

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA

ANNVS VIII
VOLUMEN VIII



EX AEDIBVS ACADEMICIS IN CIVITATE VATICANA

MDCCCXXXIV

INDEX

	FOL.
1. A. STEFANELLI, <i>La morfologia dell'apparato statico e dell'apparato acustico dei chiropteri in relazione alle condizioni di volo</i>	1-6
2. M. CRENNA, <i>Il significato teleologico della legge di rifrazione del flusso termico</i>	7-10
3. M. GHIRON, <i>Studi sugli enzimi respiratori (Ossidasi - Deidrogenasi)</i>	11-18
4. L. FARINA, <i>Contributo allo studio locale delle trasformazioni puntuali fra due piani</i>	19-28
5. E. BRONZINI, <i>Note sulla riproduzione in cattività del cervone (Elaphis Quattorradatus) Latr. (cum 1 tab.)</i> .	29-38
6. E. BOMPIANI, <i>Determinazioni differenziali relative alla superficie di Veronese</i>	39-48
7. A. GIACOMINI, <i>Cella ultrasonora di grande area per la modulazione della luce (cum 6 fig.)</i>	49-60
8. P. G. BORDONI, <i>Metodi approssimati per lo studio delle sorgenti sonore (cum 1 fig.)</i>	61-66
9. T. PERRI, <i>Azione dei raggi Röntgen sugli embrioni di anfibio (Trapianto dell'abbozzo oculare tra embrioni irradiati e normali)</i>	67-72
10. C. CESTELLI GUIDI, <i>Travi in cemento armato ad elementi in diverso stato di coazione (cum 3 fig.)</i>	73-90
11. E. INDELLI, <i>Il Microplankton di superficie del golfo di Napoli (cum 2 fig.)</i>	91-100
12. L. MISTRUZZI, <i>Comportamento degli embrioni di rana esculenta sottoposti a dosi sub-letali e letali di raggi X in seguito alla loro unione in parabiosi con embrioni normali</i>	101-106
13. G. KRALL, <i>Sul calcolo del rollio di un galleggiante tenendo conto dell'inerzia del fluido (cum 3 fig.)</i> . .	107-118
14. P. TEOFILATO, <i>Sopra alcuni sistemi differenziali a soluzioni sensibilmente costanti</i>	119-130

15. E. URBANI, *Prime esperienze sull'azione fotodinamica in rapporto alle ossidazioni su larve di anfibî* 131-134
16. A. STEFANELLI, *I problemi della determinazione nervosa in rapporto a processi di riparazione e rigenerazione nel sistema nervoso centrale degli anfibî* 135-140
17. A. BENINI, *Alcune osservazioni su un particolare tipo di oscillazione armonica permanente* 141-148
18. P. MEDOLAGHI, *Sulle fluttuazioni economiche* 149-156
19. P. TEOFILATO, *Caratteri giroscopici derivanti da valori iniziali sufficientemente grandi delle velocità ignorabili* 157-172

LA MORFOLOGIA DELL'APPARATO STATICO E DELL'APPARATO ACUSTICO DEI CHIROTTERI IN RELAZIONE ALLE CONDIZIONI DI VOLO (*)

ALBERTO STEFANELLI

SUMMARY. — Ii Chiropteri, qui strenue volant, organum vestibulare periphericum, quod vocant, magis evolutum habent, quam Chiropteri male volantes; illorum etiam cerebellum sulcos magis varie compositos habet. Auditivi apparatus autem, magis perfecti sunt in alteris Chiropteris.

È noto come le varie specie di Microchiropteri abbiano attitudini diverse per il volo: mentre alcune specie hanno volo basso e pesante e con percorso irregolare per i frequenti volteggiamenti, altre sono dotate di volo rapido e leggero e che sovente si compie anche a grande altezza. Dai dati della letteratura e dalle mie stesse osservazioni le condizioni estreme al riguardo sono rappresentate, per le specie italiane, dai Rinolofidi da un lato, con volo lento basso e pesante, e dal *Miniopterus* dall'altro, con volo veloce e compiuto spesso a grande altezza. Le altre specie studiate (dei generi *Plecotus*, *Myotis* e *Pipistrellus*) presentano attitudini intermedie.

A queste diverse condizioni di volo corrispondono perfettamente la struttura e la superficie di sostentamento rappresentata in gran prevalenza dai patagi alari e caudale. Questi rapporti, già succintamente considerati da vari zoologi (ALTUM, BLASIUS, HEILE), sono stati da me particolarmente vagliati come presupposto fondamentale delle successive ricerche. In poche parole, e per limitarmi solo alle forme

(*) Nota presentata dal Presidente dell'Accademia P. Agostino Gemelli O. F. M.
il 1° febbraio 1944.

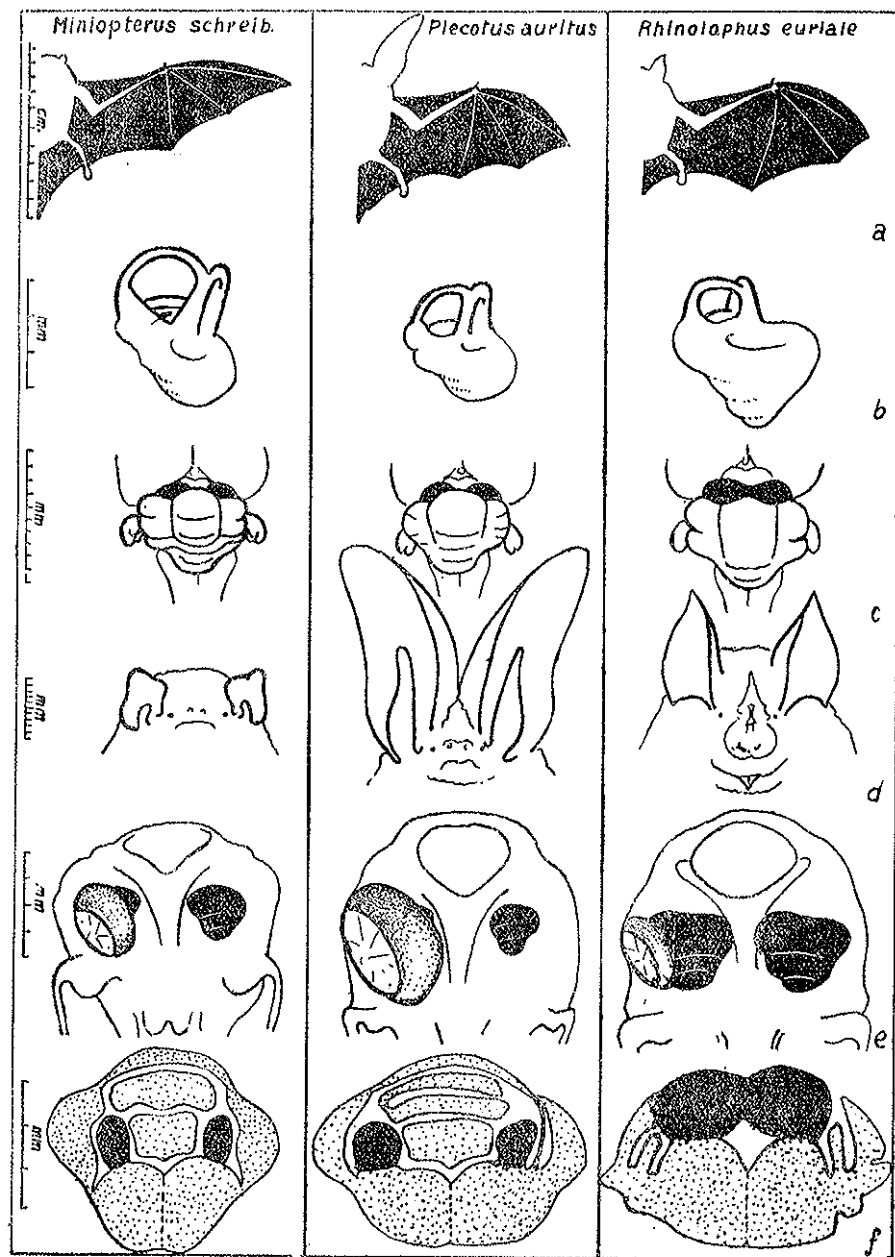
con caratteri estremi, mentre le ali dei cattivi volatori (*Rinolofidi*) sono corte e larghe (fig.: *a*), quelle dei buoni volatori sono strette e lunghe (*Miniopterus*).

Ho potuto constatare, limitandomi in questo studio introduttivo alla morfologia del labirinto osseo e alle strutture più appariscenti dell'encefalo, come l'organo statico periferico e i centri statici encefalici presentino delle differenze strutturali che sono in evidente concomitanza di queste differenti condizioni ecologiche.

Assai appariscente è la differenza delle dimensioni dei canali semicircolari (fig.: *b*). Particolarmente dimostrativo è il confronto tra il *Rhinolophus* e il *Miniopterus* (tener presente che queste due specie sono di mole corporea molto simile). Limitandomi qui al canale verticale posteriore esso si presenta di 3 mm. di lunghezza nel R. e di 4,1 mm. nel M. Anche gli altri due canali sono più sviluppati nel M.

Che a questo diverso sviluppo dell'organo statico periferico corrisponda una differenza di sviluppo anche dei centri e delle vie vestibolari centrali ci è rivelato dalla condizione morfologica del cervelletto, organo intimamente collegato con questi (fig.: *c*). Mi limito qui ad accennare succintamente quanto riguarda la struttura macroscopica cerebellare. Nel *Rh. euryale* il cervelletto si presenta con scarsa solcatura: il *lobus medius* è liscio ed è visibile solo la *fissura secunda* (Y) e una solcatura nell'uvula. Negli emisferi vi è un solo solco trasversale. I paraflocculi sono lisci e non eccessivamente sviluppati e ciò parallelamente alla piccola capacità della cavità del temporale compresa tra i tre canali semicircolari in cui i paraflocculi sono alloggiati. I flocculi non sono macroscopicamente visibili. Nel *Miniopterus* la solcatura è più numerosa: si aggiunge un solco prepiramidale e gli emisferi presentano tre solchi trasversi che li suddividono in quattro lamelle. I paraflocculi sono più sviluppati e anche i flocculi sono sporgenti sotto ai paraflocculi così che è possibile vederli macroscopicamente. Queste differenze si osservano anche nelle altre specie, con variazioni più o meno salienti, in stretta corrispondenza con le attitudini di volo.

Per quanto riguarda l'organo acustico ho potuto constatare come il senso acustico, desunto dallo sviluppo dell'organo specifico, sia più sviluppato nelle specie dotate di volo lento e compiuto a poca altezza



SPIEGAZIONE DELLA FIGURA:

a) patagio alare e caudale delle tre specie: *Miniopterus schreibersi* (ottimo volatore), *Plecotus auritus* (medio volatore), e *Rhinolophus euryale* (cattivo volatore); b) labirinto osseo delle tre specie orientato in modo da porre sul piano del disegno il canale semicircolare verticale posteriore; c) cervelletto e mesencefalo (i collicoli acustici sono in nero); d) la testa delle tre specie in modo da apprezzare le differenze di grandezza dell'orecchio esterno; e) base del cranio mostrando la *bulla* timpanica e la membrana del timpano (punteggiata la *bulla*) e la *coclea* (in nero); al lato destro è stata asportata la *bulla*; f) sezioni frontali dell'encefalo all'altezza dei collicoli posteriori (in nero).

Tutti i disegni sono ricavati dal ricontorno fedele di fotografie.

dal suolo, quali i Rinolofidi, il *Plecotus*, il *Myotis myotis* (per citare solo quelle forme prese in esame) che in quelle forti volatrici, sia per velocità che per altezza, quali il *Miniopterus*, alcuni *Myotis* e i *Pipistrellus*.

Esaminando un abbondante materiale, sebbene non ancora esteso a tutte le specie italiane, mi sono reso conto come l'aumento della sensibilità acustica sia raggiunto nelle varie specie con due modalità completamente diverse. Le più tipiche espressioni di questi due meccanismi acustici le troviamo nei Rinolofidi e nel *Plecotus*, Chiroterri dotati di grande potenza acustica.

Nei Rinolofidi troviamo infatti un orecchio interno assai sviluppato, come è desumibile dalla enorme coelca (fig.: *b, e*) che viene ad occupare una gran parte della base del cranio (nel *Rh. euryale* ha un diametro alla base di 3,5 mm.) mentre l'orecchio medio ed esterno (fig.: *d*) sono poco più sviluppati delle parti corrispondenti dei chiroterri con organo acustico normale (come ad esempio si presenta nel *Miniopterus*). Nel *Plecotus* invece la coclea ha una dimensione modesta, pressochè simile a quella dei chiroterri con orecchio piccolo (2 mm. alla base), ma sono sviluppati invece enormemente l'orecchio medio e l'orecchio esterno. Dell'orecchio medio (fig.: *e*) sono particolarmente imponenti la *bulla* timpanica (5 mm. di diametro massimo contro 2,7 del *Rh. euryale* e 2,4 del *Miniopterus*), la membrana del timpano (di 3,9 mm. di diametro contro 2,5 del *Rh.* e 2,1 del *M.*). Anche le ossicine acustiche della catena sono di maggiori dimensioni. L'orecchio esterno del *Plecotus* è formato da un padiglione di ben 44 mm. di lunghezza ed è munito di trago di 17 mm. mentre quello del *Rh. euryale* è di soli 20 mm. ed è sprovvisto di trago.

Pertanto mentre nei Rinolofidi la potenza acustica è dovuta allo sviluppo della parte sensitiva dell'organo, nel *Plecotus* (e così in altri Chiroterri tra cui il *Myotis myotis*) è dovuta ad un maggior sviluppo solo dell'apparato recettore, risuonatore e di trasmissione delle vibrazioni. Certamente con questo secondo meccanismo oltre alla sensibilità acustica viene anche aumentata la sensibilità tattile dato l'enorme sviluppo cutaneo presentato dal padiglione e dal trago, ricchi di espansioni nervose tattili.

A queste differenze anatomiche dell'organo acustico periferico fanno riscontro differenze strutturali dell'encefalo. La condizione strut-

turale più saliente, e che appare anche ad un esame del cervello *in toto*, è a carico dei collicoli posteriori del mesencefalo. Infatti, mentre nei Chiroterri dotati di coelea assai sviluppata (Rinolofidi) essi sono pure assai sviluppati e intimamente uniti tra loro (fig.: *c, f*), nei Chiroterri con piccola coelea, siano muniti di orecchio medio ed esterno assai sviluppati (*Plecotus*), siano con tali parti dell'orecchio poco sviluppate (*Miniopterus*), i collicoli posteriori sono più piccoli e ampiamente separati tra loro dal verme cerebellare che, a causa del loro scarso sviluppo, relativamente alle specie precedentemente citate, riesce ad interporsi tra loro (fig.: *f*).

IL SIGNIFICATO TELEOLOGICO DELLA LEGGE DI RIFRAZIONE DEL FLUSSO TERMICO (*)

MARIO GRENNÀ

SUMMARIVM. — *Principio minimae actionis*, a Maupertuis reperto, et *principio minimi temporis*, a Fermat, expositis, Auctor quaerit quam lege refrangatur caloris fluxus inter duo metalla diversa, mutuo applicata; cum autem hanc legem simili principio regi evicerit, quod *principium maximi fluxus* dici potest, constituit omnes naturae leges miris rationibus, in eundem finem conspirantibus, inniti.

Consideriamo due lastre metalliche sottilissime rettangolari ed uguali formate con due conduttori omogenei isotropi, dotati di differenti conducibilità termiche (per esempio rame e ferro) di cui indichiamo con k_1 e k_2 le rispettive conducibilità. Si riuniscano le due lastre rettangolari lungo un lato uguale in modo da ottenere un'unica lastra rettangolare, formata con i due metalli; è noto che facendo pervenire del calore dall'un metallo all'altro (per esempio dal rame al ferro) lungo una direzione inclinata rispetto alla linea di separazione dei due metalli, avviene la rifrazione delle linee di flusso (nel passaggio da un metallo all'altro) ossia ne risulta mutata la direzione, secondo la seguente legge, invero assai elegante: *per due dati conduttori il rapporto fra la tangente dell'angolo di incidenza e la tangente dell'angolo di rifrazione ha un valore costante:*

$$\left(\text{con } K = \text{costante} = \frac{k_1}{k_2} \right) \quad [1] \quad \frac{\tan i}{\tan r} = K$$

Vogliamo esporre il significato finalistico della predetta legge; il quale costituisce anche una dimostrazione *a posteriori* della medesima. Come è notissimo le equazioni della dinamica del punto materiale, nel

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini il 12 marzo 1944.

campo di forza derivante da un potenziale (indipendente dal tempo), si possono dedurre dal *principio della minima azione* del Maupertuis; in ottica vige il *principio del minimo tempo* di Fermat ed è noto che « per molto tempo è apparso impossibile di considerare l'analogia di questi due principii come qualcosa di più che un'analogia formale, non avente alcuna base fisica profonda. Pareva anzi che vi fosse una

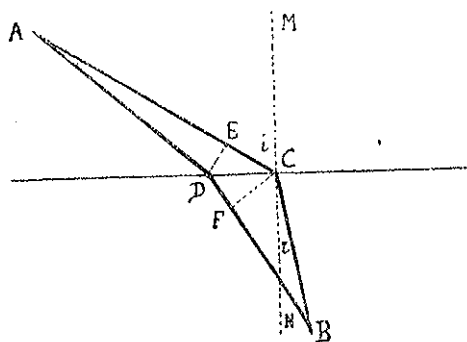


FIG. 1.

decisa opposizione tra i due principi dal punto di vista fisico, poichè, essendo la quantità di moto proporzionale alla velocità, l'integrale del Maupertuis contiene la velocità a numeratore, mentre l'integrale di Fermat la contiene a denominatore » [1]. Ora apparisce estremamente interessante il fatto che la legge di rifrazione delle linee di flusso termico traduca un *nuovo principio*, che è quello del *massimo flusso*, come vogliamo ora dimostrare. Ci proponiamo infatti il seguente quesito: *Dati due punti A e B appartenenti a due conduttori diversi, fra di loro in contatto (di conducibilità k_1 e k_2 rispettivamente) quale è il cammino che deve seguire il flusso termico partente da A per giungere in B con il massimo valore possibile?*

Supponiamo che sia ACB il cammino richiesto, essendo C punto comune ai due conduttori; per la condizione di massimo, avverrà che per ogni altro cammino, compreso fra A e B, e infinitamente vicino ad esso, la quantità di calore che perviene in B, nell'unità di tempo, dovrà risultare la stessa.

Sia ADB un cammino infinitamente vicino ad ACB, essendo D punto comune ai due conduttori; conducendo da D la DE perpendicolare ad AC e da C la CF perpendicolare a DB risulterà:

$$[2] \quad CE = CD \cdot \cos \widehat{ACD} = CD \cdot \sin i$$

$$[3] \quad DF = CD \cdot \sin \widehat{DCF} = CD \cdot \sin r$$

dove i ed r indicano gli angoli d'incidenza e di rifrazione come nella figura al lato.

Per il flusso termico sussiste, ovviamente, la *legge del coseno* valida anche per il flusso luminoso e cioè: la quantità di calore che, partendo da un punto, perviene (nell'unità di tempo) ad un elemento di una data linea (o superficie) è proporzionale al coseno dell'angolo di incidenza. La quantità di calore che, partendo da A, perviene in C sarà adunque proporzionale (a parità delle rimanenti condizioni) al coseno dell'angolo i e si avrà quindi:

$$[4] \quad q = a \cos i$$

essendo q la quantità di calore ed a una costante. Per le condizioni di massimo imposta dal problema dovrà adunque avvenire che il flusso termico relativo al percorso EC (che per il cammino ACB, in rapporto a quello infinitamente vicino ADB, rappresenta uno svantaggio) risulti uguale a quello relativo al percorso DF (che per il cammino ACB rappresenta un vantaggio). Il tempo impiegato dal calore a percorrere il tratto EC sarà espresso da:

$$[5] \quad t_1 = \frac{EC}{v_1} = \frac{EC}{bk_1} = \frac{CD \sin i}{bk_1}$$

dove v_1 rappresenta la velocità del calore nel primo mezzo (di conducibilità k_1) la quale è evidentemente proporzionale alla conducibilità ($v_1 = bk_1$ con $b =$ costante e si è fatto uso della [2]). Analogamente il tempo impiegato dal calore a percorrere il tratto DF sarà (facendo uso della [3]):

$$[6] \quad t_2 = \frac{DF}{v_2} = \frac{DF}{bk_2} = \frac{CD \sin r}{bk_2}$$

Il flusso unitario relativo al percorso EC sarà:

$$\frac{q_1}{t_1} = a \cos i : \frac{CD \sin i}{bk_1}$$

mentre quello relativo al percorso DF sarà:

$$\frac{q_2}{t_2} = a \cos r : \frac{CD \sin r}{bk_2}$$

Dovrà dunque risultare:

$$\frac{bk_1 a \cos i}{CD \sin i} = \frac{bk_2 a \cos r}{CD \sin r}$$

da cui:

$$k_1 \cotang i = k_2 \cotang r$$

ossia:

$$\frac{\tan i}{\tan r} = \frac{k_1}{k_2}$$

che coincide con la [1]. Resta quindi dimostrato che la legge di propagazione del flusso termico esprime che il passaggio di calore da un punto all'altro avviene sempre in modo tale che, fra tutti i cammini possibili, quello effettivamente seguito è il percorso di massimo rendimento termico: per cui cioè ad ogni punto perviene la massima quantità di calore, nell'unità di tempo.

Se si tiene presente che anche in termochimica il calore interviene nei fenomeni secondo il principio della *massima quantità di calore* ⁽¹⁾, non è possibile non attribuire a questo principio un significato profondo nell'interpretazione dei fenomeni termici. « BERTHELOT a énoncé en 1867 une loi, qui a formé longtemps la base de la termochimie et en général de la mécanique chimique et qui est connue sous le nom de *principe du travail maximum*. D'après cette loi, tout changement chimique tend vers la production du corps, ou du système de corps, qui dégage le plus de chaleur. BERTHELOT a ajouté dans la suite la condition que le changement chimique doit être accompli sans l'intervention d'aucune énergie étrangère... Le principe simplifié du travail maximum doit donc toujours être considéré comme le seul fil conducteur que nous possédions actuellement pour prévoir les réactions chimiques » ⁽²⁾. Il risultato conseguito rivela, ancora una volta, come al fondo di tutte le leggi naturali giaccia un eccelso e mirabile motivo teleologico che tutt'ora, in gran parte, si cela; ma che quando riesce a svelarsi, fornisce una visione di incomparabile bellezza alla contemplazione estatica dello spirito umano.

(1) DE BROGLIE LOUIS, *I quanti e la fisica moderna*, 1933, Einaudi, Torino, pag. 38-39.

(2) CHWOLSON O. D., *Traité de physique*, Ouvrage traduit sur les éditions russe et allemande; Tome Troisième, Premier Fascicule, Thermométrie, 1909, Hermann, Paris, pag. 298-99.

STUDI SUGLI ENZIMI RESPIRATORI (*)

(OSSIDASI - DEIDROGENASI)

MARIO GHIRON

SUMMARIVM. — Hae Nota Auctor exponit experimenta et investigationes super quodam enzimate dehydrogenanti (quod diu durare potest) peractas, quod enzima ipse e variis internis organis seiunxit, quodque simili modo operatur atque insulina, glycaemiam in hominibus et animalibus multum minuens.

Nel corso delle nostre ricerche sugli enzimi lipolitici contenuti nel fegato ⁽¹⁾ avevamo notato la presenza in quest'organo di un enzima dotato di forte potere ossidante ad azione diversa da quello estratto da HARRISON.

Quest'ultimo, infatti, ha estratto dal fegato ⁽²⁾ un enzima capace di ossidare il glucosio in acido d-gluconico e, quindi, dotato di potere ossidativo limitato ad una iniziale scomposizione.

L'enzima da noi ottenuto ha, invece, un forte potere ossidante e produce una scissione che non si arresta ai composti a catena aperta sotto forma di aldeide, come aveva osservato HARRISON, ma determina la trasformazione del glucosio in acqua ed anidride carbonica, il che dimostra che la molecola di glucosio può essere completamente bruciata dall'enzima deidrogenante estratto dal fegato.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Aldo Castellani il 30 ottobre 1941.

⁽¹⁾ M. GHIRON, « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », Vol. XIV, serie 6^a, 2^o sem., fasc. 1-2, luglio 1931; M. GHIRON, « Journal of tropical Medicine and Hygiene », May 1, 1935.

⁽²⁾ D. C. HARRISON, « Proceedings of the Royal Society of London », series B, Vol. CXIII, October 1933.

L'acido ossalico, che si trova fra i prodotti di ossidazione chimica dello zucchero, è stato anch'esso usato da noi come substrato per saggiare l'attività dell'enzima deidrogenante ed abbiamo constatato che si ottiene sviluppo di CO_2 , ciò che attesta la scomposizione dell'acido ossalico.

L'enzima fu preparato nel seguente modo: gr. 10 di polvere di fegato, residua dall'estrazione dell'enzima lipolitico, vengono trattati con cc. 200 di acqua distillata alcalinizzata con fosfato sodico e potassico ad un $\text{pH} = 7,8$. Si filtra dopo 20 minuti per carbone e caolino; così viene usato per le esperienze.

Gli esperimenti furono eseguiti usando materiale sterile in tubi di Thunberg opportunamente modificati e accuratamente privati di aria. Usammo per ogni tubo di Thunberg cc. 2,0 di soluzione acquosa di enzima, cc. 1,0 di soluzione di glucosio al 10%, cc. 2,0 di sostanza tampone per mantenere un $\text{pH} = 7,8$ e cc. 0,5 di una soluzione acquosa 1/5000 di bleu di metilene. Nei tubi di Thunberg fu fatto il vuoto e furono posti in termostato a 37° . Si prepararono due controlli, contenenti il primo il glucosio, il bleu di metilene e la sostanza tampone, il secondo contenente enzima, il bleu di metilene e la sostanza tampone.

Dopo 4 ore fu osservata la decolorazione dei tubi, tranne quelli di controllo. Dopo 8 ore venne determinata la quantità di CO_2 prodotta.

Dall'esperimento, come si vedrà nei protocolli, consegue che *l'enzima deidrogenante, ottenuto col nostro processo di estrazione, riesce ad una completa scomposizione del glucosio e dell'acido ossalico con produzione di CO_2 (protocolli 1-2-3).*

La costanza del fenomeno dell'ossidazione totale dello zucchero per mezzo dell'enzima estratto dal fegato ci indusse a provare se l'aggiunta di altre sostanze ne modificava l'azione deidrogenante. Abbiamo esperimentato l'aggiunta di vari ormoni.

Abbiamo osservato così che l'aggiunta di piccole quantità di insulina, per sè inattive sullo zucchero, aumenta la quantità di CO_2 prodotta, ossia di zucchero bruciato (protocollo 4).

Abbiamo preparato in fiale sterili ed atossiche l'enzima in esame e naturalmente l'abbiamo sperimentato nel coniglio prima e poi nell'uomo.

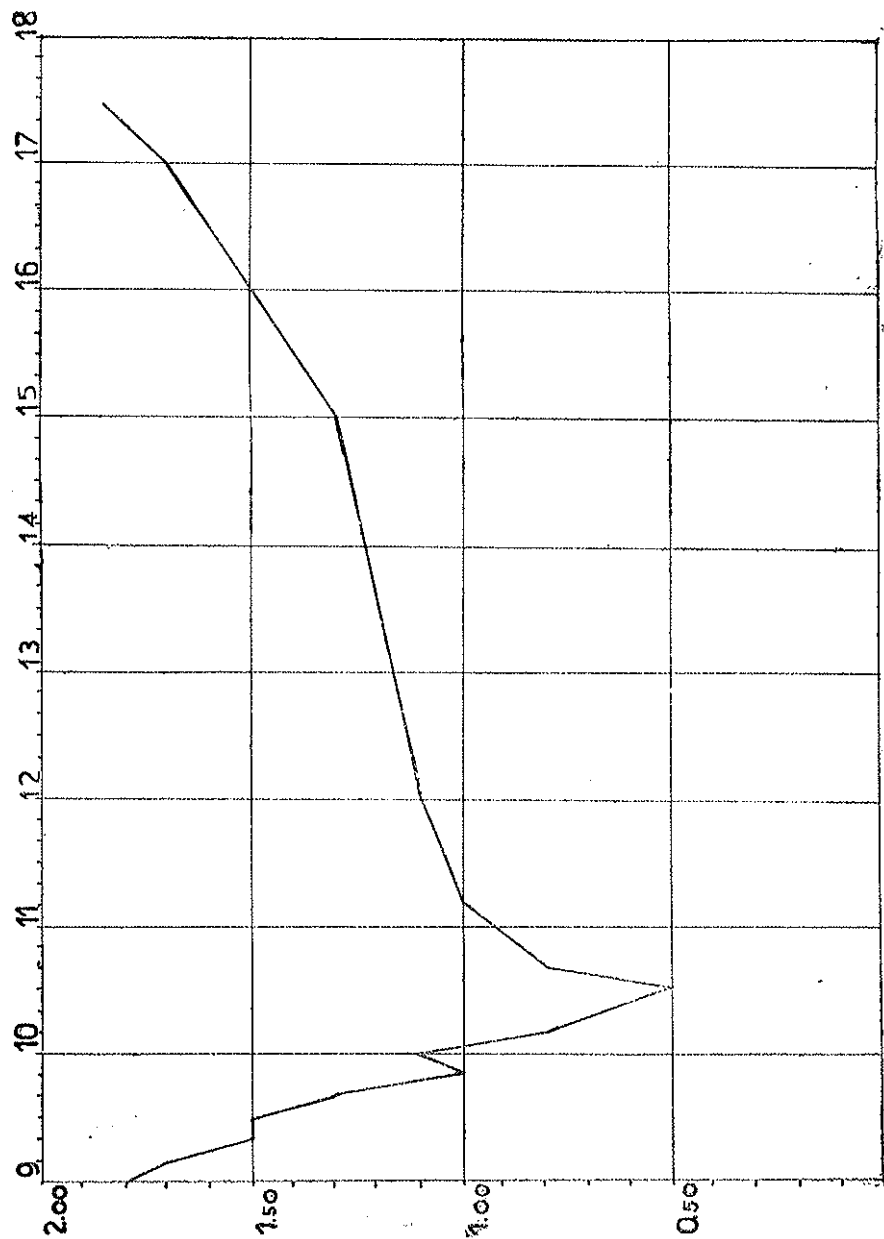


FIG. 1.

Tralasciando i numerosi protocolli riguardanti questi esperimenti *in vivo* ad un più lungo e dettagliato lavoro, riteniamo di poter esporre alcune conclusioni sulla base delle molte decine di osservazioni fatte.

Nel coniglio a digiuno come per la prova dell'insulina, l'iniezione endovenosa di cc. 5 di enzima determina un progressivo abbassamento del tasso glicemico che s'inizia già dopo 10 minuti dall'iniezione e produce una curva di ipoglicemia del tutto paragonabile a quella ottenuta dalle iniezioni di insulina, con una discesa graduale nelle prime ore e una ripresa fino al tasso glicemico di partenza e talora superiore. Non abbiamo mai osservato fenomeni di choc, neppure quando la ipoglicemia era arrivata a 0,40 % (protocollo 5).

Nell'uomo a glicemia normale si ha un costante abbassamento nelle prime ore dall'iniezione, talora con fenomeni subiettivi di malessere correggibili con la somministrazione di zucchero.

Nei diabetici pancreatici gravi giovanili la iniezione endovenosa dell'enzima deidrogenante è seguita da un abbassamento del tasso glicemico, dalla diminuzione dell'acetone e dalla scomparsa dei fenomeni di intossicazione acida. Nei diabetici colpiti da malattie febbrili intercorrenti, l'insulina dimostra scarsa efficacia, mentre l'associazione dell'insulina e dell'enzima porta a un *forte* abbassamento della curva glicemica della durata di sei o sette ore.

Per interpretare queste osservazioni è della massima importanza studiare i rapporti che esistono fra l'enzima e l'insulina, nel senso che la scomposizione dello zucchero viene operata dall'enzima ossidante. In questo processo l'insulina gioca una parte di grande importanza, probabilmente come regolatore della funzione enzimatica.

Dagli esperimenti sopra riferiti risulta che l'enzima è capace di ridurre rapidamente il tasso glicemico sia nell'uomo normale che nell'ammalato. In altre parole l'enzima è capace di bruciare nell'organismo umano lo zucchero circolante.

È vero che l'insulina iniettata abbassa il tasso glicemico, e nelle curve che si possono costruire negli animali e nell'uomo vi è parallelismo fra l'iniezione di insulina e l'iniezione di enzima. Ma *in vitro* l'insulina da sola non produce ossidazione dello zucchero come l'enzima, mentre l'associazione di enzima più insulina nella provetta produce un aumento della ossidazione dello zucchero, superiore a quella ottenuta col solo enzima. L'iniezione nell'uomo di insulina e di enzima

produce una diminuzione del tasso glicemico maggiore di quello ottenuto dall'uno o dall'altro dei due preparati. Il che porta a concludere che l'azione insulinica è in funzione dell'enzima ossido-riducente.

Certo è che si tratta di azioni diverse: l'enzima produce bruciamento dello zucchero, l'insulina verosimilmente è un regolatore di questo fenomeno, della massima importanza per la vita.

Molteplici fattori possono rendere gli enzimi inattivi o insufficienti come ad esempio le malattie infettive e le loro tossine. Sia gli enzimi ossido-riducenti, sia i lipolitici, come anni addietro noi abbiamo potuto ampiamente dimostrare⁽¹⁾, sono inibiti nella loro azione durante il decorso di malattie infettive. Cioè nel decorso di queste l'enzima ossido-riducente viene danneggiato e l'insulina, che agisce in quanto trova l'enzima attivo, rimane anch'essa inefficace; l'introduzione dell'enzima produce allora una ripresa del funzionamento dell'insulina.

Riassumendo: *l'enzima ossido-riducente scompone il glucosio tanto nella provetta quanto nell'organismo, mentre l'insulina regola l'azione enzimatica. Ciò è confermato dal fatto che l'insulina non agisce quando per cause infettive l'enzima è attenuato o distrutto. Le variazioni nei processi ossidativi sono conseguenza dell'azione enzimatica, regolata, aumentata, diminuita dall'azione ormonale.*

L'ormone insulinico non agisce direttamente sulla sostanza da scomporre, ma agisce sull'enzima, per cui se questo viene distrutto rimane nulla l'azione ormonale.

PROTOCOLLO 1.

- 1) cc. 2,0 enzima n. 3 + cc. 1,0 soluzione di glucosio 10 % + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 soluzione bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 ++++ (precipitato molto abbondante)
- 2) cc. 2,0 enzima n. 5 + cc. 1,0 soluzione di glucosio 10 % + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 +++

⁽¹⁾ M. GHIRON, «Zentralblatt für innere Medizin», 1933, n. 16; «Forschung», Bd. 14, Heft 2 (1934).

- 3) cc. 2,0 enzima n. 6 + cc. 1,0 soluzione di glucosio 10 % + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 +++
- 4) controllo 1 = cc. 1,0 soluzione glucosio 10 % + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = nessuna decolorazione
dopo 8 ore = nessun precipitato e nessuna decolorazione
- 5) controllo 2 = cc. 2,0 enzima + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = nessuna decolorazione
dopo 8 ore = nessun precipitato e nessuna decolorazione.

PROTOCOLLO 2.

- 1) cc. 2,0 enzima n. 6 + cc. 1,0 soluzione di glucosio 10 % + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato.
dopo 8 ore = BaCO_3 ++
- 2) cc. 2,0 enzima n. 6 + cc. 1,0 soluzione di maltosio 10 % + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 ++
- 3) cc. 2,0 enzima n. 6 + cc. 1,0 soluzione di lattosio 10 % + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 ++
- 4) cc. 2,0 enzima n. 6 + cc. 1,0 soluzione di saccarosio 10 % + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 di bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 +
- 5) controllo = cc. 2,0 enzima + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = nessuna decolorazione
dopo 8 ore = nessun precipitato e nessuna decolorazione.

PROTOCOLLO 3.

- 1) cc. 2,0 enzima n. 3 + cc. 1,0 soluzione satura di ossalato di ammonio + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene.
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 +++
- 2) cc. 2,0 enzima n. 6 + cc. 1,0 soluzione satura di ossalato di ammonio + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 +++
- 3) controllo = cc. 1,0 soluzione satura di ossalato di ammonio + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorazione
dopo 8 ore = nessun precipitato e nessuna decolorazione

PROTOCOLLO 4.

- 1) cc. 1,0 insulina (10 unità) + cc. 1,0 soluzione di glucosio 10% + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = nessuna decolorazione
dopo 8 ore = nessun precipitato e nessuna decolorazione
- 2) cc. 2,0 enzima n. 8 + cc. 1,0 soluzione di glucosio al 10% + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 +++
- 3) cc. 1,0 insulina (10 unità) + cc. 2,0 enzima n. 8 + cc. 1,0 soluzione di glucosio al 10% + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
dopo 4 ore = decolorato
dopo 8 ore = BaCO_3 +++
- 4) cc. 1,0 enzima n. 8 + cc. 1,0 soluzione di glucosio 10% + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
Dopo 4 ore = decolorato
Dopo 8 ore = BaCO_3 +

- 5) cc. 1,0 insulina (10 unità) + cc. 1.0 enzima n. 8 + cc. 1,0 soluzione di glucosio 10% + cc. 2,0 sostanza tampone + cc. 0,5 bleu di metilene
Dopo 4 ore = decolorato
Dopo 8 ore = BaCO_3 ++

PROTOCOLLO 5.

Coniglio del peso di kg. 2,500 a digiuno

Ore 9,00 glicemia 1,70‰

Iniezione endovenosa di cc. 5,0 di enzima n. 8

Ore	9,10	glicemia	1,60‰
»	9,20	»	1,40‰
»	9,30	»	1,40‰
»	9,40	»	1,20‰
»	9,50	»	0,90‰
»	10,00	»	1,00‰
»	10,10	»	0,70‰
»	10,30	»	0,40‰
»	10,40	»	0,70‰
»	11,00	»	0,90‰
»	12,00	»	1,00‰
»	15,00	»	1,20‰
»	17,00	»	1,60‰
»	17,30	»	1,75‰

CONTRIBUTO ALLO STUDIO LOCALE DELLE TRASFORMAZIONI PUNTUALI FRA DUE PIANI (*)

LAURA FARINA

SUMMARIVM. — Perpenduntur punctuales transformationes inter proximas infinitesimas regiones duorum earum punctorum correspondentium, cum duo vel tres inflexionales dimensiones inter se simul incident; hae transformationes investigantur usque ad determinationem alicuius relationis intrinsecae localis.

PREMESSA

1. — Le trasformazioni puntuali fra due piani proiettivi sono state studiate dal VILLA e dal BOMPIANI⁽¹⁾ secondo differenti punti di vista.

È noto che una trasformazione puntuale determina una proiettività fra le direzioni uscenti da due punti corrispondenti O ed \bar{O} e che, in generale, esistono tre direzioni per O tali che ad elementi di flesso ad esse tangenti corrispondono elementi di flesso per \bar{O} ; queste direzioni sono dette *caratteristiche* od anche *inflessionali*.

Il BOMPIANI ed il VILLA⁽²⁾ hanno dimostrato che *solo lungo tali direzioni* supposte distinte la trasformazione è approssimabile fino all'intorno del 2° ordine da proiettività, che vengono dette *caratteristiche*, mentre l'approssimazione fino all'intorno del second'ordine secondo

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 15 settembre 1944.

(1) E. BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, (« Atti R. Acc. d'Italia », (6), 13, 1942, 837-848).

(2) M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi* (« Rend. R. Acc. d'Italia », (7), 3, 1942).

direzioni qualunque è possibile mediante trasformazioni quadratiche, che vengono dette per questa loro proprietà, *osculatrici*: e ne esistono ∞^2 . Il BOMPIANI poi, esaminando il comportamento di esse fino all'intorno del 3° ordine, ha posto in evidenza per ciascuna quattro *direzioni d'iperosculazione*, mediante le quali si riesce a dare un riferimento proiettivo intrinseco e una forma canonica della trasformazione.

In questa Nota ci proponiamo di esporre i risultati analoghi a quelli ricordati relativi al caso in cui le direzioni inflessionali non sono tutte distinte.

STUDIO LOCALE DELLA CORRISPONDENZA
NEL CASO DI DUE DIREZIONI INFLESSIONALI COINCIDENTI

2. - Siano

$$[2.1] \quad \begin{cases} \bar{x} = ax + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \dots \\ \bar{y} = ay + b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2 + \dots \end{cases}$$

le equazioni, in coordinate non omogenee, di una trasformazione puntuale fra due piani proiettivi π e $\bar{\pi}$, regolare negli interni di due punti corrispondenti O ed \bar{O} di coordinate (001) , in relazione ad un riferimento in cui gli assi e le rette $x=y$, $\bar{x}=\bar{y}$ si suppongono corrispondenti nelle proiettività subordinate dalla trasformazione fra i fasci di centro O, \bar{O} .

Ad un \bar{E}_2 di flesso $\bar{y} = \bar{m}\bar{x} + [3]$ corrisponde un $E_2 y = mx + [3]$ pure di flesso se, e solo se,

$$[2.2] \quad a_{02}m^3 + (2a_{11} - b_{02})m^2 + (a_{20} - 2b_{11})m - b_{20} = 0$$

Questa equazione, supposta non identica, è l'equazione delle direzioni inflessionali associate ad O . Supposto che essa abbia una radice doppia e fatte coincidere le due rette inflessionali che le corrispondono con $y=0$ e la terza con $x=0$ risulta $a_{02}=0, a_{20}=2b_{11}, b_{20}=0$ e le [2.1] divengono

$$[2.3] \quad \begin{cases} \bar{x} = ax + a_{20}x^2 + 2a_{11}xy + \dots \\ \bar{y} = ay + a_{20}xy + b_{02}y^2 + \dots \end{cases}$$

La proiettività caratteristica sulla direzione inflessionale semplice ha l'equazione $\bar{y} = \frac{\alpha y}{1 - \frac{b_{02}}{\alpha} y}$. Analoga proiettività di equazione $\bar{x} = \frac{\alpha x}{1 - \frac{a_{20}}{\alpha} x}$

sussiste per la direzione inflessionale doppia. Poichè le direzioni inflessionali relative ad un punto O di una trasformazione quadratica sono le congiungenti O con i punti fondamentali, se esistono trasformazioni quadratiche osculatrici in O alla trasformazione puntuale esse non devono avere alcun punto base al di fuori delle direzioni inflessionali; anzi due di essi dovranno essere infinitamente vicini ad un punto della retta inflessionale doppia $y=0$ ed il terzo sulla direzione inflessionale semplice $x=0$. Se indichiamo con $l \equiv 1 - ux - vy = 0$ la retta per i due punti base distinti e $l - \sigma y = 0$ la tangente alle coniche della rete omaloidica nel primo di essi, di coordinate omogenee $(10u)$, tre coniche della rete sono

$$[2.4] \quad x \{ l - \sigma y \} = 0, \quad y l = 0, \quad l^2 = 0$$

Le equazioni di una trasformazione quadratica determinata dalla rete di coniche individuata dalle [2.4] e che approssimi la [2.3] fino all'intorno del 1° ordine sono necessariamente del tipo:

$$[2.5] \quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x (l - \sigma y) \\ \bar{y} = \alpha y l \\ \bar{z} = l^2 - \beta x (l - \sigma y) - \gamma y l \end{cases}$$

cioè, in coordinate non omogenee,

$$[2.6] \quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x \{ 1 - (u + \beta)x + (v + \gamma - \sigma)y \} + [3] \\ \bar{y} = \alpha y \{ 1 + (u + \beta)x + (v + \gamma)y \} + [3] \end{cases}$$

Affinchè questa trasformazione quadratica coincida con la data fino all'intorno del 2° ordine deve essere

$$[2.7] \quad \alpha(u + \beta) = a_{20} \quad \alpha(v + \gamma - \sigma) = 2a_{11} \quad \alpha(v + \gamma) = b_{02}$$

Scelti u e v ad arbitrio e ricavati in conseguenza β, γ, σ da queste relazioni, le [2.6] sono le equazioni di una determinata trasformazione quadratica osculatrice. Esistono quindi ∞^2 trasformazioni quadratiche che approssimano la data fino all'intorno del 2° ordine. Le [2.5] s'invertono nelle

$$[2.8] \quad \begin{cases} x = \bar{x}\bar{l} \\ y = \bar{y}(\bar{l} - \sigma\bar{y}) \\ \bar{z} = \bar{l}(l - \sigma y) + u\bar{x}\bar{l} + v\bar{y}(l - \sigma y) \end{cases}$$

ove $\bar{l} \equiv \beta\bar{x} + \gamma\bar{y} + \alpha\bar{z}$.

