentemente occorre portare alla classificazione già adottata ».

Il metodo che proponevamo consentiva di determinare la omogeneità o la eterogeneità di un gruppo sistematico. Lo stesso metodo applicato su un gruppo sistematico sicuramente omogeneo poteva consentire di valutare invece il valore sistematico di un carattere dubbio. Sin dal 1931 quindi prospettavamo il concetto di saggiare o valutare la importanza sistematica dei caratteri mediante un metodo biometrico; riteniamo fosse la prima volta che veniva avanzata tale idea e che veniva segnalata la strada da seguire in questo campo.

In seguito il SACCHETTI indicò un nuovo metodo basato anche questo sulla variabilità dei caratteri per definire il valore sistematico dei caratteri; cioè l'indice di variabilità interrazziale e intrarazziale. Il SACCHETTI [3], [4], [5] fa notare giustamente che se un dato carattere presenta negli individui di una razza una variabilità maggiore di quella che presenta nelle diverse razze di una specie, detto carattere ovviamente non si può assumere come un carattere distintivo di razza. Un buon carattere distintivo di razza dovrà presentare una variabilità, nell'interno di una razza, cioè tra gli individui di una razza, inferiore rispetto alla variabilità dello stesso carattere tra le varie razze della specie. Tanto minore sarà la variabilità intrarazziale, cioè tra gli individui di una razza, e maggiore la variabilità interrazziale, tanto maggiore sarà il valore sistematico del carattere. Basandosi su questi concetti il SACCHETTI ha dimostrato come l'indice facciale, che varia più largamente tra gli individui di una razza di quanto non va-

rino tra di loro gli indici facciali medi di razze diverse, è un cattivo carattere per la classificazione delle razze umane, mentre un buon carattere per la classificazione è l'indice cefalico il quale si comporta in modo opposto all'indice facciale, cioè varia di meno, negli individui di una razza, di quanto non vari nelle diverse razze.

Le considerazioni del SACCHETTI potrebbero estendersi a tutta la scala sistematica; un carattere che vari nelle singole specie di un genere più di quanto non vari tra generi diversi, non è buon carattere per la classificazione dei generi; un carattere che vari nelle singole razze di specie diverse più di quanto non vari tra le specie non è un buon carattere per la classificazione delle specie e così via.

Questo saggio biometrico si può applicare più largamente alla sistematica realizzando quanto prospettavamo: dare cioè un mezzo di analisi precisa per la valutazione del valore sistematico dei caratteri, che sostituisca la valutazione soggettiva lasciata all'intuizione o al senso sistematico del classificatore.

In un sistema di valutazione dell'importanza sistematica dei caratteri, basato tutto sulla misura della variabilità, è di somma importanza poter disporre di caratteri quantitativi o misurabili; ecco pertanto una nuova ragione che impone l'orientamento verso la scelta di caratteri quantitativi o suscettibili di misura per la classificazione e la trasformazione con tecniche e artifici adatti dei caratteri qualitativi in quantitativi.

SCALA CROMATICA DEI CERAMBICIDI

Onde portare su questa via un ulteriore contributo pratico, abbiamo preparato una prima « scala cromatica » ⁽¹⁾ per la valutazione più precisa delle colorazioni delle specie della famiglia *Cerambycidae* (Coleotteri). Detta scala è stata costruita da un artista specializzato in lavori biologici, il Prof. PIETRO ANTONUCCIO, il quale, esaminato un gran numero di esemplari di *Cerambyci* paleartici, nelle collezioni Lur-

⁽¹⁾ La opportunità di usare scale cromatiche per la valutazione dei colori degli organismi fu espressa da noi per la prima volta pubblicamente in occasione di una conferenza tenuta dal Prof. S. BEER alla Unione dei naturalisti, in Roma [2] in sede di discussione. Per ragioni tecniche è stata eseguita per prima la scala cromatica dei *Cerambycidae*,

GIONI, RASSETTI e TIRELLI, ha segnato via via tutte le colorazioni e sfumature di colorazioni che osservava.