Se assumiamo come $\bar{P}_1(100), \bar{P}_2(010)$ in $\bar{\pi}$ gli omologhi nelle proiettività caratteristiche dei punti $P_1(100), P_2(010)$ scelti ad arbitrio in π si ha $a_{20} = b_{02} = 0$. Dovrà allora essere $\beta = -u, \gamma = -v$, per cui le [2.5], [2.8] si riscrivono

$$[2.5'] \quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x(l - \sigma y) \\ \bar{y} = \alpha y l \\ \bar{z} = l^2 + u x(l - \sigma y) + v y l \end{cases}$$

e, posto $\bar{l} \equiv \alpha\bar{z} - u\bar{x} - v\bar{y}$

$$[2.8'] \quad \begin{cases} x = \bar{x}\bar{l} \\ y = \bar{y}(\bar{l} - \sigma\bar{y}) \\ \bar{z} = \bar{l}(\bar{l} - \sigma\bar{y}) + u\bar{x}\bar{l} + v\bar{y}(\bar{l} - \sigma\bar{y}) \end{cases}$$

Notiamo che per la rete omaloidica in $\bar{\pi}$ è $\bar{l} - \sigma\bar{y} = 0$ la congiungente i due punti fondamentali, mentre $\bar{l} = 0$ è la tangente in $(\alpha 0 u)$ a tutte le coniche della rete. Poichè i punti fondamentali in π sono $S_1(10u), S_2(01v)$ e la tangente in S_1 incontra OS_2 in $T(0, 1, v + \sigma)$ e in $\bar{\pi}$ gli analoghi punti sono $\bar{S}_1(\alpha 0 u), \bar{S}_2(0, \alpha, v + \sigma), \bar{T}(0 \alpha v)$ si vede che la proiettività caratteristica su $y = 0$ fa corrispondere S_1 ed \bar{S}_1 , mentre la proiettività caratteristica su $x = 0$ fa corrispondere ad S_2 il punto \bar{T} e a T il punto \bar{S}_2 . Se si fissano a piacere S_1, S_2 resta determinato T , quindi la configurazione analoga in $\bar{\pi}$; ma con ciò, a differenza del caso generale, non resta determinato un riferimento fra i due piani.

3. - Le [2.5] in coordinate non omogenee e fino all'intorno del 3° ordine si scrivono

$$[3.1] \quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x(1 - \sigma y - v\sigma y^2) + [4] \\ \bar{y} = \alpha y(1 + u\sigma xy) + [4] \end{cases}$$

Confrontiamo questa con la trasformazione data cioè con

$$[3.2] \quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x(1 - \sigma y) + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ \bar{y} = \alpha y + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 \end{cases}$$

Dove, per le [2.7], abbiamo posto $-\alpha\sigma$ al posto di $2a_{11}$.

Se si cercano le direzioni di iperosculazione, ossia le direzioni lungo le quali le [3.1], [3.2] operano allo stesso modo fino all'intorno del 3° ordine, si trova per esse l'equazione

$$a_{03}m^4 + (3a_{12} - b_{03} + \alpha v\sigma)m^3 + (3a_{21} - 3b_{12} + \alpha u\sigma)m^2 + (a_{30} - 3b_{21})m - b_{30} = 0$$

Vediamo ora se esistono trasformazioni osculatrici tali che una delle direzioni di iperosculazione sia tripla, cioè tali che l'equazione precedente sia equivalente a

$$(m - \lambda)^3(m - \mu) = 0$$

Dev'essere

$$[3.3] \quad \begin{cases} 3\lambda + \mu = -\frac{3a_{12} - b_{03} + \alpha v\sigma}{a_{03}} & 3\lambda(\lambda + \mu) = \frac{3a_{21} - 3b_{12} + \alpha u\sigma}{a_{03}} \\ \lambda^2(3\mu + \lambda) = -\frac{a_{30} - 3b_{21}}{a_{03}} = -A & \lambda^3\mu = -\frac{b_{30}}{a_{03}} = B \end{cases}$$

Le ultime due relazioni determinano λ e μ in funzione di A e B , che sono noti non appena siano date le [3.2]. Se si elimina μ fra esse si ha per la direzione tripla l'equazione del 4° grado

$$[3.4] \quad \lambda^4 + A\lambda + 3B = 0$$

Esistono quindi quattro coppie λ, μ del tipo cercato poichè per ogni radice di questa equazione si ha un valore di μ . Poichè inoltre le [3.3] determinano u e v una volta assegnato λ , e quindi una trasformazione quadratica, possiamo, in relazione alla scelta di λ , fissare il riferimento nei due piani π e $\bar{\pi}$. Assumiamo in π : la congiungente i punti fondamentali della trasformazione quadratica, determinata dalle [3.3] in conseguenza di λ , come retta impropria $z=0$ ($u=v=0$) e il punto unità nel punto comune alla tangente fissa alle coniche della rete ed alla direzione di iperosculazione tripla scelta: si ha $\sigma=1, \lambda=1$ per cui $A+3B+1=0$, che esplicitamente si scrive

$$[3.5] \quad a_{30} - 3b_{21} - 3b_{30} + a_{03} = 0$$

Su $\bar{\pi}$ risulta « retta impropria » cioè $\bar{z}=0$, la congiungente i punti fondamentali \bar{S}_1, \bar{T} e si può assumere il punto unità sulla tangente e nella direzione di iperosculazione tripla anch'essa rappresentata da $\lambda=1$ con che $\alpha=\sigma$ e quindi $\alpha=1$. Assieme alla [3.5] tenendo presente che $\mu = -\frac{b_{30}}{a_{03}}$ si scrivono dopo ciò le seguenti relazioni fra i coefficienti della trasformazione

$$[3.6] \quad \begin{cases} -b_{30} + 3a_{12} - b_{03} + 3a_{03} = 0 \\ -a_{21} + b_{12} - b_{30} + a_{03} = 0 \end{cases}$$

Assegnati ad arbitrio $a_{30}, a_{12}, a_{21}, a_{03}, b_{30}$ le [3.5], [3.6] determinano b_{12}, b_{21}, b_{03} . Abbiamo così cinque invarianti del 3° ordine e la forma canonica

$$[3.7] \quad \begin{cases} \bar{x} = x(1-y) + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4] \\ \bar{y} = y + b_{30}x^3 + (a_{30} - 3b_{30} + a_{03})x^2y + \\ \quad + 3(b_{30} - a_{03} + a_{21})xy^2 + (3a_{03} + 3a_{12} - b_{30})y^3 + [4] \end{cases}$$

per le equazioni della trasformazione.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEGLI INVARIANTI

4. - Vogliamo ora costruire geometricamente un sistema di invarianti equivalenti ai cinque trovati e dare quindi mediante essi un significato geometrico ai cinque coefficienti relativi al 3° ordine. Si ricavano subito a_{03}, b_{30} come invarianti di contatto fra gli E_3 $x = -a_{03}y^3$, $y = -b_{30}x^3$ corrispondenti ad $\bar{x}=0, \bar{y}=0$ con $x = -y^3, y = -x^3$ rispettivamente (si noti che $x = -y^3, y = -x^3$ hanno, rispetto al fissato riferimento, un ben preciso significato geometrico). Osserviamo che $-\frac{b_{30}}{a_{03}}$ si presenta anche nel birapporto relativo alle direzioni inflessionali e a quelle di iperosculazione per $\lambda=1$. Niente di nuovo si ricava dall'esame di altre direzioni di iperosculazione relative alle [3.4] e da trasformati di elementi E_3 . Per determinare a_{21} osserviamo che $\left(0, \frac{-1}{6a_{21}}\right)$ è la posizione limite $\neq 0$ su $x=0$ dell'intersezione di $x=0$ e della direzione inflessionale associata ad un punto P ed avente $x=0$ come posizione limite quando P tende ad O su di una curva tangente ad $y=0$ (le intersezioni rimanenti delle direzioni inflessionali in P sia su $x=0$ che su $y=0$ hanno per limite O).

Un procedimento analogo a quello seguito dal BOMPIANI (*loc. cit.* pag. 847-848) permette di ricavare il significato geometrico di a_{30}, a_{12} . Ecco come si procede. Proiettiamo su $y=0$ l'elemento $y = -b_{30}x^3$ corrispondente ad $\bar{y}=[4]$ da un punto di $x=0$. Si ha la corrispondenza $x' = x + [4]$ fra le ascisse x dei punti dell'elemento e quelle x' delle proiezioni dei medesimi. Per la corrispondenza [3.7] è poi $\bar{x} = x + a_{30}x^3 + [4]$ e il prodotto delle due corrispondenze, posto x al posto di x' , è approssimata fino al 3° ordine da

$$[4.1] \quad a_{30}\bar{x}x^2 + x - \bar{x} = 0$$

che rappresenta una proiettività fra i punti di $\bar{y}=0$ e le coppie di un'involuzione su $y=0$. Alla coppia passante per $x=1$ corrisponde in $\bar{y}=0$ il punto $\left(\frac{1}{1-a_{30}}, 0\right)$ che permette di ricavare a_{30} come birapporto in relazione ai punti (001), (100), (101).

Se si considera il trasformato dell'elemento $\bar{x}=[4]$ e si procede in modo analogo si ottiene una corrispondenza analoga alla [4.1] fra i punti di $y=0, \bar{y}=0$ e si ricava quindi a_{12} . Dopo ciò i cinque coefficienti della trasformazione [3.7] sono tutti geometricamente noti.

IL CASO DELLE TRE DIREZIONI INFLESSIONALI COINCIDENTI

5. - Riprendiamo le equazioni [1.1] della trasformazione puntuale e l'equazione [1.2] delle direzioni inflessionali. Le equazioni [1.1] divengono

$$[5.1] \quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha x + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + \varphi_3(xy) + [4] \\ \bar{y} = \alpha y + 2a_{11}y^2 + \psi_3(xy) + [4] \end{cases}$$

quando ci si ponga nell'ipotesi che le direzioni inflessionali per O siano tutte coincidenti nella $y=0$ e si assumano corrispondenti nella proiezione caratteristica $\left[\bar{x} = \frac{\alpha x}{1 - \frac{a_{20}x}{\alpha}} \right]$ che sussiste tuttora per la

direzione inflessionale tripla, i punti $P_1(100), \bar{P}_1(100)$.

In questo caso una trasformazione quadratica osculatrice dovrà essere determinata da una rete di coniche aventi a comune un E_2 con centro sulla retta inflessionale tripla $y=0$, giacchè non deve esserci alcun punto fondamentale al di fuori della retta stessa.

La rete di coniche definita dalle

$$(z - ux - vy) + \rho y^2 = 0, \quad (z - ux - vy)y = 0, \quad (z - ux - vy)^2 = 0$$

ha appunto un E_2 base, di centro $(10u)$ e con tangente $z - ux - vy = 0$ definito da ρ . La trasformazione quadratica osculatrice determinata da questa rete se coincide con la data fino all'intorno del 1° ordine ha le equazioni

$$[5.2] \quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha \{ (z - ux - vy)x + \rho y^2 \} \\ \bar{y} = \alpha (z - ux - vy)y \\ \bar{z} = (z - ux - vy)^2 + \beta \{ (z - ux - vy)x + \rho y^2 \} + \gamma (z - ux - vy)y \end{cases}$$

le quali, in coordinate non omogenee e fino all'intorno del 3° ordine, posto per brevità $A \equiv ux + vy$, $B \equiv \beta x + \gamma y$, si scrivono

$$[5.3] \begin{cases} \bar{x} = \alpha \{ x - (A - B)x + \rho y^2 + (A - B)^2 x + \rho(2A - 2B + \gamma y)y^2 \} + [4] \\ \bar{y} = \alpha \{ y - (A - B)y + (A - B)^2 y - \rho \beta y^3 \} + [4] \end{cases}$$

Perchè questa trasformazione quadratica coincida con la data fino al 2° ordine incluso occorre e basta che sia $\beta = u$, $\alpha(v - \gamma) = 2a_{11}$, $\alpha\rho = a_{02}$. Si hanno quindi ∞^2 trasformazioni quadratiche osculatrici. Le [5.3] si riscrivono ora

$$[5.4] \begin{cases} \bar{x} = \alpha \{ x + (v - \gamma)xy + \rho y^2 + (v - \gamma)^2 xy^2 + \rho(2v - \gamma)y^3 \} + [4] \\ \bar{y} = \alpha \{ y + (v - \gamma)y^2 + [(v - \gamma)^2 - \rho u]y^3 \} + [4] \end{cases}$$

6. - Le direzioni di iperosculazione per questa trasformazione alla [5.1] hanno l'equazione

$$[a_{03} - \alpha\rho(2v - \gamma)]m^4 + [3a_{12} - b_{03} - \alpha\rho u]m^3 + \\ + [3a_{21} - 3b_{12}]m^2 + [a_{30} - 3b_{21}]m - b_{30} = 0$$

Vediamo se, come nel caso precedente si possono far coincidere tre direzioni d'iperosculazione. Scritte le analoghe delle [3.3] si ottiene l'equazione di 2° grado

$$[6.1] \quad (a_{21} - b_{12})\lambda^2 - (3b_{21} - a_{30})\lambda = 2b_{30}$$

analoga alla [3.4]. Si hanno cioè due trasformazioni quadratiche osculatrici con una retta d'iperosculazione tripla ed una semplice. In relazione ad una di esse, presa la retta tripla come asse $x=0$ e la semplice come retta $x=y$ e inoltre: la tangente al suo E_2 base come retta $z=0$ ($u=v=0$), si hanno per i coefficienti le condizioni

$$[6.2] \quad b_{12} = a_{21}, \quad a_{30} - 3b_{21} - b_{30} = 0, \quad 3a_{12} = b_{03}, \quad \alpha a_{03} = 2a_{11}$$

Con ciò le [5.2] divengono

$$[6.3] \quad \begin{cases} \bar{x} = \alpha xz + a_{02}y^2 \\ \bar{y} = \alpha yz \\ \bar{z} = z^2 - a_{03}yz \end{cases}$$

Completiamo il riferimento nel piano π prendendo come punto unità l'intersezione di $x=y$ e della conica $\alpha xz + a_{02}y^2 = 0$ corrispondente ad $\bar{x}=0$ ossia appartenente alla rete omaloidica e tangente ad $x=0$ ($\alpha = -a_{02}$).

Su $\bar{\pi}$ prendiamo l'asse $\bar{z}=0$ in modo che la conica $z^2 - a_{03}yz = 0$ corrispondente in π si riduca a $z^2 = 0$ ($a_{03}=0$) e il punto unità su $\bar{x}=0$ nel corrispondente del punto unità (111) su π , nella trasformazione quadratica ($\alpha=1$). Così completati i riferimenti nei due piani si ha per la trasformazione puntuale la forma canonica

$$[6.4] \quad \begin{cases} \bar{x} = x - y^2 + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + [4] \\ \bar{y} = y + (a_{30} - 3b_{21})x^3 + 3b_{21}x^2y + 3a_{21}xy^2 + 3a_{12}y^3 + [4] \end{cases}$$

e i quattro coefficienti $a_{30}, a_{21}, a_{12}, b_{21}$ sono i suoi invarianti proiettivi fino al 3° ordine incluso.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEGLI INVARIANTI

Costruiamo ora, come al n. 4, un sistema di invarianti equivalenti ai quattro trovati. La considerazione di elementi trasformati di elementi differenziali noti permette solo di determinare $a_{30} - 3b_{21}$ come invariante di contatto di $\bar{y} = (a_{30} - 3b_{21})\bar{x}^3$, omologo nelle [6.4] di $y=0$, con $\bar{y} = \bar{x}^3$ e b_{21} come funzione dell'invariante relativo a $\bar{x} = \bar{y} + 3b_{21}\bar{y}^3$, corrispondente di $x=y+y^2$ insieme a $\bar{x} = \bar{y} + \bar{y}^3$. Per gli invarianti rimanenti procediamo come al n. 4. All'elemento $\bar{x}=[4]$ corrisponde, per le [6.4] l' E_2 $x=y^2+[4]$ che, proiettato da (010) su $x=0$, dà luogo alla corrispondenza $y'=y+[4]$. Il prodotto di essa e dell'altra $\bar{y}=y+3a_{12}y^3+[4]$, determinata dalle [6.4] dà origine ad una corrispondenza fra gli assi $x=0, \bar{x}=0$ approssimata fino al 3° ordine dalla

$$[7.1] \quad 3a_{12}\bar{y}y^2 + y - \bar{y} = 0$$

analoga della [4.1]: per essa valgono considerazioni analoghe a quelle già fatte. Per ricavare infine un invariante che permetta di determinare a_{21} si consideri l'elemento $x=y+[4]$ e la corrispondenza $\bar{y}=y+(a_{30}+3a_{21}+3a_{12})y^3+[4]$ che viene in conseguenza determinata dalle [6.4] ecc.

NOTE SULLA RIPRODUZIONE IN CATTIVITÀ DEL CERVONE (*ELAPHIS QUATERRADIATUS*) LATR.

(Con una tavola)

ERMANNO BRONZINI

SUMMARIVM. — Auctor notum facit quid perspectum sit ex artificiali ovorum *Elaphidis quaterradiati* Latr. incubatione; eius conclusiones (quae differunt a conclusionibus quae a Peracca experimentis notae erant), attenta ratione qua incubatio facta est, videntur proxime exprimere id quod in rerum natura accidit quod attinet ad eam speciem.

Sull'incubazione artificiale e sulla schiusa delle uova di *Elaphis quaterradiatus* Latr. già il conte PERACCA ⁽¹⁾ fin dall'anno 1886, ha reso noto un complesso di acute e minuziose osservazioni; e tale è la serietà del lavoro e tanto il nome dell'illustre conoscitore di rettili, che ancor oggi, nei vari testi della materia, vengono riportate a proposito di questo *Elaphis* i risultati e le conclusioni delle esperienze del PERACCA, secondo cui l'incubazione delle uova di cervone dura 56 giorni ad avviene ad una temperatura media di 23° centigradi.

Anch'io, nel 1939, ho avuto occasione di praticare l'incubazione artificiale delle uova di *Elaphis quaterradiatus*: ma, pur avendo osservato in linea di massima gli stessi fenomeni già descritti dal conte PERACCA, i risultati da me ottenuti non concordano con i suoi nè per

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Lepri il 22 ottobre 1944.

(1) PERACCA MARIO C., Osservazioni intorno alla deposizione ed incubazione artificiale delle ova dell' *Elaphis quaterradiatus* (Latr.). In: « Bollettino dei Musei di Zoologia ed Anatomia Comparata della R. Università di Torino », Vol. I, n. 16, 19 novembre 1886.

quanto riguarda la durata nè per quanto si riferisce alla temperatura dell'incubazione. Per la qual cosa ritengo opportuno ritornare sull'argomento, onde esporre quelle osservazioni che, discordando dalle altre del PERACCA, portano necessariamente a conclusioni diverse dalle sue.

* * *

Il 18 maggio 1939 giunsero al nostro Zoo due femmine adulte di cervone, press'a poco delle stesse dimensioni e lunghezza ed in ottimo stato di salute, catturate una quindicina di giorni prima nel territorio di Zara. Io le misi in una gabbia assieme ad un grosso maschio della stessa specie catturato già da alcuni giorni nella campagna romana e subito portato al nostro rettilario.

Quivi la gabbia per i cervoni è costituita da un comodo terrario, riproducente il più possibile l'*habitat* preferito: una vaschetta con acqua corrente, circondata da una stretta fascia sabbiosa; rimanente terreno in terra di castagno, con erba, cespugli, alberelli. Sullo sfondo, un piccolo rilievo roccioso, con le sue anfrattuosità, permette al rettile di nascondersi alla vista (quando non gli vada di celarsi sotto la verdura) pur rimanendo esposto al sole, i cui raggi arrivano alla gabbia direttamente, essendo il soffitto della stanza di vetro, è per di più apribile. La temperatura media del terrario si mantiene sui 25° centigradi.

Non abituati, al nostro rettilario, alla riproduzione di rettili, nè io nè i guardiani ponemmo nei giorni seguenti attenzione al contegno dei cervoni. La mattina del 15 luglio il guardiano, entrando in gabbia per la quotidiana pulizia, scorgeva sotto ad un cespuglio, un ammasso di 11 uova color giallo-chiaro avorio, quasi grosse come quelle di gallina, ed incollate l'una all'altra da muco ormai rappreso. Il guscio pergamenaceo era già indurito, e le singole uova si presentavano ben gonfie, di forma grossolanamente ovoidale a tratti deformata per il mutuo contatto. Ne dedussi che la deposizione era avvenuta durante la notte, e che ormai da molte ore le uova avevano sentito l'azione dell'aria.

Il mattino del 22 luglio, in una anfrattuosità della roccia, furono trovate altre 12 uova, raggruppate insieme e simili nell'aspetto e nei

particolari alle prime, dalle quali differenziavansi solo per una colorazione più gialla del guscio e per il fatto che su questa tinta fondamentale avorio spiccavano qua e là alcune tonde macchioline bianche. Anche queste uova risultavano ormai deposte da molte ore; senza dubbio, erano dovute all'altra femmina.

Sulla traccia di quanto viene riferito da OTTO VON TOMASSINI e da altri autori ⁽¹⁾, secondo cui il cervone si accoppia in giugno e depone dal 15 luglio alla metà d'agosto, io sono portato a credere che nel caso da me descritto l'accoppiamento e, quindi, la riproduzione dei cervoni, sia avvenuto in cattività, mentre è da ritenersi meno probabile che le due femmine su-descritte, tolte alla vita libera nei primissimi giorni del mese di maggio, si fossero entro tale epoca già accoppiate e pertanto, giungendo al nostro Zoo, contenessero uova fecondate.

* * *

Nella mattinata del 15 luglio preparai una cassetta di lamiera, di forma cubica con lato di 30 cm. La riempii di erba e foglie; vi misi sopra le 11 uova e le ricoprii con un sottile e rado strato di muschio. Conficcai nell'erba un termometro. Introdussi tale cassetta in un'altra cassetta più grande (all'incirca di 50 cm. di lato) nella quale versai un po' d'acqua fredda. Questo apparato costituì l'incubatrice; e fu tenuto per tutto il tempo dell'incubazione in una cameretta bene illuminata, dove in alcune ore della giornata si raggiungeva la temperatura di 26° centigradi.

A differenza di quanto fece il PERACCA che collocò le uova sopra un letto di sabbia e, ricopertele con un leggero strato di muschio, lasciò che l'incubazione avvenisse ad opera del calore solare, usufruendo in tal modo di una temperatura variabile da un massimo (medio) di 26° ad un minimo (medio) di 19° centigradi, per cui ne risultò una temperatura media di incubazione di circa 23°, io sfruttai per l'incubazione delle uova il calore dovuto alla fermentazione delle

⁽¹⁾ Cfr. a tale proposito: BREHM A., *Tierleben*. « Lurche und Kriechtiere », secondo volume, pag. 367, Lipsia. 1913.

VANDONI C., *I rettili d'Italia*, pag. 195, Ed. Hoepli, Milano, 1914.

sostanze vegetali della cassetina; e poichè talvolta entro questa la temperatura saliva fino a 32°, io temperavo tale eccesso con aggiunta o con rinnovo di acqua fredda nella cassetta esterna, così che dopo alcune giornate di tentativi riuscivo a stabilizzare la temperatura sui 27° centigradi; ed il vantaggio di tale sistema, rispetto a quello adottato dal PERACCA, fu che la temperatura di incubazione si mantenne costante sia durante il dì che la notte, e superiore di ben 4° a quella media ottenuta dal PERACCA stesso.

Il giorno 22 luglio, quando l'altra femmina depose le 12 uova, collocai anche queste nell'incubatrice, avendo però cura di tenerle separate dalle prime.

Le uova si mantennero sempre uguali; dopo qualche giorno di incubazione, poichè mi parve che un uovo di quelli deposti il 15 luglio accennasse ad ammuffire, lo tolsi dall'incubatrice e lo apersi; ne apparve un embrione di 2 cm. e mezzo, rosso ed ancora palpitante.

Sicuro, dopo tale constatazione, che le uova erano fecondate e che lo sviluppo embrionale procedeva in maniera soddisfacente, dedicai da allora, per tutto il rimanente tempo, le maggiori cure alle uova, e pertanto non smisi mai di sorvegliare il funzionamento dell'incubatrice.

Intorno alla metà d'agosto, mi parve che le uova corressero il pericolo di seccare. Il guscio cominciava infatti ad afflosciarsi ed a raggrinzirsi, ed il contenuto pareva in diminuzione. Soprattutto le uova deposte il 22 luglio m'apparvero come le più malandate: il giorno 17 agosto (cioè, al ventisettesimo giorno d'incubazione) ne apersi una, e vi rinvenni, ancor vivo, un embrioncino bruno lungo 13 cm. Apersi contemporaneamente anche un uovo di quelli deposti il 15 luglio (i quali erano ormai al trentatreesimo giorno di incubazione) e potei osservare un embrione in vita, lungo ben 20 cm., di color bruno e con le macchie caratteristiche dei giovani cervoni già appariscenti.

Il mattino del 25 agosto, osservando le uova, ebbi l'impressione che quelle deposte il 15 luglio fossero meno floscie del solito, e che stessero per riprendere il primitivo turgore. E così per l'appunto accadde. Senonchè, prima ancora di avere riacquistato completamente l'aspetto turgido dei primi giorni, ecco, al mattino del 28 agosto, comparire improvvisamente e su cinque uova contemporaneamente (ed in tutte nella parte superiore) un taglio disposto secondo l'asse maggiore

ed all'incirca in corrispondenza della zona centrale di questo, lungo al massimo 2 cm., con margini ben netti e leggermente accartocciati verso l'interno. Si determinava in tal modo una stretta fessura ovale, attraverso la quale era dato distinguere un corpo scuro che si agitava lentamente.

Nel giro di un'ora comparvero su ogni uovo altre fessure; al termine della schiusa queste hanno raggiunto, per ciaseun uovo, il numero di 6 o 7. In generale, la seconda fessura ha la stessa direzione della prima, spostata a lato di questa di 5-6 mm., e situata verso uno dei poli. Anche la terza fessura segue di solito la direzione delle prime due, ed è di poco spostata da queste. Le fessure successive sono quasi sempre dirette in altra direzione, così da essere obliquamente disposte rispetto alle prime che finiscono per esserne intersecate determinando una più grande apertura a quattro o più lembi, attraverso la quale il serpentello emette il capo sforzandosi d'uscire.

Il PERACCA ha descritto minuziosamente le fasi della schiusa, e perciò io non vi insisto ulteriormente sopra, se non per dire che la fuoruscita dei piccoli avvenne nella mia incubatrice in un tempo aggirantesi tra le 4 e le 7 ore, contrariamente a quanto è accaduto al PERACCA il quale riferisce per le schiuse da lui osservate un tempo di ben 24 ore.

Come ho già detto, il piccolo comincia con l'emettere la sola testa; sta in questa posizione alcuni minuti, talvolta anche mezz'ora, poi si ritira di nuovo tutto quanto dentro l'uovo, per uscirne poco dopo con il capo ed il collo. Esegue questa manovra più volte, e ad ognuno di questi movimenti corrisponde uno sforzo sul guscio tendente ad allargare sempre più la fessura. Contemporaneamente, all'interno dell'uovo la rimanente parte del corpo si muove lentamente, ed il rettile si assesta pian piano preparandosi all'uscita definitiva. Questa avviene infine con un movimento netto e deciso: il neonato fa capolino dalla fessura, ormai molto larga, con la testa ed il collo. È molto mobile. Sta così qualche minuto; quindi, improvvisamente, sguscia fuori con agilità sorprendente, tutto quanto, in un attimo. Comincia subito a muoversi attivamente ed a girare per alcuni minuti; quindi va ad arrotolarsi sotto qualche groviglio di erba e muschio. L'obliterazione e conseguente caduta del cordone ombelicale avviene di solito dentro l'uovo durante le fasi della schiusa: su sette nascite osservate, un solo

piccolo nacque avendo ancora il cordone ombelicale, ma egli stesso se lo staccò dopo una diecina di minuti di movimenti rapidi e strisciamento sul suolo.

Dalle uova deposte il 15 luglio nacquero in tutto 7 individui. Poichè la schiusa si compì nella giornata del 28 agosto, ne consegue che l'incubazione fu di 44 giorni.

Le uova deposte il 22 luglio andarono tutte a male ad eccezione di una, che si schiuse il 2 settembre, con le stesse modalità e nello stesso tempo già osservati per le precedenti. Durata dell'incubazione: giorni 42.

* * *

Ecco adesso alcuni dati circa le dimensioni del corpo dei cervoni alla nascita:

lunghezza media . . .	cm. 30,5
diametro medio . . .	mm. 10
peso medio	g. 16

Per quanto riguarda l'aspetto e le caratteristiche somatiche, riporto integralmente la minuziosa ed esatta descrizione che ne fa il PERACCA:

« Parti superiori (dorso e fianchi) di un color bianco cenerognolo, volgente al bruno grigio sui fianchi, chiarissimo invece lungo la linea mediana del dorso. Sul capo osservansi dall'avanti all'indietro:

1) una sottile linea nera concava all'indietro, che, partendo dal margine anteriore dell'occhio, poniamo di destra, si porta in avanti in corrispondenza della narice, contorna il margine superiore dello scudetto rostrale e, lambendo la narice sinistra, termina al margine anteriore dell'occhio sinistro;

2) una sottile linea bianco-bruna, parallela alla precedente, di forma e decorso uguale;

3) un tratto semilunare nero, concavo all'indietro, che collega i due occhi;

4) un tratto semilunare bianco-grigio, parallelo al precedente e generalmente interrotto in tutto od in parte nel mezzo;

5) una grande macchia nera, che occupa tutta la rimanente parte del capo e l'occipite, dove si spartisce in due rami che, o si ricongiungono, limitando tra loro una macchia bianco-cenerognola, o terminano indipendentemente sul dorso, o si collegano con la prima macchia dorsale, ora tutti e due, ora uno solo. Dall'occhio parte una grossa fascia nera, che discende obliquamente all'indietro ad incontrare l'angolo della bocca.

Le piastre sopralabiali, gli scudetti naso-frenali e rostrali sono bianco brunicci arabescati di linee nere.

Sul dorso e sui fianchi si vedono sei serie longitudinali di macchie nere. Le due serie mediane sono generalmente fuse insieme formando una sola serie di grosse ed irregolari macchie nere, che diminuiscono in grossezza dal collo alla coda. Sovente si uniscono le precedenti alle seguenti irregolarmente e vengono a costituire una linea nera a zig-zag, che ricorda una simile disposizione delle macchie nella colorazione del dorso delle vipere.

Sui fianchi stanno, come ho detto, due per lato, due serie di macchie nere: la serie superiore fatta di macchie più piccole di quelle del dorso, tondeggianti, che talora confluiscono in qualche punto del corpo colle macchie dorsali: la serie inferiore fatta di macchie irregolari, quadrate, che talora comunicano colle macchie nere ventrali.

Le parti inferiori ora son ouniformemente di un colore grigio-nerastro, ora esistono due serie di macchie nero-grigie, che simulano due striscie nere, che stanno sui lati dei gastrostegi e che limitano una striscia irregolare mediana di un bianco rossigno poco spiccato. Il rossigno aumenta verso la gola dell'animale, dove è assai intenso e dove qua e là si vede orlare qualche scaglia ».

«Le squame dorsali del giovane *Elaphis* sono press'a poco lunghe e larghe egualmente, sono cioè a contorno spiccatamente ovale e non strette ed allungate e terminanti in punta come le squame degli adulti; di più la carena ben visibile nelle squame dorsali e caudali degli adulti è, nell'*Elaphis* neonato, mancante nella regione dorsale anteriore del corpo e visibile appena nella regione dorsale posteriore del corpo, mancando di nuovo completamente nelle squame della coda. Solo dopo la prima muta la carena delle squame comincia ad essere un po' più visibile sul dorso e si indovina nelle squame della coda e della parte anteriore dorsale del corpo ».

Il giorno 3 settembre uno dei 7 cervoni nati il 28 agosto mutò pelle. Entro il 6 settembre completarono la muta anche gli altri 6.

Nella giornata del 16 settembre tutti i giovani prendevano per la prima volta cibo, rappresentato da piccole lucertole vive di cui essi ne mangiarono tre o quattro per ciascuno.

Da quanto esposto, ne consegue che la prima muta avviene tra il sesto ed il nono giorno di vita, mentre la presa del cibo si inizia all'età di circa 20 giorni.

CONCLUSIONI

A proposito della durata dell'incubazione delle uova presso la specie *Elphis quateradiatus* Latr. così si esprime il PERACCA:

« L'incubazione era durata dal 23 luglio al 16 settembre, ossia 56 giorni, rimanendo le uova esposte ad una media temperatura di 23° ctg e mezzo.

Informatomi della media temperatura estiva del Napoletano ⁽¹⁾, seppi, dal chiar.^{mo} dottor FEDERICO SACCO che questa è a Napoli precisamente di 23°,8 ctg.

Posso dunque affermare che la durata dell'incubazione delle uova di *Elaphis quateradiatus* è in natura di circa 56 giorni, potendo le vicende atmosferiche estive allungarla od abbreviarla di alcuni giorni ».

I risultati delle mie esperienze mi portano a concludere ben diversamente dal PERACCA: l'incubazione delle uova deposte il 15 luglio durò 44 giorni, quella delle uova deposte il 22 luglio fu di 42 giorni. Circa l'affermazione se in natura l'incubazione debba aggirarsi sui 42-44 giorni anzichè sui 56, e viceversa, si può discutere quale delle due ipotesi possa apparire come più probabile.

Il PERACCA, come ho già detto, sfruttando per l'incubazione delle uova il calore solare, venne ad usufruire di una temperatura variabile tra i 19° ed i 26°, il che porta la temperatura media di incubazione sui 23° e mezzo. Io provocai con la fermentazione dei vegetali una temperatura che riuscii a stabilizzare entro qualche giorno intorno ai 27°.

Se in natura i cervoni dovessero affidare l'incubazione delle uova al solo calore solare, (come pare pensi il PERACCA), dovrebbero deporre le uova in luoghi soleggiati, ed in tal caso questi luoghi dovrebbero essere scoperti e quindi, al tempo stesso, esposti alla vista e, in genere, ai molteplici agenti esterni che ne comprometterebbero fin dall'inizio l'esistenza. È più probabile invece che le femmine depongano in luoghi reconditi e protetti contro qualunque evenienza, e perciò di difficile accesso alla illuminazione solare diretta. Questa sup-

(¹) Dal Napoletano, infatti il Peracca aveva ricenuto le femmine di cervone che deposero le uova oggetto della sua esperienza.

posizione appare ancora più accettabile se si pensa come sia ben difficile, per non dire quasi impossibile, percorrendo le campagne imbattersi in uova di rettili: il che significa che le madri hanno cura di partorire le uova in luoghi non in vista e non facilmente accessibili; nel qual caso, l'incubazione non può essere più affidata al semplice calore solare, ma devono necessariamente contribuire ad essa altre cause, da ricercarsi con tutta probabilità nel calore dovuto alla fermentazione di corpi vegetali, oppure in altre condizioni conseguenti a particolari ambienti. Ciò ammesso, viene logico pensare anche come, in siffatte condizioni, la Natura tenda sempre a realizzare una temperatura il più possibile costante; e da ciò apparirebbe chiaro che il metodo da me adottato si avvicina più di quello del PERACCA a quanto si attua in natura.

Riguardo al valore della temperatura, se l'esperienza del PERACCA ci dimostra che ad una media di 23° e mezzo è possibile l'incubazione, ci dimostra anche — confrontandola con i risultati del mio esperimento — che quando questa media è ottenuta tra i limiti i quali (come 19° e 26°) si allontanano molto dal valore medio, lo sviluppo embrionale subisce un rallentamento (perchè è notorio che un notevole abbassamento di temperatura ostacola i processi embrionali), e la schiusa stessa si compie in un tempo molto lungo (24 ore). Al contrario, una temperatura costante ed elevata come quella provocata dal sistema da me praticato, ha consentito l'incubazione in un periodo di tempo inferiore di ben 12-14 giorni a quello ottenuto dal PERACCA, e la schiusa si è compiuta celermente (4-7 ore).

In base a queste considerazioni, mi pare di dover concludere che la temperatura di 27°, rispetto a quella di 23° e mezzo, rappresenta l'optimum per l'incubazione delle uova di cervone; e poichè la Natura, sempre provvida a garantire l'esistenza di ogni specie, dispone le circostanze e gli istinti in maniera tale che tutte le manifestazioni vitali si svolgano in ambienti e condizioni il più possibilmente adatte a favorirle, io sono portato a concludere che il procedimento da me adoperato sia quello che più si avvicina a quanto si verifica nella vita libera, e ritengo perciò di poter affermare che anche in natura — contrariamente a quanto sostiene il PERACCA — l'incubazione delle uova di *Elaphis quateradiatus* Latr. si aggira sui 42-44 giorni, e si svolge presumibilmente ad una temperatura intorno ai 27° centigradi.

Ermanno Bronzini, *Note sulla riproduzione in cattività del Cerrone*
(*Elaphis Quaterradiatus*) Latr.



FIG. 1.

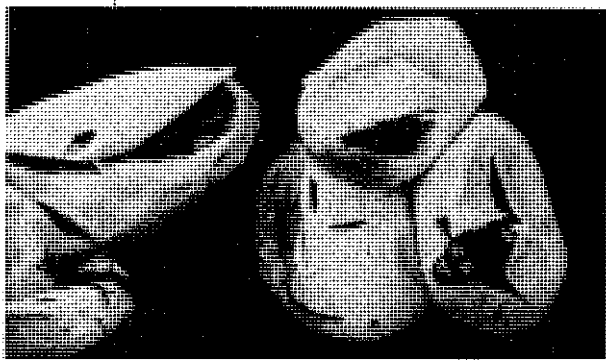


FIG. 2.



FIG. 3.

DETERMINAZIONI DIFFERENZIALI RELATIVE ALLE SUPERFICIE DI VERONESE (*)

E. BOMPIANI

SUMMARY. — Auctor, adhibens doctrinam contactus duarum algebricarum varietatum cuiusdam praefiniti typi, extruit superficies Veronesianae, quibus commune sit aut superficiei elementum secundi vel tertii ordinis (quod nequit esse generale elementum ex S_5), aut bina superficiei elementa secundi ordinis.

1. — Il problema del contatto d'ordine superiore al primo fra due superficie in un iperspazio (o di due V_k in S_n , con $k < n-1$) non è del tutto semplice data l'arbitrarietà delle rappresentazioni analitiche di esse (che non sono determinate dall'ente geometrico). Questo inconveniente non si presenta per il contatto del 1° ordine, bastando in questo caso esprimere che coincidono due piani (o due spazi lineari): in esso, anche se non si faccia intervenire esplicitamente, gioca in modo essenziale la identità che si pone fra i fasci (o stelle) di tangenti, dal punto comune e che permette di scegliere, *fino all'intorno del 1° ordine*, gli stessi parametri delle due superficie (o varietà).

Il problema si complica ancora se la superficie (o varietà) essendo algebriche devono appartenere ad un medesimo tipo (p. es. essere superficie di VERONESE): perchè, scelti su una di esse parametri che facilmente ne assicurano l'appartenenza a quel tipo, si possono bensì scegliere sulla seconda parametri che fino all'intorno d'ordine assegnato del punto in esame coincidano con quelli; ma non avviene in generale che con questi parametri si possano dare alle equazioni parametriche della seconda superficie forma tale che ne assicurino l'appartenenza a quel tipo.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 15-IX-1944.

Esemplifico come si possano superare queste difficoltà nel caso delle F_2^4 di Veronese (e così potrà farsi poi per altre superficie o varietà). E determino: 1) le superficie di VERONESE aventi in comune una calotta di 2° ordine (o intorno del 2° ordine di un punto) e in particolare quelle aventi inoltre in comune tre coniche per il punto; 2) le superficie di VERONESE aventi in comune una calotta del 3° ordine (che non è una calotta generica di S_5 ma deve soddisfare a 6 condizioni; 3) le superficie di Veronese aventi in comune due calotte del 2° ordine.

2. - Data la superficie di Veronese F

$$[1] \quad x_1 = u^2, \quad x_2 = uv, \quad x_3 = v^2, \quad x_4 = uw, \quad x_5 = vw, \quad x_6 = w^2$$

ci proponiamo di considerare le sue calotte del 2° e del 3° ordine, σ_2 e σ_3 , aventi per *centro* il punto O ($u = v = 0, w \neq 0$) e le superficie di Veronese \bar{F} che le posseggono.

Sia \bar{F} una di queste superficie. Con lo stesso riferimento rispetto all'ambiente S_5 , siano $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ parametri omogenei su \bar{F} tali che in O sia $\bar{u} = \bar{v} = 0, \bar{w} \neq 0$. Se \bar{F} ed F si toccano in O si potrà far sì che le direzioni $\bar{u} = 0, \bar{v} = 0, \bar{u} = \bar{v}$ coincidano rispettivamente con le direzioni $u = 0, v = 0, u = v$ (si rappresenta così l'identità fra i fasci di tangenti sovrapposti); le equazioni di \bar{F} saranno del tipo

$$[2] \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= A_2, \quad \bar{x}_2 = B_2, \quad \bar{x}_3 = C_2, \quad \bar{x}_4 = D_2 + \bar{u}\bar{w}, \\ \bar{x}_5 &= E_2 + \bar{v}\bar{w}, \quad \bar{x}_6 = F_2 + F_1\bar{w} + \bar{w}^2 \end{aligned}$$

essendo A_2, B_2, \dots, F_2 forme di 2° grado ed F_1 forma di 1° grado in \bar{u}, \bar{v} .

Imponiamo ora che F ed \bar{F} abbiano in comune la calotta σ_2 .

Poichè su F (e quindi nell'intorno di O per cui $w \neq 0$) è

$$[3] \quad x_1 x_6 = x_4^2, \quad x_2 x_6 = x_4 x_5, \quad x_3 x_6 = x_5^2$$

queste equazioni dovranno essere soddisfatte *a meno di termini del 3° ordine in \bar{u}, \bar{v}* anche dalle coordinate \bar{x}_i . Ciò dà

$$[4] \quad A_2 = \bar{u}^2, \quad B_2 = \bar{u}\bar{v}, \quad C_2 = \bar{v}^2$$

quindi le [2] si riscrivono

$$[5] \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{u}^2, \quad \bar{x}_2 = \bar{u}\bar{v}, \quad \bar{x}_3 = \bar{v}^2, \quad \bar{x}_4 = D_2 + \bar{u}\bar{v}, \\ \bar{x}_5 &= E_2 + \bar{v}\bar{w}, \quad \bar{x}_6 = F_2 + F_1\bar{w} + \bar{w}^2 \end{aligned}$$

Finora \bar{w} è vincolata alla sola condizione di essere $\neq 0$ in O ; $\bar{w} = 0$ può rappresentare su \bar{F} una qualsiasi conica non passante per O .

Disponendo quindi di una sostituzione del tipo $\bar{w} = W + \alpha \bar{u} + \beta \bar{v}$ possiamo determinare α e β in modo che nelle equazioni trasformate delle precedenti vengano a mancare in \bar{x}_6 i termini in \bar{u}^2 e \bar{v}^2 .

Ciò fatto, indicate \bar{u} e \bar{v} con U e V , senza stare a cambiare i simboli per le forme in U, V che restano arbitrarie, si hanno le equazioni di \bar{F}

$$[6] \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= U^2, \quad \bar{x}_2 = UV, \quad \bar{x}_3 = V^2, \quad \bar{x}_4 = D_2 + VW, \\ \bar{x}_5 &= E_2 + VW, \quad \bar{x}_6 = fUV + F_1W + W^2 \end{aligned}$$

Poichè il sistema dei parametri U, V, W (omogenei) è ora completamente determinato a partire dalle coniche $u=0, v=0, u=v, w=0$ di F , non sono possibili ulteriori riduzioni nelle equazioni di \bar{F} , quindi i 9 coefficienti che vi figurano sono essenziali. Perciò:

Vi sono ∞^9 superficie di Veronese \bar{F} determinate da una calotta del 2° ordine: se questa è quella di F con centro in O si può dare alle equazioni delle \bar{F} la forma [6].

3. - La dimensione del sistema delle \bar{F} aventi una data calotta σ_2 può trovarsi come segue.

I piani osculatori agli E_2 (elementi di curva del 2° ordine) di σ_2 aventi tangente assegnata stanno in S_3 , 2-osculatore secondo quella tangente che s'indica con S (1,2); questi S_3 descrivono il cono quadratico di DEL PEZZO (avente per vertice il piano tangente) e il loro sistema è riferito proiettivamente al fascio delle tangenti in O centro di σ_2 .

Il passaggio di una \bar{F} per O impone 3 condizioni e la tangenza a σ_2 ne impone altre 6. La coincidenza del cono di DEL PEZZO di \bar{F} (in O) con quello di σ_2 impone 5 condizioni e la coincidenza delle proiettività detta altre 3. Si hanno finora 17 condizioni. Ma vi sono

∞^4 calotte con lo stesso cono di DEL PEZZO; sicchè infine affinchè \bar{F} possegga σ_2 devono essere soddisfatte 18 condizioni (indipendenti per il loro significato geometrico). E poichè le superficie di Veronese sono ∞^{27} ve ne sono appunto ∞^9 per σ_2 assegnata. Ancora alla stessa dimensione 9 si arriva in altro modo. Affinchè due calotte σ_2 e $\bar{\sigma}_2$ del 2° ordine coincidano, occorre e basta che tre F_2 dell'una coincidano con 3 E_2 dell'altra. Si scelgano ad arbitrio tre E_2 di σ_2 con tangenti distinte: per la coincidenza desiderata bisognerà anzitutto che i tre $S_2 \equiv S(1,2)$ ad esse relativi coincidano per le due calotte e si hanno così, oltre le condizioni di tangenza, $2 \cdot 3 = 6$ condizioni. Ora il piano di ciascun E_2 dato contiene pure un \bar{E}_2 della calotta $\bar{\sigma}_2$; per la coincidenza di E_2 con \bar{E}_2 occorre un'altra condizione; quindi complessivamente 3. Si hanno così in tutto $3 + 6 + 6 + 3 = 18$ condizioni.

Occorre avere ben chiaro che il contatto di 2° ordine in O fra F' ed \bar{F} (cioè la coincidenza dei loro elementi del 2° ordine E_2) non porta di conseguenza che gli E_2 delle coniche di F coincidano con gli \bar{E}_2 delle coniche di \bar{F} . Ciò si vede subito anche analiticamente; due coniche di F e di \bar{F} con la stessa tangente, $\lambda v = \mu u$ e $\lambda V = \mu U$, hanno piani generalmente diversi: $\lambda x_2 = \mu x_1$, $\lambda^2 x_3 = \mu^2 x$, $\lambda x_5 = \mu x_4$ per la prima e

$$\begin{aligned} \lambda x_2 = \mu x_1, \quad \lambda^2 x_3 = \mu^2 x_1, \quad \lambda x_5 - \mu x_4 = \\ = \{ \lambda E_2(\lambda, \mu) - \mu D_2(\lambda, \mu) \} \frac{x^3}{\mu^2} \end{aligned}$$

per la seconda. Queste coincidono in generale per tre sole direzioni definite da

$$\lambda(e_{11}\lambda^2 + 2e_{12}\lambda\mu + e_{22}\mu^2) = \mu(d_{11}\lambda^2 + 2d_{12}\lambda\mu + d_{22}\mu^2)$$

Fissata una \bar{F} se quelle tre direzioni sono (reali e) distinte si possono assumere come $\lambda = 0$, $\mu = 0$, $\lambda = \mu$ così si fissano tre coniche per O su F e in conseguenza

$$e_{11} = 0, \quad d_{22} = 0, \quad 2e_{12} - d_{11} = 2d_{12} - e_{22}.$$

Posta quest'ultima differenza $= h$, e $d_{11} = d$, $e_{22} = e$ si ha quindi per \bar{F}

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 = U^2, \quad \bar{x}_2 = UV, \quad \bar{x}_3 = V^2, \quad \bar{x}_4 = U\{dU + (e+h)V + W\}, \\ \bar{x}_5 = V\{(d+h)U + eV + W\}, \quad \bar{x}_6 = fUV + (f_1U + f_2V + W)W. \end{aligned}$$

Queste sono le equazioni delle $\infty^6 \bar{F}$ che hanno in comune con F la calotta σ_2 e i piani di tre sue coniche assegnate.

Se questi piani comuni alle coniche di F ed \bar{F} sono effettivamente tre (reali e distinti) e non infiniti ($h \neq 0$) possiamo scegliere il punto comune alle due coniche $\mu = 0$ come $(1, 0, 0, 0, 0)$ e quello comune alle due coniche $\lambda = 0$ come $(0, 0, 1, 0, 0)$: ciò importa una scelta definita della conica $w = 0$ su F (quella passante per i due punti detti), e per i coefficienti le condizioni $f_1 = d$, $f_2 = e$.

Con ciò rimane individuata una proiettività fra F ed \bar{F} che conserva la calotta σ_2 di centro O e inoltre i tre punti d'intersezione delle tre coppie di coniche giacenti negli stessi piani. Essa ha le equazioni ($h \neq 1$);

$$\rho U = u, \quad \rho V = v, \quad \rho W = (h-1)w + (1-h-d)u + (1-h-e)v;$$

facendo uso di esse le equazioni della \bar{F} si riscrivono

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= u^2, \quad \bar{x}_2 = uv, \quad \bar{x}_3 = v^2, \quad \bar{x}_4 = \frac{1}{2}(h-1)(w-u)+v, \\ \bar{x}_5 &= v \frac{1}{2}(h-1)(w-v)+u, \quad \bar{x}_6 = (h-1)^2(w^2-u^2-v^2) + \\ &+ (h-1)du(u+w) + (h-1)ev(v-w) + (h^2-2h+2)uv. \end{aligned}$$

In conclusione:

Date le due superficie di Veronese F, \bar{F} aventi in un punto contatto del 2° ordine e tali che non tutti i piani delle loro coniche per il punto coincidano, rimane fra esse determinata una proiettività e le loro equazioni si riducono al tipo ora trovato (con una scelta conveniente dei riferimenti su quelle).

Non staremo ad esaminare casi più particolari (quando non tutti i piani della terna considerata siano distinti). Aggiungeremo invece che se $h = 0$, cioè se coincidono i piani delle coniche per O di F e di \bar{F} quel riferimento non è più determinato (ve ne sono ∞^3). In questo caso (e supposto che non tutte le coppie di coniche situate negli stessi piani abbiano in O contatto del 3° ordine, eventualità che discuteremo nel numero seguente) vi è una coppia di coniche (una su F , l'altra su \bar{F}) aventi in O contatto del 3° ordine; il luogo degli ulteriori punti d'intersezione di coppie di coniche situate negli stessi

piani è una quartica sghemba tangente in O alle due coniche a contatto del 3° ordine (l' E_2 di queste con l' E_2 della quartica in O , appartengono a σ_2 ma hanno piani diversi).

4. - Passiamo ora a determinare la superficie di Veronese \bar{F} che hanno in comune con la F la calotta del 3° ordine σ_3 di centro O ($u = v = 0$, $w \neq 0$). Riprendiamo perciò le [6]: esse dovranno soddisfare alle [3] *a meno di termini del 4° ordine* in U, V (essendo in O , $U = V = 0$, $W \neq 0$). Ciò porta di conseguenza $2D_2 = F_1 U$, $2E_2 = F_1 V$. Dopo ciò è naturale porre $\bar{W} = W + \frac{1}{2} F_1$.

Le equazioni [6], tenuto conto di queste relazioni (e riscrivendo W invece di \bar{W}) divengono:

$$\bar{x}_1 = U^2, \bar{x}_2 = UV, \bar{x}_3 = V^2, \bar{x}_4 = UW, \bar{x}_5 = VW, \bar{x}_6 = F_2 + W^2$$

ove F_2 è una forma quadratica in U, V .

Queste equazioni rappresentano le $\infty^3 \bar{F}$ che hanno comune con F la calotta σ_3 . Risulta da esse che una qualsiasi \bar{F} e la F hanno in comune due coniche.

D'altra parte affinchè due calotte σ_2 e $\bar{\sigma}_2$ aventi in comune una σ_3 coincidano è necessario e basta che 4 elementi generici E_3 (del 3° ordine) dell'una appartengano anche all'altra.

Ciò impone in generale 12 condizioni (3 per ogni E_3 , essendo già gli E_2 coincidenti) nel passaggio della calotta σ_2 alla calotta σ_3 . Siccome le \bar{F} contenenti σ_2 sono ∞^9 e quelle contenenti σ_3 sono ∞^3 risulta che 6 di quelle condizioni *non* sono indipendenti dalle altre. Ciò mette in evidenza che:

Mentre una calotta σ_2 di una superficie di Veronese è una generica calotta superficiale di S_5 (cioè una superficie generica di S_n , $n \geq 0$, può essere approssimata fino all'intorno di 2° ordine di un suo punto mediante ∞^9 superficie di Veronese), una calotta del 3° ordine σ_3 di una superficie di Veronese non è una generica calotta superficiale di S_5 : essa deve soddisfare a sei relazioni particolari. Una generica superficie di S_5 non è approssimabile fino al 3° ordine con superficie di Veronese; ma se lo è in un modo lo è pure con ∞^3 tali superficie.

Allo stesso risultato sulla dimensione del sistema della \bar{F} con assegnata σ_3 (e quindi sul numero delle condizioni cui questa deve soddisfare per appartenere ad una superficie di Veronese) si giunge pure così.

È evidente che due superficie di Veronese aventi in comune una calotta del 4° ordine σ_4 coincidono (avendo comuni tutte le coniche per O). Vediamo quante condizioni bisogna dare affinchè due superficie di Veronese, aventi già in comune una σ_3 coincidano. Due calotte del 4° ordine coincidono se e solo se 5 elementi E_4 dell'una appartengono anche all'altra. Le due superficie supposte F ed \bar{F} per avere in comune σ_3 hanno già due coniche comuni: basterà imporre che tre coniche dell'una e tre dell'altra (aventi già un contatto del 3° ordine in O) coincidano; e ciò impone tre condizioni che assicurano la coincidenza di F ed \bar{F} . Ciò prova che le \bar{F} per σ_3 erano ∞^3 (e quindi l'esistenza di 6 relazioni per una σ_3 di Veronese).

Del resto alle 6 relazioni cui deve soddisfare una σ_3 per appartenere ad una superficie di Veronese può darsi forma esplicita.

Una calotta superficiale σ_3 di S_5 (con spazio osculatore $S[2] \equiv S_5$) può rappresentarsi con le equazioni:

$$x_1 = u^2 + A_3 + [4] , \quad x_2 = uv + B_3 + [4] , \quad x_3 = v^2 + C_3 + [4]$$

essendo u, v, x_1, x_2, x_3 coordinate proiettive non omogenee in S_5 nulle nel centro della calotta che ha piano tangente $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, ed A_3, B_3, C_3 forme di 3° grado in u, v .

Se esiste una superficie di Veronese contenente σ_3 su di essa dovranno potersi scegliere tali parametri \bar{u}, \bar{v}

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + \lambda_{11} \bar{u}^2 + 2 \lambda_{12} \bar{u} \bar{v} + \lambda_{22} \bar{v}^2 + [3] \\ v &= \bar{v} + \mu_{11} \bar{u}^2 + 2 \mu_{12} \bar{u} \bar{v} + \mu_{22} \bar{v}^2 + [3] \end{aligned}$$

che sostituiti nelle precedenti diano alle x_i ($i = 1, 2, 3$) espressioni della forma

$$x_1 = \bar{u}^2 + [4] , \quad x_2 = \bar{u} \bar{v} + [4] , \quad x_3 = \bar{v}^2 + [4] ,$$

ove $[4]$ indica termini d'ordine ≥ 4 in $\bar{u} \bar{v}$. Ciò porta 12 relazioni (che è facile scrivere) fra i dodici coefficienti di A_3, B_3, C_3 e le

sei λ_{rs} , μ_{rs} ($r, s = 1, 2$). Eliminando queste ultime si hanno le 6 relazioni cercate fra i coefficienti di A_3 , B_3 , C_3 .

5. - Determiniamo infine le superficie di Veronese \bar{F} che hanno in comune con una data di esse F due calotte del 2° ordine (a centri distinti). Per la F assumiamo la rappresentazione già adottata: i centri delle due calotte siano sulla conica $w = 0$ i punti O_1 ($u \neq 0$, $v = w = 0$) e O_2 ($v \neq 0$, $u = w = 0$). Una \bar{F} che passi per essi ed abbia ivi le stesse calotte del 2° ordine contiene la conica $w = 0$: potranno scegliersi i parametri \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} su \bar{F} in modo che la stessa conica sia rappresentata da $\bar{w} = 0$ e inoltre O_1 ($\bar{u} \neq 0$, $\bar{v} = \bar{w} = 0$, O_2 ($\bar{v} \neq 0$, $\bar{u} = \bar{w} = 0$).

Sicchè le equazioni di \bar{F} possono scriversi nella forma

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \bar{u}^2 + \bar{w} A_1, & \bar{x}_2 &= \bar{u} \bar{v} + \bar{w} B_1, & \bar{x}_3 &= \bar{v}^2 + \bar{w} C_1 \\ \bar{x}_4 &= \bar{w} D_1, & \bar{x}_5 &= \bar{w} E_1, & \bar{x}_6 &= \bar{w} F_1 \end{aligned}$$

ove $A_1 \equiv a_1 \bar{u} + a_2 \bar{v} + a_3 \bar{w}, \dots, E_1$ sono forme di 1° grado in $\bar{u} \bar{v} \bar{w}$.

Le condizioni di tangenza in O_1 e O_2 portano subito

$$c_1 = e_1 = f_1 = a_2 = d_2 = f_2 = 0$$

Perchè \bar{F} contenga la calotta σ_2 di centro O_1 bisogna che le equazioni

$$x_1 x_6 = x_4^2, \quad x_1 x_5 = x_4 x_2, \quad x_1 x_3 = x_2^2$$

siano soddisfatte dalle \bar{x}_i a meno di termini del 3° ordine in \bar{v} , \bar{w} ($\bar{u} \neq 0$ in O_1). Ciò porta (posto $f_3 = f$)

$$f = d_1^2, \quad e_2 = d_1, \quad e_3 = b_1 d_1, \quad c_2 = 2 b_1, \quad c_3 = b_1^2;$$

analogamente per la calotta di centro O_2 si trova

$$f = e_2^2, \quad d_4 = e_2, \quad d_3 = b_2 e_2, \quad a_1 = 2 b_2, \quad a_3 = b_2^2$$

Posto ora $U = \bar{u} + b_2 \bar{w}$, $V = \bar{v} + b_1 \bar{w}$, $W = d_1 w$ (ciò che non altera le posizioni fatte per O_1 , O_2) si ha per la \bar{F}

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= U^2, & \bar{x}_2 &= UV + \beta W^2, & \bar{x}_3 &= V^2, \\ \bar{x}_4 &= UW, & \bar{x}_5 &= VW, & \bar{x}_6 &= W^2.\end{aligned}$$

Queste equazioni con β arbitrario, rappresentano le ∞^1 superficie \bar{F} aventi comuni con F le due calotte assegnate del 2° ordine. Tutte le F si toccano in ciascun punto della conica comune per i due centri.

Se e solo \bar{F} ed F hanno contatto di 2° ordine in un altro punto della conica passante per i centri delle due calotte (risulta $\beta = 0$, quindi) le due superficie coincidono.

CELLA ULTRASONORA DI GRANDE AREA PER LA MODULAZIONE DELLA LUCE (*)

(Con sei figure)

AMEDEO GIACOMINI

SUMMARY. — Cella ultrasonora describitur, qua luminosi fascis, magnam habens sectionem, modulatio fieri potest. Huius cellae proprias curvas, experimentis ductas, Auctor exhibet, et praeterea, quod ad simpliciores quosdam casus attinet, introductam linearem distortionem computat.

INTRODUZIONE

L'uso di un reticolo ultrasonoro, costituito da onde *progressive*, per la modulazione della luce a frequenza notevolmente inferiore alla frequenza degli ultrasuoni è stato proposto da P. BIQUARD⁽¹⁾.

Si deve invece a CH. BACHEM⁽²⁾ la prima osservazione riguardante la possibilità di modulare ad alta frequenza un fascio luminoso mediante onde ultrasonore *stazionarie*.

I due tipi di modulazione hanno avuto sinora scarse applicazioni, essendosi queste limitate alla televisione ed alla fluorometria⁽³⁾. Per di

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Giordani il 12 agosto 1944.

(1) BIQUARD P., *Nouveaux moyens de commande d'un flux lumineux et applications*. « Brev. Fr. », n. 752.910 (1932).

(2) BACHEM CH., *Über die Kompressibilität elektrolytischer Lösungen*. « Z. Phys. », 101, 541, (1936).

(3) Vedasi, ad esempio: BERGMANN L., *Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik*. VDI Verlag, Berlin, 1942; HIEDEMANN E., *Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung*. W. De Gruyter, Berlin, 1939.

più la letteratura scientifica non fornisce in modo esauriente⁽¹⁾ gli elementi quantitativi atti a caratterizzare le nuove cellule (caratteristiche, curve di risposta, distorsioni, ecc.).

Tali ragioni ci hanno indotto ad uno studio sistematico sul comportamento delle cellule ultrasonore.

Durante il corso delle ricerche si è in particolare progettato un nuovo tipo di cellula, che consente di modulare agevolmente fasci luminosi di grande sezione.

In questa nota si descrive la nuova cellula, illustrandone le caratteristiche.

SCOPO E DESCRIZIONE DELLA NUOVA CELLULA

Per modulare la luce con i reticoli ultrasonori si usa generalmente la disposizione sperimentale illustrata in figura 1. Il condensatore L_1 proietta l'immagine della sorgente luminosa S sopra il diaframma forato K_1 fornendo una sorgente secondaria puntiforme; la lente L_2 invia un fascio parallelo attraverso la cella modulatrice, mentre la lente L_3 provvede alla formazione delle pseudo immagini di diffrazione sullo schermo K_2 ; quest'ultimo trattiene il flusso che compete agli ordini superiori lasciando passare quello relativo all'ordine zero (o viceversa).

Se, come supponiamo, la modulazione deve essere fatta a frequenza acustica, (o comunque a frequenza inferiore a quella degli ultrasuoni) si modula a tale frequenza la tensione applicata al quarzo. La parete della cella che è di fronte a quest'ultimo viene rivestita di materiale assorbente gli ultrasuoni affinché le onde siano puramente progressive.

Quando si desidera proiettare a distanza la luce modulata si fa uso di una lente come la L_4 di figura 1.

Allo scopo di semplificare la disposizione ora descritta si possono eliminare la lente L_4 ed il diaframma K_1 , sostituendo a quest'ultimo una sorgente di natura puntiforme.

Altra semplificazione più sostanziale consiste nell'eseguire la proiezione a distanza mediante una sola lente (la L_2 di fig. 1), affidando

(1) Le notizie più diffuse sull'argomento si trovano nell'articolo: LEE H. W., *Some Factors involved in the optical design of a modern television receiver using moving scanners*. Proc. IRE, 27, 496 (1939).

alla pupilla di ingresso del sistema ottico che riceve il fascio il compito di isolare dagli altri il fascio di ordine zero. Basta all'uopo dare al reticolo ultrasonoro un « passo » convenientemente piccolo, vale a dire usare ultrasuoni di frequenza sufficientemente alta.

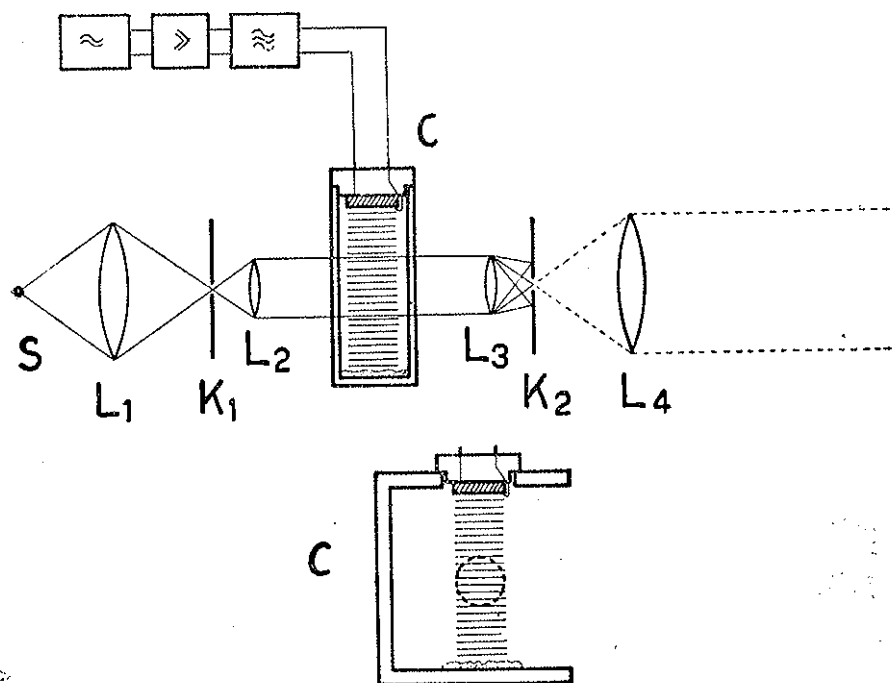


FIG. 1.

Disposizione sperimentale atta alla modulazione della luce.
Q, quarzo generatore di ultrasuoni; C, sezione del fascio luminoso.

Sorge però una difficoltà d'ordine generale: il diametro della lente proiettante non può superare qualche centimetro, perchè la luce deve necessariamente attraversare il fascio ultrasonoro, la cui sezione è vincolata alle dimensioni della piastrina di quarzo. Ciò ha per conseguenza che la trasmissione a distanza viene eseguita in condizioni sfavorevoli, essendo notoriamente l'illuminamento prodotto da un proiettore funzione della sua apertura assoluta e non di quella relativa.

È quindi indispensabile poter aumentare il diametro del fascio che attraversa la cella modulatrice.

La difficoltà segnalata presenta qualche analogia con quella incontrata quando si desidera ottenere un fascio luminoso, di grande sezione, polarizzato linearmente e si dispone solamente di un piccolo Nicol. Come è noto, la invenzione dei dischi noti sotto il nome di Polaroid ha fornita la soluzione più elegante.

Abbiamo quindi pensato di costruire una cella ultrasonora avente area notevolmente superiore a quella che i comuni cristalli di quarzo usuali permettono di raggiungere.

La nuova cellula è fondata sull'uso di un mosaico « lineare » costituito da piastrine rettangolari, aventi lunghezza grande rispetto alla larghezza, disposte in fila secondo la dimensione maggiore.

La figura 2 mostra una attuazione sperimentale della cellula; l'asticciuola di materiale isolante che è al centro sostiene tre o più piastrine di quarzo; ciascuna di esse ha le dimensioni $1 \times 3 \times 0,058$ cm³.

Nella figura 3 si vedono invece i fasci ultrasonori emessi dalle tre piastrine: l'irraggiamento è bilaterale, le onde ultrasonore sono progressive e non modulate (frequenza 5 MHz).

Poichè la nuova cella non impone in generale alcuna limitazione al diametro del fascio luminoso che la attraversa (basta infatti aumentare convenientemente il numero delle piastrine componenti il mosaico) è possibile attuare senz'altro le auspiccate semplificazioni dei sistemi ottici giungendo alla disposizione illustrata in figura 4a. Essa contiene unicamente il proiettore S-L e la cella modulatrice C. La fig. 4b indica schematicamente una sezione della cella normale al percorso del fascio luminoso (quest'ultimo è rappresentato dal circolo tratteggiato).

Con facili calcoli, ed accettando talune consuete ipotesi semplificative, abbiamo appurato che gli elementi quantitativi atti a definire il nuovo sistema di trasmissione a distanza del fascio modulato sono forniti dalle relazioni seguenti:

$$[1] \quad D = \frac{d}{F} q$$

$$[2] \quad E = \frac{\frac{h^2}{4} \varepsilon}{q^2}$$

$$[3] \quad s = \frac{\lambda F f}{u d} \gg 1$$

Cella ultrasonora di grande area per la modulazione della luce.

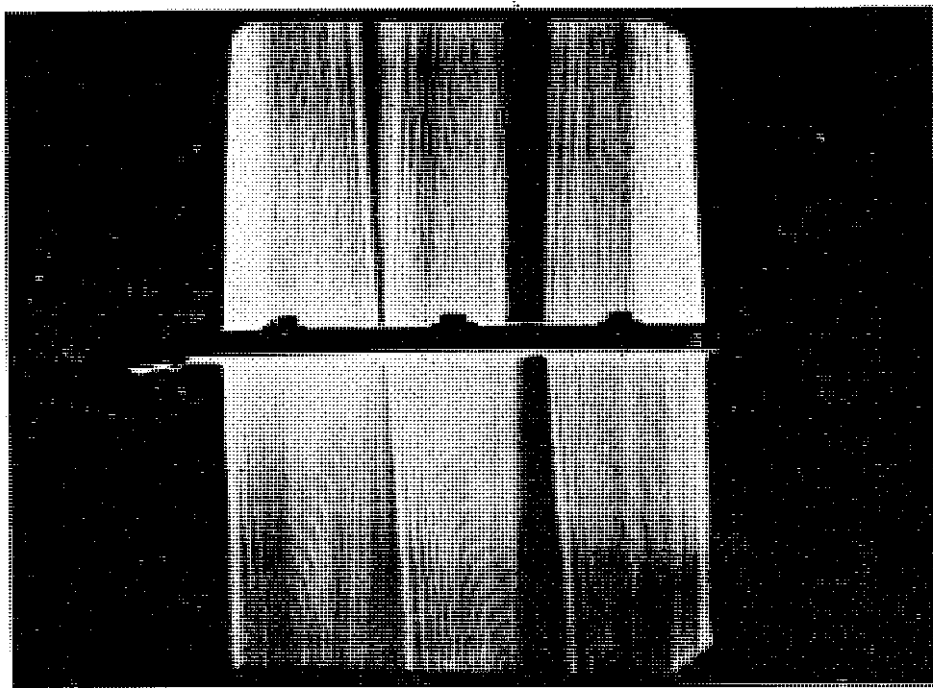


Fig. 3.

Fasci ultrasuoni emessi dalle tre piastine della cella modulatrice

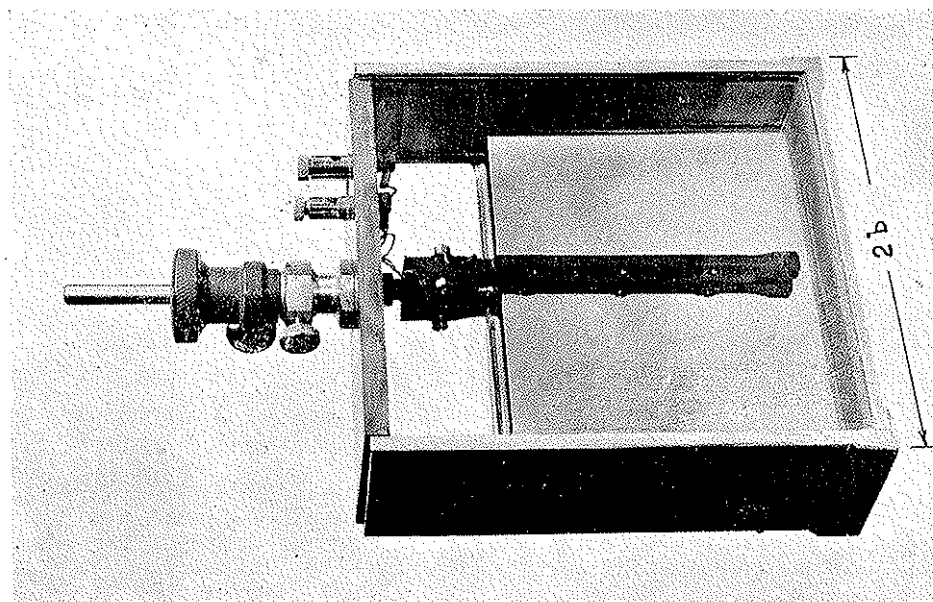


Fig. 2.

Fotografia della cella modulatrice

ove sono: d il diametro della sorgente luminosa, supposta dischiiforme; F la distanza focale del proiettore; q la distanza alla quale viene proiettato il fascio; D il diametro del fascio luminoso alla distanza q

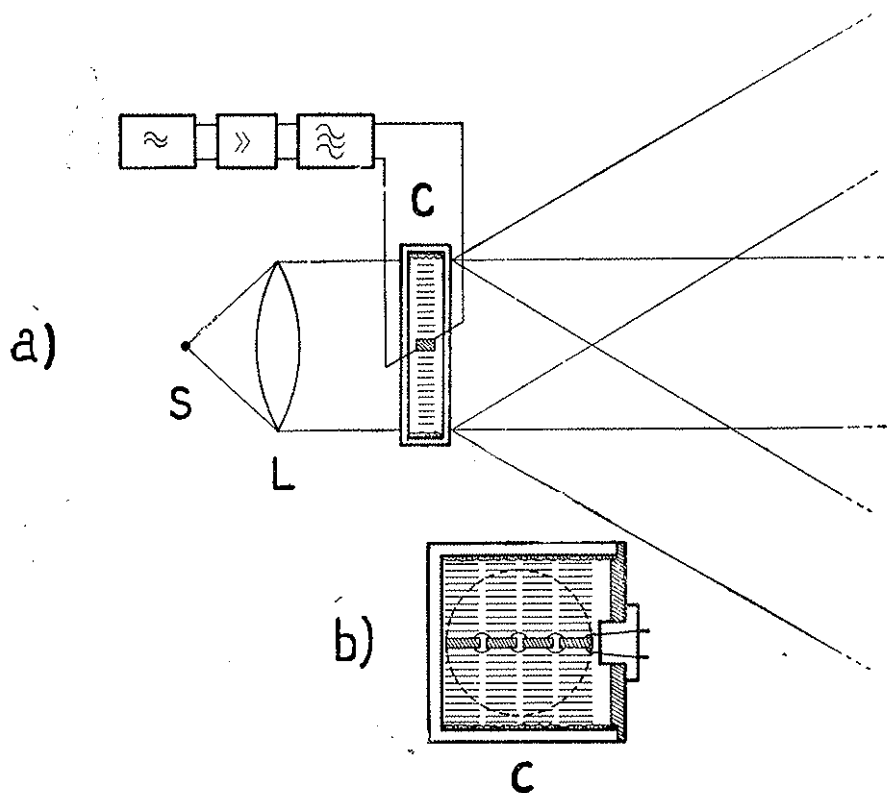


FIG. 4.

- a) Disposizione sperimentale per la proiezione a distanza della luce modulata mediante la nuova cella C.
 b) Sezione della cella modulatrice; sono visibili i fasci ultrasonori emessi da quattro piastrelle e il contorno del fascio luminoso.

(diametro dell'immagine della sorgente); ϵ lo splendore della sorgente; h il diametro della lente proiettante; E la densità del flusso di energia raggianti alla distanza q ; λ la lunghezza d'onda della luce usata; f la frequenza degli ultrasuoni; u la velocità di propagazione di questi ultimi nel liquido che riempie la cellula; l la distanza che separa i centri delle pseudo immagini di diffrazione; s il rapporto $l:D$. (Tutte le grandezze misurate in unità CGS o tutte in unità MKS).

La [1] serve al calcolo del diametro che il fascio avrà nella zona da illuminare, e palesemente si può accrescerlo influenzando così sulla distanza focale F come sul diametro d della sorgente.

La [2] precisa quanto è stato già detto sulla utilità di aumentare il diametro h della lente proiettante. Essa pone altresì in evidenza la nota indipendenza di E dalla distanza focale F , ciò che permette di scegliere quest'ultima in modo da soddisfare alla condizione $s \geq 1$ che esprime quantitativamente la necessità di separare convenientemente le pseudo-immagini di diffrazione.

Le tre relazioni permettono ovviamente di calcolare il proiettore appena assegnate sette delle dieci grandezze che in esse compaiono.

CARATTERISTICHE ELETTRO-OTTICHE DELLA CELLA

È possibile eseguire la modulazione della luce a frequenza acustica utilizzando l'effetto LUCAS e Biquard, perchè il flusso luminoso Φ_0 , che non viene convogliato nei fasci diffratti, è funzione della intensità J_u degli ultrasuoni, e quindi della tensione ad alta frequenza V_q applicata al quarzo generatore.

La teoria di C. V. RAMAN e N. S. NAGENDRA NATH⁽¹⁾, convalidata dalle misure di F. H. SANDERS⁽²⁾, permette a rigore di calcolare il legame esistente fra Φ_0 e J_u ; senonchè la teoria è valida per luci monocromatiche. Si è quindi senz'altro ricavata sperimentalmente una caratteristica del tipo $\Phi_0 = f(V_q)$. Anzichè riportare in ordinate i flussi luminosi, o, più propriamente, i flussi di energia raggiante, si è preferito riferirsi alle correnti erogate dalla cella fotoelettrica ricevente (I_0 corrente in assenza di ultrasuoni, I_u corrente per la tensione al quarzo V_q). Infatti una misura fotometrica avrebbe avuto scarso interesse; nelle applicazioni è la corrente fornita dalla fotocella che si utilizza, ed essa dipende in modo assai complesso dal flusso di energia raggiante, perchè la composizione spettrale di questo muta al variare della intensità degli ultrasuoni.

⁽¹⁾ RAMAN C. V., NAGENDRA NATH N. S., *The diffraction of light by high frequency sound waves*. « Proc. Indian Acad. Sc. », 2, 406-412 (1935); 2, 413 (1935); 3, 75 (1936); 3, 119 (1936).

⁽²⁾ SANDERS F. H., *Intensity measurements in the diffraction of light by ultrasonic waves*. « Canad. J. Res. », 14, 158 (1936).

La figura 5 mostra la caratteristica, essa è ottenuta con radiazioni infrarosse provenienti da una sorgente a incandescenza munita di filtro Schott R. G. — 10 — (2 mm.).

Da un esame anche sommario della curva di figura 5, risulta chiaramente che è possibile raggiungere elevate percentuali di modulazione (80 %-90 %) con bassa distorsione di seconda specie. Quest'ultima può essere dedotta agevolmente caso per caso. Maggiore interesse presenta invece il calcolo della distorsione di prima specie.

Tale distorsione non proviene, come nei trasduttori elettroacustici, dalla esistenza di modi normali di vibrazione, aventi frequenza vicina a quella di vibrazione forzata: infatti la piastrina di quarzo oscilla a frequenza enormemente alta rispetto a quella di modulazione, e ciò spiega come nelle poche pubblicazioni sinora apparse sull'argomento non venga fatto cenno delle distorsioni lineari. Quando però la cella ha grande area, interviene la seguente causa di distorsione. Essendo la velocità di propagazione degli ultrasuoni nei liquidi dell'ordine del km. sec.⁻¹, se la frequenza di modulazione è sufficientemente elevata, il fascio luminoso che attraversa la cella illumina contemporaneamente regioni del liquido, ove gli ultrasuoni hanno diversa ampiezza. Il fenomeno è analogo a quello che si verifica nella « lettura » delle colonne sonore cinematografiche, quando la fenditura esploratrice ha larghezza non trascurabile rispetto al « passo » della incisione.

Un calcolo relativamente semplice, che ripete sostanzialmente quello fatto per le colonne sonore ⁽¹⁾ e che non si ritiene necessario trascrivere in esteso, porta alla conclusione seguente: la ampiezza ψ_v di fluttuazione del flusso luminoso, modulato a frequenza v , dipende dal rapporto fra le dimensioni della cellula, nella direzione secondo cui muovono gli ultrasuoni e la frequenza v secondo la

$$\frac{\psi_v}{\psi_0} = \frac{\sin \pi \frac{bv}{u}}{\pi \frac{bv}{u}}$$

⁽¹⁾ Vedasi ad esempio: LICHTE H., NARATH A., *Physik und Technik des Tonfilms*. S. Hirzel, Leipzig (1941).

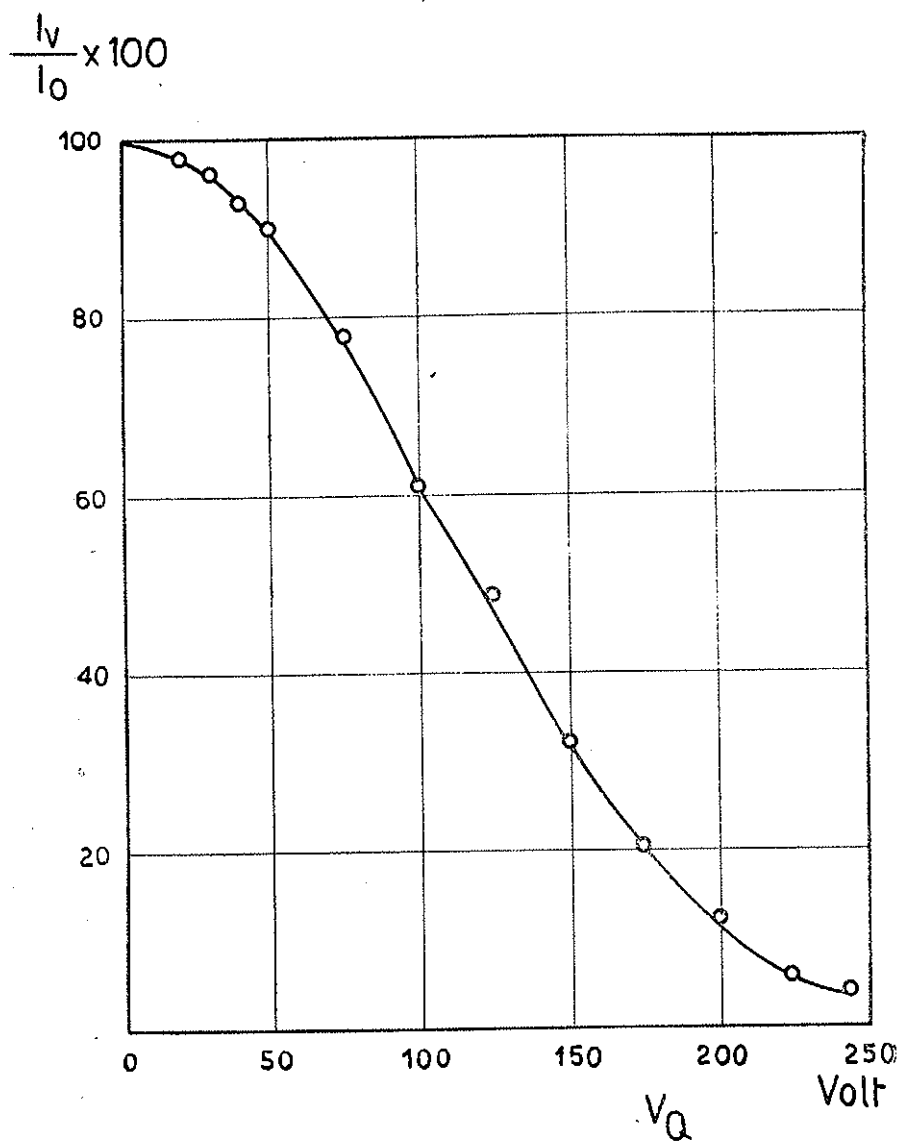


FIG. 5.

Caratteristica della cella modulatrice. In ascisse la tensione applicata ai quarzi, in ordinate la corrente che percorre la cella fotoelettrica ricevente il fascio luminoso (riferita alla corrente di riposo).

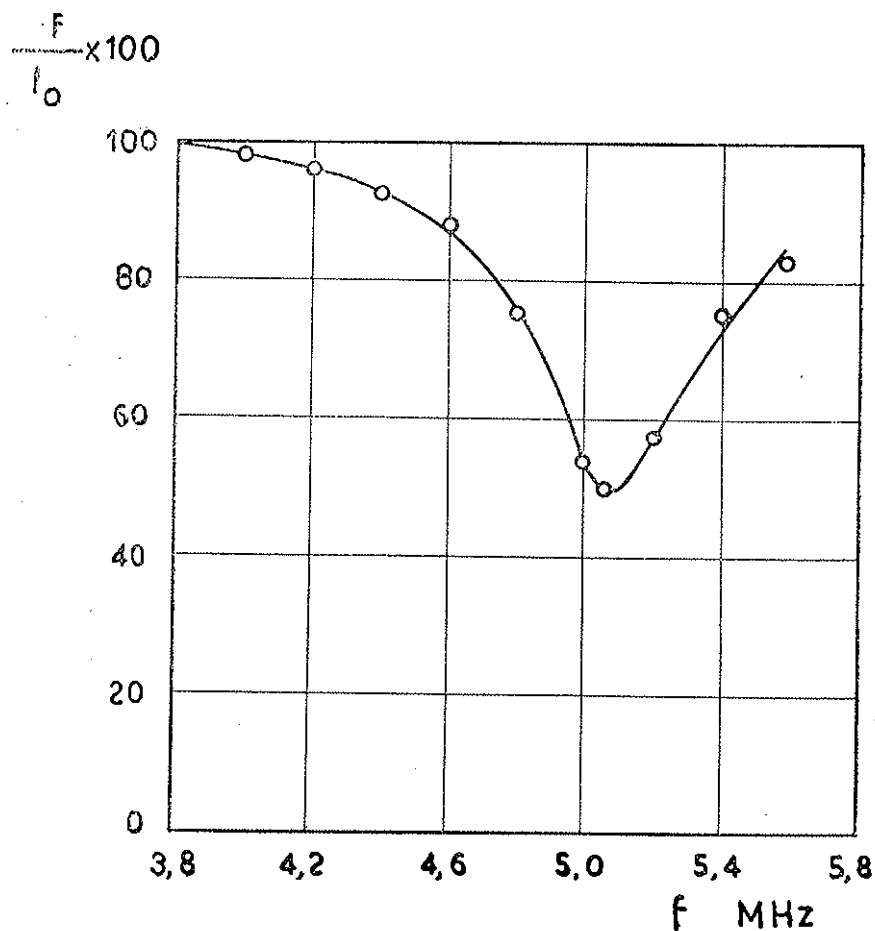


FIG. 6.

Caratteristica di frequenza della cella. In ascisse la frequenza della tensione applicata ai quarzi, in ordinate la corrente che percorre la fotocella ricevente il fascio luminoso, riferita alla corrente di riposo (frequenza tendente a zero). Gli ultrasuoni non sono modulati.

dove si è indicato con ψ_0 la ampiezza di fluttuazione del flusso luminoso per $v \rightarrow 0$, e con $2b$ la larghezza della cella supposta di sezione rettangolare (e investita da un fascio anch'esso di sezione rettangolare) ed avente l'asta che sostiene i quarzi situata al centro (vedi fig. 2).

Alcuni valori numerici valgono a fissare gli ordini di grandezza delle distorsioni lineari.

Se la frequenza di modulazione massima è di 5000 Hz, e si desidera che a tale frequenza la perdita di livello non superi 2 dB, in valore assoluto, la larghezza massima consentita per la cella è di 20 cm. (liquido della cella xilolo); se la frequenza massima da trasmettere è di 10.000 Hz occorre, a pari distorsione, che la larghezza non superi 10 cm., mentre se è consentita una perdita di -5 dB si possono dare alla cella rispettivamente 30 cm. e 15 cm. di larghezza.

Onde trarre elementi di giudizio per eventuali altre applicazioni, è stata ricavata la caratteristica che dà il flusso luminoso non diffratto (ordine zero) in funzione della frequenza della tensione applicata alle piastrine di quarzo. Come si vede in figura 6 è possibile alterare di qualche unità per cento la frequenza senza modificare in maniera sensibile la « risposta della cellula ».

Con riferimento alla potenza di alimentazione della cella, si osserva che essa è proporzionale al diametro del fascio modulato, ma è indipendente dalla densità del flusso luminoso convogliato. A fissare gli ordini di grandezza valgono i seguenti dati numerici: la potenza elettrica ad alta frequenza, occorrente per la cella illustrata in figura 2, munita di quattro quarzi, (diametro del fascio luminoso 12 cm.), è di 2 watt.

Qualora si voglia utilizzare la cella per modulare ad alta frequenza il fascio luminoso occorre disporre di fronte alle piastrine di quarzo riflettori che determinino la formazione di onde stazionarie. Ovviamente tali riflettori devono essere a distanza regolabile, se la frequenza usata è costante; mentre possono essere fissi se si può variare la frequenza di quanto occorre affinché la distanza quarzo-riflettore contenga un numero intero di semilunghezze d'onda.