Le colorazioni o sfumature di colorazioni diverse sono state quindi raggruppate mettendo vicino i colori simili. Si è ottenuta in tal modo una scala con 90 colori, raggruppati per comodità in cinque colonne e 18 linee. Ogni colonna è indicata con una lettera e i colori di ogni linea sono indicati con numeri (Tav. I-II).

Ogni colore è quindi rappresentato da una lettera e da un numero.

In un primo tempo si era pensato di valerci del codice internazionale dei colori; ma un codice unico non esiste, e se esistesse, troppo laborioso ne diverrebbe l'uso. D'altra parte un codice unico per tutte le colorazioni degli organismi animali e vegetali sarebbe anche praticamente inutile data la specializzazione sistematica. In pratica quindi è utile che per ogni gruppo sistematico si costruisca una scala cromatica diversa. Analogamente a quanto si fa per le scale cromatiche usate in Antropologia sarebbe opportuno che i colori così determinati venissero impressi su dischi o lamine di smalto, tuttavia per questo primo tentativo presentiamo la scala cromatica su carta. Del resto conserviamo le riproduzioni originali delle tinte, da cui sarà sempre possibile ricavare in caso una scala su materiale diverso dalla carta.

Parecchi Cerambiei presentano tinte metalliche; in questa scala non sono state segnate le tinte metalliche: ma nell'indicazione del colore basterà segnalare, se la tinta è metallica, la lettera e il numero seguiti dall'attributo metallico.

Ci auguriamo che il nostro tentativo apra la strada ad ulteriori perfezionamenti in questo campo.

CONCLUSIONI

Dal 1931 l'autore prospettò come, sia i gruppi sistematici elementari (razze), che i gruppi più elevati nella scala sistematica, come generi, famiglie, ecc. fossero ordinati secondo un piano unico.

Come gli individui di una razza si distribuiscono, secondo le modalità di un carattere misurabile, in una curva di frequenza binomiale, così analoga curva si ottiene seriando le razze di una specie, le specie di un genere o di una famiglia, e così via.

Le curve unimodali indicano di regola gruppi sistematici omogenei. Già nel 1931 l'autore prospettava inoltre la convenienza di sostituire alla valutazione soggettiva della importanza e del valore tassonomico dei caratteri un criterio più esatto e proponeva un saggio biometrico basato sull'esame della variabilità di un carattere.

Altro metodo è stato in seguito proposto dal SACCHETTI. In questo ordine di idee appare comunque sempre più importante la misura della variabilità dei caratteri. Questa misura può effettuarsi facilmente sui caratteri quantitativi, mentre per i caratteri qualitativi sono necessarie modalità tecniche varie per renderli misurabili.

L'orientamento degli studi sistematici è volto comunque a trovare elementi più esatti di diagnosi fra i vari gruppi sistematici togliendo il riconoscimento e la distinzione dei vari gruppi alla valutazione soggettiva e al senso sistematico del classificatore che ancora prevalgono nella pratica sistematica. In primo piano, in questo campo, sta la possibilità di valersi di caratteri sistematici quantitativi esattamente misurabili. A tal riguardo è necessario:

A) Esprimere con maggior precisione i caratteri quantitativi sino ad ora utilizzati, come i caratteri dimensionali, indicando per i vari caratteri anche lo scostamento quadratico medio, il campo di variabilità ecc. e rendere misurabili quantitativamente, con apposite tecniche e artifici, anche il maggior numero possibile di caratteri qualitativi.

B) Utilizzare meglio i caratteri quantitativi o misurabili facendone rapporti e correlazioni.

C) Determinare il valore sistematico dei vari caratteri con opportuni metodi, basati sulla analisi della variabilità dei caratteri stessi. Il primo concetto in questo campo e il primo pratico tentativo di valutazione sistematica dei caratteri furono prospettati dall'autore nel 1931.