In entrambi i casi si constata tuttavia che il progressivo riscaldamento del liquido, e la conseguente variazione di velocità degli

ultrasuoni, rende necessaria una continua regolazione della distanza del riflettore o della frequenza ultrasonora. Per evitare tale inconveniente basta adoperare il liquido a velocità indipendente dalla temperatura indicata dallo scrivente in una precedente pubblicazione ⁽¹⁾.

L'Autore esprime la sua gratitudine al dott. A. BARONE per la collaborazione da lui prestata durante il progetto della cella sopra descritta.

⁽¹⁾ GIACOMINI A., *Liquido nel quale la velocità degli ultrasuoni è indipendente dalla temperatura*. Pont. Ac. Sc. « Acta », 6, 87 (1941).

METODI APPROSSIMATI PER LO STUDIO DELLE SORGENTI SONORE (*)

(Con una figura)

PIERO GIORGIO BORDONI

SUMMARY. — Auctor praebet exactam expressionem campi sonori, qui e superficie sphaerica emissus sit, aliis circuitus condicionibus atque illa quae, ad velocitatem attinens, solet dispici. Significat praeterea quasdam supputandi rationes, quibus, simplici quodam interpolationis processu adhibito, perpendi possint superficies emittentes non sphaericae, quarum circuitus condiciones magis implexae sint. Postremo quaedam exponit de illis supputandi rationibus ad sonoros quosdam fontes artibus adhibitis applicandis.

1. PREMessa. — Le onde irradiate dalle sorgenti sonore sono generalmente considerate come l'effetto di un *moto prescritto* che ha luogo sulla loro superficie esterna: si ha cioè una condizione al contorno relativa alla velocità od allo spostamento. La determinazione dell'integrale che soddisfa a questa condizione è particolarmente semplice quando:

- a) la superficie sia sferica;
- b) la velocità abbia ovunque la stessa fase, e sia simmetrica intorno all'asse polare.

In questo caso il potenziale di velocità è dato (a meno del fattore $e^{j\omega t}$) dalla espressione ben nota (1):

$$[1] \quad \Phi = \frac{a^2}{r} e^{j\beta(a-r)} \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{f_n(j\beta r)}{F_n(j\beta a)}$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giovanni Giorgi il 1° gennaio 1945.

(1) Vedi ad esempio: RAYLEIGH, *The theory of sound.*; Macmillan Ed. London, 1929, 2ª ediz., vol. II, pag. 239 con l'avvertenza che il raggio a è indicato con c , la costante di fase β con k , e il potenziale di velocità Φ ha segno opposto a ψ .

dove: Φ = potenziale di velocità ($m^2 \text{ sec}^{-1}$)

a = raggio della sfera (m)

r = distanza dal centro (m)

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ = costante di fase (m^{-1})

U_n = termine n^{esimo} dello sviluppo della velocità: $U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$

f_n, F_n = funzioni di STOKES di 1^a e 2^a specie, di ordine n .

Nel presente lavoro si indicano alcuni procedimenti per ricavare soluzioni, analoghe alla [1] ma relative a condizioni al contorno diverse. Si considerano i casi seguenti:

1°) velocità assegnata con fase variabile;

2°) pressione assegnata con fase variabile;

3°) condizioni miste su di una sfera: velocità assegnata su di una parte della superficie e pressione sulla rimanente; oppure velocità e impedenza ecc.;

Nei casi 1°) e 2°) la determinazione della soluzione è fatta in maniera esatta, negli altri in maniera approssimata, ma con un procedimento che permette di ridurre indefinitamente l'errore. Si considerano soltanto condizioni al contorno aventi *simmetria di rotazione* intorno ad un asse: è questo il caso fisicamente più importante, e d'altronde l'estensione dei risultati a casi asimmetrici è immediata.

Le espressioni ottenute si prestano facilmente a calcoli numerici, e permettono di trattare sorgenti sonore largamente usate nella tecnica.

2. VELOCITÀ E PRESSIONE CON FASE VARIABILE. — Una velocità di vibrazione la cui fase vari da punto a punto può essere considerata come la risultante di due velocità in quadratura, aventi fase costante e ampiezza variabile. Ciò equivale a dire che nello sviluppo in serie di LEGENDRE della velocità stessa i coefficienti vanno considerati come complessi.

Sostituendo nella [1] $U_n + jV_n$ al posto di U_n si ha la soluzione cercata:

$$[2] \quad \Phi = \frac{a^2}{r} e^{j\beta(a-r)} \sum_{n=0}^{\infty} (U_n + jV_n) \frac{f_n(j\beta r)}{F_n(j\beta a)}$$

dove: $U_n + jV_n$ = termine n^{esimo} dello sviluppo della velocità:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n + jV_n$$

La soluzione relativa ad una pressione assegnata si ottiene con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per ricavare la [1]. Si sviluppa in serie di LEGENDRE (a coefficienti complessi) la pressione P' assegnata sulla sfera:

$$[3] \quad P' = \sum_0^{\infty} (A_n + jB_n) P_n(\cos \vartheta)$$

dove: P_n = funzione di LEGENDRE di ordine n .

ϑ = colatitudine (radiani)

e si eguaglia termine a termine la serie [3] con l'espressione della pressione P di una generica onda divergente, dopo aver posto: $r = a$. La P è data da:

$$[4] \quad P = j\omega\rho_0 \frac{e^{-j\beta r}}{r} \sum_0^{\infty} (x_n + jy_n) P_n(\cos \vartheta) f_n(j\beta r)$$

dove: ρ_0 = densità dell'aria (kg. m^{-3})

$x_n + jy_n$ = costante arbitraria ($\text{m}^3 \text{sec}^{-1}$)

e la soluzione cercata è quindi:

$$[5] \quad \Phi = -j \frac{1}{\omega\rho_0} \frac{a}{r} e^{j\beta(a-r)} \sum_0^{\infty} (A_n + jB_n) \frac{f_n(j\beta r)}{f_n(j\beta a)} P_n(\cos \vartheta).$$

3. CONDIZIONI AL CONTORNO MISTE. - I procedimenti seguiti per la [1], la [2] e la [5] non sono più applicabili quando la velocità sia assegnata soltanto su di una parte della sfera, e la pressione sul resto.

Se ci si limita a considerare le prime armoniche di LEGENDRE dello sviluppo è possibile determinare approssimativamente i coefficienti $(x_n + jy_n)$ con un comune procedimento di interpolazione: si divide l'intervallo $0 \xrightarrow{1-i} \pi$ della ϑ in $(n-1)$ parti (per esempio uguali) e si pone la condizione che la pressione e la velocità assumano all'estremo di ogni intervallo i valori rispettivamente assegnati. Si ottengono così $2n$ equazioni lineari (reali) che permettono di determinare i $2n$ coefficienti incogniti x_n, y_n (reali). Il procedimento è applicabile a diversi

tipi di condizioni miste; velocità-pressione; velocità-impedenza; pressione-impedenza ecc.

Quando la velocità sia assegnata su quasi tutta la sfera e la impedenza soltanto su di una piccola calotta si può seguire un procedimento di calcolo meno laborioso. Supponendo per un momento che la velocità di vibrazione sia nulla sulla calotta, si determina in *maniera esatta* l'espressione dell'onda irradiata, e si calcola il valore medio sulla calotta della pressione acustica. Dividendo questo valore per l'impedenza media assegnata si ottiene, per il teorema THEVENIN, la velocità media di vibrazione della calotta.

Si conosce quindi in maniera approssimata la distribuzione di velocità su tutta la sfera e si può senz'altro applicare la [2].

Nel caso che la superficie esterna della sorgente sonora non sia sferica, si può considerare la sua velocità normale di vibrazione come dovuta ad un'onda irradiata da una superficie sferica tutta interna alla sorgente.

La distribuzione della velocità alla superficie di questa sorgente fittizia può essere determinata con lo stesso procedimento di approssimazione indicato: si divide una linea meridiana della sorgente ($n-1$) parti e si pone la condizione che la componente della velocità irradiata normale alla sorgente, coincida con la velocità assegnata (oppure che coincidano le pressioni ecc.; si ottengono, come al solito, $2n$ equazioni che determinano le x_n, y_n .

Rispetto al procedimento relativo alle condizioni miste *su di una sfera* si notano due differenze:

1°) nel calcolo dei coefficienti x_n, y_n non va posto: $r = a$, ma vanno introdotti i valori che r assume alla superficie della sorgente considerata;

2°) la velocità normale alla superficie non coincide con la velocità radiale dell'onda, ma è la somma delle proiezioni di questa e della componente trasversale.

Il raggio della sorgente sferica fittizia e la posizione del suo centro sono arbitrari. Per rendere più semplici i calcoli e migliore l'approssimazione conviene sceglierli in modo da rendere minima la differenza tra la sorgente fittizia e quella assegnata. È importante osservare che nelle condizioni al contorno miste e in quelle su di una superficie sferica, le x_n, y_n sono *funzioni della frequenza*.

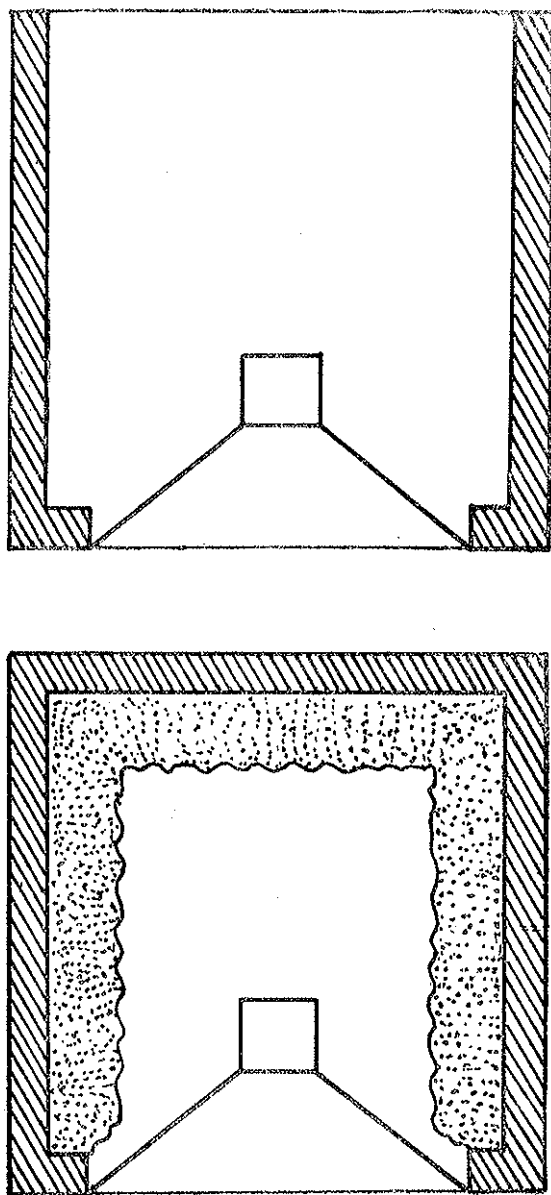


Fig. 1.

Алтопарлање електродинамичко со екран акустичко отворен или затворен напредно.

4. CONSIDERAZIONI FISICHE. — Mediante la [2] si può tenere conto della differenza di fase che si produce nella velocità in punti diversi di una superficie vibrante, a causa della dissipazione di energia.

La [5] è applicabile a quelle sorgenti sonore la cui impedenza interna sia minore di quella di radiazione (alcuni generatori subacquei, risonatori accordati ecc.).

I procedimenti di approssimazione relativi alle condizioni miste consentono di studiare la radiazione di un altoparlante elettrodinamico applicato ad uno schermo acustico in forma di scatola, chiusa o aperta posteriormente, come in figura 1 (si tenga presente il caso degli apparecchi radioriceventi). La velocità è assegnata alla superficie del cono e sulle pareti esterne della scatola (dove è nulla). In corrispondenza all'apertura posteriore è assegnata l'impedenza, la cui determinazione approssimata non offre grandi difficoltà; naturalmente quando lo schermo è aperto, si deve tener conto anche del suono irradiato dalla faccia interna dell'altoparlante.

L'Autore ringrazia il prof. A. Giacomini, direttore dell'Istituto Nazionale di Elettroacustica « O. M. Corbino », per i consigli da lui ricevuti nella elaborazione di questo lavoro.

AZIONE DEI RAGGI RÖNTGEN
SUGLI EMBRIONI DI ANFIBI
TRAPIANTO DELL'ABBOZZO OCULARE
TRA EMBRIONI IRRADIATI E NORMALI (*)

TEODORO PERRI

SUMMARIVM. — Auctor, ut plenius quaedam investigaret de actione radiorum Röntgen in fetus, in *Rana esculenta*, oculorum rudimenta e communibus fetibus in irradiatos traduxit et contra.

Espongo in questa Nota i principali risultati che ottenni (Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma) in esperienze di trapianto, in Anfibi, di abbozzi di organi tra embrioni trattati con i raggi Röntgen ed embrioni normali⁽¹⁾.

L'influenza dei raggi X sugli embrioni fu oggetto di numerose indagini: e nel lavoro in esteso, che ho in preparazione, ne riassumerò i principali risultati. In queste ricerche, ch'io sappia, non furono mai usati i trapianti. Vi sono però esperienze di SCHUBERT⁽²⁾, in embrioni di pollo, le quali mostrano che nell'espianto di tessuto cardiaco, asportato da embrione irradiato, si ha un rapido e completo arresto di sviluppo; e che si ha, invece, una lieve diminuzione di accrescimento se si espanta tessuto cardiaco di embrione normale in estratto di embrione irradiato.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Filippo Silvestri il 15 gennaio 1945.

(¹) In questo stesso Istituto la Dott.^{ssa} LEA MISTRUZZI, partendo dai risultati che io venivo ottenendo e che espongo in questo lavoro, ha molto opportunamente iniziato esperienze di parabiosi tra embrioni irradiati e normali. Per i risultati rinvio alla sua pubblicazione che apparirà in questa stessa rivista.

(²) SCHUBERT M., « Deutsche Medizinische Wochenschrift », 1928, pag. 429.

Mi parve utile applicare in queste ricerche la tecnica dei trapianti, perchè particolarmente adatta ad approfondire varie parti del problema. Il comportamento di ciascun abbozzo lo si può infatti seguire, usando i trapianti, anzitutto oltre i limiti di sopravvivenza dell'embrione intero irradiato; inoltre all'infuori sia delle influenze subite dagli organi vicini, sia delle eventuali modificazioni, metaboliche o d'altra natura, provocate dall'irradiazione nell'intero organismo.

Il lavoro sperimentale lo potei iniziare solo quest'anno, e per vari motivi proseguì assai lento. Mi limitai ad esaminare il comportamento della vescicola ottica, con ricerche che spero di continuare in seguito; di altri abbozzi eseguii solo ricerche preliminari.

* * *

Le irradiazioni furono eseguite con tubo Müller-Metro per radioterapia; sperimentai con tensione di 40.000 volt e intensità di 3 miliampere, senza alcun filtro. Gli embrioni furono irradiati in una vaschetta di vetro (sempre la stessa) con pochissima acqua (sempre nella stessa quantità); alla distanza di cm. 21,5 dall'anticatodo. La temperatura dell'acqua aumenta di pochi gradi durante l'irradiazione: non sembra possibile attribuirvi sensibile importanza. La durata dell'irradiazione fu di minuti primi 15, 30, 60 e solo in alcuni casi di 90 e 120. Per motivi contingenti non mi è stata ancora possibile la misura in « r » dell'irradiazione.

Sperimentai su embrioni di *Rana esculenta*, allo stadio di vescicola ottica primaria, da poco dopo la saldatura della doccia neurale fino a bottone codale. Il trapianto fu eseguito subito dopo l'irradiazione, con la comune tecnica, sempre in sede addominale.

a) *Trapianto della vescicola ottica di embrione irradiato su embrione normale.*

Irradiazione di 15'. — La vescicola ottica degli embrioni irradiati per 15', trapiantata su embrioni normali, continua nello sviluppo senza sensibili differenze rispetto ai trapianti omoplastici normali. Ricordo che nei controlli irradiati i segni di sofferenza sono generalmente scarsi.

Irradiazione di 30'. — Gli embrioni irradiati per 30' presentarono una sensibilità ai raggi X notevolmente diversa da gruppo a gruppo, e, in minor grado, nell'ambito di ciascuno di essi. Generalmente si ebbe evidente ritardo di sviluppo, incurvamento del tronco con concavità in alto, idrope di vario grado anche notevolissimo; nella regione cefalica accentuate anomalie con notevole riduzione del telencefalo e, in minor grado, del diencefalo. Gli occhi sono a volte piccoli e abbastanza regolari, più spesso piccolissimi e del tutto irregolari, ma sempre ben pigmentati: all'esame istologico si nota necrosi di vario grado del tessuto retinico, mentre il cristallino può presentarsi più resistente. Gli embrioni morirono dopo un numero vario di giorni, specie in rapporto con la temperatura ambiente; come unica eccezione ebbi la sopravvivenza di due embrioni di uno stesso gruppo, che perciò non utilizzai.

Eseguii numerosi trapianti di abbozzo oculare da embrione irradiato su embrione normale; e dopo un numero vario di giorni, fissai contemporaneamente donatore e trapianto. All'esame istologico l'occhio rimasto *in situ* e quello trapiantato si presentano nelle stesse condizioni, oppure il trapiantato in condizioni peggiori. Le parti necrotiche scompaiono più rapidamente nel trapiantato. Per lo più questo termina con il suo completo riassorbimento, dopo che i controlli irradiati sono già morti.

In qualche singolo gruppo di esperienze osservai un fatto molto interessante: l'occhio trapiantato continuava a vivere senza dar segni di riassorbimento, mentre gli embrioni irradiati degli stessi gruppi erano già morti. Così, ad esempio, in un caso fissato 20 giorni dopo il trapianto (in giugno-luglio), si nota all'esame istologico un occhietto in buone condizioni e ben differenziato, mentre tutti gli irradiati dello stesso gruppo erano già morti da 10-13 giorni. Il donatore fu fissato 8 giorni dopo l'irradiazione, quando era già sofferente in modo da non lasciar dubbio che sarebbe morto al pari degli altri embrioni; l'occhio aveva raggiunto un discreto differenziamento. È questo uno dei punti che avrò più cura di ripetere, sia per fissare bene i limiti sperimentali del fatto, sia nel senso di ricercare l'eventuale esistenza di organi che per essere più sensibili causino, morendo, la morte dell'intero organismo.

Irradiazione di 60'. — Gli embrioni irradiati per 60' presentano, *in vivo*, gli stessi fatti di quelli irradiati per 30', ma molto più accentuati, mentre le differenze individuali sono meno ampie; muoiono dopo un tempo più breve (dopo 4-6 giorni, in luglio) ⁽¹⁾. L'abbozzo retinico ed il lentogeno soggiacciono a necrosi completa: notevolmente più resistenti sono gli strati pigmentati.

L'abbozzo oculare trapiantato e quello rimasto *in situ*, fissati contemporaneamente, si presentano nelle stesse condizioni. L'osservazione *in vivo*, confermata dall'esame istologico, mostra, dopo la morte dei controlli irradiati, il graduale assorbimento del trapiantato.

Irradiazione di 90'. — In un caso trapiantai parte dell'estremità cefalica di un embrione irradiato per 90', separata con un taglio immediatamente posteriore alle vescicole ottiche, su un embrione normale: osservai il riassorbimento graduale e completo del trapiantato, senza che precedesse alcuna pigmentazione degli abbozzi oculari. Lo stesso risultato ottenni nel trapianto di vescicole ottiche.

Queste esperienze di trapianti da embrioni irradiati su normali saranno opportunamente ampliate ed estese ad altri abbozzi, ma fin d'ora permettono di trarre alcune conclusioni. Finchè l'embrione donatore rimane in vita, il suo occhio e quello trapiantato su embrione normale si presentano nelle stesse condizioni, senza che il trapiantato — in tali limiti di tempo — abbia quindi vantaggio dall'esser riportato in ambiente normale: ciò è segno che l'azione necrotica dei raggi X ha colpito direttamente, ed in modo irreversibile, il tessuto oculare. Continuando — dopo la morte del donatore (o degli embrioni controllo) — a seguire il comportamento del trapiantato, si osserva, sempre per le irradiazioni di 60' o più, e quasi sempre per quelli di 30', il suo completo riassorbimento. Vi è però qualche caso tra gli embrioni irradiati per 30', in cui — e ciò è di notevole interesse — l'occhio rimane in vita, mentre i controlli son già morti da parecchi

⁽¹⁾ Controllai sperimentalmente che l'edema inizia contemporaneamente negli embrioni irradiati per 60' e nei normali cui siano asportati i pronefri. Lo studio del comportamento degli abbozzi renali, che ho già iniziato, appare di notevole interesse.

giorni, e, ovviamente, anche il trapiantato se fosse rimasto *in situ* sarebbe morto insieme con l'embrione cui apparteneva ⁽¹⁾.

b) *Trapianto della vescicola ottica di embrione normale su embrione irradiato.*

Trapiantai la vescicola ottica di embrioni normali su irradiati per 15', 30', 60', per osservare eventuali alterazioni prodotte, dall'irradiazione, sull'intero organismo.

Finora non sono risultate. È solo da notare un lieve ritardo nella velocità di sviluppo nei trapianti su embrioni irradiati per 60', e, in grado ancor minore, in quelli di 30' che rimanendo in vita per un tempo sufficientemente lungo permettono un differenziamento anche normale del trapiantato. Si devono inoltre tener presenti le sfavorevoli condizioni meccaniche create dallo scarso sviluppo nell'embrione irradiato, e particolarmente dall'idrope, specie se interessa la zona del trapianto. Il ritardo di sviluppo manca nei trapianti su embrioni irradiati per 15'.

Queste esperienze saranno ampliate ed estese ad abbozzi più sensibili.

* * *

Concludendo, le ricerche esposte permettono di porre in rilievo tre punti. 1) I perturbamenti subiti dall'abbozzo oculare negli embrioni irradiati non scompaiono se lo si trapianta su embrione normale. 2) Il trapianto può continuare a vivere anche molti giorni dopo la morte del donatore, senza dar segni di riassorbimento, mentre se fosse rimasto *in situ* sarebbe evidentemente morto con l'embrione cui apparteneva. 3) L'abbozzo oculare normale trapiantato su embrione irradiato subisce solo una lieve diminuzione nella velocità di sviluppo.

⁽¹⁾ Eseguì alcuni trapianti di abbozzo codale di embrioni irradiati per 1 o 2 ore su embrioni normali. Trattandosi di esperienze preliminari, mi limitai a seguirle *in vivo*. I trapianti non presentarono mai uno sviluppo maggiore che nei controlli; ma è notevole che in vari casi non osservai il loro riassorbimento, pur avendoli seguiti per moltissimi giorni dopo la morte dei controlli.

TRAVI IN CEMENTO ARMATO AD ELEMENTI IN DIVERSO STATO DI COAZIONE (*)

(Con tre figure)

CARLO CESTELLI GUIDI

SUMMARIVM. — Cum COLONNETTI quaedam animadverterit de computandis sollicitationibus in trabe caementi armati ⁽¹⁾, quae, ob antea tensas fulturas, sit in statu coactionis, et externis viribus subdatur, Auctor generatim de trabe disserit, una vel pluribus trabibus constanti, quarum alia sit in alio coactionum statu; artificium quoddam Auctor significat, quo sua computatio ad normalem casum tum etiam referri potest, cum, externis oneribus gravantibus, nisus et contentiones tractionis adsint in conglomerato ⁽²⁾.

Consideriamo dapprima una sola trave in conglomerato con armature preventivamente tese ⁽³⁾.

Le sollecitazioni che si hanno in essa in assenza di forze esterne o sotto carico possono in ogni caso calcolarsi secondo la regola seguente:

« Detta \bar{N} la risultante delle tensioni preventive (anteriori al getto) a cui furono sottoposte le armature (risultante nota in grandezza e posizione) e detto N lo sforzo longitudinale (eventualmente nullo e in-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti il 12 dicembre 1944.

(1) G. COLONNETTI, «Scienza delle Costruzioni», Torino, 1941, pag. 483.

(2) Il procedimento di calcolo indicato in questa nota è stato già applicato dallo scrivente al caso più semplice di un sistema misto costituito da nervatura precompressa e soletta non precompressa (C. CESTELLI GUIDI, *Contributo al calcolo del cemento armato precompresso*, «Annali dei LL. PP.», Dicembre 1932).

(3) Le sollecitazioni nelle armature della trave per forze esterne applicate ad essa prima di eseguire il getto, e quelle che si destano nel conglomerato (e le residue nel ferro) in seguito alla eliminazione di dette forze esterne, le indicheremo, con il COLONNETTI: sollecitazioni preventivamente applicate alle armature, le prime e sollecitazioni dello stato di coazione le seconde. Tuttavia per comodità di esposizione a volte chiameremo, seguendo una consuetudine ormai dif-

finitamente lontano) dovuto alle forze applicate (anch'esse note in grandezza e posizione), si indichi con R la risultante di N ⁽¹⁾ e di $-\bar{N}$, R sarà così nota in grandezza, posizione e segno. Si ha allora che:

a) le tensioni effettive σ_c del calcestruzzo sono uguali a quelle che si avrebbero per la forza eccentrica R ;

b) le tensioni effettive σ_f del ferro sono uguali a quelle che si avrebbero, come sopra, per lo sforzo eccentrico R , aumentate (algebricamente) delle tensioni preventive (note).

Per rendersi ragione di questo fatto, riportiamoci all'istante in cui venne terminato il getto, prima che la trave venisse lasciata a sè stessa.

In tale istante le armature sono soggette ad uno sforzo assiale di cui \bar{N} è la risultante, mentre il σ_c è dovunque nullo. Possiamo dire che \bar{N} è, in questo caso, la risultante relativa a tutte le sezioni della trave. Se dunque dopo aver abbandonato la trave a sè stessa, si applica nuovamente uno sforzo longitudinali pari a \bar{N} ed ugualmente disposto, si ritornerà alle condizioni di partenza con $\sigma_c = 0$ e $\sigma_f = \bar{\sigma}_f$. Più in generale, se per una qualunque sezione di trave la risultante relativa è \bar{N} (in grandezza, senso e posizione) si ha per quella sezione:

$$\sigma_c = 0 \quad \text{e} \quad \sigma_f = \bar{\sigma}_f$$

Se dunque N è l'effettiva risultante relativa ad una sezione della trave, possiamo considerarla come composta di due sollecitazioni: la

fusa, pretensioni le prime e, per il conglomerato, precompressione le seconde con espressione inesatta, sia perchè lo stato di coazione può portare anche a sforzi di trazione in una zona della sezione, sia perchè esse si destano posteriormente e quindi, caso mai, il prefisso «pre» è da interpretarsi come stato di cose precedente alla applicazione dei carichi utili. Per trave precompressa intenderemo allora una trave in stato di coazione per la eliminazione delle forze esterne preventive.

Riguardo alla simbologia seguita si chiarisce che i simboli lineari (\bar{N} , $\bar{\sigma}$) si riferiscono allo stato preventivo di applicazione delle sollecitazioni esterne alle armature, quelli con asterisco (σ^*) allo stato di coazione prodotto dalla eliminazione delle forze esterne preventivamente applicate alle armature ed infine l'apice (σ') alle travi aggiunte a quella principale (fig. 1).

(1) Il segno delle forze N e \bar{N} , trattandosi di c. a. si assumerà positivo se di compressione. Perciò la pretensione sarà in pratica un numero negativo.

sollecitazione \bar{N} e una certa sollecitazione che chiameremo R. Potremo perciò scrivere l'equazione simbolica

$$[1] \quad N = \bar{N} + R$$

Ora, la sollecitazione \bar{N} annulla, come s'è detto, tutti i σ_c , mentre rende uguali a $\bar{\sigma}_f$ i vari σ_f . *L'annullarsi dei σ_c per una delle sollecitazioni componenti assicura che si può applicare anche al calcestruzzo la sovrapposizione degli effetti.* Avremo perciò dalla [1]:

$$[2] \quad \sigma_c = \sigma_{cR}$$

e

$$[3] \quad \sigma_f = \bar{\sigma}_f + \sigma_{fR}.$$

Siccome poi, per la [1], R si può considerare come risultante dei due sforzi — \bar{N} ed N, e cioè:

$$[4] \quad R = -\bar{N} + N,$$

risulta senz'altro giustificata la proposizione sopra enunciata.

Nel caso particolare di $N=0$ (trave non soggetta a carichi), la [4] dice che, nello stato naturale (cioè a vuoto), i σ_c sono quelli che si avrebbero nella corrispondente trave normale soggetta ad uno sforzo longitudinale eccentrico pari a $-\bar{N}$, mentre i σ_f , per la [3] si otterranno aggiungendo alle tensioni prodotte dalla $-\bar{N}$ quelle preventive.

* * *

Si consideri quindi il sistema complesso costituito da più travi rettilinee precomprese, accostate e saldate fra loro. Per ipotesi, nella posizione reciproca assunta, i rispettivi diagrammi dello stato di coazione, prodotti dalla eliminazione delle forze esterne di pretensione, siano diversi l'uno dall'altro con la sola condizione che risultino paralleli i loro assi neutri, come è indicato nella figura 1 per due sole travi I e II. Avviene allora che le singole travi assumono curvature diverse che debbono però conservare anche dopo collegate fra di loro.

Costruttivamente ciò si ottiene interponendo fra trave e trave un letto di malta che, ove non combacino le superfici di contatto, come avviene ad esempio con travi sovrapposte, le unisce senza provocare reciproca trasmissione di sforzi.

Diversi accorgimenti assicurano invece che ciò avvenga per le sollecitazioni (sforzi di taglio) che si producono in seguito all'applicazione di carichi esterni. L'accoppiamento, che potremmo dire *in pa-*

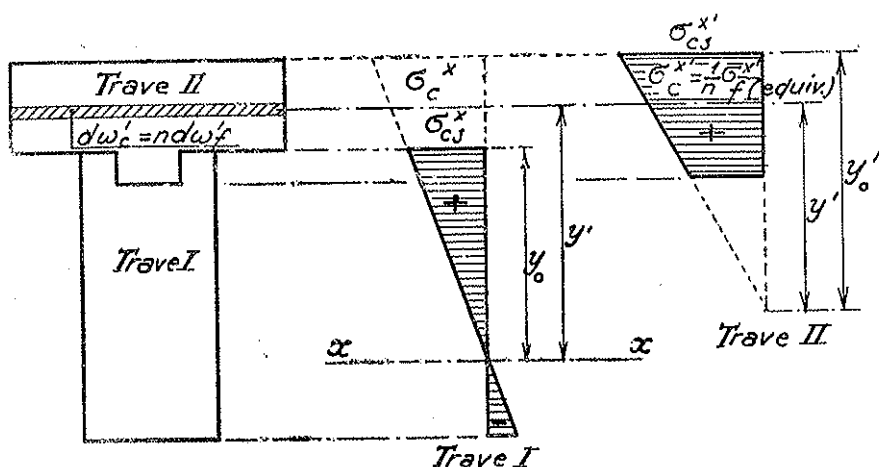


FIG. 1.

rallelo, delle travi può essere totale o parziale. Comunque qui di seguito ci riferiremo sempre ai tratti in cui le travi risultano effettivamente collegate fra di loro.

Per comodità di esposizione chiameremo una delle travi *trave principale* e le altre *travi aggiunte* pur rilevando fin da ora che tale distinzione non influisce sullo sviluppo della trattazione. In seguito suggeriremo il criterio di scelta della trave principale.

Le tensioni a trave scarica (sola precompressione), che distingueremo con asterisco, nelle travi componenti: principale e aggiunte, essendo per ipotesi indipendenti da quelle delle altre, sono nel ferro:

[5]

$$\sigma_f^* = \bar{\sigma}_f + \sigma_{fR}$$

e nel conglomerato

$$[6] \quad \sigma_e^* = \sigma_{cr},$$

dove si sono indicate con σ_{fr} e σ_{cr} le sollecitazioni prodotte in una trave normale in cemento armato, di sezione uguale a quella di una delle travi componenti (con le relative armature), da uno sforzo longitudinale R , che in questo caso si riduce alla precompressione — \bar{N} , sollecitazioni che per quanto precedentemente detto, possono considerarsi note.

Per effetto di una data sollecitazione esterna (caso generale di pressione eccentrica, in particolare flessione o pressione semplice) possono verificarsi per le travi aggiunte tre casi:

- a) *le travi sono tutte compresse;*
- b) *una, o più travi sono tutte tese e le altre tutte compresse;*
- c) *una o più travi sono in parte tese e in parte compresse.*

Esaminiamo successivamente questi tre casi:

Caso a) Le travi aggiunte possono considerarsi tutte resistenti e ad esse può applicarsi il principio della sovrapposizione degli effetti.

Per effetto anche della sollecitazione esterna reale possono verificarsi due sottocasi: *la trave principale risulta tutta compressa* ovvero *parzialmente compressa*.

Nel primo si può continuare ad applicare la sovrapposizione degli effetti e calcolare le tensioni dovute al carico esterno come se si trattasse di una trave resistente anche a trazione, sommando poi i risultati così ottenuti con quelli di precompressione corrispondenti alla trave scarica. Come controllo deve risultare dovunque il σ_e non minore di zero ⁽¹⁾.

Nel secondo sottocaso, ossia con trave principale parzialmente compressa, ove si voglia trascurare, come è d'uso, la zona tesa, il procedimento non è più lecito. Occorre quindi introdurre un artificio che consenta di considerare lo stato di coazione di tutte le travi come derivato da un unico diagramma rettilineo.

⁽¹⁾ In pratica potendosi ammettere piccole sollecitazioni di trazione nel conglomerato rientrano in questo caso anche le travi nelle quali non sia rigorosamente verificata la condizione.

Sia il diagramma prescelto quello della trave principale. Costruttivamente la condizione imposta equivale a supporre che, avvenuta la fase di precompressione delle singole travi componenti, indipendentemente una dall'altra, in seguito alla eliminazione delle forze esterne di pretensione applicate alle rispettive armature, venga prodotto nelle travi aggiunte un ulteriore stato di coazione di valore tale da portare i propri diagrammi di sollecitazione totale a coincidere con quello della trave principale, ovvero con il suo prolungamento, a seconda della posizione reciproca delle travi.

Ciò fatto le travi possono pensarsi rese solidali fra di loro in modo da costituire una unica trave il cui diagramma di sollecitazione risponde alla condizione di essere lineare e continuo.

Con ciò si sono poste le travi aggiunte in uno stato di coazione che è diverso da quello reale, ma, a rendere lecita la posizione fatta, basta pensare che, prima di effettuare il collegamento fra le travi, in quelle aggiunte venga prodotta una sollecitazione preventiva uguale, ma il segno opposto a quella detta, che concorre a produrre la deformazione voluta, e della quale va tenuto conto nel valutare le sollecitazioni finali.

È chiaro allora che l'intensità di questa *coazione preventiva* risulta in ogni punto dalla differenza, cambiata di segno, fra la sollecitazione di precompressione propria della trave principale e quella corrispondente della trave aggiunta, ossia:

$$[7] \quad \sigma_{(prev.)} = - (\sigma_{(princ.)} - \sigma_{(agg.)})$$

e analogamente può dirsi per il ferro reale delle travi aggiunte.

Con procedimento più elegante, seppure meno intuitivo, anziché procedere nel modo detto, sostituiamo al conglomerato delle travi aggiunte una equivalente sezione di ferro. Per fare ciò operiamo sulle loro sezioni trasversali una divisione in striscie orizzontali di area infinitesima $d\omega'$, (si indicano con apice i simboli delle travi aggiunte) come indicato in figura 1 dove la trave I è la principale e la II una delle aggiunte. Queste aree divise per n possono intendersi ciascuna come *l'equivalente in ferro* $d\omega'$, delle aree infinitesime $d\omega'$, e considerate come armatura della trave principale ⁽¹⁾ anche se cadono fuori di essa

⁽¹⁾ L'artificio è indicato dal GIANNELLI per il calcolo delle sezioni a T inflesse in cemento armato.

come nel caso della figura poichè in effetti, nella deformazione, agiscono solidalmente alla trave principale.

Analoghe considerazioni a quelle sopra fatte per il conglomerato delle travi aggiunte possono qui ripetersi per il loro ferro equivalente supposto incorporato nella trave principale. Con questa posizione, poichè il conglomerato della trave principale ha una precompressione σ_c^* (a vuoto), il ferro equivalente verrebbe ad assumere una sollecitazione $n\sigma_c^*$ mentre quella effettiva corrispondente al diagramma di precompressione della trave aggiunta è: $n\sigma_c^{*'}$.

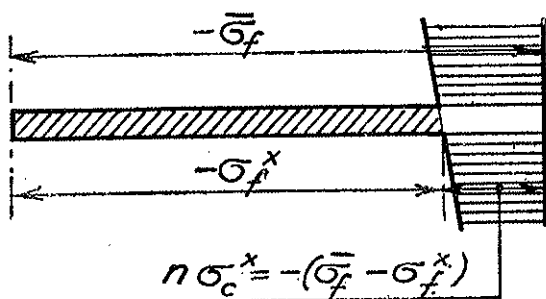


FIG. 2.

Si osservi ora che la caratteristica delle travi precomprese è appunto che la sollecitazione σ_f^* nella armatura non è quella corrispondente alla sollecitazione σ_c^* del conglomerato, come avverrebbe in una normale trave in cemento armato. La differenza è rappresentata dalla pretensione $\bar{\sigma}_f$ (fig. 2) ossia, come si è visto, in virtù della [5]:

$$[8] \quad \bar{\sigma}_f = \sigma_f^* - n\sigma_c^*.$$

Inversamente tutte le volte che in una sezione in cemento armato le sollecitazioni nelle armature sono diverse da quelle del conglomerato moltiplicate per n , dobbiamo dedurne che a dette armature sia stato applicato uno sforzo di pretensione. Ciò si può immaginare esteso anche ai ferri equivalenti, supposti incorporati nella trave principale; infatti, come si è detto, in essi la sollecitazione effettiva non è $n\sigma_f^*$ bensì $\sigma_f^{*'}_{(equiv.)} = n\sigma_c^{*'}$ e quindi la tensione preventiva, che chiameremo *fittizia*, risulta, con espressione analoga alla [8]:

$$[9] \quad \bar{\sigma}_f^{(fitt.)} = \sigma_f^{*'}_{(equiv.)} - n\sigma_c^*.$$

Si può allora, a tutti gli effetti, considerare la trave principale, come se quelle aggiunte non esistessero ed al loro conglomerato fosse sostituito un sistema di armature soggette alle pretensioni fittizie espresse dalla [9].

Anche per i ferri reali delle travi aggiunte, che sono stati sottoposti alla pretensione effettiva $\bar{\sigma}'_f$, vale una relazione analoga alla [8] ossia:

$$[10] \quad \bar{\sigma}'_f = \sigma_f^{*'} - n\sigma_c^{*'}.$$

D'altra parte, considerando anche questo ferro reale come facente parte della trave principale, non coincidendo in generale $\sigma_f^{*'}$ con $n\sigma_c^{*'}$ si potrà trovare una nuova pretensione, che, per distinguerla da quella fittizia, chiameremo *ideale*, definita dalla relazione:

$$[11] \quad \bar{\sigma}'_{f(\text{ideale})} = \sigma_f^{*'} - n\sigma_c^{*'}$$

e sostituendo la [10] nella [11], con riguardo alla [9] e tenuto presente che $n\sigma_c^{*'} = \sigma_{f(\text{equiv.})}^{*'}$ si ottiene:

$$[12] \quad \bar{\sigma}'_{f(\text{ideale})} = \bar{\sigma}'_f + n\sigma_c^{*'} - n\sigma_c^{*'} = \bar{\sigma}'_f + \bar{\sigma}'_{f(\text{fitt.})}.$$

La trave composta può perciò calcolarsi col metodo generale aggiungendo (geometricamente) alle tensioni preventive reali delle travi la risultante di quelle fittizie definite dalla [9] applicate ai ferri equivalenti ed a quelli reali delle travi aggiunte, coll'avvertenza di sommare algebricamente le $\sigma'_{f(\text{fitt.})}$ alle sollecitazioni che si troveranno per il ferro equivalente e reale.

Con riferimento alla figura 1 si consideri allora il valore (noto) della tensione a vuoto in corrispondenza di un punto della trave principale, che in particolare potrà essere quello σ_{cs}^* al suo lembo superiore. Il valore σ_c^* in una fibra distante di y dall'asse neutro (della trave a vuoto) è allora:

$$[13] \quad \sigma_c^* = \frac{y}{y_0} \sigma_{cs}^*$$

ove y_0 ⁽¹⁾ è la distanza del punto prescelto, e nel caso particolare del lembo superiore della sezione, dall'asse neutro (a vuoto).

Analoghe relazioni si trovano per le travi aggiunte e quindi, sempre con riferimento ai simboli della figura 1, risulta nei loro ferri equivalenti la sollecitazione reale:

$$[14] \quad \sigma_r^{*'}(\text{equiv.}) = n \sigma_c^{*'} = n \frac{y'}{y'_0} \sigma_{cs}^{*'}.$$

Sostituendo allora le [13] e [14] nella [9] si ottiene la sollecitazione di pretensione fittizia:

$$[15] \quad \bar{\sigma}'_{r(\text{fitt.})} = n \left(\frac{y'}{y'_0} \sigma_{cs}^{*'} - \frac{y}{y_0} \sigma_{cs}^{*'} \right)$$

e posto ⁽²⁾

$$[16] \quad k' = \frac{\sigma_{cs}^{*'}}{y'_0}; \quad k = \frac{\sigma_{cs}^*}{y_0},$$

a [15] diviene

$$[17] \quad \bar{\sigma}'_{r(\text{fitt.})} = n(k'y' - ky)$$

e quindi la risultante delle pretensioni fittizie da applicarsi ad una trave aggiunta risulta:

$$[18] \quad \bar{N}'_{(\text{fitt.})} = \int_{\omega'_f} \bar{\sigma}'_{r(\text{fitt.})} d\omega'_f = n k' \int_{\omega'_f} y' d\omega'_f - n k \int_{\omega'_f} y d\omega'_f,$$

gli integrali dovendosi intendere estesi ai ferri equivalenti e reali.

Nella [18] il primo termine del terzo membro rappresenta la sollecitazione totale della trave aggiunta, compresi i suoi ferri reali, esistente nella fase di precompressione, sollecitazione la quale coincide, a meno del segno, con la pretensione *effettiva* \bar{N}' applicata ad essa e l'in-

⁽¹⁾ Le y sono positive dalla parte delle σ_c positive rispetto all'asse neutro.

⁽²⁾ Le k sono sempre positive.

tegrale del secondo termine il momento statico S'_x dell'area del ferro equivalente e reale della trave aggiunta, rispetto all'asse neutro $x-x$ (a vuoto) della trave principale, ossia possiamo scrivere l'equazione simbolica

$$[19] \quad \bar{N}'_{(fitt.)} = -\bar{N}' - nkS'_x = -\bar{N}' + \bar{N}'_{(agg.)},$$

nella quale si è introdotta la *pretensione aggiunta*:

$$[20] \quad \bar{N}'_{(agg.)} = -nkS'_x.$$

In base alla convenzione adottata il momento statico è positivo dalla parte delle y positive.

Il punto di applicazione della $\bar{N}'_{(fitt.)}$ è conosciuto in quanto è chiaro che la $\bar{N}'_{(agg.)}$ passa per il centro relativo all'asse $x-x$ della trave principale e quindi dista da questa di $y_x = \frac{J'_x}{S'_x}$.

La [20] cade in difetto qualora l'asse neutro della trave principale vada all'infinito (ossia precompressione uniforme). In tale caso infatti $S'_x = \infty$; $k = 0$ e la $\bar{N}'_{(agg.)}$ diviene indeterminata.

Ricordando che in questo caso $ky = \sigma_c^* = \text{cost.}$, si ha:

$$nk \int y d\omega'_f = n\sigma_c^* \int d\omega'_f = n\sigma_c^* \Omega',$$

dove Ω' è l'area complessiva (ferro equivalente e reale) della parte aggiunta e quindi la [20] diviene:

$$[21] \quad \bar{N}'_{(agg.)} = -n\sigma_c^* \Omega'.$$

Nel caso particolare poi che il baricentro dell'area complessiva della trave aggiunta cada sull'asse neutro del diagramma di precompressione della trave principale, risulta $S'_x = 0$ e quindi $\bar{N}'_{(agg.)} = 0$ e $y' = \infty$ ed infatti un diagramma di sollecitazione con punto di nullo nel baricentro della trave non può essere prodotto altro che da un momento. Allora anzichè una forza di pretensione aggiunta si ha un *momento di pretensione aggiunto* che risulta dalla relazione

$$[22] \quad \bar{M}'_{(agg.)} = -n \frac{\sigma_c^* J'_x}{y} = -nkJ'_x.$$

Per quanto sopra si può, a tutti gli effetti, considerare, come già detto, in luogo della trave composta la sola trave principale, armata, oltre che coi propri ferri, con le armature equivalenti e reali delle travi aggiunte sottoposte, ognuna di queste ultime, complessivamente ad una tensione preventiva di risultante $\bar{N}' + \bar{N}'_{(fitt.)}$.

Il calcolo si riconduce così al caso normale poichè, componendo la pretensione reale della trave principale con quelle reali e fittizie delle travi aggiunte, si ottiene una pretensione definita dall'equazione simbolica:

$$[23] \quad \bar{N}_m = \bar{N} + \sum \bar{N}' + \sum \bar{N}'_{(fitt.)} = \bar{N} + \sum \bar{N}'_{(agg.)},$$

che si può chiamare *pretensione mista* ⁽¹⁾ (fittizia + reale) e che può venire utilizzata per il calcolo della trave principale, solidale alle travi aggiunte, allo stesso modo come verrebbe utilizzata la \bar{N} per la trave principale isolata.

Ed infatti si può ora essere certi che, applicando alla trave principale, provvista in più del ferro equivalente e reale delle travi aggiunte, lo sforzo longitudinale \bar{N}_m , si annullano in essa trave tutte le σ_c , mentre le σ_f (dei ferri reali ed equivalenti) assumono i corrispondenti valori delle relative pretensioni effettive.

Vale perciò la sovrapposizione degli effetti e quindi, detta R la risultante di N (forza esterna applicata) e di $-\bar{N}_m$, si ha per il conglomerato ed il ferro della trave principale:

$$[24] \quad \begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_{cR} ; \\ \sigma_f &= \bar{\sigma}_f + \sigma_{fR} \end{aligned}$$

e per il conglomerato delle travi aggiunte:

$$\sigma'_c = \frac{1}{n} \sigma'_{f(equiv.)} = \frac{1}{n} (\bar{\sigma}'_{f(fitt.)} + \sigma_{fR})$$

⁽¹⁾ Alla [23] poteva giungersi anche direttamente considerare il ferro, equivalente e reale, delle travi aggiunte scarico, ossia come se non fossero esistite le N , salvo poi a tenerne conto nel valutare le sollecitazioni delle sole travi aggiunte. Allora le pretensioni fittizie necessarie a produrre in esse travi scariche lo stato di coazione definito dal diagramma di precompressione della trave principale, si riducono unicamente a quelle aggiunte ossia si sarebbe pervenuti direttamente alla [23].

La [23] ci dice che tutte le travi aggiunte possono essere considerate come una unica trave sottoposta ad una pretensione aggiunta $\sum \bar{N}'_{(agg.)}$.

e tenuto conto della [17]:

$$[25] \quad \sigma'_o = \frac{\sigma_{fR}}{n} + k'y' - ky,$$

per il ferro (¹):

$$[26] \quad \sigma'_f = \bar{\sigma}'_f + n(k'y' - ky) + \sigma_{fR}.$$

(¹) *Esempio*: Sia la trave indicata in figura 3 composta da quattro elementi I-II-III-IV resi solidali fra di loro. Il I e il II si trovino in stato di coazione per preventiva applicazione di tensione alle rispettive armature mentre il III e il IV siano scarichi a vuoto.

Si vogliano calcolare le sollecitazioni della trave così composta per un momento esterno $M = 80.000$ kg cm. Poichè l'entità della precompressione nella trave superiore è stata determinata in modo che essa risulti tutta compressa per effetto anche dei carichi esterni, ed è da presumere, per il segno del momento, che anche quella inferiore sia tutta compressa, mentre la trave I risulta parzialmente tesa, si sceglie nei calcoli questa ultima come principale e le altre come aggiunte indicando con un apice i simboli della trave II e con due apici quelli delle travi III e IV che possiamo considerare come una unica trave.

Determiniamo innanzi tutto le caratteristiche delle varie travi.

Trave principale (I)

Essendo $n = 8$; $\omega_{fi} = 0,75$ cmq; $\omega_{fs} = 0,122$ cmq

$$\bar{\sigma}_f = -12000 \text{ kg/cm}^2; \quad \bar{N} = -12000 (0,75 + 0,122) = -10500 \text{ kg}$$

risulta: $\omega_{(totale)} = 142$ cmq; $J = 5611 \text{ cm}^4$.

Poichè la \bar{N} dista dal lembo inferiore di 4,4 cm ed il baricentro della trave di 8,1 cm si ha una eccentricità di 3,7 cm e quindi:

$$\sigma_{cs}^* = 10500 \left(\frac{1}{142} - \frac{3,7}{5611} \times 12,4 \right) = -11,7 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma_{ci}^* = 130 \text{ kg/cm}^2; \quad \sigma_{fi}^* = -11,075 \text{ kg/cm}^2$$

risulta allora la distanza dell'asse neutro dal lembo superiore:

$$y_0 = -1,7 \text{ cm},$$

e quindi:

$$k = \frac{-11,7}{-1,7} = 6,9 \text{ kg/cm}^2.$$

Trave aggiunta superiore (II)

$$\omega'_f = 32 \varnothing 2 = 1 \text{ cmq}$$

$$\bar{\sigma}_f = -12000 \text{ kg/cm}^2 \quad \bar{N}' = -12000 \times 1 = -12000 \text{ kg}.$$

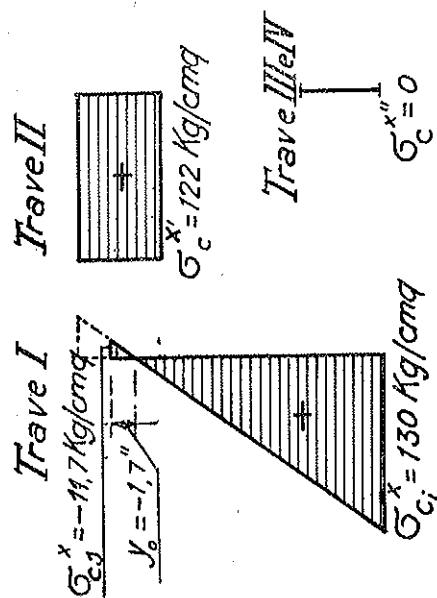
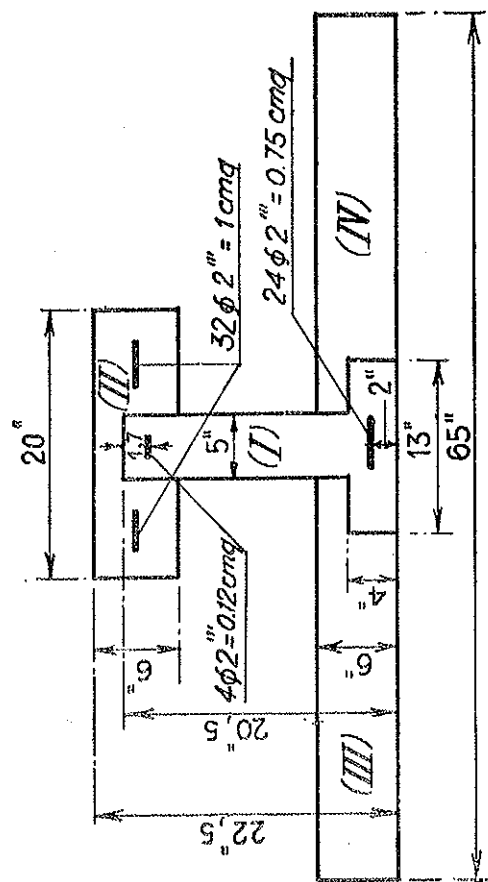


Fig. 3.

Come controllo deve aversi ovunque $\sigma'_c \geq 0$.

Viene poi da sè che, ove una delle travi aggiunte non fosse pre-compressa, risulterebbe a vuoto per essa $\sigma_c^{*'} = 0$ ed essendo quindi $\bar{N}' = 0$ si avrebbe:

$$[27] \quad \bar{N}'_{(fitt.)} = \bar{N}'_{(agg.)} ,$$

L'area del conglomerato, trascurando il piccolo tratto sovrastante alla trave (I), è:

$$\omega'_c = 2 \times 7,5 \times 6 = 90 \text{ cmq}$$

e l'equivalente in ferro

$$\omega'_{f(\text{equiv.})} = \frac{90}{8} = 11,3 \text{ cmq e la totale } \omega'_f = 11,3 + 1 = 12,3 \text{ cmq} .$$

Le sollecitazioni di precompressione sono allora:

$$\sigma_{f(\text{equiv.})}^{*'} \frac{12000}{12,3} = 976 \text{ kg/cmq; } \sigma_c^{*'} = \frac{976}{8} = 122 \text{ kg/cmq;}$$

$$\sigma_f^{*'} = -12000 + 976 = -11024 \text{ kg/cmq;}$$

$$S'_x = -12,3 \times 0,7 = -8,61 \text{ cm}^3$$

e per la [20] la pretensione aggiunta risulta:

$$\bar{N}'_{(agg.)} = -8 \times 6,9 (-8,61) = 475 \text{ kg} ,$$

ed essendo:

$$J'_x = -8,61 (-0,7) + \frac{15 \times 6^3}{8 \times 12} = 39,8 \text{ cm}^4 ,$$

la sua distanza dall'asse neutro della trave principale è:

$$y'_x = -\frac{39,8}{8,61} = -4,6 \text{ cm} .$$

Trave aggiunta inferiore (III e IV)

$$\omega''_c = (65 - 13) 6 + (13 - 5) 2 = 328 \text{ cmq; } \omega''_f = 0$$

$$S''_x = \frac{1}{8} (312 \times 15,8 + 16 \times 13,8) = 643 \text{ cm}^3 ;$$

$$J''_x = \frac{1}{8} \left(4930 \times 15,8 + 221 \times 13,8 + \frac{52 \times 6^3}{12} \right) = 10235 \text{ cm}^4$$

$$\bar{N}''_{(agg.)} = -8 \times 6, 9 \times 643 = -35494 \text{ kg;}$$

$$y''_x = \frac{10235}{643} = 15,9 \text{ cm} .$$

Calcolo della trave composta

La pretensione mista da considerarsi sulla trave composta diviene per la [23]:

$$\bar{N}_m = -10500 + 475 - 35494 = -45519 \text{ kg}$$

e la sollecitazione nel conglomerato:

$$[28] \quad \sigma'_c = \frac{\sigma_{fn}}{n} - k y .$$

Qualora il diagramma dello stato di coazione di una o più travi aggiunte coincidesse con quello della trave principale si avrebbe $k = k'$; $y = y'$ e quindi $\bar{N}'_{(agg.)} = \bar{N}'$. La pretensione fittizia $\bar{N}'_{(fitt.)}$ di dette travi, espressa dalla [19], risulterebbe allora nulla.

* * *

Caso b) Il procedimento è lo stesso del « Caso a »). Il ferro aggiunto delle travi tutte tese risulta costituito unicamente dal ferro reale.

* * *

Essendo nulla la forza esterna applicata (solo momento), le sollecitazioni nella trave si ottengono componendo la risultante $R = -N_m = 45519 \text{ kg}$ con il momento $M = -80000 \text{ kg cm}$. La R deve quindi intendersi applicata ad una distanza dal bordo inferiore della trave:

$$u = \frac{-475 \times 23,4 + 10500 \times 4,4 + 35494 \times 2,9 - 80000}{45519} = 1,3 \text{ cm} .$$

Essendo i coefficienti dell'equazione dell'asse neutro:

$$p = \frac{6 \times 8}{65} \left(0,875 \times 3,1 + 12,3 \times 18,2 - \frac{65 \times 1,3^2}{2 \times 8} \right) = 162 \text{ cm}^2 ;$$

$$q = \frac{6 \times 8}{65} \left(0,75 \times 0,7^2 + 0,122 \times 17,5^2 + 12,3 \times 18,2^2 + \frac{65 \times 1,3^3}{3 \times 8} + \frac{15 \times 6^3}{8 \times 12} + \frac{65 \times 1,3^3}{8 \times 12} \right) = 3070 \text{ cm}^3 ,$$

l'equazione stessa risulta:

$$y^3_x + 162 y_x = 3070 ,$$

da cui

$$y_x = 10,9 \text{ cm} ; \quad y_i = 12,2 \text{ cm} ,$$

e quindi

$$S_x = \frac{1}{2} (65 \times 12,2^2 - 60 \times 6,2^2) - 8 (12,3 \times 7,3 - 0,875 \times 7,8) = 3035 \text{ cm}^3 .$$

Le sollecitazioni nella trave I sono allora:

$$\sigma_{ci} = \frac{45519}{3035} 12,2 = 184 \text{ kg/cm}^2 ;$$

$$\sigma_{fs} = -12000 - \frac{45519}{3035} \times 6,6 \times 8 = -12790 \text{ kg/cm}^2 ;$$

Caso c) Il calcolo si può condurre per successive approssimazioni nel modo seguente:

Supposto dapprima di trovarsi nel caso a) si calcolino mediante la [25] le tensioni σ'_c ai lembi superiore ed inferiore delle travi aggiunte. Trovandosi per una trave che una delle due tensioni è negativa si determini per proporzionalità la posizione dell'asse neutro (che non coinciderà in generale, con quello della trave principale). Ciò fatto si consideri della trave aggiunta, oltre il ferro reale, la sola parte di ferro fittizio (da un lato dell'asse neutro) ove le tensioni risultano positive (compressione) e si calcoli nuovamente come nel caso a). Si trova allora un nuovo asse neutro e così si continua finchè lo spostamento ulteriore dell'asse neutro diviene trascurabile pervenendo allora rapidamente alle tensioni definitive, poichè in generale possono ammettersi anche piccoli sforzi di trazione nel conglomerato.

e nella trave aggiunta superiore essendo:

$$k' y' = \text{costante} = \sigma'_c = \frac{\sigma'_{f(\text{equiv.})}}{n},$$

per la [25] risulta:

$$\sigma'_{cs} = - \frac{45519}{3035} 10,3 + \frac{976}{8} - 6,9 (-3,7) = -6 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma'_{ci} = - \frac{45519}{3035} 4,3 + \frac{976}{8} - 6,9 \times 2,3 = 42 \text{ kg/cm}^2,$$

e per la [26] la sollecitazione media nel ferro:

$$\sigma'_f = -12000 + 976 + 8 \times 6,9 \times 0,7 - \frac{45519}{3070} 7,3 \times 8 = -11850 \text{ kg/cm}^2.$$

Nella trave aggiunta inferiore per la [25] (essendo $k'' = 0$):

$$\sigma''_{ci} = 186 - 130 = 56 \text{ kg/cm}^2;$$

$$\sigma''_{cs} = \frac{45519}{2972} 6,1 - 6,9 \times 12,8 = 5 \text{ kg/cm}^2.$$

Dai risultati conseguiti si rileva che la trave I è parzialmente tesa, la II è quasi integralmente compressa avendosi al lembo superiore una trazione di soli 6 kg/cm² ed a quello inferiore una compressione di 42 kg/cm² e le travi III e IV sono completamente compresse.

Sono pertanto verificate le ipotesi di calcolo salvo che per la trave II. Si potrebbe allora ripetere il procedimento come indicato nel caso c) ossia trascurando la zona tesa dalla trave II, ma poichè la piccola trazione trovata può essere ammessa per il conglomerato, sono praticamente accettabili i risultati ottenuti.

Agli effetti dei risultati del calcolo è indifferente considerare l'una o l'altra delle travi come principale, però ove è possibile prevedere che delle travi risultino, per effetto anche delle sollecitazioni esterne, tutte compresse, o tutte tese, conviene scegliere queste come travi aggiunte.

* * *

È il caso di rilevare, in fine, che l'accoppiamento in parallelo di elementi prismatici in conglomerato diversamente precompressi, a parte la difficoltà di pratica attuazione, presenta un effettivo interesse consentendo la realizzazione di travi con diagrammi di precompressione variabili lungo di esse. Soluzione tecnica questa, che, se lascia intravedere la possibilità di realizzare in casi speciali di particolare importanza travi ad uniforme resistenza, si impone per le travi normali quando si abbia inversione del segno dei diagrammi dei momenti per incastri agli estremi.

In particolare il caso di trave precompressa abbinata ad altra non precompressa si trova tutte le volte che un elemento precompresso viene incorporato in un getto normale di conglomerato.

IL MICROPLANKTON DI SUPERFICIE DEL GOLFO DI NAPOLI(*)

(con una figura)

ENRICO INDELLI

SUMMARY. — Microplancton, quod in summa aqua intra Neapolitanum sinum vivit, simillimum cursum anno 1944 habuit atque ISSEL annis 1929-1931 observavit, nisi quod maximum vernal Peridinaiorum (quae vocantur *Peridinia divergentia* Ehrenberg) maius fuit anno 1944 quam annis 1929-1931.

INTRODUZIONE

Ho preso in esame il microplancton di superficie del golfo di Napoli (golfo interno) al fine di vedere se la *facies* fosse diversa da quella descritta da ISSEL (1934), che nel triennio 1929-1931 compì uno studio sul ciclo annuale del microplancton di superficie del golfo di Napoli.

Il vecchio lavoro di SCHROEDER (1901), relativo al microplancton del golfo di Napoli, non permette purtroppo di rilevare se la *facies* del microplancton, all'epoca degli studi di questo autore, fosse la stessa o meno di quella dell'epoca di ISSEL, perchè il lavoro in questione ha quasi esclusivamente carattere di revisione sistematica e non tiene conto della frequenza delle specie nei diversi saggi.

Occorreva quindi vedere se, dopo tredici anni, che tanti passano dalle ultime osservazioni di ISSEL alle mie, la *facies* del plancton fosse restata la stessa o fosse variata. A questo studio mi ha spinto

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Umberto Pierantoni, il 23 dicembre 1944.

anche l'esplicita richiesta di un simile controllo invocato da ISSEL che, nelle conclusioni del suo lavoro (1934, pag. 30), chiede uno studio continuativo del ciclo del microplancton. Il presente lavoro intende portare un primo contributo a questo studio.

METODO

Ho compiuto le mie ricerche sul microplancton di superficie (1,50-2 metri di profondità) pescato a circa 200 metri al largo del piccolo porto di Mergellina, con retino Asptein di garza n. 20 con diametro alla bocca di cm. 30, trainato da una barca a remi per dieci minuti.

Il microplancton è stato da me studiato sul vivo, nei laboratori della Stazione Zoologica di Napoli.

I saggi, in numero di 62, sono stati prelevati con una o due pescate giornaliere eseguite tra le 7 e le 8 (ora solare). Ho fatto anche eseguire alcune coppie di pescate in uno stesso giorno: una alle ore 6 e l'altra alle 12.

Queste coppie di pescate erano eseguite per vedere se ci fossero delle variazioni nelle specie dominanti alle diverse ore del giorno, in funzione della diversa incidenza dei raggi solari.

GRUPPI STUDIATI

Ho preso in esame i due gruppi principali del fitoplancton e cioè le Diatomee e le Peridinee, di cui ho osservato complessivamente 65 specie; inoltre ho seguito le variazioni di *Spirulina maior* (Cianoficee) e di *Cerasterias raphidioides* (Cloroficee).

Ho ritrovato 48 specie tra quelle citate dall'ISSEL, che sono fra le più comuni nel golfo di Napoli, oltre ad altre 17 specie non citate dal suddetto autore, che però appaiono assai più rare.

DIATOMEES

Com'è noto, nel golfo di Napoli, le Diatomee sono abbondantissime e ciò è dovuto al fatto che esse vivono nelle acque ricche di rifiuti animali, condizione questa che si riscontra nella zona costiera napoletana, molto popolata.

Infatti le osservazioni fatte hanno messo in evidenza che su 62 saggi, 54 sono con prevalenza di Diatomee e 11 con prevalenza di Peridinee.

È da notare che, fra le Diatomee, ho ritrovato, ed anche copiosamente, il *Chaetoceros constrictus* Gran, specie che ISSEL, nella sua memoria già citata, descriveva per la prima volta per il Mediterraneo e reperiva abbondante nelle sue pescate primaverili.

PERIDINEE

Quantitativamente le Peridinee, se nelle acque del golfo di Napoli non presentano durante la maggior parte dell'anno l'abbondanza delle Diatomee, hanno però una notevole varietà di specie. I due generi più abbondanti sono: *Ceratium* e *Peridinium*.

I *Ceratium* hanno specie perenni e specie afanoterme (usando questi termini nel senso di ISSEL). Fra le prime sono *Ceratium furca* Clap. et Lachm., *C. fusus* Ehrb. e *C. tripos* (O. F. Müller) var. *mediterraneum* Pavill.; fra le seconde *Ceratium trichoceros* Ehrb. e *C. macroceros* Stein. Dalle mie osservazioni infatti, risulta che queste due ultime specie, e in prevalenza la prima, presentano un massimo rigoglio al principio della primavera. Vanno poi man mano diminuendo fino a presentarsi in numero di uno o due individui nei saggi di fine primavera.

Fra le specie perenni *Ceratium furca* è, quasi costantemente, abbondante mentre *Ceratium fusus* e *C. tripos* divengono più scarse con le temperature elevate.

Per quanto riguarda il genere *Peridinium*, è da notare che esso presenta una grande varietà di specie. I rappresentanti più comuni sono: *Peridinium divergens*, *P. diabolus* (Cleve), *P. oceanicum* var. *oblongum* Aurivill e *P. depressum* Bailey.

Questi sono più o meno tutti perenni, facendo eccezione il solo *Peridinium depressum* che, come già aveva osservato l'ISSEL, appare quando l'acqua si riscalda.

I *Peridinium* hanno un massimo verso la metà della primavera. In questo periodo, e precisamente dal 15 maggio al 5 giugno, con una breve interruzione, essi hanno rappresentato l'elemento dominante del plancton.

ALTRE PERIDINEE

Fra le altre Peridinee ho ritrovato *Dinophysis caudata* Kent, *D. tripos* Gourr, *D. ovum* Schütt, *D. Schroëderi* Pavillard, *Goniodoma polyhedricum* (Pouch), *Ornithocercus heteroporus* Kof. e *O. magnificus* Stein, *Ceratocorys horrida* Stein, *Gonyaulax polyhedra* Stein, *G. poligramma* Paulsen, *Phalacroma poridictyum* Stein e *Ph. doryphorum* Stein.

SPECIE ASSENTI NEL 1929-1931

Ho sopra accennato di aver ritrovato nell'osservazione dei saggi, alcune specie che l'ISSEL, nel suo lavoro non ha citato.

Dico subito che queste specie, in numero di 17, non si sono mai presentate come elementi prevalenti in alcun saggio osservato, ma soltanto come individui più o meno isolati.

Fra tutte, le specie che si sono mostrate più frequentemente e più numerose rispetto alle rimanenti, sono: *Rhizosolenia Hensenii* Schütt, *Rh. semispina* (Hensen), *Cerasterias raphidioides* Reinsch, *Spirulina maior* Gomont, *Rabdonema adriaticum* Kütz, *Tabellaria flocculosa* Kütz, *Pleurosigma angulatum* Karsten.

RISULTATI

Dalle mie ricerche sul microplancton di superficie del golfo di Napoli risultano evidenti quattro fatti:

1°) che la rigogliosa produzione primaverile del *Chaetoceros constrictus*, notata per la prima volta da ISSEL nelle acque del golfo, è stata da me riscontrata abbondante e predominante sulle altre specie nei saggi del 24, 25, 26 e 28 aprile, del 2 e 20 maggio, restando sempre più o meno abbondante in quasi tutti gli altri saggi.

2°) che il *Chaetoceros rostratus* Lauder, apparso per la prima volta nel saggio del 3 maggio, mostra un evidentissimo rigoglio ed assume carattere di dominante nei saggi del 21, 22 e 26 giugno cioè

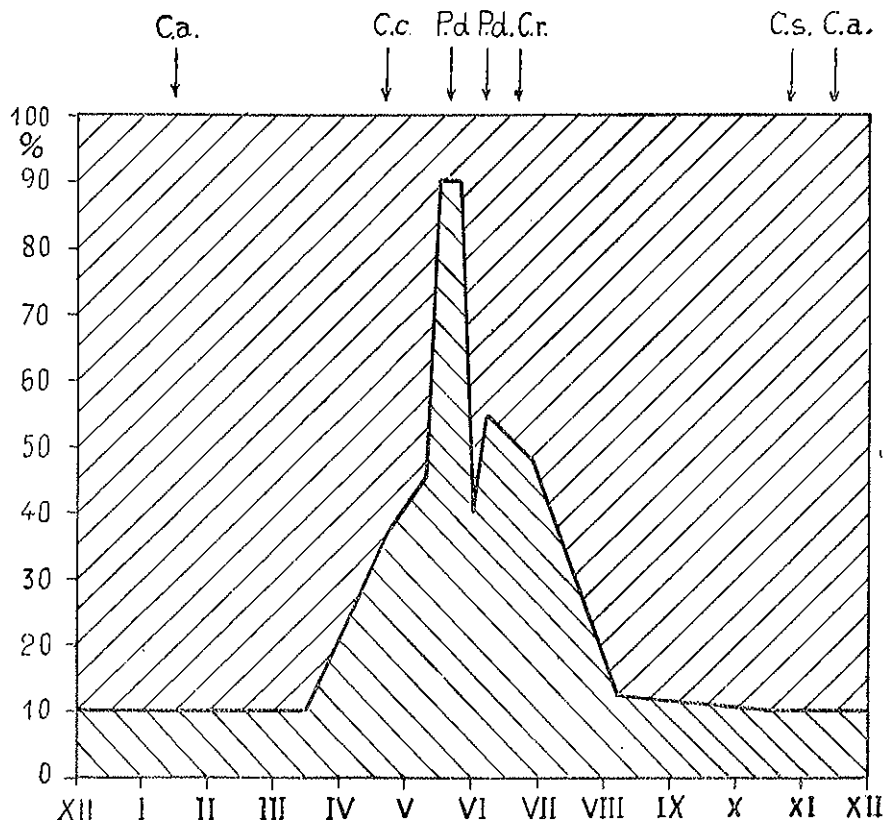


FIG. 1.

Composizione percentuale del plancton nel 1944. L'area ripiena con tratti inclinati verso sinistra indica la percentuale di Peridinee, quella con tratti inclinati verso destra indica la percentuale di Diatomee. Le frecce indicano il massimo delle specie più comuni. C. a., *Chaetoceros affinis*; C. c., *Chaetoceros constrictus*; C. r., *Chaetoceros rostratus*; C. s., *Chaetoceros curvisetus*; P. d., *Peridiatum divergens*.

all'inizio dell'estate; la qual cosa viene a confermare il massimo estivo di questa diatomea per il golfo di Napoli, come aveva notato l'ISSEL, a differenza delle acque di Genova dove la specie in parola ha un massimo invernale.

3°) che il microplancton dei due saggi, pescati in ore diverse dello stesso giorno, è costituito qualitativamente delle stesse specie dei giorni precedenti e si nota soltanto una certa differenza quantitativa; cioè la *facies* planctonica è la medesima nei due saggi, mentre le stesse specie mostrano nel saggio pescato alle ore 12 un numero di individui minore di quelli osservati nel saggio pescato alle ore 6, fatto questo che si attendeva perchè è ben noto (cfr. ad es. ISSEL 1932) che gli elementi del fitoplancton tendono a spostarsi in basso quando l'intensità della luce è molto forte.

4°) le Peridinee presentano un massimo che cade tra maggio e giugno come osservava anche ISSEL; nel 1944 però esse si sono mostrate nettamente dominanti sulle Diatomee per alcuni giorni consecutivi e non in reperti isolati come riscontrava ISSEL. Questi infatti trovava che le Peridinee, nel triennio 1929-1931, predominano sulle Diatomee nei saggi del 31 maggio 1930 e del 23 maggio e 6 giugno 1931, mentre io le ritrovo predominanti in due periodi che vanno, rispettivamente, dal 15 al 24 maggio e dal 1° al 5 giugno 1944. Se si considerano quindi i reperti del periodo che va dal 15 maggio al 7 giugno, sia per gli anni 1929-1931 che per il 1944, si trovano le seguenti percentuali: 1929 100 % di Diatomee; 1930 75 % di Diatomee e 25 % di Peridinee; 1931 62,5 % di Diatomee e 37,5 % di Peridinee; 1944 55,6 % di Diatomee e 44,4 % di Peridinee, come emerge dalla tabella 1.

In base a tutto questo, si potrebbe forse parlare di un aumento delle Peridinee (*Peridinium divergens*) a detrimento delle Diatomee (*Chaetoceros constrictus*, *C. curvisetus*, *Skeletonema costatum*).

La conclusione principale cui giungo è però la seguente: a distanza di tredici anni intercorsi tra le ricerche di ISSEL e le mie, non si osserva nel microplancton di superficie del golfo di Napoli altra variazione se non questo aumento del rapporto Peridinee: Diatomee nella seconda metà di maggio e nella prima settimana di giugno. Si può pertanto parlare di una notevole costanza della *facies* del fitoplancton.

TABELLA I.

1929	1930	1931	1944	SPIEGAZIONE DELLA TABELLA
—	—	—	15-V P	<p>Vicino alla data della pescata D indica il prevalere delle <i>Diatomee</i> (<i>Chaetoceros constrictus</i>, <i>C. didymus</i> Ehrb., <i>C. affinis</i> Lauder, <i>Skeletonema costatum</i> Grev, <i>Nitzschia seriata</i> Cleve); P il prevalere delle <i>Peridinee</i> (<i>Peridinium divergens</i>, <i>P. depressum</i>, <i>Ceratium furca</i>). Le pescate del 1929, 1930, 1931 sono quelle di ISSEL; le pescate del 1944 le mie.</p> <p>In basso la percentuale dei giorni nei quali predominano le <i>Peridinee</i> negli anni indicati in testa alla colonna.</p>
—	—	15-V D	—	
—	17-V D	—	—	
18-V D	—	—	—	
—	—	—	19-V P	
—	—	—	20-V D	
—	—	—	22-V P	
—	—	23-V P	23-V D	
—	24-V D	—	24-V D	
—	—	—	25-V P	
—	—	—	26-V D	
—	—	—	27-V D	
—	—	—	29-V D	
—	—	30-V D	30-V D	
—	31-V P	—	31-V D	
1-VI D	—	—	1-VI P	
—	—	—	2-VI P	
—	—	—	3-VI P	
—	—	—	5-VI P	
—	—	6-VI DP	6-VI D	
—	7-VI D	—	7-VI D	
0 % P	25 % P	37,5 % P	44,4 % P	
25 %				

Onde dimostrare questa costanza, riporto una comparazione dei protocolli di alcune pescate mie e di ISSEL che dimostrano una composizione quasi identica dei saggi nello stesso giorno di due anni diversi.

- ISSEL = Saggio del 25-4-1929 = Fitoplancton a *Chaetoceros constrictus-didymus*; fra i *Ceratium* prevale *C. furca*.
- INDELLI = » » 25-4-1944 = Fitoplancton a *Chaetoceros constrictus*; fra i *Ceratium* prevale *C. furca*.
- ISSEL = » » 23-5-1931 = Fitoplancton a *Peridinium*; *Diatomee* ridotto a detrito; pochi *Ceratium*.
- INDELLI = » » 23-5-1944 = Fitoplancton a *Skeletonema costatum-Peridinium*; molto detrito di *Chaetoceros*; pochi *Ceratium*.
- ISSEL = » » 13-6-1931 = Fitoplancton a *Chaetoceros affinis* con partecipazione di altri *Chaetoceros* (*C. didymus*, *C. Lauder* Ralfs, *C. tortissimus*) e *Nitzschia seriata*.
- INDELLI = » » 13-6-1944 = Fitoplancton a *Chaetoceros affinis*; abbondanti i *C. Lauder*, *C. didymus*, *C. decipiens* Cleve.
- ISSEL = » » 7-8-1931 = Fitoplancton a *Nitzschia seriata* piuttosto scarso; contributo importante di *Chaetoceros affinis*, *C. Lauder*, nonchè *Asterionella japonica* Cleve. Fra le *Peridinee* *Ceratium massiliense* (Gourr) e *Peridinium depressum*.
- INDELLI = » » 7-8-1944 = Fitoplancton a *Chaetoceros affinis*. Abbondanti *C. Lauder* e *C. curvisetus*, *Asterionella japonica*. Fra le *Peridinee*: *Peridinium divergens* e *P. depressum*, *Ceratium massiliense*.
- ISSEL = » » 31-10-1930 = Fitoplancton a *Chaetoceros rostratus* mediocrementemente copioso; incremento di *Diatomee* fra le quali abbonda *Chaetoceros affinis*. Aumento di *Peridinee*.
- INDELLI = » » 31-10-1944 = Fitoplancton a *Chaetoceros curvisetus*; altre *Diatomee* abbondanti sono *Chaetoceros affinis*, *C. rostratus*. Numerose *Rhizosolenia*; si notano alcune *Peridinee*.
- ISSEL = » » 14-12-1929 = Fitoplancton a *Chaetoceros affinis-Thalassiothrix*; mediocrementemente copioso. Partecipazione qualitativamente abbastanza ricca di *Peridinee*.
- INDELLI = » » 14-12-1944 = Fitoplancton a *Chaetoceros affinis*; abbondano pure *C. curvisetus*, *C. rostratus*, *Thalassiothrix* e *Rhizosolenia*. Varie le *Peridinee*.

Per quanto concerne l'aspetto sistematico del problema: le specie da me osservate sono quelle stesse che l'ISSEL aveva notate e le specie, che ISSEL non trova ed io trovo, non sono mai, come si è detto innanzi, predominanti sulle altre ma rappresentate da un numero di individui piuttosto esiguo. Esse, quindi, non si possono considerare come elementi di variabilità a lungo periodo del fitoplancton, ma come comparse accidentali di pochi individui di specie, che appaiono e scompaiono nel golfo per cause la cui natura non è precisabile.

Non deve meravigliare se nel golfo di Napoli vi sia questa relativa costanza mentre a Rovigno, ISSEL (1925) segnala differenze tra il plancton dei diversi anni. Queste variazioni sembrano dovute alle peculiari condizioni idrografiche di quella zona di mare che subiscono sensibili variazioni, rilevabili come variazioni della salsedine, effetto dell'apporto più o meno abbondante delle acque dei fiumi, che si gettano nella regione, tra cui in primo piano il Po.

CONCLUSIONI

Il ciclo annuale del microplancton del golfo di Napoli si presenta nel 1944 con lo stesso aspetto generale che presentava negli 1929-1931, salvo un più spiccato massimo primaverile delle Peridinee (*Peridinium divergens*).

Le stesse specie che predominavano allora predominano ora e molte volte la comparazione tra i dati dell'ISSEL per gli anni 1929-1931 e quanto si osservava nello stesso periodo dell'anno 1944, dà una sorprendente concordanza di risultati.

*Dall'Istituto di Zoologia della R. Università di Milano
ospitato dalla Stazione Zoologica di Napoli.*

BIBLIOGRAFIA

- ISSEL R., *Ricerche sulle variazioni del plancton nelle acque di Rovigno e di Quarto* (1922-1923), « R. Comit. Talassogr. Ital. », Memoria, n. 115, 1925.
- *Natura e ciclo annuale del plancton marino*, « Convegni biologici », 1, 21, 1932.
- *Ciclo annuale del microplancton di superficie del golfo di Napoli (golfo interno)*, « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », 14, 1, 1934.
- SCHRÖEDER B., *Das phitoplancton des Golfes von Neapel*, « Mitt. Zool. Stat. Neapel », 14, 1, 1901.

COMPORTAMENTO DEGLI EMBRIONI DI *RANA ESCULENTA* SOTTOPOSTI A DOSI SUB-LETALI E LETALI DI RAGGI X IN SEGUITO ALLA LORO UNIONE IN PARABIOSI CON EMBRIONI NORMALI(*)

LEA MISTRUZZI

SUMMARIVM. — Auctor perspexit ex parabiosi inter communes ranarum foetus et foetus eiusdem speciei qui antea per radios X irradiati sint, aliquatenus reparari irradiationis damna, si paria sint in parabiosi, cum aliter omnino absorbeatur foetus irradiatus.

Espongo in questa nota i risultati di ricerche preliminari, eseguite nell'Istituto di Anatomia Comparata di Roma, che mirano a mettere in evidenza sia alcune peculiarità delle lesioni da raggi X sia l'influenza che sul loro svolgersi viene esercitata da un particolare ambiente quale quello costituito da un embrione normale.

Altri Autori hanno studiata l'influenza esercitata dalla presenza di determinate sostanze organiche ed inorganiche nell'ambiente di sviluppo del tessuto espianato (SCHUBERT) o degli organismi irradiati ma, da quanto risulta dalla letteratura, nessuno ha mai pensato di osservare quella esercitata da un organismo sano in condizioni di parabiosi con uno irradiato.

Occupandomi già da un anno di problemi inerenti alle parabiosi, volevo tentare questo genere di operazioni fra embrioni irradiati con raggi ultravioletti e embrioni normali; ma non essendo riuscita ad ottenere una dose tale da causare le condizioni necessarie al mio studio dopo un certo numero di giorni dall'irradiazione e poichè PERRI nello stesso istituto

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Filippo Silvestri il 15 gennaio 1945.

aveva iniziato con successo esperienze di trapianti dei donatori trattati con raggi X, che riferirò in seguito, ho deciso di adoperare per il momento queste radiazioni.

Ho eseguito le parabiosi unendo due embrioni allo stadio di vescicola ottica primaria, togliendo un lembo di pelle, evitando di asportare il tuorlo sottostante, sui loro fianchi opposti e poi facendo combaciare le ferite e agevolando con una leggera pressione la loro saldatura. Le operazioni sono state eseguite in vaschette di paraffina contenenti soluzione fisiologica con l'aiuto di un paio di forbicette da iridectomia. Gli embrioni di *Rana esculenta* uniti in parabiosi appartenevano sempre allo stesso lotto e si trovavano allo stesso stadio. Erano uniti in parabiosi un embrione normale ed uno trattato precedentemente con raggi X. L'irradiazione è stata effettuata con un tubo per terapia (Müller-Metro) ad una tensione di 40 Kv ed una intensità di 3mA senza filtro. La distanza della vaschetta di vetro contenente gli embrioni e sempre la stessa quantità di acqua, era di 21,5 cm. dall'anticatodo. I tempi di esposizione ai raggi erano di 15, 30 e 60 minuti primi.

Le lesioni prodotte dai raggi erano di diversa entità a seconda della dose, ma non esiste in senso assoluto una proporzionalità diretta fra dose e gravità delle lesioni: talvolta per le stesse dosi si hanno risultati differenti e per dosi diverse risultati molto vicini dato che molti fattori influenzano la particolare roentgensensibilità degli embrioni, quali lo stadio di sviluppo al quale furono irradiati, la temperatura ambiente ed inoltre anche le condizioni individuali degli embrioni provenienti da lotti diversi, ferme restando le altre condizioni sperimentali.

In genere gli embrioni irradiati per 15' sopravvivono e presentano poche lesioni istologiche limitate al tessuto nervoso; gli altri organi e tessuti sono normali. Dati gli effetti poco appariscenti che si ottengono per questa dose ho preferito eseguire la maggior parte delle esperienze su embrioni trattati per 30' e 60'. In seguito a queste irradiazioni gli embrioni allo scadere di pochi giorni (6-7 nel primo caso, 4-5 nel secondo⁽¹⁾) presentano gravi alterazioni istologiche e morfologiche.

(¹) Bisogna tener presente che la temperatura ambiente nel periodo delle operazioni (giugno-agosto) era piuttosto elevata e che quindi i processi dello sviluppo si esplicavano con maggiore velocità.

Il tipo di queste ultime è affine a quello osservato da molti altri autori in embrioni di anfibî sottoposti, in varî stadi di sviluppo, all'azione dei raggi X, del radio e di altri agenti sia chimici che fisici. In genere si osserva riduzione, che può giungere fino alla inibizione o rudimentazione di tutta la parte cefalica precordale con atrofia dell'apparato boccale; gli occhi possono essere rudimentali o mancare del tutto o si può conservare qualche loro componente (cristallino, *tapetum nigrum*); la capsula otica è sempre presente esclusi i casi di completo riassorbimento o degenerazione della testa. Le branchie sono più tozze e meno ramificate di quelle normali; il corpo si presenta spesso ricurvo dorsalmente e la coda può avere i bordi della pinna frastagliati. Un edema si comincia a manifestare nella zona cardiaca e poi si estende talvolta conflueno con altri eventualmente formati in altre zone. La pressione esercitata dall'idrope impedisce lo sviluppo normale degli organi addominali i quali si presentano molto piccoli. L'intestino raramente forma i tipici avvolgimenti ma per lo più è breve e più dilatato del normale. Il cuore molto piccolo pulsa ritmicamente. Le lesioni istologiche sono particolarmente evidenti nel tessuto nervoso ma anche altri tessuti risentono molto dell'azione lesiva dei raggi. Nei tessuti colpiti si osservano zone contenenti nuclei picnotici, granuli e zolle di pigmento e detriti cellulari.

Tutte queste lesioni che compaiono dopo un certo periodo di latenza, la cui durata dipende da varî fattori fra i quali principalmente la dose, si presentano più o meno estese negli embrioni di *Rana esculenta* che sono stati sottoposti ai raggi X per 30-60 minuti primi.

Unendo in parabiosi embrioni trattati con raggi X con altri normali si ottiene che in principio le lesioni si sviluppano in essi come nei controlli isolati ma ad un certo stadio (branchie esterne) mentre le lesioni continuano ad estendersi in questi ultimi fino a determinarne la morte, nei primi esse subiscono un arresto e l'irradiato non solo sopravvive ma è anche capace di ulteriore accrescimento e differenziazione. Molte coppie sono state portate avanti per parecchie settimane e sono state fissate via via; la descrizione del loro comportamento e dei preparati istologici con esse eseguiti è oggetto di un lavoro in esteso. Una coppia che ho portato fino alla metamorfosi dimostra che non solo l'embrione irradiato è sopravvissuto e si è accresciuto

rispetto ai controlli isolati ma è anche stato capace di compiere quelle trasformazioni istologiche (intestino) e morfologiche (sviluppo degli arti) che sono inerenti a tale stadio. La coppia però non è riuscita a superare la completa metamorfosi forse a causa anche del trattamento tiroideo troppo energetico.

L'accrescimento degli irradiati è sempre inferiore a quello dei normali e si ha sempre una coppia disarmonica con un apparato digerente in comune con branchie o polmoni saldati. La fusione di questi e di altri organi (reni, fegato) sono secondarie, determinate dalle particolari condizioni spaziali che impediscono il loro normale sviluppo e dalla posizione della zona di unione dei due individui. Anche in queste mie esperienze quindi si ha una verifica della legge di BORN sulla tendenza a fondersi, in particolari condizioni, degli organi simili.

Le coppie eseguite con embrioni che hanno più sofferto dell'irradiazione (generalmente dopo un'ora di esposizione ai raggi) presentano un comportamento differente perchè l'irradiato viene quasi totalmente o totalmente riassorbito dal normale. Nella parte addominale di quest'ultimo talvolta si nota ancora la disposizione degli organi assili dell'irradiato con la muscolatura ai lati e la corda al centro; di midollo spinale in genere nessuna traccia. Il riassorbimento si inizia dalla testa e poi prosegue verso la coda che è la parte meno sensibile dell'embrione. Riguardo all'accrescimento degli embrioni si vede che l'embrione normale deve nutrire attraverso le connessioni vasali, che si sono stabilite per mezzo della parabiosi, oltre che a mezzo dell'intestino che è comune ai due individui della coppia, l'irradiato la cui bocca è atrofica o del tutto assente.

Dal normale arrivano perciò all'irradiato non solo sostanze che quest'ultimo utilizza per il proprio accrescimento ma anche altre che direttamente o indirettamente, eccitando forse i meccanismi di difesa o fornendo i mezzi necessari con i quali questi si possono esplicare, bloccano l'estendersi delle lesioni e permettono la sopravvivenza dell'embrione irradiato. Si deve inoltre considerare che anche l'embrione e la larva normale usufruiscono a loro volta delle sostanze dell'irradiato: nelle parabiosi nelle quali si osserva il riassorbimento dell'ir-

radiato è evidente che le sostanze che lo costituiscono vengono in parte assimilate e forse anche in parte eliminate dal normale. Il fatto che le dimensioni di quest'ultimi siano eguali e talvolta anche leggermente maggiori (al principio della vita larvale) di quelle dei controlli normali isolati, dimostra un'utilizzazione delle sostanze provenienti dal compagno irradiato in quanto nelle parabiosi fra embrioni ambedue normali ho osservato lo sviluppo armonico dei due parabionti le cui dimensioni però erano sempre inferiori a quelle dei controlli isolati. Potrebbe darsi che il normale consumi per il suo sviluppo anche il deutoplasma dell'irradiato e possa riassorbire anche cellule già differenziate di quest'ultimo.