L'espressione quantitativa o numerica dei caratteri è importante quindi da un duplice punto di vista: da un punto di vista diretto in quanto rende più semplici e precise le descrizioni delle razze, specie, generi, ecc. Da un punto di vista indiretto in quanto i caratteri quantitativi o espressi numericamente consentono uno studio più preciso della loro variabilità e, quindi, la eventuale analisi della importanza sistematica del carattere stesso.

L'autore porta infine un contributo pratico alla valutazione quantitativa (o numerica) dei caratteri illustrando una prima scala cromatica, di 90 colori, che può valere per definire i colori delle specie paleartiche della famiglia *Cerambycidae* (Coleotteri) indicando i colori con numeri e lettere, invece che con imprecise indicazioni fraseologiche come sinora è stato fatto.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BEER S., *Ricerche sulla morfologia dei disegni nelle ali dei Lepidotteri*. «Comm. Pont. Ac. Scientiarum», anno VI, vol. VI, n. 2, pag. 27.
- [2] — *Colori e disegni nel mondo animale*. Conferenza tenuta alla Unione naturalisti, in Roma il 28 aprile 1945.
- [3] SACCHETTI A., *Sul valore dell'indice facciale come mezzo di differenziazione dei gruppi umani*. «Atti IV riunione Soc. It. Stat.», Roma, 1942.
- [4] — *Le variazioni intra ed interrazziali dell'indice cefalico*. «Riv. di antropologia», vol. 34, 1942-43.
- [5] — *I problemi della variabilità dei caratteri. In biometria; nel quadro delle relazioni fra scienze statistiche o matematiche e scienze biologiche*. Roma, «Ist. It. di Antropol.», 1945.
- [6] TIRELLI M., *Una base biometrica degli studi sistematici*. «Zool. Jahrb. Abt. Physiol.», Bd. 50, H. 1, pag. 32, 1931.
- [7] — *Applicazione di metodi biometrici alla sistematica*. «Boll. Mus. zool. e An. Comp. Univ.», Genova, vol. 2, n. 47, pag. 15, 1931.
- [8] — *Analisi biometrica dei gruppi sistematici. Seriazioni bimodali*. «Boll. di Zool.», anno 2, n. 5, pag. 197, 1931.
- [9] — *La tendenza evolutiva degli organismi studiata attraverso le curve di frequenza sistematica*. «Atti Pont. Acc. Sc.», anno 85, pag. 224, 1932.
- [10] — *L'influenza dell'ambiente sul meccanismo evolutivo studiata attraverso le curve di frequenza sistematica*. «Atti Pont. Acc. Sc.», anno 85, pag. 238, 1932.
- [11] — *Applicazione di metodi biometrici alla sistematica*. «Genesi», anno 2, fasc. 3-4, pag. 168, 1932.

- [12] — *Basi biometriche degli studi sistematici.* « Zool. Jahrb. Abt. Physiol. », Bd. 50, H. 3, pag. 313, 1932.
- [13] — *Studi su alcuni fenomeni nelle uova ibride del Bombyx mori L.* « Zool. Jharb. Abt. Physiol. », Bd. 53, H. 3, pag. 307, 1934.
- [14] — *Studi di fisiologia dello sviluppo nelle uova ibride del B. mori L.* « Ann. R. Staz. baool. sper. », Padova, vol. 48, pag. 13, 1936.
- [15] — *Il concetto di specie nella pratica sistematica da Linneo ai nostri giorni.* « Boll. filos. del Pont. Sem. romano », luglio-settembre, pag. 215, 1936.
- [16] — *Significato della irregolare distribuzione statistica di alcuni fenomeni biologici.* « Riv. di Biol. », vol. 22, fasc. 1, pag. 1, 1937.
- [17] VERITY R., *Le farfalle diurne d'Italia*, vol. 1, ed. Marzocco, Firenze, 1940.