Questi risultati confermano quelli di PERRI esposti in una nota che apparirà in questa stessa rivista: quest'autore ha eseguito trapianti di occhi di embrioni irradiati su embrioni normali e viceversa e nel primo caso ha osservato che l'occhio trapiantato presenta le stesse alterazioni dell'occhio rimasto *in situ* mentre il donatore è in vita e che dopo la morte di quest'ultimo il trapianto può essere sia assorbito completamente (in genere in seguito ad irradiazione di 30-60 minuti primi) oppure rimanere in vita senza dar segno di riassorbimento. Nel secondo caso l'occhio dell'embrione normale risente pochissimo dell'ambiente. Dalle esperienze di PERRI risulta quindi che le lesioni rimangono localizzate alla parte irradiata; anche nelle mie esperienze di parabiosi non ho mai notato l'estendersi delle lesioni istologiche al normale; solamente in qualche caso l'edema originatosi nell'irradiato si estende al normale, ma questo è un fenomeno di secondaria importanza che si spiega con la continuità delle cavità corporee dei due animali; però tale idrope è per lo più transitoria perchè il liquido viene in qualche modo riassorbito o eliminato dagli emuntori del normale.

La localizzazione delle lesioni è stata messa in evidenza da molti altri autori (VINTEMBERGER sulle uova, PUCKETT su girini in stadio di sviluppo avanzato). Il PUCKETT ha inoltre studiato l'azione combinata dei raggi X e della tiroide sui girini di rana e ha osservato che gli animali irradiati iniziavano i processi regressivi che accompagnano la metamorfosi ma non erano capaci di differenziare le strutture caratteristiche della rana adulta.

I miei risultati concordano anche con quelli del COTTRONEI su embrioni al litio uniti in parabiosi con embrioni normali e rivelano l'influenza benefica di un organismo sano sulla vitalità di un individuo che per lesioni in esso determinate con mezzi fisici o chimici era destinato a soccombere e mettono quindi in evidenza la intima unione fisiologica che si è stabilita fra essi in seguito alla parabiosi.

BIBLIOGRAFIA

COTTRONEI, « Arch. Zool. », 10, 85-126, 1922.

PUCKETT, « Journ. of exper. Zool. », 76, 303-323, 1937.

SCHUBERT, « Deut. Med. Wochenschrift. », 1, 489-490, 1928.

VINTEMBERGER, « C. R. Soc. Biol. », 99, 1590, 1928; 109, 208, 1932; 112, 1033, 1933; 112, 809, 1933; 117, 693, 1934.

SUL CALCOLO DEL ROLLIO DI UN GALLEGGIANTE TENENDO CONTO DELL'INERZIA DEL FLUIDO(*)

(Con tre figure)

GIULIO KRALL

SUMMARIVM. — Auctor celebrem Kirchhoffianam⁽¹⁾ investigationem de motu rigidi corporis in fluido, ad determinandam periodum iactationis subaquaneis vel fluitantis navigii vult applicare.

I. — PERMESSA.

È notissimo il calcolo del periodo di rollio di un galleggiante, uno scafo per navi ad esempio. Si ammette che le rotazioni abbiano luogo attorno ad un asse passante per il baricentro delle masse e si procede pressapoco nei termini seguenti: detto Θ l'angolo di rollio, I_p il momento polare di inerzia attorno all'asse suddetto, l'energia cinetica \mathfrak{E} è

$$[1] \quad \mathfrak{E} = \frac{1}{2} I_p \dot{\Theta}^2 ;$$

al crescere di Θ si oppone, nelle condizioni di stabilità qui sottintese, la coppia di richiamo, *Peso \mathcal{P} e Spinta*, non coincidenti se $\Theta \neq 0$.

Tale coppia è data da

$$M = - \mathcal{P} \cdot \delta_{M_t} \cdot \sin \Theta$$

essendo δ_{M_t} la *distanza metacentrica trasversale* (cioè la distanza del metacentro trasversale M_t dal baricentro G dei pesi).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi il 5 aprile 1945.

(1) G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Mechanik*. XIX Vorlesung. Teubner, Lipsia, 1897.

Non occorre ricordare che se il corpo è totalmente immerso, il metacentro stà nel *centro di carena* con che δ_{M_1} viene ad indicare la distanza δ_c di questo dal baricentro.

Avendosi per l'unica equazione lagrangiana in Θ ,

$$[2] \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Theta} = M$$

segue immediatamente, attesa l'espressione [1] di \mathfrak{L} ,

$$[2a] \quad I_p \ddot{\Theta} + \mathfrak{J} \delta_{M_1} \sin \Theta = 0.$$

Da questa, per angoli tali per cui si possa confondere Θ con $\sin \Theta$ si ha per il periodo T , la formula nota

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{I_p}{\mathfrak{J} \cdot \delta_{M_1}}}.$$

Dopo questi richiami, passiamo allo specifico problema che interessa.

II. — SI CONSIDERA L'INERZIA DEL LIQUIDO.

È noto, ed è intuitivo, che se un corpo rigido si muove in un liquido si genera in questo un moto ben determinato.

Si può pensare quindi ad una specie di catena cinematica che lega in modo univoco il moto delle masse fluide diffuse al moto del corpo.

Per studiare tale movimento secondo il metodo di LAGRANGE occorre valutare l'energia cinetica $\Delta \mathfrak{L}$ del fluido, espressa nei 6 parametri del corpo rigido, parametri che nella schematizzazione attuale riduciamo ad uno, l'angolo di rollio Θ .

Per conseguire l'intento cominciamo con l'enunciare un classico teorema di KIRCHHOFF⁽¹⁾; il quale consente di affrontare anche sotto aspetti più generali dell'attuale (*rollio e beccheggio* combinati) l'importante questione di cui si tratta.

Se un corpo rigido, che ammettiamo totalmente immerso, si muove in un fluido indefinito: $u, v, w; p, q, r$ sono le 6 caratteristiche della

velocità rispetto a 3 assi ortogonali, solidali, x, y, z ; il moto del fluido è retto da un potenziale di velocità Φ , *uniforme e continuo*, soddisfacente in tutte il campo all'equazione

$$[4] \quad \Delta \Phi = 0;$$

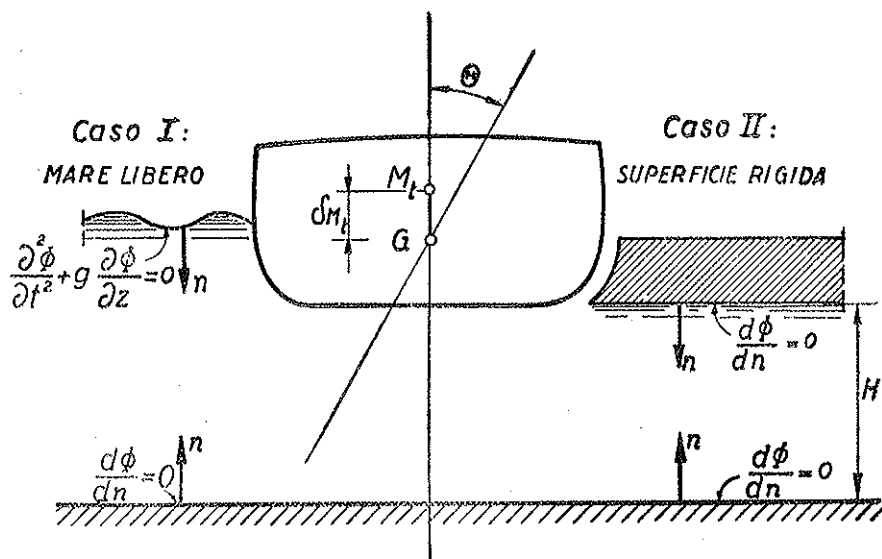


FIG. 1.

sul contorno Ω del corpo, alla condizione ovvia di velocità relativa nulla,

$$[5] \quad \frac{d\Phi}{dn} = (u + zq - yr) \cos \widehat{nx} + (v + xr - zp) \cos \widehat{ny} + (w + yp - xq) \cos \widehat{nz};$$

ed avente infine, derivate nulle all'infinito.

Il KIRCHHOFF ha dato per Φ una espressione estremamente elegante, precisamente:

$$[6] \quad \Phi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6,$$

i 6 potenziali $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$; soddisfacendo in tutto il campo alla [4]; su Ω , alle condizioni

$$\begin{aligned}
 [6a] \quad \frac{d\varphi_1}{dn} &= \cos \widehat{nx}, \quad \frac{d\varphi_4}{dn} = y \cos \widehat{nz} - z \cos \widehat{ny}, \\
 \frac{d\varphi_2}{dn} &= \cos \widehat{ny}, \quad \frac{d\varphi_5}{dn} = z \cos \widehat{nx} - x \cos \widehat{nz}, \\
 \frac{d\varphi_3}{dn} &= \cos \widehat{nz}, \quad \frac{d\varphi_6}{dn} = x \cos \widehat{ny} - y \cos \widehat{nx};
 \end{aligned}$$

all'infinito alla condizione di avere prime derivate nulle. Da tutto ciò appare che i potenziali $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$; *non dipendono dal moto specifico ma solo dalla particolare forma del corpo*: questo è un risultato di manifesta importanza.

Noto Φ , l'energia cinetica addittiva $\Delta \mathfrak{E}$ si calcola con la relazione

$$[7] \quad \Delta \mathfrak{E} = \frac{\gamma_a}{2} \int_S \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dS = - \frac{\gamma_a}{2} \int_{\Omega} \Phi \frac{d\Phi}{dn} d\Omega$$

γ_a essendo la densità specifica del fluido.

In particolare, se $u = v = w = 0$, $q = r = 0$, $p = \dot{\Theta}$, come avviene per uno scafo in rollio, almeno secondo la più semplice schematizzazione,

$$[7a] \quad \Delta \mathfrak{E} = - \frac{\gamma_a \dot{\Theta}^2}{2} \int_{\Omega} \varphi_6 (x \cos \widehat{ny} - y \cos \widehat{nx}) d\Omega.$$

Da qui segue la formola annunciata per il periodo T ,

$$[8] \quad T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{I_p - \gamma_a \int_{\Omega} \varphi_6 (x \cos \widehat{ny} - y \cos \widehat{nx}) d\Omega}$$

con δ_c distanza del *centro di carena* dal *baricentro*, trattandosi, come abbiamo dichiarato, di un corpo totalmente immerso in un fluido infinitamente esteso. Sul calcolo dei potenziali φ per alcuni contorni tipici cfr. KIRCHHOFF, *op. cit.*, XIX Vorl.

III. — CASO DI UN GALLEGGIANTE.

Consideriamo il corpo non più totalmente immerso ma galleggiante. Il campo è allora il cosiddetto *semispazio*. Sia $z=0$ il piano limite (*pelo libero*). La condizione per Φ su $z=0$, nel campo esterno alla proiezione ω di Ω , è, come si desume⁽¹⁾ ritenendo piccole le onde superficiali,

$$[9] \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Al fondo $z=H$, ove l'altezza H non si possa ritenere praticamente infinita, sicchè al semispazio si sostituisce lo strato indefinito, si avrà infine

$$[10] \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Ma qui vogliamo considerare qualche semplificazione. Ammetteremo $H=\infty$ e, in $z=0$, in luogo della [9], la condizione

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0.$$

Ciò corrisponde al caso del semispazio limitato da un piano rigido, dunque, in superficie ad esempio da un lastrone di ghiaccio indefinito con un foro dove si trova il galleggiante. La condizione sembra alquanto restrittiva, ma intuitivamente vien fatto di pensare — ciò che del resto si può sperimentalmente controllare — che, se in superficie il liquido è solidificato, il rollio non debba molto variare quando una tale circostanza non si verifica. Avendosi dunque, poichè z coincide con la normale n ,

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0$$

su tutto il piano, rimane immutata l'espressione [7] di $\Delta \mathfrak{G}$.

(¹) Cfr. ad es. G. KRALL, « Mecc. tecn. vibrazioni », Vol. II, Cap. IX, § 3. Zanichelli, Bologna, 1940.

Ciò posto, con qualche ulteriore ipotesi semplificativa, il calcolo di Φ riesce molto facilitato. Consideriamo infatti il galleggiante a fondo piatto che è tipico per le attuali carene e trascuriamo nella definizione di Ω il contributo delle murate; identificandola semplicemente con l'area di galleggiamento ω . Allora, se pensiamo ω facente parte del piano rigido, per il calcolo di φ_s siamo condotti a risolvere il problema di Neumann per il semispazio.

Manifestamente per le [6a], le condizioni all' ∞ e la condizione esterna ad ω su $z=0$; $\frac{d\Phi}{dn}=0$, è $\varphi_1=\varphi_2=\varphi_4=\varphi_5=0$; per φ_3 e φ_6 invece, si ha

$$[11] \quad \frac{d\varphi_3}{dn}=1, \quad \frac{d\varphi_6}{dn} = \left| x \cos \hat{n}y - y \cos \hat{n}x \right|_{z=0} = -y.$$

La funzione di NEUMANN, (cosiddetta seconda funzione di GREEN) per il semispazio S è ⁽¹⁾

$$\Gamma(P, P') = \frac{1}{r(P, P')} \quad \text{essendo} \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

con P' punto di ω , P punto generico di S. Segue per φ_6 ,

$$[12] \quad \varphi_6(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega} \frac{y(P') d\omega(P')}{r(P, P')}$$

e quindi, poichè per essere $w=0$ è nullo il contributo di φ_3 , per $\Delta\mathfrak{G}$, calcolato secondo la [7],

$$[13] \quad \Delta\mathfrak{G} = -\frac{\gamma_a \dot{\Theta}^2}{4\pi} \int_{\omega} \varphi_6 \frac{d\varphi_6}{dn} d\omega = +\frac{\gamma_a \dot{\Theta}^2}{4\pi} \iint_{\omega} \frac{y(P) y(P') d\omega(P') d\omega(P)}{r(P, P')}.$$

In conformità con la [8], posto

$$[14] \quad \Delta I_p = \frac{\gamma_a}{2\pi} \iint_{\omega} \iint_{\omega} \frac{y(P) y(P') d\omega(P') d\omega(P)}{r(P, P')}$$

⁽¹⁾ Lord RAYLEIGH, *Theorie of Sound*, Vol. II, n. 278. London, 1894-1896; M. PICONE, *Analisi superiore*, Cap. V, Napoli, 1940.

si ha per T,

$$[15] \quad T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(I_p + \Delta I_p)}{\mathcal{S} \cdot \delta_{M_i}}}.$$

Le [14] e [15] risolvono il problema proposto.

Si rilevi che ΔI_p viene caratterizzato come *autopotenziiale* di una distribuzione su un'area piana ω di masse proporzionali alla ordinata y , contata normalmente all'asse del rollio.

IV. — CALCOLO DELL'INTEGRALE [14] PER UNA SEZIONE DI GALLEGGIAMENTO CIRCOLARE.

Sia R il raggio e $\bar{z}\bar{z}$ l'asse di rotazione.

Avendosi con riguardo alla figura 2,

$$y(P') = c \sin \varphi - r \sin (\varphi - \alpha), \quad y = c \sin \varphi$$

segue

$$[16] \quad \Delta I_p = \frac{\gamma_a}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} c^2 \sin \varphi d\varphi dc \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha \int_0^{2c \cos \alpha} (c \sin \varphi - r \sin (\varphi - \alpha)) dr = \frac{2}{15} R^5 \gamma_a.$$

Il momento di inerzia di una sfera omogenea di densità γ_a , raggio R è notoriamente

$$I = \frac{8\pi}{15} R^5 \gamma_a.$$

Pertanto, l'incremento, dovuto al liquido, dell'inerzia dello scafo risulta $\frac{\pi}{4}$ volte il momento di inerzia della sfera omogenea di raggio R e densità γ_a . Naturalmente, le navi circolari non sono frequenti (sembra ne siano state costruite due sole, da guerra, su progetto dell'Amm. Popoff, in Russia) e tale calcolo va quindi inteso come preliminare.

Occorre dunque saper valutare l'integrale [14] con riguardo alle forme allungate, il menisco, l'ellisse, il rettangolo ecc. Ma per ora

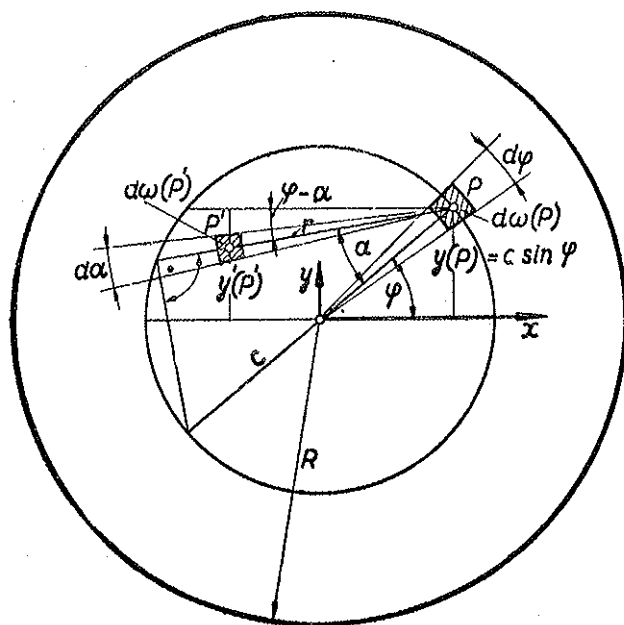


FIG. 2.

lascio aperta la questione limitandomi a suggerire, in mancanza di meglio, una espressione approssimata più che sufficiente, che sfrutta il risultato ottenuto per la circonferenza.

Con riguardo alla figura 3 ed alla leggenda corrispondente si ha:

$$[17] \quad \Delta I_p = \frac{2L^5 \gamma_a}{15} \left(\sum_i \rho_i^5 + \frac{15\pi^2}{2} \sum_{kl} \eta_k \eta_l \frac{\rho_k^2 \rho_l^2}{\rho_{kl}} \right),$$

con l'osservazione che ogni coppia (k, l) va considerata una sola volta e, naturalmente con riguardo al segno del prodotto $\eta_k \cdot \eta_l$.

Consideriamo a titolo illustrativo uno scafo di cui la sezione di galleggiamento è riportata in figura 3. Sia $L = 60,00 \text{ m}$, $2b = 12,90 \text{ m}$.

Si determinano i cerchi di centro I-II-III-IV-V, che, sommati, danno un'area equivalente.

Assunta come unità la distanza L tra le *perpendicolari*, si esprimono le altre lunghezze in rapporto a questa.

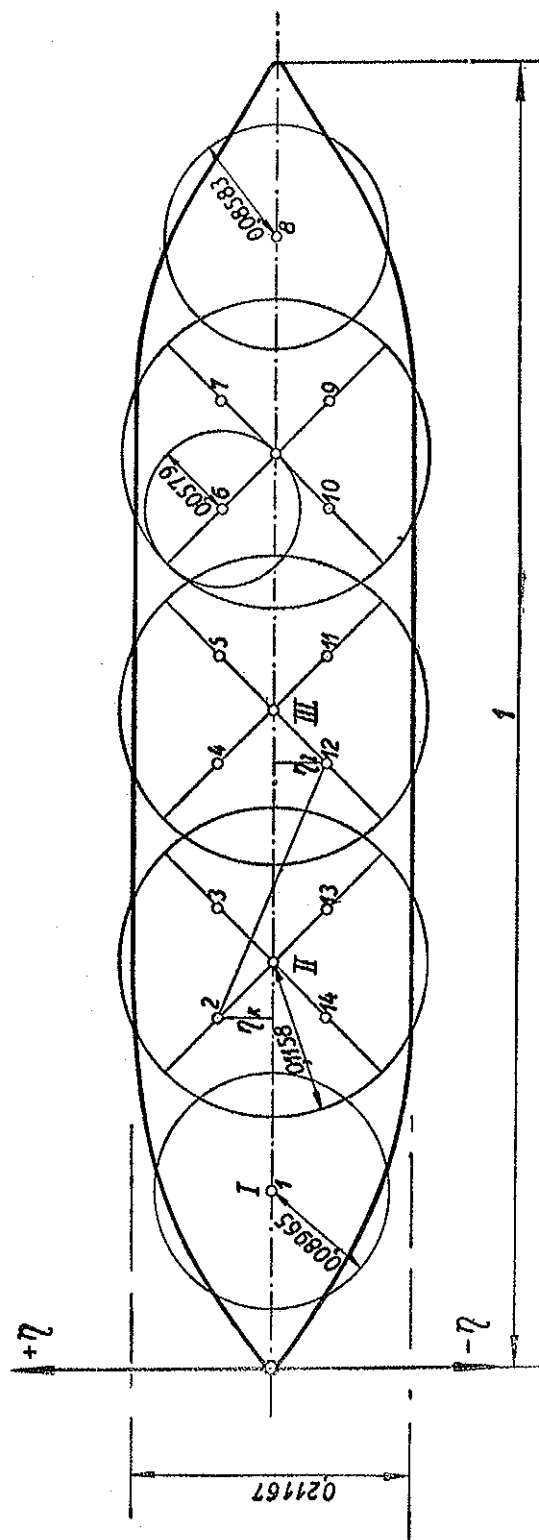


Fig. 8.

L'indice i si riferisce ai centri I, II, III etc. Gli indici k, l si riferiscono ai centri 1, 2, 3, etc. Vale l'osservazione che una coppia (k, l) deve esser formata con 2 numeri non appartenenti allo stesso cerchio di centro i e che, assunta la combinazione (k, l) va esclusa la (l, k) . Nel caso specifico infine, attesa la simmetria, si annulla la somma delle combinazioni di I ed 8 con gli altri numeri e va considerata la somma dei contributi delle sole combinazioni indicate a pag. 116.

Risulta

$$\begin{aligned}\rho_I &= 0,08965 \\ \rho_{II} &= \rho_{III} = \rho_{IV} = 0,1158 \\ \rho_V &= 0,08583 \\ \rho_K &= \rho_L = \frac{1}{2} \rho_{II} = 0,0579\end{aligned}$$

e quindi

$$\Sigma_i \rho_i^5 = 0,08965^5 + 3 \cdot 0,1158^5 + 0,08583^5 = 72,937 \cdot 10^{-6}.$$

Nel secondo termine entro parentesi, essendo

$$|\eta_K| = |\eta_L| = 0,04094$$

il prodotto $|\eta_K| \cdot |\eta_L| \rho_K^2 \rho_L^2$ è costante e può esser posto a fattor comune nella sommatoria *salvo a contare* $\frac{1}{\rho_{KL}}$ *con il segno di* $\eta_K \eta_L$.

Si ha per questo, per qualunque k od l ,

$$|\eta_K \eta_L| \rho_K^2 \rho_L^2 = 18,843 \cdot 10^{-9}.$$

Quindi l'espressione di ΔI_p si semplifica come segue:

$$\Delta I_p = \frac{2L^5 \gamma_a}{15} \left(\Sigma_i \rho_i^5 + \frac{15\pi^2}{2} |\eta_K \eta_L| \rho_K^2 \rho_L^2 \Sigma_{kl} \frac{1}{\rho_{kl}} \right).$$

Per le distanze ρ_{kl} sono state considerate le seguenti combinazioni

2(4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12) ;	3(4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12)
4(6, 7, 9, 10, 13, 14) ;	5(6, 7, 9, 10, 13, 14)
6(11, 12, 13, 14) ;	7(11, 12, 13, 14)
9(11, 12, 13, 14) ;	10(11, 12, 13, 14)
11(13, 14) ;	13(13, 14) .

Risulta, tenendo riguardo al segno di $\eta_K \cdot \eta_L$,

$$\Sigma_{kl} \frac{1}{\rho_{kl}} = 11,3306$$

e quindi:

$$\frac{15\pi^2}{2} |\eta_K \eta_L| \rho_K^2 \rho_L^2 \Sigma \frac{1}{\rho_{kl}} = 73,947 \cdot 18,843 \cdot 10^{-9} \cdot 11,3306 = 16,904 \cdot 10^{-6}.$$

Essendo inoltre per l'acqua di mare, $g\gamma_a = 1,027 \text{ to } m^{-3}$,

$$\frac{5L^3\gamma_a}{15} = \frac{2 \cdot 60^3 \cdot 1,027}{15 \cdot g} = 10647,94 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{g}$$

si ricava quindi

$$\begin{aligned} g \cdot \Delta I_p &= 10,65 \cdot 10^7 \cdot (72,937 + 15,789) \cdot 10^{-6} = \\ &= 10,65 \cdot 88,73 \cdot 10 = 9450 \text{ to } m^2. \end{aligned}$$

Per la nave allestita e in pieno carico si hanno i seguenti dati di progetto

$$\begin{aligned} I_p \cdot g &= 24500 \text{ to } \cdot m^2 & \mathcal{S} &= 1623 \text{ to} \\ \delta_{M_t} &= 1,20 \text{ m} . \end{aligned}$$

Si ha in conformità

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_p}{\mathcal{S} \cdot g}} = 2\pi \sqrt{\frac{24500}{\frac{9,81}{1623 \cdot 1,20}}} = 7,11 \text{ sec. .}$$

Tenendo conto dell'inerzia del liquido

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_p + \Delta I_p}{\mathcal{S} \cdot \delta_{M_t}}} = 2\pi \sqrt{\frac{24500 + 9450}{\frac{9,81}{1623 \cdot 1,20}}} = 8,38 \text{ sec. .}$$

In una memoria seguente si studia con questi concetti il fondamentale problema delle vibrazioni elastiche di uno scafo per navi.

SOPRA ALCUNI SISTEMI DIFFERENZIALI A SOLUZIONI SENSIBILMENTE COSTANTI (*)

PIETRO TEOFILATO

SYMMARIUM. — Peculiaria quaedam systemata aequationum differentialium perpenduntur, quarum coefficientia sint parametra adiabatica, vel functiones temporis quibusdam condicionibus obnoxiae. Ostendit Auctor solutiones nutantes esse, easque plerumque posse libere adhiberi, quovis tempore, primigeniis quantitibus proximas.

§ 1. POSIZIONE DEL PROBLEMA. — Nello studio dei fenomeni giroscopici⁽¹⁾ mi è avvenuto di ricavare, per le soluzioni di particolari sistemi differenziali alcune proprietà, attraverso ragionamenti piuttosto intuitivi il cui filo conduttore veniva fornito da suggerimenti di natura fisica. Mi è sembrato opportuno ritornare sull'argomento per darne qui una trattazione più soddisfacente, quale merita l'importanza di quel problema meccanico.

Consideriamo il sistema differenziale:

$$[1] \quad \frac{dx_r}{k \sum_{s=1}^n \lambda_{rs} x_s + \varepsilon_s} = dt \quad (r=1, \dots, n),$$

dove $\lambda_{rs}, \varepsilon_s$ dapprima, supposto $k=1$, sono pensati come parametri adiabatici; un'altra volta, supposto il parametro k grande a piacere, sono pensati come funzioni generiche, regolari del tempo.

(*) Nota presentata dell'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini il 30 gennaio 1945.

(1) Cfr. Note da I a IV: P. TEOFILATO, *Sui vincoli indotti e autoindotti*, («Atti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari», 1939).

In entrambi i casi sussistono le seguenti ipotesi:

Si abbia anzitutto:

$$[2] \quad \lambda_{11} + \lambda_{22} + \dots + \lambda_{nn} = 0,$$

per cui il sistema [1] sia del LIOUVILLE.

L'equazione secolare:

$$[3] \quad \begin{vmatrix} \lambda_{11} - u & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - u & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} - u \end{vmatrix} = 0$$

ammetta m radici nulle e tanto la matrice che il determinante seguenti:

$$[4] \quad \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} & \varepsilon_1 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} & \varepsilon_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} & \varepsilon_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{vmatrix}$$

abbiano lo stesso rango $n-m$; inoltre le altre radici u dell'equazione [3] siano semplici ed immaginarie pure (a due a due coniugate).

Ci proponiamo di dimostrare:

A) che per $k=1$ ed $\lambda_{rs} \varepsilon_r$ parametri adiabatici, tutte le x_i si conservano sempre limitate, quando tali restano i coefficienti $\lambda_{rs} \varepsilon_r$. Inoltre, nel caso sia $n=m+2$, tutte le x_i , pur oscillando, si possono mantenere vicine ai rispettivi valori iniziali (cioè sensibilmente costanti) malgrado la variazione adiabatica dei coefficienti delle equazioni [1].

B) che quando invece k è grande a piacere e $\lambda_{rs} \varepsilon_r$ sono funzioni generiche del tempo t , le soluzioni di [1] (oscillanti e tanto più frequentemente quanto maggiore è il parametro k), col crescere indefinito di k tendono verso soluzioni le quali godono delle stesse due proprietà enunciate per il caso A); purchè $\lambda_{rs} \varepsilon_r$ soddisfacciano soltanto alla condizione del LIPSCHITZ:

$$|\lambda(t_2) - \lambda(t_1)| < M |t_2 - t_1|,$$

con M indipendente da t .

§ 2. LIMITAZIONE DELLE SOLUZIONI. — Supponiamo in primo luogo che nelle [1] i coefficienti λ_{rs} , ε_s , siano costanti e si assuma $k=1$ (caso A). Con i primi n rapporti delle [1] forniamo il primo membro della equazione seguente:

$$[5] \quad \frac{d(\sum \alpha_s x_s)}{x_1 \sum_s \lambda_{s1} \alpha_s + \dots + x_n \sum_s \lambda_{sn} \alpha_s + \sum_s \alpha_s \varepsilon_s} = dt,$$

dove le costanti α_s si scelgono in modo che sia:

$$[6] \quad \begin{aligned} \sum \lambda_{s1} \alpha_s &= u \alpha_1 \\ \sum \lambda_{s2} \alpha_s &= u \alpha_2 \\ &\dots \dots \dots \\ \sum \lambda_{sn} \alpha_s &= u \alpha_n. \end{aligned}$$

Ne risulta che u deve soddisfare l'equazione [3] e quindi per u vi saranno m valori nulli in relazione ai quali corrispondono m sistemi di valori per $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, che si ottengono assegnando ad esempio $\alpha_{n-m+1} \dots \alpha_n$ a piacere e desunendo poi $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m$ dalle equazioni:

$$\begin{aligned} \lambda_{1, m+1} \alpha_1 + \dots + \lambda_{n-m, m+1} \alpha_{n-m} &= -\lambda_{n-m+1, m+1} \alpha_{n-m+1} - \dots - \lambda_{n, m+1} \alpha_n \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_{1, n} \alpha_1 + \dots + \lambda_{n-m, n} \alpha_{n-m} &= -\lambda_{n-m+1, n} \alpha_{n-m+1} - \dots - \lambda_{n, n} \alpha_n. \end{aligned}$$

Così, nei riguardi delle α che figurano nei secondi membri, una volta le assegneremo tutte nulle meno α_{n-m+1} , un'altra tutte nulle salvo α_{n-m+2} , e così via, ottenendo in tal modo le m determinazioni delle α .

Consideriamo la matrice:

$$[7] \quad \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda_{1, m+1} & \dots & \dots & \dots & \lambda_{n, m+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1, n} & \dots & \dots & \dots & \lambda_{n, n} \end{array} \right\|$$

ad n colonne ed $n-m$ righe, formata disponendo orizzontalmente le ultime $n-m$ colonne della seconda delle matrici [4]. Indichiamo con:

$$D_{n-m+r, k} \quad (r=1, \dots, m)$$

il determinante che si ottiene prendendo le prime $n-m$ colonne della [9], sopprimendovi la k^{ma} e sostituendo al posto di questa la colonna $(n-m+r)^{ma}$, cioè una tra le ultime m colonne della [9]; infine applicandovi il fattore $(-1)^h$. Significheremo poi con D_{n-m} il determinante formato con le prime $n-m$ colonne. Avremo così le m determinazioni, ciascuna contraddistinta dall'apice:

$$[8] \quad \alpha_1^{(r)} = -\frac{D_{n-m+r, 1}}{D_{n-m}}, \dots, \alpha_{n-m}^{(r)} = (-1)^{n-m} \frac{D_{n-m+r, n-m}}{D_{n-m}}$$

$$\alpha_{n-m+s}^{(r)} = \begin{cases} 0 & \text{per } r \neq s \\ 1 & \text{per } r = s \end{cases} \quad s=1, 2, \dots, m$$

$$(r=1, 2, \dots, m)$$

D'altra parte la [5] fornisce in virtù delle [6]:

$$[9] \quad \frac{d \sum_{s=1}^n \alpha_s x_s}{u \sum_{s=1}^n \alpha_s x_s + \sum_{s=1}^n \alpha_s \varepsilon_s} = dt.$$

Quando è $u=0$, tenute presenti le [6] (che in tal caso diventano omogenee) e l'ipotesi fatta circa il rango delle due matrici [4], si ha:

$$\sum_{s=1}^n \alpha_s \varepsilon_s = 0.$$

Segue allora dalla [9], per $u=0$:

$$[10] \quad \sum_{s=1}^n \alpha_s^{(r)} x_s = \text{costante},$$

la quale in base alle [8] diventa:

$$[11] \quad -D_{n-m+r, 1} x_1 + D_{n-m+r, 2} x_2 - \dots + (-1)^{n-m} D_{n-m+r, n-m} x_{n-m} + D_{n-m} x_{n-m+r} = C_r,$$

$$(r=1, \dots, m)$$

dove C_r è una costante arbitraria.

Invece, in corrispondenza dei valori u non nulli, che per ipotesi sono radici semplici dell'equazione secolare, si ricavano dalle [6] le quantità $\alpha_1 \dots \alpha_n$ proporzionali (anzi addirittura si possono prendere eguali) ai minori della prima colonna del determinante [3].

Indicando questi minori rispettivamente con $A_{11}^{(\sigma)} A_{21}^{(\sigma)} \dots A_{n1}^{(\sigma)}$, dove l'apice σ indica che essi sono funzioni della radice u_σ generica, non nulla, dell'equazione secolare, avremo in luogo della [5]:

$$\frac{d \sum_{s=1}^n A_{s1}^{(\sigma)} x_s}{u_\sigma \sum_{s=1}^n A_{s1}^{(\sigma)} x_s + \sum_{s=1}^n A_{s1}^{(\sigma)} \varepsilon_s} = dt,$$

ovvero:

$$[12] \quad \sum A_{s1}^{(\sigma)} x_s = \frac{1}{u_\sigma} \left[C_\sigma e^{u_\sigma t} - \sum A_{s1}^{(\sigma)} \varepsilon_s \right] \quad (\sigma = m+1, \dots n)$$

dove le C_σ sono arbitrarie, ma a due a due complesse coniugate.

Le [11] sono m equazioni, le [12] sono $n-m$; in totale n equazioni lineari non omogenee nelle $x_1 \dots x_n$, le quali, attesa l'ipotesi fatta circa le radici u_σ (immaginarie pure o nulle) ci assicurano che $x_1 x_2 \dots x_n$ resteranno sempre limitate, anche durante la variazione adiabatica dei coefficienti $\lambda_{rs} \varepsilon_r$. Viene così confermato quanto forma l'oggetto del titolo del presente paragrafo.

§ 3. CASO DI $m=0$, $n=2$. - Questo caso ci interessa per una conseguenza della quale dobbiamo trarre partito in seguito. Supponiamo dunque di avere due sole variabili $x_1 x_2$, per modo che l'equazione secolare, diventando di secondo grado, ammette le uniche due radici:

$$u = \pm \rho i \quad (\rho \text{ reale}).$$

Notiamo però che affinchè questo sia verificato, come è richiesto dall'ipotesi fondamentale del § 1, occorre che sia:

$$\lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21} = \rho^2 > 0,$$

ovvero, in virtù della condizione del LIOUVILLE:

$$-\lambda_{22}^2 > \lambda_{12} \lambda_{21}.$$

Tanto basta per concludere che λ_{12} e λ_{21} non possono mai annullarsi.

D'altra parte adattando le [12] al caso che stiamo trattando nel presente paragrafo e moltiplicandole fra loro, si ottiene:

$$\left[A_{11}^{(1)} \left(x_1 + \frac{\varepsilon_1}{u_1} \right) + A_{21}^{(1)} \left(x_2 + \frac{\varepsilon_2}{u_1} \right) \right] \left[A_{11}^{(2)} \left(x_1 + \frac{\varepsilon_1}{u_2} \right) + \right. \\ \left. + A_{21}^{(2)} \left(x_2 + \frac{\varepsilon_2}{u_2} \right) \right] = |C_2|^2 : \rho^2 = \text{costante},$$

ovvero, ricordando il significato delle $A_{ij}^{(a)}$:

$$(\lambda_{22} x_1 - \lambda_{12} x_2 - \varepsilon_1)^2 + \left(\rho x_1 + \lambda_{22} \frac{\varepsilon_1}{\rho} - \lambda_{12} \frac{\varepsilon_2}{\rho} \right)^2 = |C_2|^2 : \rho^2.$$

Quest'ultima è l'equazione di una ellisse che non può mai essere straordinariamente schiacciata (cioè non può avere dei semi assi il cui rapporto sia infinitesimo) perchè all'uopo occorrerebbe l'evanescenza di λ_{12} (oppure di λ_{21}) che abbiamo veduto essere impossibile a causa dell'ipotesi circa la natura delle radici dell'equazione secolare. Siffatta peculiarità dell'ellisse verrà appunto sfruttata nel seguito.

§ 4. RIDUZIONE DEL NUMERO DELLE VARIABILI E NUOVA CONDIZIONE DEL LIOUVILLE. — Dalla prima delle [11] si può ricavare x_{n-m+1} , dalla seconda x_{n-m+2} , ecc.; dalla m^{ma} la x_n ; tutte in funzione lineare delle prime $n-m$ delle x , da x_1 ad x_{n-m} . Ma allora dal sistema differenziale [1] potremo eliminare le ultime x , da x_{n-m+1} ad x_n ottenendo:

[13]

$$\frac{dx_r}{\varepsilon_r + \lambda_{r1} x_1 + \dots + \lambda_{r, n-m} x_{n-m} + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_{r, n-m+k}}{D_{n-m}} [C_k + D_{n-m+k,1} x_1 + \dots + (-1)^{n-m} D_{n-m+k, n-m} x_{n-m}]} = dt \quad (r=1, 2, \dots, n-m).$$

Riguardo a questo nuovo sistema differenziale, importa osservare, per l'applicabilità del teorema di GIBBS-HERTZ sugli invarianti adiabatici, che la condizione del LIOUVILLE è qui ancora soddisfatta.

Difatti questa condizione nei riguardi del sistema [13] implicherebbe che si avesse:

$$\sum_{r=1}^{n-m} \left[\lambda_{rr} + \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_{r, n-m+k}}{D_{n-m}} (-1)^{t+r} D_{n-m+k, r} \right] = 0,$$

ovvero, per la [2]:

$$14) \quad \sum_{k=1}^m \left[-\lambda_{n-m+k, n-m+k} D_{n-m} + \sum_{r=1}^{n-m} (-1)^{t+r} \lambda_{r, n-m+k} D_{n-m+k, r} \right] = 0.$$

D'altra parte si consideri il determinante $n-m+1$ seguente, che è nullo a causa dell'ipotesi circa il rango della matrice [4]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_{1, n-m+k} & \lambda_{2, n-m+k} & \dots & \lambda_{n-m, n-m+k} & \lambda_{n-m+k, n-m+k} \\ \lambda_{1, m+1} & \lambda_{2, m+1} & \dots & \lambda_{n-m, m+1} & \lambda_{n-m+k, m+1} \\ \lambda_{1, m+2} & \lambda_{2, m+2} & \dots & \lambda_{n-m, m+2} & \lambda_{n-m+k, m+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{1, n} & \lambda_{2, n} & \dots & \lambda_{n-m, n} & \lambda_{n-m+k, n} \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppandolo secondo gli elementi della prima linea si ottiene proprio l'espressione che è nella parentesi quadrata della [14] e pertanto la [14] è identicamente soddisfatta. Il sistema [13] è dunque effettivamente del LIOUVILLE, risultato questo che del resto era prevedibile. Basti pensare, soffermandoci al caso delle tre sole variabili $x_1 x_2 x_3$, che la prima delle [11] significa che le linee di corrente del moto fluido (incompressibile) individuato dal sistema di LIOUVILLE [1], giacciono in piani paralleli:

$$-D_{3,1} x_1 + D_{3,2} x_2 - D_3 x_3 = C_1.$$

Pertanto due piani di questo fascio, infinitamente vicini, formano un intercapedine nel quale si effettua il movimento dello strato. Allora, a causa dell'invarianza di volume, ne segue che non varia l'area della

base del cilindro fluido le cui due basi scorrono deformandosi rispettivamente sopra i due piani.

La proiezione sul piano $x_1 x_2$ di questa base variabile ha dunque un'area costante, il che significa appunto che è verificata la condizione del LIOUVILLE anche per il sistema differenziale ottenuto dopo effettuata l'eliminazione di x_3 .

§ 5. CASO DI $m=n-2$ E PROSSIMITÀ DELLE SOLUZIONI AI VALORI INIZIALI. — Supporremo che nei riguardi del sistema [1] si abbia $m=n-2$, onde l'equazione secolare abbia $n-2$ radici nulle e inoltre le altre due radici:

$$u_1 = \rho i, \quad u_2 = -\rho i \quad (\rho \text{ reale}).$$

In virtù delle [12] avremo, corrispondentemente a queste due radici non nulle, due equazioni analoghe alle [12], che moltiplicate tra loro daranno:

$$[15] \quad \left[\sum A_{s1}^{(1)} \left(x_s + \frac{\varepsilon_s}{u_1} \right) \right] \cdot \left[\sum A_{s1}^{(2)} \left(x_s + \frac{\varepsilon_s}{u_2} \right) \right] = |C_n|^2 : \rho^2.$$

D'altra parte, per essere $A_{s1}^{(1)}$, coniugato di $A_{s1}^{(2)}$ potremo porre:

$$A_{s1}^{(1)} = a_s + ib_s, \quad A_{s1}^{(2)} = a_s - ib_s,$$

per modo che la [15] diventerà:

$$[16] \quad \left[\sum \left(a_s x_s + \frac{b_s}{\rho} \varepsilon_s \right) \right]^2 + \left[\sum \left(b_s x_s - \frac{a_s}{\rho} \varepsilon_s \right) \right]^2 = |C_n|^2 : \rho^2,$$

dove i coefficienti della x_s sono indipendenti dalle ε_s .

Dalle $m=n-2$ equazioni [11], i cui coefficienti sono indipendenti dalle ε_s , ricaviamo $n-2$ delle x_s in funzione delle due restanti, ad esempio $x_i x_j$ e sostituiamo nella [16]. Avremo un'equazione del tipo:

$$[17] \quad (L_{ij} x_i + M_{ij} x_j + N_{ij})^2 + (P_{ij} x_i + Q_{ij} x_j + R_{ij})^2 = |C_n|^2 : \rho^2,$$

dove $L_y, M_y, N_y, P_y, Q_y, R_y$ sono funzioni razionali intere delle λ_{rs} (soltanto N_y, R_y dipendono anche dalle ϵ_s , linearmente). Pertanto i coefficienti della [17] sono funzioni regolari dei parametri adiabatici e possono i coefficienti stessi riguardarsi come variabili adiabatiche.

La [17] poi è integrale del sistema differenziale in x_i, x_j che si ottiene da [1] mediante eliminazione di tutte le altre x_i a mezzo degli $n-2$ integrali lineari [11] indipendenti dal tempo t .

Per quanto abbiamo osservato al paragrafo precedente a proposito del sistema [13], la condizione del LIOUVILLE è soddisfatta per il sistema relativo alle uniche variabili x_i, x_j , or ora accennato, ed allora, tenuto presente che la [17] rappresenta una linea chiusa (ellisse) possiamo applicare il teorema di GIBBS-HERTZ ed affermare in conseguenza che l'area racchiusa dall'ellisse è un invariante adiabatico e pertanto sempre piccola, se inizialmente piccola.

Tenuto conto poi che l'ellisse lungo la quale corre il punto x_i, x_j non è allungata (cfr. § 3°) per cui i semiassi sono fra loro in rapporto finito e sono entrambi dell'ordine di $|C_n|^2$, quantità che si può assumere piccola a piacere, sarà lecito concludere che x_i, x_j si conservano sempre prossime al rispettivo valore iniziale.

Ma noi possiamo assumere i, j a piacere fra gli indici da 1 ad n ed allora ci sarà lecito affermare che tutte le variabili $x_1 \dots x_n$ si conservano sempre prossime ai rispettivi valori iniziali, con approssimazione regolabile a piacere.

§ 6. COEFFICIENTI DIPENDENTI DAL TEMPO E DAL PARAMETRO k . - Passiamo ad esaminare finalmente il sistema [1] nel caso B) citato al § 1.

Introducendo il tempo fittizio τ , tale che:

$$\tau = kt,$$

la [1] diventa:

$$[19] \quad \frac{dx_r}{\sum_s \lambda_{rs} \left(\frac{\tau}{k} \right) \cdot x_r + \frac{1}{k} \epsilon_r \left(\frac{\tau}{k} \right)} = d\tau \quad (r=1, \dots, n)$$

Se λ_{rs} , ε_r , fossero costanti, ferme restando a loro riguardo le ipotesi del § 1, le soluzioni asintotiche del sistema, per k crescente indefinitivamente, avrebbero, rispetto al tempo fittizio τ , i periodi $\frac{2\pi}{u}$, dove u sono radici della [3] immaginarie pure e indipendenti dal parametro k , mentre rispetto al tempo reale t i periodi sarebbero $\frac{2\pi}{ku}$.

Per la supposta condizione del LIPSCHITZ, avremo:

$$\left| \lambda_{rs} \left(\frac{\tau_2}{k} \right) - \lambda_{rs} \left(\frac{\tau_1}{k} \right) \right| < M \left| \frac{\tau_2 - \tau_1}{k} \right|,$$

per modo che, scelto k grande a piacere ed assunto per il tempo fittizio τ un incremento al più dell'ordine di \sqrt{k} , quale sarebbe ad esempio:

$$|\tau_2 - \tau_1| \leq \sqrt{k},$$

l'incremento corrispondente subito da λ_{rs} sarebbe molto piccolo, dell'ordine cioè di $1/\sqrt{k}$. Ma allora ben a ragione il comportamento delle λ_{rs} (e altrettanto dicansi delle ε_r) può considerarsi adiabatico durante il tempo fittizio \sqrt{k} che è grande quanto si vuole rispetto ai tempi periodici $\frac{2\pi}{u}$ sopra accennati.

Nel caso che sia $m=n-2$, potremo allora trasportare al sistema [19] tutti i risultati del paragrafo precedente e concludere che, tutte le x , si possono mantenere prossime quanto si vuole ai valori iniziali, quando si disponga opportunamente della sola arbitraria C_n . La prossimità ai valori iniziali è data difatti esclusivamente dalla piccolezza dell'area delle ellissi su citate e l'area, a sua volta, come dimostra la [17], è proporzionale a $|C_n|^2$, con un coefficiente di proporzionalità che, nel caso del sistema [19], dipende esclusivamente dalle λ_{rs} , non già dalle ε_r , nè da k . Questa indipendenza dell'area dal parametro k , dal quale invece esclusivamente dipende la durata \sqrt{k} nella quale sono valide le conclusioni del paragrafo precedente, ci permette di iterare il ragionamento partendo anzichè dall'istante iniziale τ_0 , dall'istante $\tau_1 = \tau_0 + \sqrt{k}$ per arrivare all'istante $\tau_2 = \tau_1 + \sqrt{k}$, e così via. Con ciò la tolleranza

nei riguardi dell'approssimazione ai valori iniziali richiederà limiti sempre più ampi fintantochè, ogni volta che si estende nel modo sopra indicato la durata, non si provvede ad assumere $|C_n|$, che è indipendente da k , man mano minore. Si vede allora che disponendo anche di $|C_n|$, si può iterare il ragionamento per un numero di volte grande quanto si vuole e quindi contemplare una durata grande a piacere.

§ 7. OSSERVAZIONE SULLA LIMITAZIONE DELLE SOLUZIONI. - Tornerà utile la seguente osservazione: in luogo del sistema [1] consideriamo l'altro, a coefficienti adiabatici:

$$[20] \quad \frac{dy_r}{k \sum_s \lambda_{rs} y_s + \varepsilon_r + \eta_r} = dt \quad \text{ovvero} \quad \frac{dy_r}{\sum \lambda_{rs} y_s + \frac{\varepsilon_r}{k} + \frac{\eta_r}{k}} = d\tau ;$$

dove le η_r , quando con esse si orli la matrice $\|\lambda_{ij}\|$, formino con le λ_{ij} una matrice rettangolare non più avente lo stesso rango di $\|\lambda_{ij}\|$, come invece accade per la prima delle [4], dove l'orlo è fatto con le ε_r .

In tal caso le y_r non sono più limitate, come subito si vede. Infatti la [9] sarà sostituita dall'altra

$$[21] \quad \frac{d \sum \alpha_s y_s}{u_r \sum \alpha_s y_s + \sum \alpha_s \frac{\varepsilon_s}{k} + \sum \alpha_s \frac{\eta_s}{k}} = d\tau$$

che per $u_r = 0$ fornisce:

$$[22] \quad \sum_{s=1}^n \alpha_s^{(r)} y_s = \frac{\tau}{k} \sum_{s=1}^n \alpha_s^{(r)} \eta_s + C_r \quad (r=1, \dots, m)$$

mentre per $u \neq 0$, fornisce:

$$[23] \quad \sum_{s=1}^n A_{s1}^{(\sigma)} y_s = \frac{1}{u_\sigma} \left[C_\sigma e^{u_\sigma t} - \sum_{s=1}^n \frac{A_{s1}^{(\sigma)}}{k} (\varepsilon_s + \eta_s) \right] \\ (\sigma = m+1, \dots, n) .$$

Le y_s ricavate dalle [22] e [23], contenendo termini lineari in t , quali figurano nelle [22] non potranno conservarsi limitate.

Che se poi le η_r , a differenza delle λ_{rs} e delle ε_r , non si potessero più riguardare come adiabaticamente variabili col tempo e quindi non più costanti almeno per un tempo sufficientemente lungo, allora, pensando nella [21] $\eta_s = \eta_s(\tau)$, denotate con x_s le soluzioni corrispondenti ad $\eta_r = 0$, espresse come si vede facilmente nella forma:

$$[24] \quad x_s = B_s + \sum_{\alpha=m+1}^n H_{\alpha,s} e^{u_\alpha \tau},$$

le y_s saranno del tipo:

$$[25] \quad y_s = x_s + \frac{1}{k} \sum_{r=1, q=1}^n G_{r,q} \int_0^\tau e^{u_r(\tau-\tau_1)} \eta_q d\tau_1$$

dove $u_r = 0$ per $r \leq m$, e B_s , $H_{\alpha,s}$, $G_{r,q}$ sono variabili adiabatiche.

Ci varremo di questi risultati in una nota successiva ⁽¹⁾.

(¹) Cfr. P. TEOFILATO, *Caratteri giroscopici derivanti da valori iniziali sufficientemente grandi delle velocità ignorabili*. (Vedi « Acta », n. 19).

PRIME ESPERIENZE SULL'AZIONE FOTODINAMICA
IN RAPPORTO ALLE OSSIDAZIONI
SU LARVE DI ANFIBI(*)

ENRICO URBANI

SUMMARY. --- Auctor observata quaedam refert, quibus patet quanti sit momenti oxygenum in phaenomeno photodynamico de quo in amphibiorum larvis investigetur. Constat oxygeni absentiam non obstare photodynamicae actioni, nimia autem oxigeni abundantia hanc actionem retardari.

Il fenomeno fotodinamico è provocato da molte sostanze le quali introdotte in un soggetto rimangono completamente inerti finchè l'organismo è tenuto all'oscurità o a luce attenuata; non appena l'individuo è esposto alla luce solare diretta o ad una luce molto viva insorgono episodi convulsivi che portano alla morte. Tale fenomeno è dato dall'eosina, rossoneutro, bleu di metilene, metilvioletto, acridina e da molti altri composti organici i quali in soluzione acquosa presentano il fenomeno della fluorescenza.

Si ignora quale sia il meccanismo causale dell'azione fotodinamica. Alcuni autori suppongono che le sostanze fluorescenti esposte alla luce diano origine a fotocomposti di ignota struttura a carattere tossico. Altri vorrebbero spiegare il fenomeno come una conseguenza del salto d'onda luminosa che si verifica in seno ad una sostanza fluorescente quando questa viene colpita dalla luce (Legge di STOKES) con conseguente liberazione di energia. Tale energia operando sui tessuti di un organismo potrebbe essere responsabile del fenomeno fotodinamico.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Filippo Silvestri il 15 febbraio 1945.

Molti autori che si sono occupati del problema insistono sulla importanza che avrebbe l'ossigeno nel determinismo dell'azione fotodinamica ritenendola legata ai fenomeni ossidativi o per una esaltazione di questi ultimi nei soggetti in esame o perchè l'ipotetico fotocomposto non si formerebbe in ambiente nel quale è stato sottratto l'ossigeno⁽¹⁾. L'ossigeno sarebbe quindi indispensabile perchè il complesso luce-fluorescenza si riveli letale sui soggetti in esperimento. È infatti dimostrato che i globuli rossi sfuggono al potere emolizzante delle sostanze fluorescenti quando vengono posti in tubi di vetro nei quali è stato praticato il vuoto. L'azione fotodinamica è stata sperimentata sui materiali più diversi: protozoi, batteri, animali superiori e vegetali.

Si è cercata anche l'importanza del fenomeno fotodinamico nella patologia umana (genesì della pellagra).

In questa nota intendo esporre i risultati di una prima serie di esperienze da me compiute, nell'Istituto di Anatomia comparata di Roma, per saggiare gli effetti del fenomeno fotodinamico in rapporto alla presenza e all'assenza di ossigeno nei soggetti da esperimento. Come materiale ho scelto i girini di *Rana esculenta* all'inizio del periodo larvale cioè quando il vitello è stato completamente riassorbito e variano le condizioni del metabolismo (COTTONER). Come sostanza fotodinamica ho usato l'eosina in soluzione acquosa (acqua Pia Marcia) nella concentrazione di 1/5000.

Espongo brevemente i risultati ottenuti rimandando per una particolareggiata descrizione al lavoro in esteso di prossima pubblicazione.

I girini nella soluzione di eosina vivono benissimo all'oscurità o a luce attenuata. Esposti alla luce solare sono presi da episodi convulsivi alternati a periodi di torpidità e dopo circa 40' muoiono.

È agevole dividere i risultati delle esperienze eseguite in diversi gruppi:

1° gruppo. — Il fenomeno fotodinamico si svolge più rapidamente in recipienti nei quali la superficie di contatto delle soluzioni di eosina, nella quale sono i girini, con l'aria è ridotta.

(¹) LEDOUX LEBARD, « Ann. de l'Inst. Pasteur », 1902, 16, 587; JODLBAUER e v. TAPPEINER, « Ergebn. der Physiol. », 1909, 8, 698; SELLARDS, « Jour. Research », 1918, 38, n. 203; BLUM, « Biol. Bull. », 1930, 58, 224 e 1930, 59, 81.

2° gruppo. — Producendo in un tubo di vetro nel quale vi è la soluzione di eosina con i girini, il vuoto leggero a mezzo di una pompa ad acqua il fenomeno fotodinamico è accelerato rispetto a soggetti in eosina in un tubo di controllo nel quale non è stata praticata una depressione di ossigeno.

3° gruppo. — Facendo gorgogliare aria nel recipiente nel quale vi è la soluzione di eosina con i girini si ha un ritardo della morte dei soggetti rispetto ad un controllo che viene mantenuto semplicemente scoperto.

4° gruppo. — I girini sono stati trattati con KCN in dosi tali da produrre l'immobilità ma non la morte. In questo modo si ha un blocco parziale delle ossidazioni intraorganiche. In questi soggetti il fenomeno fotodinamico insorge più rapidamente che non nei controlli che non sono stati trattati con KCN.

5° gruppo. — I girini sono stati trattati con feniluretano in dosi tali da produrre l'immobilità ma non la morte. Poichè il feniluretano ha la proprietà di bloccare anche i sistemi del tipo « deidrogenasi » anche con questa tecnica si ha un'inibizione dei processi ossidativi. I risultati sono stati eguali a quelli ottenuti con il KCN.

6° gruppo. — Si è creato ai girini immersi in eosina un ambiente asfittico a mezzo di idrosolfito sodico e carbonato sodico. Tale condizione permette la vita per un certo tempo all'oscurità ma non alla luce dove il fenomeno fotodinamico si svolge più rapidamente che nei controlli tenuti in eosina.

Altre esperienze hanno inoltre dimostrato:

a) che il fenomeno fotodinamico non ha luogo in girini immersi nella sostanza fluorescente previamente esposta anche molto a lungo alla luce solare, contrariamente a quanto aveva visto LEDOUX LEBARD sui parameci (*loc. cit.*);

b) che per provocare la morte dei girini basta la quantità di eosina penetrata nell'interno dell'organismo e che il volume di liquido fluorescente nel quale è il soggetto non entra in gioco agli effetti biochimici;

c) che il fenomeno fotodinamico si verifica qualunque sia l'angolo di incidenza della luce nella sostanza fluorescente.

CONCLUSIONI

Le esperienze compiute, più volte ripetute, hanno dato risultati concordi. La sottrazione di ossigeno dal liquido ambiente porta ad una esaltazione del fenomeno fotodinamico contrariamente a quanto aveva visto sui parameci LEDOUX LEBARD.

È bene pensare però che le condizioni, di anaerobiosi diminuiscono la resistenza organica e quindi la capacità di reazione delle larve verso gli effetti fotodinamici.

Un arricchimento in ossigeno del liquido ambiente rallenta il fenomeno fotodinamico ma non lo inibisce.

Blocchi ossidativi prodotti dal cianuro di potassio e dal feniluretano rendono più rapida l'azione letale della sostanza fluorescente. È però da tener presente che in queste esperienze agisce anche la tossicità della sostanza usata che diminuisce la resistenza organica dei soggetti in esperimento.

I risultati illustrati mostrerebbero quindi che le condizioni di anaerobiosi non arrestano l'azione delle sostanze fluorescenti come si sarebbe potuto supporre in base alle ipotesi formulate da altri autori e già ricordate che tali sostanze agissero per una esaltazione delle ossidazioni intraorganiche o per formazione di fotocomposti per i quali sarebbe stata necessaria la presenza di ossigeno. Non voglio con ciò infirmare i risultati ottenuti da SELLARDS ed altri sulla inibizione della emolisi fotodinamica in ambiente nel quale è stato praticato il vuoto. Rimane stabilito che una sottrazione di ossigeno ambiente comunque venga praticata e una depressione dei fenomeni ossidativi a carico dei girini di *Rana esculenta* non hanno effetto protettivo verso l'azione della sostanza fluorescente in presenza della luce.

I PROBLEMI DELLA DETERMINAZIONE NERVOSA IN RAPPORTO A PROCESSI DI RIPARAZIONE E RI- GENERAZIONE NEL SISTEMA NERVOSO CENTRALE DEGLI ANFIBI (*)

ALBERTO STEFANELLI

SUMMARIVM. — Breviter refert Auctor de experimentis quae ipse peregit ad cognoscendas: proprietates quibus rombocephalus in rana restituitur, determinationem istogeneticam cellularum quae a Mauthner nomen habent et neuronum differentiationis causam.

L'applicazione agli embrioni e larve di Anfibi anuri del metodo all'argento colloidale di BODIAN, specifico per il tessuto nervoso, mi ha permesso recentemente⁽¹⁾ di constatare la costante presenza delle cellule e fibre di MAUTHNER, di notevoli dimensioni e con i caratteristici rapporti, come pure di un'altra coppia di elementi di notevoli dimensioni, più anteriormente all'altezza del nucleo notorio del V (neuroni preauthneriani)⁽²⁾. L'apparato di MAUTHNER era negato negli Anfibi anuri da TAGLIANI ('05) e BECCARI ('07); furono intraviste le cellule da BARTELMEZ ('15) e da LARSELL ('34) e quindi osservate in girini di rana da SZEPSENWOL ('35); questi neuroni furono quindi da noi ampiamente descritti in larve di vari Anuri, considerandoli come elementi costanti.

Gli ottimi risultati ottenuti con questo metodo di impregnazione (è ben noto come gli altri metodi argentici riescano assai male negli Anfibi) mi hanno indotto ad usare gli embrioni e le larve di *Rana*

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Filippo Silvestri il 15 febbraio 1945.

(¹) STEFANELLI ALB. e OSTI, 1942, « Boll. Zool. », XIII.

(²) STEFANELLI ALB., 1942, « Boll. Zool. », XIII.

esculenta per uno studio sulla determinazione ed il differenziamento delle cellule nervose ⁽¹⁾ approfittando della grande resistenza di questo materiale ai metodi sperimentali e delle conoscenze che si hanno sul suo determinismo in generale.

Rimandando ad altri lavori una estesa esposizione sui problemi della determinazione e del differenziamento del sistema nervoso, mi limito in questa nota preventiva a far notare come ben poco si sappia sui fattori che evocano in sedi definite la determinazione e quindi il differenziamento delle cellule nervose strutturalmente e funzionalmente specifiche. Infatti se moltissime sono le ricerche sulla *determinazione morfogenetica* del sistema nervoso, se molte sono pure quelle sulle modalità del differenziamento dei neuroni, sia *in vivo* che *in vitro*, assai limitate e di limitato successo sono le ricerche miranti ad indagare la determinazione dei vari centri nervosi o addirittura di singoli neuroni, cioè quelle sulla *determinazione istogenetica*, determinazione che dai pochi dati noti (LEHMANN '27, HOLTGRETER '31, ecc.) appare cronologicamente indipendente dalla determinazione morfogenetica.

I problemi della determinazione istogenetica rappresentano il campo di « saldatura » tra le ricerche embriologiche sulla determinazione del neurasse nelle sue parti e nella sua forma e quelle istologiche sul differenziamento neuroistologico specifico.

Ho creduto più conveniente, per superare parte delle evidenti difficoltà di questa ricerca, riferirmi in particolar modo a neuroni con caratteristiche strutturali assai spiccate e di facile identificazione di sede anche in stadi assai precoci, quali sono appunto, per queste prime ricerche, le cellule di MAUTHNER. L'indirizzo seguito e che offre un campo nuovo di indagine è consistito nella integrazione del metodo sperimentale embriologico con i metodi di tecnica e di osservazione istologici.

Mi sono posto innanzi tutto alcuni quesiti preliminari orientativi miranti ad indagare il grado delle proprietà di riparazione (regolazione e rigenerazione) dell'area dell'allungato che è sede dei neuroni mauthneriani poichè, se i dati al riguardo per il cervello anteriore ed il midollo spinale sono numerosi (BELL, COTRONEI e SPIRITO, DALTROP,

(¹) Esperienze eseguite nell'Istituto di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

HOOCKER, DETWILER, WIEMANN, ecc.), assai scarsi sono quelli riguardanti l'allungato (DETWILER '25, NICHOLAS '31).

Mediante l'asportazione di pezzetti più o meno estesi dell'allungato o della sua area presuntiva (esperienze del 1° gruppo, *a*; 75 operati) è risultata una riparazione sia formale che istologica completa negli stadi di tappo vitellino (t. v.) e di blastoporo (bl), una riparazione solo formale allo stadio di pieghe neurali incipienti (p. n.) e accostate (p. n. a.) e una riparazione incompleta, sia istologicamente che formalmente, allo stadio di tubo neurale (t. n.). I pezzetti asportati furono trapiantati (1° gruppo, *b*; 75 trapianti) nella regione ventrale (tr. auto e omoplastici). È apparsa la tendenza dei frammenti di svilupparsi in forma di vescicole comprendenti una sorta di cavità ventricolare limitata in parte da una lamina sterile formata per slittamento di elementi endodermali. Solo pezzetti molto piccoli e tolti allo stadio di t. n. si sono sviluppati pieni.

Con un altro gruppo di esperienze (2° gruppo) ho constatato una regolazione completa in seguito a rotazione di 180° della regione presuntiva dell'allungato allo stadio di t. v. (¹). Non così in seguito a capovolgimenti della zona, allo stesso stadio, che provocano alterazioni molto vaste, che necessitano una analisi più minuta, in cui si rivela, tra l'altro, l'importanza, già constatata da altri autori (GIARDINA, COTRONEI, LEHMANN, HOLTGRETER, ecc.), della corda nella morfogenesi del neurasse. Anche allo stadio di t. n. con la rotazione di parte dell'allungato di un lato si ha di norma una perfetta saldatura e una notevole regolazione sebbene appaiono istologicamente delle anomalie. In qualche caso non si salda il pezzetto, probabilmente per cattiva giustapposizione del trapianto. Semplici resezioni del tubo nervoso anteriormente o posteriormente alla regione vestibolare si saldano e regolano completamente. E anzi assai difficile, anche con l'interposizione di cellofan o di una scheggia di paraffina, impedire la saldatura delle due parti del neurasse. Su 70 operazioni, di cui 15 con l'interposizione di paraffina solo in 5 casi si è potuto ottenere una completa separazione del neurasse (confrontare le ricerche di D'ANCONA e allievi '35, '36, '41, sulle fusioni auto e omoplastiche del sist. nerv.).

(¹) SPEMANN '12, nota la determinazione della polarità dorso-ventrale sin dall'apparire della piastra, 1912.

Passando quindi a considerare i fattori della determinazione e del differenziamento delle cellule di M. ho preso innanzi tutto in esame i rapporti tra la grandezza dell'embrione, la sua età e le dimensioni di queste cellule (esperienze del 3° gruppo). Dalle uova deposte da una femmina ho separati due lotti, uno costituito da una decina di uova ed uno da quasi un centinaio. Allo stadio larvale il primo lotto venne abbondantemente nutrito con tuorlo d'uovo sodo, il secondo scarsamente, i girini denutriti ebbero un accrescimento nettamente inferiore. È risultato, in breve, che in girini della stessa età e di diversa mole le cellule di M. sono di maggiori dimensioni nei girini più grandi, sebbene vi sia identità, sia nella complessità strutturale generale dell'encefalo sia nel grado di differenziamento di questi neuroni. Invece nei girini di egual taglia ma di età diversa vi è un encefalo morfologicamente più complesso e le cellule di M. sono di maggiori dimensioni e più differenziate in quelli di più giorni. Questi dati verranno messi in relazione con i problemi della grandezza cellulare e mole corporea durante il periodo di accrescimento embrionale (vedi ricerche di LEVI e allievi).

Ho quindi eseguiti quattro gruppi di esperienze miranti ad indagare direttamente il momento della determinazione delle cellule di M. e la causalità del loro differenziamento.

4° gruppo. - Isolamento della regione delle cellule di M. dagli stimoli periferici e centrali: asportazione allo stadio di t. n. delle vescicole otiche, mono e bilaterale, resezione anteriore, posteriore, anteriore e posteriore, asportazione delle vescicole e resezioni combinate (95 operati). L'assenza della o delle vescicole otiche, con o senza ganglio, non altera minimamente il differenziamento di dette cellule. Nè più effetto ha la resezione anteriore. Le resezioni posteriori invece provocano un minor accrescimento delle cellule di M.; il grosso neurite viene filato, si decussa, ma si arresta bruscamente essendo interrotto il midollo. Non ho potuto per ora ottenere interruzioni in stadi più precoci poichè le due parti, per quanti artifici abbia escogitati, si son sempre saldate.

5° gruppo. - a) asportazione del territorio presuntivo destro delle cellule di M. nei vari stadi dello sviluppo (t. v.; bl; p. n.; p. n. a.; t. n.) trapianto omo e autoplastico del pezzetto della regione ventrale (40 operati). Ho potuto così identificare il momento della determina-

zione di questi neuroni, le proprietà di autodifferenziamento, dei neuroni di M. isolati (naturalmente con una zona nervosa circostante più o meno limitata, ma isolata da connessioni funzionali) e le proprietà rigenerative: 1) allo stadio di t. v. non vi è autodifferenziamento nella sede della cellula di M. asportata; si differenzia come tale un altro elemento (rigenerazione da elemento cambiale o pluripotenza dei neuroblasti vicini?); 2) allo stadio di placca neurale senza cercini si ha autodiff. nel trapianto (sebbene la cellula non raggiunga mai le dimensioni di quella normale) e differenziamento in sede di altro elemento mauthneriano; 3) negli stadi successivi non vi è rigenerazione della cellula di M. asportata che invece si autodiff. nel trapianto sebbene con alterazioni di forma che appaiono anche in relazione alla grandezza e alla forma del pezzetto trapiantato.

6° gruppo. - Determinazione e differenziamento delle cellule di M. con trapianti in sede anomala del neurasse allo stadio di t. n. (15 operati). Trapiantando la regione di M. in sede di altro embrione si hanno quattro neuroni di M. e quattro fibre che si decussano e decorrono nel midollo spinale. I quattro neuroni sono simili di forma e dimensioni. Trapiantando tale zona nel midollo spinale si ha la formazione in questa sede di un nuovo ventricolo imitante, sebbene più piccolo, la forma della fossa romboidale con tela corioidea sovrastante. Si differenziano le cellule di M. però di dimensioni inferiori e più affusate delle normali. In alcuni casi si è differenziata solo quella di un lato (perdita di materiale nel trapianto?).

7° gruppo. - Con questo gruppo ho indagato la polarità dei neuroni mauthneriani e il differente comportamento dei prolungamenti nel differenziamento mediante rotazione di dette cellule nei vari stadi corrispondenti a quelli del 2° gruppo. Con rotazione di 180° allo stadio di t. v. si ha regolazione completa per cui i neuroni di M. hanno assunto polarità conforme alla nuova condizione e appaiono del tutto normali. Così i neuriti che con la rotazione avrebbero dovuto dirigersi cranialmente si dirigono invece caudalmente per cui la direzione del neurite non appare un fattore intrinseco. Interessanti a questo riguardo sono pure i capovolgimenti della placca: pur apparendo in alcuni casi invertita la posizione della sostanza bianca e di quella grigia, i neuriti delle cellule di M., invertendo la loro presuntiva direzione, seguono la via caduale. Operazioni fatte in stadi più avan-

zati (t. n.) dimostrano come sia ancora notevole l'influenza esterna sui neuriti mentre non lo sia già più per i dendriti; infatti ruotando di 180° la zona di M. di destra si osserva come la polarità della cellula sia ormai determinata per cui i dendriti sorgono dal lato interno e il neurite da quello esterno, ma, mentre, i dendriti si diramano aberrantemente nel nuovo territorio senza mettersi in relazione con i territori specifici, il neurite, appena sorto dalla cellula, si ripiega bruscamente all'indietro, raggiunge come di norma il rafe ventrale si decussa e decorre normalmente nel midollo. Ciò dimostra una differente reattività neurotropica tra dendriti e neurite nel corso dello sviluppo.

ALCUNE OSSERVAZIONI SU UN PARTICOLARE TIPO DI OSCILLAZIONE ARMONICA PERMANENTE (*)

(Con una figura)

ANTONIO BENINI

SYMMARIUM. — Auctor, perpendens motum harmonicum, qui extinctioni sit obnoxius, quique stabiliter foveatur actione excitanti sinusoidali, cuius amplitudo mutet pro frequentiae quadrato, novas invenit expressiones quibus parametri motus ex nonnullarum magnitudinum mensura deduci possint.

Si consideri la nota equazione differenziale non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti e positivi

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = k \omega^2 \sin \omega t;$$

indicando con t la variabile tempo e purchè sia dimensionalmente $[k] = [ay]$ essa interpreta nel campo fisico una oscillazione (della grandezza y) armonica, dissipativa, forzata per effetto di una azione eccitatrice sinusoidale avente pulsazione ω ed ampiezza variabile con ω^2 ; la corrispondente equazione in termini finiti è

$$y = y_s + y_p = \Im e^{-\mu t} \sin(\omega_n t + \psi) + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\mu^2 \omega^2]^{1/2}} \frac{k}{c} \sin(\omega t - \varphi),$$

nella quale si è posto:

$$\mu = \frac{b}{2a}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{a}, \quad \omega_n^2 = \omega_0^2 - \mu^2 > 0, \quad \varphi = \arctang \frac{2\mu\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gaetano Arturo Crocco il 15 dicembre 1944.

Per l'intervento delle azioni dissipative, la componente smorzata y_s dopo un conveniente tempo Δt finito non supera in valore assoluto un valore $|\delta|$ prestabilito comunque piccolo; ritenendo pertanto, in vista di quanto si vuole osservare, $y_s = 0$, posto ancora

$$[1] \quad \alpha = \frac{\mu}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

e $\beta = \frac{\omega}{\omega_0}$, $\lambda = 2(1 - 2\alpha^2)$, resta la componente

$$y_p = \frac{\beta^2}{(1 + \beta^4 - \lambda\beta^2)^{1/2}} \frac{k}{a} \sin(\omega t - \varphi)$$

che rappresenta l'oscillazione armonica permanente di periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e di ampiezza

$$[2] \quad Y = \frac{\beta^2}{(1 + \beta^4 - \lambda\beta^2)^{1/2}} \frac{k}{a}.$$

La potenza dissipata media in un periodo, data da

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T b \left(\frac{dy_p}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{2} b Y^2 \omega^2,$$

può esprimersi nella forma

$$[3] \quad W = \frac{\alpha \beta^6}{1 + \beta^4 - \lambda \beta^2} \frac{k^2 \omega_0^3}{a}.$$

Le Y , W per ogni definito sistema fisico oscillante, cui competa il parametro caratteristico α secondo la [1], risultano funzioni della sola β variabile a nostra disposizione entro il campo reale e positivo; le $Y(\alpha, \beta)$ e $W(\alpha, \beta)$ vengono perciò solitamente analizzate secondo tale criterio e rappresentate graficamente con una famiglia di curve (curve di risonanza) ciascuna affetta da un particolare α .

Per $\beta = 1$ (risonanza) è

$$[4] \quad Y = Y_0 = \frac{1}{2\alpha} \frac{k}{a} = \frac{k\omega_0}{b}$$

$$[5] \quad W = W_0 = \frac{1}{4\alpha} \frac{k^2 \omega_0^3}{a} = \frac{k^2 \omega_0^4}{2b}.$$

Si ottiene $\frac{dY}{d\beta} = 2\alpha Y_0 \frac{\beta(2-\lambda\beta^2)}{(1+\beta^4-\lambda\beta^2)^{3/2}}$; si consideri quindi la retta tangente alla curva $Y(\beta)$ nel punto P_0 ($\beta=1$, $Y=Y_0$), la cui equazione $\frac{Y-Y_0}{\beta-1} = \left[\frac{dY}{d\beta} \right]_{\beta=1}$ diviene $Y=\beta Y_0$: si osserva perciò che tale retta passa sempre per l'origine indipendentemente da α ; ciò può consentire di determinare assai rapidamente il punto P_0 sulla curva (condizione di risonanza) per qualunque valore di α .

Dalla $\frac{dY}{d\beta} = 0$, per α e β finiti e non nulli, segue come è noto, che la Y ammette un massimo relativo in corrispondenza di $\beta = \beta_0 = \left(\frac{2}{\lambda}\right)^{1/2}$, reale solo se $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$, ed assume il valore

$$Y_0 = Y_{\max} = \frac{1}{2\alpha(1-\alpha^2)^{1/2}} \frac{k}{a}.$$

Analogamente la $\frac{dW}{d\beta} = 8\alpha^2 W_0 \frac{\beta^5(\beta^4-2\lambda\beta^2+3)}{(1+\beta^4-\lambda\beta^2)^2}$ eguagliata a zero fornisce in $\beta_1, \beta_2 = [\lambda \pm (\lambda^2-3)^{1/2}]^{1/2}$, uniche radici positive della $\beta^4 - 2\lambda\beta^2 + 3 = 0$, i valori per cui si verificano rispettivamente un minimo ed un massimo relativi di W ; tali radici sono reali e distinte per $\alpha < \alpha^* = \frac{1}{2} \sqrt{2-\sqrt{3}}$ ed inoltre è $\beta_1^2 \beta_2^2 = 3$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 = 2\lambda$.

A β_1 e β_2 corrispondono

$$Y_1, Y_2 = \frac{\lambda \pm (\lambda^2-3)^{1/2}}{[(\lambda^2-2) \pm \lambda(\lambda^2-3)^{1/2}]^{1/2}} \frac{k}{a}$$

$$W_1, W_2 = W_{\min}, W_{\max} = \frac{\alpha[\lambda(4\lambda^2-9) \pm (4\lambda^2-3)(\lambda^2-3)^{1/2}]}{(\lambda^2-2) \pm \lambda(\lambda^2-3)^{1/2}} \frac{k^2 \omega_0^3}{a}.$$

Pertanto si nota con successive rapide trasformazioni che valgono le seguenti:

$$[6] \quad Y_1 Y_2 = \frac{3\alpha}{(1-\alpha^2)^{1/2}} Y_0^2 = \frac{3}{2} Y_0 \frac{k}{a} = 3\alpha Y_0 Y_0$$

$$[7] \quad W_1 W_2 = \frac{27\alpha^2}{1-\alpha^2} W_0^2 = \frac{27}{16(1-\alpha^2)} \frac{k^4 \omega_0^6}{a^2}.$$

Le relazioni stabilite si prestano egregiamente nella soluzione del notevole problema, inverso, di determinare il valore dei coefficienti della equazione differenziale ($a b c$ ovvero $a \propto \omega_0$, a causa del loro significato fisico) partendo da alcuni valori delle grandezze Y o W ; naturalmente tre qualsiasi relazioni indipendenti del tipo [2] o [3] sono sufficienti, ma è noto come spesso un aspetto anche solo formalmente più semplice delle espressioni rispecchia per motivi diversi una maggiore esattezza conseguibile.

Si deduce infatti dalle [6]

$$[8] \quad a = \frac{3}{2} k \frac{Y_c}{Y_1 Y_2}$$

$$[9] \quad \alpha = \frac{1}{3} \frac{Y_1 Y_2}{Y_c Y_0}$$

$$[10] \quad \alpha = \frac{1}{\left[1 + 9 \left(\frac{Y_0^2}{Y_1 Y_2}\right)^{2/3}\right]^{1/2}}$$

e dalle [7]

$$[11] \quad \alpha = \frac{1}{\left[1 + 27 \frac{W_0^3}{W_1 W_2}\right]^{1/2}}$$

$$[12] \quad a = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{k^2 \omega_0^3}{(1 - \alpha^2)^{1/2} (W_1 W_2)^{1/2}}$$

Senza qui ripetere le note determinazioni di ω_0 , ricordiamo che almeno le più dirette di esse in genere sono poco esatte per valori elevati di α : l'osservazione dianzi esposta sulla tangente in P_0 si riferisce appunto a questo lato del problema. Per quanto riguarda gli altri parametri incogniti è altresì noto il cosiddetto metodo della risonanza basato sulle [4] e [5]: esso però non è sufficiente mediante misure di una sola grandezza, ed è perciò allora necessario ricorrere ad altre espressioni dedotte con criteri diversi, le quali presentano per lo più alcuni inconvenienti dovuti alla mutua dipendenza dei parametri deducibili ed alla sensibilità delle relazioni stesse agli inevitabili errori di misura.

Le formule [8] a [12] (per questa si dirà in appresso) insieme con le semplificate seguenti, costituiscono un complesso, che potrebbe dirsi della minima potenza dissipata, in cui i parametri a e α sono espressi fra loro in modo indipendente e in cui figurano, come rapporti, grandezze facilmente misurabili; inoltre possono bastare determinazioni di un solo tipo di grandezza (Y o W) ed infine le α risultano indipendenti anche dal coefficiente k che può più agevolmente passare fra le incognite determinabili. Per contro invero dette formule esatte sono legate alla conoscenza dei valori β_1, β_2 calcolabili solo se noto α ovvero valutabili in base alla condizione di minimo o massimo di W ; esse sono quindi applicabili solo se $\alpha \leq \alpha^*$.

Queste limitazioni vengono in gran parte eliminate attraverso alcune ulteriori semplificazioni approssimative, giustificate dal fatto che il problema tecnico inverso di cui si tratta è di natura essenzialmente applicativo. Nel dominio della Elasticità e della Elettrotecnica per esempio sono frequentissimi, ed in linea di massima i più interessanti, i sistemi oscillanti aventi il parametro α (numero di smorzamento o grado di attenuazione) molto piccolo ($\alpha \ll \alpha^*$), ma la cui influenza non è trascurabile in prossimità della risonanza; a titolo di orientamento per quanto segue si indica in $0,01 \div 0,1$ l'ordine di grandezza di α in tali casi.

$$\text{Poichè } \lim_{\alpha \rightarrow 0} Y_1 = \frac{3}{2} \frac{k}{a}, \text{ indicando con } \bar{Y} = [Y_1]_{\alpha=0} = \frac{3}{2(1+3\alpha^2)^{1/2}} \frac{k}{a}$$

il valore di Y corrispondente a $\bar{\beta} = [\beta_1]_{\alpha=0} = \sqrt{3}$ si ottiene

$$[13] \quad \bar{a} = \frac{3}{2} \frac{k}{\bar{Y}}$$

la quale, in un conveniente intorno di $\alpha = 0$, approssima assai bene la [8] assumendo $a = \bar{a}$ entro tutto l'intorno; l'errore relativo $\varepsilon = \frac{\bar{a}}{a} - 1$ risulta positivo

$$[14] \quad \varepsilon = \sqrt{1+3\alpha^2} - 1$$

e per α piccolo $\varepsilon \cong \frac{3}{2} \alpha^2$; tale $\varepsilon(\alpha)$ può stabilire l'ampiezza dell'intorno di α in base ad un prefissato errore massimo ammissibile (v. grafico). Alla [13] si giunge in via intuitiva, analiticamente meno diretta

anche dalla [8]: quando ($\alpha \cong 0$) possa ritenersi $Y_c \cong Y_2$ essa diviene $\alpha' = \frac{3}{2} \frac{k}{Y_1}$ il cui errore, negativo, è però in valore assoluto maggiore di quello espresso dalla [14]; la lenta variabilità di Y_1 rispetto ad α intorno ad $\alpha = 0$, verificandosi $\left[\frac{d Y_1}{d \alpha} \right]_{\alpha=0} = 0$, suggerisce poi di sostituire \bar{Y} ad Y_1 , ottenendosi con ciò altresì un compenso negli errori.

La [13] peraltro supera le posizioni di partenza essendo formalmente e concettualmente non legata ad α^* e β_1 : solo per valori notevoli di α essa dà errori in genere inaccettabili, ma potrebbe venire corretta mediante la [14], eventualmente con rapide iterazioni se α è incognito, e ciò può riuscire in effetti utile figurando in essa soltanto \bar{Y} ; anche di maggiore interesse è il fatto che non occorrono misure di W per la conoscenza del β_1 .

Per approssimare la [9], osservando che $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\bar{Y}}{Y_c} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 3\alpha$, si ponga

$$[15] \quad \bar{\alpha}' = \frac{1}{3} \frac{\bar{Y}}{Y_{\max}}$$

il cui errore relativo è

$$\varepsilon = - \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \alpha^2}{1 + 3\alpha^2}} \right),$$

e per α sufficientemente piccolo $\varepsilon \cong -2\alpha^2$; l'altra espressione deducibile

$\bar{\alpha}'' = \frac{1}{3} \frac{\bar{Y}}{Y_0}$ presenta un errore alquanto inferiore

$$\varepsilon = - \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1 + 3\alpha^2}} \right) \cong - \frac{3}{2} \alpha^2$$

ma in genere la [15] è di applicazione più agevole contenendo il valore massimo di Y , e comunque il valore di $\bar{\alpha}''$ non si differenzia sensibilmente da $\bar{\alpha}'$ intorno ad $\alpha = 0$. Con criteri ed osservazioni analoghe a quanto già esposto, dalla [9] segue anche $\alpha' = \frac{1}{3} \frac{Y_1}{Y_c}$ e $\alpha'' = \frac{1}{3} \frac{Y_1}{Y_0}$ entrambe più approssimate, in eccesso, ma dipendenti da β_1 .

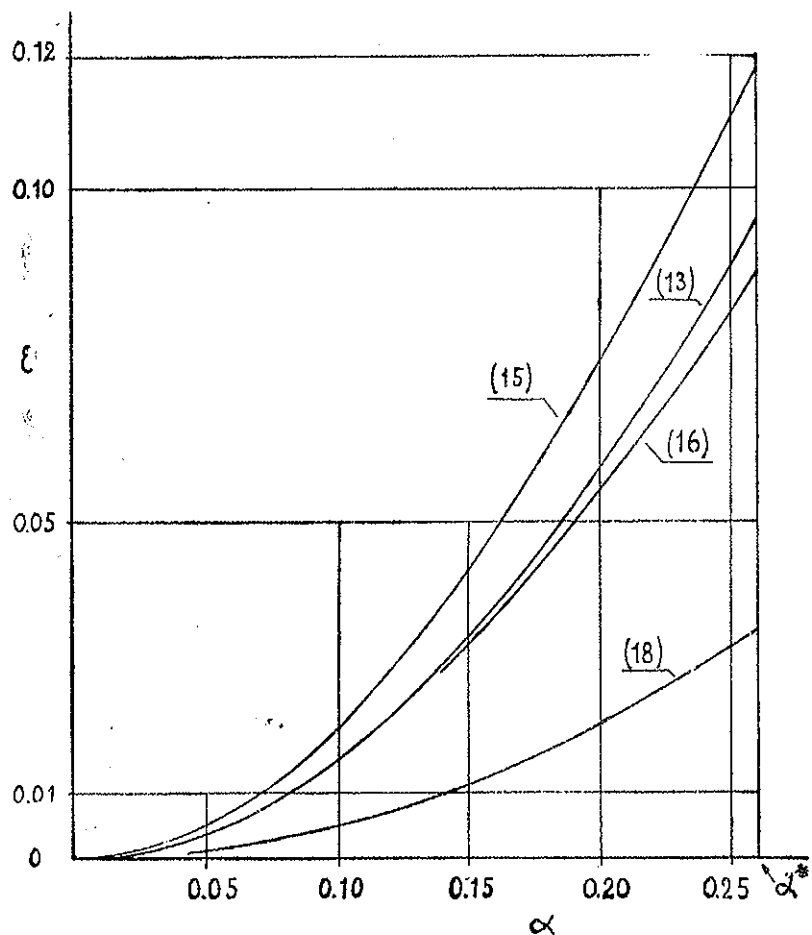


FIG. 1.

La formula [10], che potrebbe acquistare interesse in quanto non vi appare Y_c , non conduce a espressioni semplificate nuove od utili.

Indicando con $\bar{W} = [W_{\min}]_{\alpha=0} = \frac{27\alpha}{4(1+\beta\alpha^2)} \frac{k^2\omega_0^3}{a}$ il valore di W in corrispondenza di $\bar{\beta} = [\beta_1]_{\alpha=0} = 1/\bar{\beta}$, in base a $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\bar{W}}{W_0} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 27\alpha^2$, si approssimi la [11] con

$$[16] \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{27}} \sqrt{\frac{\bar{W}}{W_0}}$$

avente l'errore relativo $\varepsilon = -\left(1 - \sqrt{\frac{1}{1+3\alpha^2}}\right) \cong -\frac{3}{2}\alpha^2$; la [16] è applicabile anche per $\alpha > \alpha^*$, tenuto però conto che l'errore in tal caso non sarebbe trascurabile. Dalla [11] parimenti:

$$[17] \quad \alpha' = \frac{1}{\sqrt{27}} \sqrt{\frac{W_{\min}}{W_{\max}}}$$

meno approssimata della [16] ma praticamente coincidente per i più bassi valori di α . Ha ora meno importanza l'indipendenza delle formule da β_1 e β_2 , e la lenta variabilità di W rispetto a β intorno a β_1 consente relativamente minor precisione nel realizzare β_1 .

Infine la [12], trascurando α^2 rispetto all'unità, si semplifica in

$$[18] \quad a' = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{k^2 \omega_0^3}{\sqrt{W_{\min} W_{\max}}}$$

che, essendo $\varepsilon = -\left(1 - \sqrt{1-\alpha^2}\right) \cong -\frac{1}{2}\alpha^2$ assai ridotto, può ritenersi praticamente esatta e indipendente da α ; la presenza in essa di k ed ω_0 , supposti noti o altrimenti determinabili, è compensata dall'utilità di esprimere anche il parametro a direttamente in funzione W_{\min}^{\max} .

Se $\alpha > \alpha^*$ può impiegarsi l'analoga $\bar{a} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \frac{k^2 \omega_0^3}{\sqrt{W_0 W}}$ purchè con la correzione $\varepsilon = \sqrt{1+3\alpha^2} - 1$.

In figura sono dati, sotto forma grafica fino ad $\alpha = \alpha^* = 0,2588$, per le formule [13], [15], [16], [18], i valori assoluti delle $\varepsilon(\alpha)$, che ne dimostrano il campo di applicabilità in base alla precisione conseguibile nelle misure.

A conclusione si vuol notare che quando all'oscillazione in esame corrisponda una equazione alquanto diversa da quella assunta (ad es. coefficienti non costanti almeno rispetto ad y o β) ma che possa beninteso con essa approssimarsi nelle consuete ipotesi che si soglion fare al riguardo, le espressioni proposte non soffrono di maggiore convenzionalità di altre e dello stesso metodo di risonanza, rispetto al quale anzi fanno intervenire il comportamento del sistema anche in ulteriori ben precisati rapporti di frequenze sufficientemente discosti dal particolare $\beta=1$.

SULLE FLUTTUAZIONI ECONOMICHE (*)

PAOLO MEDOLAGHI

SUMMARIVM. — Cum mathematica dictamina, quae ad interpretandas oeconomicorum eventuum mutationes invecata sunt, cursus et recursus per propriam functionum (quarum pleraeque exponentiales et sinusoidales sunt) classem exprimant, optandum est ut huiusmodi functiones ad interpolandas series historicas oeconomicas applicentur. Auctor exponit quibus modis difficultates superari possint quae huic applicationi obstant, quanto maioris momenti sint in hac re breviores eventuum orbes quam orbes medii vel diuturniores (de quibus praesertim usque adhuc investigatum est), et quo modo possint novae inductionis statisticae rationes institui, si ordinata de interpolantibus functionibus inquisitio cum inquisitione de relationibus functionalibus, quas oeconometrica schemata proponunt, connectatur.

Gli aspetti drammatici delle grandi crisi economiche hanno richiamato da lungo tempo l'attenzione degli storici e degli economisti che, volta a volta, considerando le crisi quali episodi eccezionali, hanno cercato di rintracciarne le cause, e ne hanno descritte le gravi conseguenze sociali; ma è soltanto da pochi decenni che si è incominciato a parlare di una dinamica economica, cioè di una teoria in cui dovrebbero trovare razionale spiegazione le oscillazioni piccole e grandi cui sono incessantemente soggette tutte le forme dell'attività economica. Usando le parole « razionale spiegazione » mi riferisco a quella che può essere cercata da chi, non ignorando la subordinazione dell'ordine economico a quello etico e sociale, si rende conto dei limiti che la natura dell'argomento pone alla ricerca quantitativa, cosicché fino dal principio trova necessario porre a sè stesso e dare di questi limiti una precisa definizione. Ora è a parer mio interessante constatare che ad una tale delimitazione, e quindi anche implicitamente ad

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 1° maggio 1945.

una tale effettiva subordinazione, ci conducono alcune recenti ricerche nel campo delle teorie econometriche ed altre finora appena iniziate nell'indirizzo statistico, delle quali ultime mi propongo dare un brevissimo cenno.

Le ricerche econometriche a cui mi riferisco si svolgono intorno a schemi semplicizzati; esse introducono un piccolo numero di variabili economiche, a seconda dell'oggetto dello studio (se si tratta, per esempio, di studiare il ciclo della produzione dei beni capitali si introduce necessariamente l'indice della produzione perfezionata nell'unità di tempo e quello della produzione in corso di lavorazione nella stessa unità, ma oltre a queste due variabili e secondo il punto di vista da cui ci si colloca e l'aspetto del fenomeno che si vuol meglio mettere in luce, potrà anche essere introdotto l'indice della produzione dei beni di consumo, il volume totale dei beni capitali, il loro logorio, un indice dei prezzi...).

Si pongono poi equazioni funzionali di collegamento tra le variabili; esse dovrebbero avere una base statistica, ma ove questa, come spesso avviene, manchi vi si sostituiscono ipotesi ricavate dalla introspezione e dal principio edonistico. È il punto debole del procedimento, quello da cui originano le maggiori divergenze e discussioni. Comunque, nel sistema di equazioni così ottenuto abbiamo in nuce già la rappresentazione del fenomeno che si vuole studiare; che però servirebbe ben poco e resterebbe sospesa nella incertezza sulla validità delle ipotesi assunte se la ricerca non fosse completata con la integrazione del sistema di equazioni. Questa ci conduce a rappresentare ognuna delle variabili economiche inizialmente introdotte mediante una funzione analitica nella quale, secondo i casi, cioè secondo la natura delle equazioni di collegamento, è contenuto un numero finito di costanti indeterminate o una funzione indeterminata. L'attribuzione di valori particolari a questi elementi indeterminati, cioè la individuazione degli integrali particolari decide del successo o dell'insuccesso dello studio intrapreso; qualora non si trovi alcun integrale particolare che ci dia del movimento economico preso in esame una rappresentazione conforme a quella rivelata dalla esperienza si deve concludere che o nel sistema delle ipotesi, o in altri punti del procedimento deduttivo, che in questa troppo rapida e incompleta esposizione sono rimasti in ombra, vi è difetto; se invece si trova almeno un'integrale

particolare che corrisponde abbastanza bene almeno ad un periodo della realtà storica non ne consegue alcuna certezza ma ci si può sentire animati a proseguire le ricerche nella via intrapresa.

‘Abbastanza bene’ è una espressione vaga che conviene chiarire per ciò che in seguito si dovrà esporre. L’interesse dei costruttori di teorie econometriche si è rivolto finora quasi esclusivamente verso gli integrali che rappresentano cicli poliennali non soltanto perchè questi hanno un più evidente interesse storico ed economico, ma anche perchè si pensava che le ricerche statistiche condotte in generale su lunghe serie di dati annuali si prestassero meglio alla individuazione di lunghi e medi cicli che non a quella di cicli di corta durata, su cui incidono troppo le imperfezioni statistiche e gli scarti casuali. Sono stati perciò considerati gli integrali particolari cui corrispondono le fluttuazioni più lunghe ed è stato considerato soddisfacente il confronto statistico quando la lunghezza dei cicli calcolati è risultata presso a poco eguale a quella dei cicli osservati statisticamente. Così KALECKI è stato soddisfatto di trovare un ciclo decennale per la produzione di beni capitali e FRISCH di trovare invece cicli di poco più che 8, 3, 2 anni perchè concordavano con le esperienze cui ciascuno di essi si riferiva. Ma dobbiamo riconoscere che un confronto basato su questo solo elemento della lunghezza del periodo ciclico, che non è dopo tutto nemmeno costante, riesce assai poco probativo; da qui le riserve con le quali queste indagini sono tuttora accolte da molti studiosi. Nessuno del resto più degli stessi costruttori di schemi econometrici per cicli congiunturali ne ha sottolineato il carattere provvisorio e grossolano e la necessità di procedere a perfezionamenti ed ulteriori sviluppi e soprattutto ad accertamenti più rigorosi sulla base di concrete esperienze.

Ecco dunque la ragione e la importanza del controllo statistico, che può essere portato al principio o alla fine del procedimento deduttivo. Il controllo portato all’inizio, cioè sopra le ipotesi di partenza, consiste principalmente nella ricerca delle correlazioni; gli studi in questo campo sono molto numerosi ma non molto conclusivi. Il controllo portato alla fine del ragionamento matematico si fonda sulla interpolazione delle serie economiche concrete. Calcolate le funzioni interpolatrici di un dato gruppo di serie economiche si riscontra se tra esse esistano relazioni funzionali identiche a quelle postulate nell’una o nell’altra teoria econometrica o se se ne possano ottenere di nuove

con leggere modificazioni; attribuendo, per esempio, ad uno o più parametri che la teoria econometrica ha supposto costanti un valore variabile in funzione del tempo. Si tratta in sostanza di percorrere all'inverso il cammino seguito dagli econometristi teorici risalendo per induzione dalle esperienze concrete alle funzioni analitiche, e da queste alle relazioni tra variabili economiche, anzichè dalle ipotesi discendere con una catena di deduzioni alle relazioni funzionali e da queste agli integrali rappresentativi. Il procedimento inverso non ha soltanto valore di controllo; esso darà eventualmente anche modo di rimuovere alcune ipotesi semplificatrici e quindi di conferire alle teorie un contenuto più ampio. Un programma di questo genere, ma divergente in alcuni punti da quello accennato in questa nota, fu preannunciato dal Prof. RAGNAR FRISCH nella riunione della Società Econometrica ad Oxford il 26 settembre 1936, ma non so quale seguito abbia poi avuto da parte sua.

In una memoria, non ancora pubblicata, mi sono proposto di saggiare, su applicazioni concrete, la possibilità di successo di indagini condotte sul piano ora accennato. Qui ne presento alcuni brevi accenni.

Dovendo andare a ritroso del procedimento deduttivo era ovvio assumere come posizioni di partenza, cioè come funzioni interpolatrici, quelle che per le teorie erano posizioni di arrivo, cioè gli integrali dei sistemi di equazioni funzionali. Questi integrali, pur nella diversità delle teorie, hanno tutti un carattere comune; sono sommatorie di funzioni esponenziali ed exposinusoidali (è stato proposto questo nome per indicare la funzione seno moltiplicata per un esponenziale); le costanti che intervengono in tali funzioni sono suscettibili di interpretazione economica; in particolare quelle che affiancano gli argomenti degli esponenziali e delle funzioni circolari, cioè le α, β, γ delle funzioni del tipo $e^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$, $e^{\gamma t}$, hanno speciale interesse perchè sono le più caratteristiche della struttura economica (parametri strutturali).

Per la loro stessa natura le funzioni suddette non possono però essere utilizzate quando si tratti di interpolare lunghe serie storiche; infatti esse, considerate come funzioni della variabile tempo, t , presentano, con il crescere di t , oscillazioni di ampiezza o sempre maggiore, o sempre minore, o sempre perfettamente eguale o anche nessuna oscillazione. Nella realtà economica non si riscontra nulla di simile; non vi sono periodicità perfette, nè vi sono stati di assoluta stazionarietà, nè oscillazioni crescenti fuori di ogni limite. Dunque le fun-

zioni che ci sono additate dalle teorie econometriche come le più atte a rappresentare il movimento economico, quelle che noi dobbiamo necessariamente preferire come funzioni interpolatrici delle serie storiche, ci denunciano, ciascuna da se stessa, la propria precarietà, la propria inidoneità a servirci per molto tempo. La importanza di questa constatazione non è sfuggita ad J. AKERMANN, RAGNAR FRISCH, C. F. ROOS, che ne hanno tratto deduzioni importanti. Non c'è da sperare che una serie di dati statistici estesa sopra un lungo numero di anni si possa interpolare con una unica funzione suscettibile di interpretazione economica. Dobbiamo invece, seguendo FRISCH e ROOS, raffigurarci ciascuna serie storica economica come costituita da diversi pezzi saldati insieme; i punti di saldatura, che chiamerò in seguito punti critici, sono quelli in cui una funzione interpolatrice cessa di rappresentare il movimento economico, ed un'altra vi si deve sostituire. Se, per esempio, le due funzioni sono entrambe del tipo $ke^{at}\sin(\beta t + \varphi) + h$ il punto critico ci denuncia una variazione di alcuni o tutti i parametri k, a, β, φ, h ciascuno dei quali ha un suo proprio significato economico; esso ci denuncia dunque un cambiamento avvenuto nella struttura economica, ci avverte che un fatto nuovo, una forza esogena è intervenuta ad alterare poco o molto il corso degli eventi. Dalla esperienza acquistata adoperando per la interpolazione appunto funzioni del tipo $ke^{at}\sin(\beta t + \varphi) + h$ sono indotto a concludere che l'intervallo tra punti critici consecutivi raramente supera 2 anni, spesso è alquanto inferiore. Si comprende la importanza che assume la determinazione dei punti critici. A priori, considerando il problema dal solo punto di vista matematico, si potrebbe credere che questa determinazione dipenda dalla complessità della funzione scelta per l'interpolazione; è chiaro che se questa contiene molte costanti arbitrarie sarà possibile adattarla ad un tratto della serie empirica molto più lungo che se le costanti sono poche; quando però si tenga presente che le costanti debbono avere un significato economico si riconosce facilmente che la indeterminatezza del problema resta molto ridotta, se pur non cade addirittura. Attualmente sarebbe difficile attribuire un significato economico a tutte le costanti di una sommatoria che comprendesse, per esempio, più di due sinusoidi; è naturale perciò che volendo procedere, sopra un dato gruppo di serie, alla ricognizione sistematica dei punti critici si adoperi anzitutto la funzione $ke^{at}\sin(\beta t + \varphi) + h$. In quanto alle serie cui tale

ricerca può essere applicata è evidente, per la già accennata brevità degli intervalli, che non è possibile utilizzare serie di dati annuali, ma dobbiamo servirci di serie di dati mensili. E nemmeno possono servire serie alle quali sia stata applicata la detrazione del trend, perchè, mediante la interpolazione sistematica, il trend risulta determinato dalla successione di valori del parametro h .

La interdipendenza tra variabili economiche assume spesso caratteri che richiamano alla mente fenomeni ereditari; altre volte è la previsione delle variazioni future di alcune variabili che determina variazioni attuali di altre variabili (FISCHER, AMOROSO, influenza delle previsioni di rialzi e ribassi dei prezzi sulla produzione, sulla domanda...). Quantunque sia molto difficile portare oggi praticamente questi nuovi punti di vista nelle indagini econometriche ed in quelle statistiche, tuttavia si può constatare che un vantaggio non indifferente si ottiene sostituendo alle serie originarie quelle che se ne deducono con il metodo della somma continua su intervallo mobile; maggiori delucidazioni al riguardo condurrebbero troppo in lungo.

Il perno dei nuovi metodi induttivi che si vorrebbero fondare con le ricerche fin qui accennate consiste nel collegamento tra le indagini statistiche e le teorie di dinamica economica. Forse il miglior modo per darne una idea consiste nell'addurre un esempio. Nel volume VI della « Nuova collana di Economisti » è pubblicato un interessante studio di BRESCIANI-TURRONI ed una memoria di WAGEMANN; entrambi contengono, tra le altre cose, una illustrazione delle fluttuazioni dell'economia germanica dopo la stabilizzazione del marco nel 1924. Alla memoria di WAGEMANN sono allegate alcune tabelle, e vi si trova una serie di indici mensili della produzione industriale, ed una di indici di prezzi all'ingrosso. Entrambe si prestano benissimo alla interpolazione con la funzione sinusoidale che, scegliendo volta a volta opportunamente l'origine dei tempi e l'unità di misura per il tempo, si riconduce alla forma $ke^{at}(\cos t + \alpha \sin t) + h$ con tre soli parametri. La migliore interdipendenza tra le due serie (ed anche con la serie derivata di quella dei prezzi) si ottiene quando si assume per la serie della produzione l'intervallo mobile di 12 mesi, per quella dei prezzi l'intervallo di 6 mesi; la interdipendenza è strettissima nella depressione del 1926 tanto che differisce poco, salvo lo sfasamento, da un rapporto di proporzionalità, e presenta i caratteri già osservati in altre esperienze

(FISCHER, AMOROSO, PIGOU...); essa risulta invece più complicata nel successivo periodo di espansione 1927-1928.

I due periodi sono separati da un punto critico che si tratta di interpretare ricorrendo ad una teoria econometrica. Quella esposta da FRISCH nella memoria inserita nel volume di saggi in onore di CASSEL risulta atta all'uopo, quando si spinga la determinazione degli integrali particolari, da lui limitata ai primi tre di più lunga ciclicità già prima ricordati, ad almeno un quarto integrale, cui nella particolare struttura economica esaminata dal FRISCH corrisponde un ciclo di un anno ed 8 mesi. Questo quarto integrale ed il terzo di FRISCH corrispondono abbastanza bene, tenuto conto della diversità delle strutture, a quelli che abbiamo incontrato nella serie della produzione industriale germanica. Al lume della teoria di FRISCH si giunge alla conclusione che i fattori esogeni determinanti la espansione della produzione sono stati il fattore monetario e il creditizio; e si potrebbe a questo punto osservare che la documentazione storica ed il commento di BRESCIANI-TURRONI ci avevano già da tempo condotti, e per via senza dubbio più piana ed accessibile a tutti, allo stesso risultato. Ma noi non dobbiamo badare alla asperità del cammino, sibbene alla meta che è di introdurre, in campi troppo spesso aperti al conflitto delle passioni e degli interessi, strumenti di indagine imparziale e serena.

CARATTERI GIROSCOPICI
DERIVANTI DA VALORI INIZIALI
SUFFICIENTEMENTE GRANDI
DELLE VELOCITÀ IGNORABILI (*)

PIETRO TEOFILATO

SUMMARY. — Auctor demonstrat systemati conservativo, in quo parametra exstent quae ignorari possint, posse conferri opportune selectis originariis conditionibus, motum gyroscopicum, scilicet in quo coordinatae apparentes parvae sint.

§ 1. ENUNCIAZIONE DELL'ARGOMENTO. — Nella nota ⁽¹⁾ che ha preceduto la presente, ho premesso alcune considerazioni analitiche necessarie all'esame rigoroso di un problema meccanico da me trattato qualche tempo addietro ⁽²⁾ e che ora mi sono proposto di riprendere per fondare quei risultati, che già trovai, sopra basi più sicure, e nel contempo per completarli.

Il problema riguarda i sistemi meccanici ad N gradi di libertà, nei quali figurano x coordinate *ignorabili* q_1, q_2, \dots, q_x , ed y coordinate *appariscenti* Q_1, Q_2, \dots, Q_y ; ($x + y = N$). Dimostrerò anzitutto che esistono $xy = n$ particolari funzioni F_{mr} ($m = 1, \dots, y$; $r = 1, \dots, x$) dipendenti soltanto dalle coordinate appariscenti Q e loro derivate temporali Q' (queste ultime contenute linearmente) le quali, previa opportuna scelta delle

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini il 15 febbraio 1945.

(1) P. TEOFILATO, *Sopra alcuni sistemi differenziali a soluzioni sensibilmente costanti*, « Acta », Pontificia Academia Scientiarum, Vol. VIII, n. 14.

(2) P. TEOFILATO, *Sopra i vincoli indotti e autoindotti*, « Rendiconti del Seminario della Università di Cagliari », Note da I a IV, 1939.

condizioni iniziali (tra l'altro assunzione di velocità ignorabili sufficientemente grandi) si conservano in valore assoluto convenientemente piccole. E poichè la linearità delle F_{mr} rispetto alle velocità Q' permette in generale di esprimere le Q' in funzione lineare delle F , si ha per conseguenza agio di concludere che anche le Q' si possono conservare in valore assoluto convenientemente piccole.

Ma la piccolezza delle velocità appariscenti è appunto una condizione che conferisce al movimento un carattere giroscopico, e noi verificheremo come esempio alla fine di questa nota, l'attuarsi della condizione nel caso di un giostato armato di più giroscopi.

§ 2. EQUAZIONI DEL PROBLEMA E LORO PARTICOLARITÀ. — Sia T la forza viva del sistema, la quale si esprimerà per mezzo delle coordinate ignorabili e appariscenti nel modo seguente:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{rs} \left[a_{rs} q'_r Q'_s + \sum_{rs} b_{rs} q'_r q'_s + \sum_{rs} c_{rs} Q'_r Q'_s \right]$$

con a, b, c funzioni delle sole Q . Le equazioni lagrangiane nelle q forniranno subito gli integrali primi:

$$[1] \quad \frac{\partial T}{\partial q'_r} = k \gamma_r \quad (r=1, \dots, x), \quad (k, \gamma_r \text{ costanti})$$

dove, essendo il primo membro lineare nelle q', Q' , la costante positiva k (tenute ferme le γ_r) risulterà tanto maggiore quanto più grandi inizialmente saranno scelte le velocità ignorabili.

L'eliminazione delle coordinate ignorabili a mezzo delle [1] dalle restanti equazioni lagrangiane, che sono quelle relative alle coordinate appariscenti Q , conduce ad un sistema di y equazioni ⁽¹⁾ del tipo:

$$[2] \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q'_m} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_m} + \frac{\partial A}{\partial Q_m} + k \sum_r \gamma_r F_{mr} = \frac{\partial U}{\partial Q_m} \quad (m=1, \dots, y)$$

dove:

1°) \mathcal{T} è indipendente dalle costanti $k \gamma_r$ ed è funzione quadratica delle Q' :

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{rs} c_{rs} Q'_r Q'_s - \frac{1}{2} \sum_{vr} \left(\sum_s a_{rs} Q'_s \right) \left(\sum_{s_1} a_{vs_1} Q'_{s_1} \right) B_{vr}$$

⁽¹⁾ Lord KELVIN, *Treatise of Natural Philosophy*. I, pag. 322 e seg.

avendo indicato con B_{vr} gli elementi della matrice inversa della matrice $\|b_{rs}\|$ formata con i coefficienti b_{rs} che figurano nell'espressione di T sopra indicata. Evidentemente la matrice:

$$[3] \quad \left\| \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial Q'_m \partial Q'_m} \right\| \quad \text{è simmetrica}$$

essendo \mathcal{T} quadratica nelle Q' .

2°) A è funzione quadratica delle $k\gamma_r$, con coefficienti dipendenti dalle sole Q e non dalle Q' :

$$A = \frac{1}{2} \sum_{vr} k^2 \gamma_v \gamma_r B_{vr}$$

3°) Le F_{mr} , in conformità di quanto si è specificato nel paragrafo precedente, sono date da:

$$[4] \quad F_{mr} = \sum_{s=1}^y D_{mrs} Q'_s$$

con le D_{mrs} espresse da:

$$[5] \quad D_{mrs} = \frac{\partial M_{mr}}{\partial Q_s} - \frac{\partial M_{sr}}{\partial Q_m}$$

e le M_{hk} funzioni delle sole Q , le quali si esprimono facilmente per mezzo dei coefficienti delle velocità nell'espressione della forza viva T :

$$M_{hk} = \sum_{\lambda} a_{h\lambda} B_{k\lambda}$$

Dalle [5] segue che, per un fissato valore di r , le D_{mrs} formano una matrice quadrata:

$$[6] \quad \|D_{mrs}\|_{(r \text{ fisso})} \quad \text{emisimmetrica}$$

Le [2] si scrivono:

$$[7] \quad \sum_{s=1}^y \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial Q'_m \partial Q'_s} Q''_s = -k \sum_r \gamma_r F_{mr} + \left[\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_m} + \frac{\partial (U-A)}{\partial Q_m} \right],$$

dove il termine in parentesi quadra è la somma di due addendi, l'uno omogeneo di secondo grado nelle Q' , a coefficienti funzioni delle Q , l'altro funzione delle sole Q , indipendente dalle Q' .

Generalmente dalle [4] si potranno ricavare le Q' in funzione lineare delle F , ed allora il termine in parentesi quadra delle [17] risulterà espresso per mezzo delle Q e delle F soltanto e conterrà le F unicamente al secondo grado.

Indichiamo poi con $\|a_{ps}\|$ la matrice inversa delle [3]. A causa della simmetria della [3], risulterà:

$$[8] \quad \|a_{ps}\| \quad \text{simmetrica}.$$

Si derivino ora le [4] rispetto al tempo e dai risultati si eliminino le Q'' a mezzo delle [7]. Si ottiene il sistema differenziale:

$$[9] \quad \frac{dF_{mr}}{dt} = -k \sum_{q=1}^x \gamma_q \sum_{p=1}^y F_{pq} \sum_{s=1}^y D_{mrs} a_{ps} + H_{mr}$$

dove:

a) le H_{mr} , a causa dell'osservazione fatta circa il termine in parentesi quadra delle [7] sono funzioni delle Q e delle F soltanto e contengono le F esclusivamente al secondo grado, per modo che si ha:

$$[10] \quad H_{mr} = \beta_{mr} + \omega_{mr}$$

$$[11] \quad \omega_{mr} = \sum_{i_1 i_2 j_1 j_2} \alpha_{mr i_1 i_2 j_1 j_2} F_{i_1 i_2} F_{j_1 j_2}$$

$$[12] \quad \beta_{mr} = \sum_s D_{mrs} \sum_p a_{sp} \frac{\partial(U-A)}{\partial Q_p} = \sum_p \frac{\partial(U-A)}{\partial Q_p} \left(\sum_s a_{sp} D_{mrs} \right)$$

essendo le α, β funzioni delle sole Q .

b) Tutte le funzioni delle sole Q che figurano nelle [9], per ipotesi (del resto rispondente ai casi fisici) sono limitate; inoltre hanno derivate limitate rispetto alle coordinate Q , cosicchè: se non contengono esplicitamente il tempo, soddisfano alla condizione del LIPSCHITZ, quando, come immaginiamo, le velocità appariscenti siano anch'esse limitate.

c) Si ha poi:

$$\sum_{mr} \frac{\partial}{\partial F_{mr}} \left(\frac{dF_{mr}}{dt} \right) = k \sum_r \gamma_r \sum_{ms} D_{mrs} a_{ms} = 0,$$

Formiamoci ora una matrice *rettangolare*

$$[18] \quad \| R_{mr, pq} \|$$

ottenuta con l'aggiungere alle n colonne della [17] un'ultima colonna formata con le β_{mr} , ordinatamente. Quest'ultima colonna, come mostrano le [14] è una combinazione lineare delle colonne della [17] e pertanto le due matrici [17] e [18] avranno lo stesso rango.

§ 4. PROPRIETÀ DI ALCUNE SOSTITUZIONI. — Una sostituzione R rappresentata da una matrice emisimmetrica è una *rotazione* e mediante una sostituzione ortogonale T qualsiasi, si muta ancora in una rotazione R' ; per cui scriveremo:

$$[19] \quad R' = TRT^{-1} \equiv \|\delta_{rs}\| \quad (\text{con } \delta_{rs} = -\delta_{sr})$$

Una sostituzione K rappresentata da una matrice simmetrica è una *deformazione pura* e mediante una sostituzione ortogonale T si trasforma ancora in una deformazione pura. Però, se la sostituzione S si sceglie opportunamente, allora K si muta in una K' data dalla matrice:

$$[20] \quad K' = TKT^{-1} \equiv \left\| \begin{array}{cccc} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{array} \right\|$$

dove sono nulli tutti gli elementi non appartenenti alla diagonale principale.

Ciò premesso, consideriamo il prodotto P di sostituzioni seguenti:

$$[21] \quad P = R \cdot K,$$

cioè il prodotto di una rotazione per una deformazione pura. Proveremo che l'equazione secolare relativa a P ammette *radici nulle* oppure *immaginarie pure* (2 a 2 coniugate).

Infatti, considerando la trasformazione di P mediante T , cioè P' , avremo per la [21]:

$$[22] \quad P' = TPT^{-1} = TRKT^{-1} = (TRT^{-1})(TKT^{-1}) = R'K'$$

e quindi, a causa di [19] e [20]:

$$[23] \quad P' \equiv \|\delta_{rs} k_s\|.$$

Ma allora, ricordando che $\delta_{rs} = -\delta_{sr}$, come è espresso nella [19], la matrice seguente:

$$[24] \quad R \equiv \|\delta_{rs} \sqrt{k_r k_s}\|$$

rappresenterà una rotazione. Di questa ultima procuriamoci la trasformata a mezzo della deformazione pura:

$$[25] \quad C \equiv \begin{vmatrix} \sqrt{k_1} & & & \\ & \sqrt{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{k_n} \end{vmatrix},$$

dove sono sottintesi tutti zeri al posto degli elementi non appartenenti alla diagonale principale. Dal confronto di [23], [24] e [25], risulta subito che:

$$[26] \quad P' = CRC^{-1}.$$

A questo punto bisogna ricordare che una sostituzione ammette la stessa equazione secolare di una qualsiasi sua trasformata; quindi per la [22], P' ha la stessa trasformata di P , e per la [26] la stessa di R .

Ne consegue che P ha la stessa equazione secolare che compete alla rotazione R , e poichè l'equazione secolare di una rotazione possiede solo radici nulle oppure immaginarie pure (2 a 2 coniugate) altrettanto dovrà dirsi della equazione di P , come volevamo dimostrare.

le λ_{rs} di un gruppo sono ordinatamente eguali alle λ_{rs} di un altro gruppo e l'indice q dei fattori γ di ciascun gruppo è identico per tutti gli elementi del gruppo. Ora, alla $(y+1)^{ma}$ colonna si sostituisca la differenza fra la medesima moltiplicata per γ_1 e la 1^a moltiplicata per γ_2 . Alla $(y+2)^{ma}$ si sostituisca la medesima moltiplicata per γ_1 e la seconda moltiplicata per γ_2 ; e così via; alla $(qy+s)^{ma}$ colonna si sostituisca la differenza fra la medesima moltiplicata per γ_{q-1} e la $[(q-1)y+s]^{ma}$ moltiplicata per γ_q . Avremo un'equazione equivalente alla [29] che scriveremo simbolicamente:

$$|\sigma| = 0$$

dove σ è una matrice quadrata di ordine $n = xy$.

Nella matrice σ operiamo sostituendo, al posto della h^{ma} linea ($h < y$), la combinazione lineare delle linee:

$$h^{ma}, (y+h)^{ma}, (2y+h)^{ma}, \dots, [(x-1)y+h]^{ma},$$

con i rispettivi coefficienti $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_x$. Avremo una nuova equazione:

$$|E| = 0$$

dove E è sempre una matrice quadrata di ordine $n = xy$, nella quale però sono nulli i termini appartenenti contemporaneamente alle prime y linee ed alle ultime $(n-y)$ colonne; per cui sviluppando secondo la regola di LAPLACE, cioè secondo i minori della matrice rettangolare formata dalle prime y linee, si ottiene:

[30]

$$\begin{vmatrix} \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+1,1} - u & \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+1,2} & \dots & \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+1,y} \\ \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+2,1} & \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+2,2} - u & \dots & \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+2,y} \\ \sum \gamma_q \lambda_{qy,1} & \sum \gamma_q \lambda_{qy,2} & \dots & \sum \gamma_q \lambda_{qy,y} - u \end{vmatrix} u^{y(x-1)} = 0$$

dove le sommatorie sono rispetto all'indice q che va da 1 ad x .

Indicando con P la matrice che si ottiene dalla [30] quando si omette il termine u , dovunque esso compare, potremo scrivere, tenute presenti le [27]:

$$P \equiv \|P_{\mu\nu}\| \quad (\mu, \nu \leq y)$$

dove:

$$P_{\mu\nu} = \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+\mu, \nu} = \sum \gamma_q \lambda_{(q-1)y+\mu, (q-1)y+\nu} = -\frac{1}{k} \sum \gamma_q A_{\mu q, \nu q}$$

perchè le λ della colonna s^{ma} in [29] sono le stesse che nella colonna $(s+y)^{ma}$. Si ha anche:

$$[31] \quad P_{\mu\nu} = -\frac{1}{k} \sum_q \gamma_q \sum_q D_{\mu q q} a_{\nu q} = -\frac{1}{k} \sum_q a_{\nu q} \sum_q \gamma_q D_{\mu q q}.$$

Ma allora si riconosce in base alla [31] che la matrice $P \equiv ||P_{\mu\nu}||$ è il prodotto di due altre matrici R e K date rispettivamente da:

$$R \equiv ||R_{rs}||, \quad \text{dove} \quad R_{rs} = \sum_q \gamma_q D_{rq s} \quad (r, s=1, \dots, y)$$

$$K \equiv ||a_{rs}||;$$

cioè P è il prodotto di una rotazione (perchè tale è R a causa della [6]) per una deformazione pura K (tale in virtù della [8]). Quindi l'equazione secolare di P , che è poi la [30], tenuto presente il risultato del paragrafo precedente, ammette $y(x-1)$ radici nulle (più ancora un'altra se y è dispari) e poi le altre radici immaginarie pure (2 a 2 coniugate).

§ 6. UN SISTEMA DIFFERENZIALE AUSILIARIO. — Accanto al sistema [28] consideriamo il sistema ausiliario:

$$[32] \quad \frac{dF_i^0}{dt} = \gamma_1 \lambda_{i1} F_1^0 + \gamma_1 \lambda_{i2} F_2^0 + \dots + \gamma_1 \lambda_{iy} F_y^0 +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \gamma_x \lambda_{ix} F_{(y-1)x+1}^0 + \gamma_x \lambda_{ix} F_{(y-1)x+2}^0 + \dots + \gamma_x \lambda_{ix} F_{xy}^0 + \frac{1}{k} \beta_i$$

che differisce dal sistema [28] per l'omissione proprio di quei termini $\frac{1}{k} \omega_i$ che contengono le F_i a secondo grado. Ora questo sistema [32], lineare nelle F^0 soddisfa a tutte le condizioni cui soddisfano i sistemi lineari studiati nella nota precedente ⁽¹⁾ e cioè:

1°) Il sistema [32] appartiene alla classe di quelli del LIOUVILLE in base all'osservazione fatta in fine del § 2).

⁽¹⁾ Cfr. P. TEOFILATO, *Sopra alcuni sistemi differenziali a soluzioni sensibilmente costanti*, « Acta », Vol. VIII, n. 14, 1944.

2°) La matrice quadrata formata con i coefficienti delle F^0 , nei secondi membri della [32], cioè la matrice [17], ha lo stesso rango della matrice rettangolare [18], ottenuta con l'aggiungere alle colonne della prima matrice la colonna delle β_r .

3°) L'equazione secolare delle [32] non è altro che la [30] e pertanto ammette soltanto radici nulle oppure immaginarie pure (2 a 2 coniugate).

4°) I coefficienti suddetti soddisfano alla condizione del LIPSCHITZ in base alle ipotesi significate al § 2 b); per cui potremo scrivere:

$$|\lambda_{rs}(t) - \lambda_{rs}(t_0)| > M |t - t_0| = M \frac{(\tau - \tau_0)}{k}$$

e ritenere perciò che, almeno per una durata:

$$[33] \quad |\tau - \tau_0| \leq \sqrt{k}$$

con k grande a piacere, la variabilità di λ_{rs} (e così dicasi per β_r) sia lentissima rispetto al tempo fittizio τ . L'assunzione di k molto grande si ottiene, come si è detto a proposito delle [1], prendendo grandi valori iniziali delle velocità ignorabili.

In base alle circostanze ora riscontrate, sono dunque applicabili al sistema [32] i risultati della nota precedente e si potrà concludere che:

a) Sotto la condizione [33] si può scrivere per le F_i^0 del sistema [32] e per le F_i del sistema [28], rispettivamente ⁽¹⁾:

$$[34] \quad F_i^0 = B_i + \sum_{\sigma=m+1}^n H_{\sigma i} e^{u_\sigma \tau}$$

$$[34 bis] \quad F_i = F_i^0 + \frac{1}{k} \sum_{\sigma, q=1} G_{\sigma q i} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{u_\sigma(\tau - \tau_1)} \cdot \omega_q d\tau_1$$

dove B_i , $H_{\sigma i}$, $G_{\sigma q i}$ sono note funzioni delle λ_{rs} , β_r ; m è il numero delle radici nulle dell'equazione secolare ed u_σ è una generica radice non nulla. Come si vede, le F_i si riducono alle F_i^0 per $\tau = \tau_0$.

b) Tutte le F_i^0 sono limitate e, nel caso che l'equazione secolare abbia due sole radici ($m = n - 2$) non nulle e quindi immaginarie

(1) Cfr. Nota ultimamente citata; formole [24] e [25].

pure coniugate, le F_i^0 si possono conservare tutte, per un tempo indefinito, prossime quanto si vuole ai valori assunti inizialmente, previa opportuna scelta delle condizioni iniziali od in particolare del parametro k .

§ 7. STUDIO DEL SISTEMA [28]. — Pongasi:

$$[35] \quad \psi_i^{(\lambda)}(f_h, f_k) = \sum_{\alpha, q=i} G_{\alpha q i} \int_{\tau_h}^{\tau} e^{u_{\sigma}(\tau - \tau_i)} \cdot \sum a_{ihk} f_h f_k d\tau_i$$

dove le $G_{\alpha q i}$ sono le stesse che figurano nelle [34 bis] e le a_{ihk} non sono altro che le α a sei indici che figurano nelle [11]; sicchè la sommatoria che è sotto il vincolo integrale non è altro che ciò che diventa ω_i della [11] quando al posto delle F si sostituiscano le funzioni f .

Sia poi L un numero positivo che superi tutti i moduli seguenti:

$$[36] \quad |G_{\alpha q i}|, |F_i^0|, |a_{ihk}| < L$$

e sia;

$$[37] \quad Z = \sum |G_{\alpha q i}| |a_{ihk}|$$

e z il numero dei termini che figurano nella sommatoria [35]; avremo:

$$[38] \quad Z < zL^2$$

Formiamo poi la scala ricorrente seguente:

$$[39] \quad F_i^{(m)} = F_i^{(0)} + \frac{1}{k} \psi_i^{(\lambda)}(F_h^{(m-1)}, F_k^{(m-1)})$$

$$(m = 1, 2, \dots \infty)$$

e cominciamo ad assumere $\lambda = 0$, il che significa assumere nella [35] τ_0 come limite inferiore della integrazione [36]. A norma delle [36] [37] [38], avremo da [39] e [35]:

$$|F_i^{(1)} - F_i^{(0)}| < \frac{1}{k} z L^2 (\tau - \tau_0),$$

essendo u_{σ} un esponente immaginario puro.

Posto allora:

$$[40] \quad \frac{1}{k} z L^3 (\tau - \tau_0) = \frac{1}{2} y$$

risulterà:

$$[41] \quad |F_i^{(1)} - F_i^{(0)}| < \frac{1}{2} L y < L y$$

e pertanto (cfr. [36]):

$$[41 \text{ bis}] \quad |F_i^{(1)}| < L(1+y)$$

Dalla [39] e [35] segue allora:

$$|F_i^{(2)} - F_i^{(0)}| < \frac{1}{k} z L^4 \int_{\tau_0}^{\tau} (1+y)^2 d\tau_1 = \frac{L}{2} \int_0^y (1+y)^2 dy < \frac{L}{2} (y + y^2 + y^3)$$

Ora, quando si assuma k sufficientemente grande e si tenga presente la [33], dalla [40] si deduce che certamente si può ritenere:

$$[42] \quad y < \frac{1}{2},$$

per cui, come già nella [41]:

$$|F_i^{(2)} - F_i^{(0)}| < \frac{L}{2} \frac{y}{1-y} < L y ;$$

e quindi analogamente come per la [41 bis]:

$$[43] \quad |F_i^{(2)}| < L(1+y)$$

Ma allora, sempre per la [39] o [35]:

$$|F_i^{(3)} - F_i^{(0)}| < \frac{1}{k} z L^4 \int_{\tau}^{\tau_0} (1+y)^2 d\tau_1 < L y$$

e perciò anche $|F_i^{(3)}| < L(1+y)$ ed in generale:

$$[44] \quad |F_i^{(m)}| < L(1+y) < \frac{3}{2} L$$

D'altra parte, posto:

$$\Delta_h^{(m)} = F_h^{(m)} - F_h^{(m-1)},$$

si ha:

$$\Delta_h^{(m)} = \frac{1}{k} \sum G_{\sigma q i} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{u_{\sigma}(\tau-\tau_1)} \sum a_{ihk} (\Delta_h^{(m-1)} F_k^{(m-1)} + \Delta_k^{(m-1)} F_h^{(m-2)}) d\tau_1$$

e per la [44]:

$$|\Delta_h^{(m)}| < \frac{3}{2} \frac{1}{k} z L^3 \int_{\tau_0}^{\tau} (|\Delta_h^{(m-1)}| + |\Delta_k^{(m-1)}|) d\tau_1 < \frac{3}{2} \frac{1}{2} \int_0^y (|\Delta_h^{(m-1)}| + |\Delta_k^{(m-1)}|) dy$$

Ora, a norma della [41], tutte le $\Delta_h^{(1)}$ sono maggiorate da Ly e quindi da L ; pertanto, se si considera la scala ricorrente:

$$D^{(m)} = \frac{3}{2} \int_0^y D^{(m-1)} dy,$$

ove si parte da $D^{(1)} = L$, si avrà che tutti i moduli $|\Delta_h^{(m)}|$, qualunque sia h , saranno maggiorati da:

$$D^{(m)} = \frac{\left(\frac{3}{2} y\right)^{m-1}}{(m-1)!} L;$$

e in conseguenza:

$$D^{(m+1)} + D^{(m+2)} + \dots < \frac{\left(\frac{3}{2} y\right)^m}{m!} e^{1/2}$$

Ma poichè il secondo membro di quest'ultima disuguaglianza tende a svanire, col crescere indefinito di m , esisterà il limite:

$$L_i = \lim_{m \rightarrow \infty} F_i^{(m)};$$

e questo limite, evidentemente soddisferà l'equazione generica:

$$[45] \quad L_i = F_i^{(0)} + \frac{1}{k} \psi_i^{(0)}(L_h, L_k),$$

cioè alla stessa equazione [34 bis] cui, per la [35], soddisfa la F_i ed inoltre si riduce a $F_i^{(0)}$ per $\tau = \tau_0$. Dunque le F_i esistono e sono date dalle L_i .

La [45] si presta a valutare la differenza $F_i - F_i^{(0)}$. Infatti la [45] tenuta presente la [35] e la [44], diventa:

$$[46] \quad |F_i - F_i^{(0)}| < \frac{z}{k} \frac{9}{4} L_1 \sqrt{k} = \frac{L_1}{\sqrt{k}} \quad (\text{per } \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 = \tau_0 + \sqrt{k})$$

con evidente significato di L_1 .

Ma la stima dell'approssimazione di F_i ad $F_i^{(0)}$ nell'intervallo accennato è suscettibile di affinamento. $F_i^{(0)}$ si può assumere inizialmente piccola quanto si vuole, e d'altra parte, come abbiamo veduto nella nota precedente, si può mantenere vicina quanto si vuole al suo valore iniziale, indipendentemente dal valore k e per un tempo grande a piacere, purchè k sia abbastanza grande.

Perciò potremo sempre supporre che in qualunque istante sia:

$$[47] \quad |F_i^{(0)}| < \varepsilon, \quad \text{con } \varepsilon \text{ compreso fra } \frac{1}{k^2} \text{ ed } \frac{1}{k}$$

Da [46] e [47] segue:

$$|F_i| = |F_i^{(0)} + (F_i - F_i^{(0)})| < \varepsilon + \frac{L_1}{\sqrt{k}} < \frac{2L_1}{\sqrt{k}}$$

ed allora dalla [45] seguirà (sempre a norma della [35]):

$$|F_i - F_i^{(0)}| < \frac{1}{k} z L^2 \left(\frac{2L_1}{\sqrt{k}} \right)^2 \sqrt{k} = \frac{L_2}{k^{3/2}}$$

con evidente significato di L_2 . Segue da quest'ultima e dalla [47] e [46]:

$$[48] \quad |F_i| = |F_i^{(0)} + (F_i - F_i^{(0)})| < \varepsilon + \frac{L_2}{k^{3/2}} < \frac{1}{k}$$

per cui, sostituendo nella [45] risulterà finalmente:

$$|F_i - F_i^0| < \frac{1}{k} \varepsilon L^2 \left(\frac{1}{k} \right)^2 \sqrt{k} = \frac{L_3}{k^{5/2}}$$

con evidente significato di L_3 . Questo è il massimo affinamento che si poteva raggiungere nella valutazione di $|F_i - F_i^0|$.

D'altra parte le funzioni a_{ijk} , $G_{\sigma q i}$ conservano per ipotesi le proprietà utilizzate finora, per un tempo qualsiasi.

Possiamo allora iterare il ragionamento partendo da τ_1 anziché da τ_0 , mediante il procedimento ricorrente indicato dalla [39], ove però adesso si assuma $\lambda = 1$, perchè si parte da τ_1 , e ricaveremo le F_i soddisfacenti al sistema [28] e tali che per $\tau = \tau_1$ si riducono ai valori $(F_i)_{\tau=\tau_1}$ ai quali siamo testè pervenuti partendo da τ_0 . Per la durata $|\tau - \tau_1| \leq \sqrt{k}$, e cioè fino all'istante $\tau_2 = \tau_1 + \sqrt{k}$, le F_i , trovate in questo secondo intervallo, si manterranno prossime ai rispettivi valori iniziali $(F_i)_{\tau=\tau_1}$. E così via, iterando per le durate $\tau_3 - \tau_2 = \sqrt{k}$, ecc.

La funzione F_i così trovata e la corrispondente F_i^0 , coincidenti per $\tau = \tau_0$, in seguito al procedimento adottato nel 1° tratto (τ_0, τ_1) differiranno in τ_1 al più per $L_3 : \sqrt{k^5}$; in seguito al procedimento del 2° tratto (τ_1, τ_2) differiranno in τ_2 al più del doppio, e così in τ_3 per il triplo, ecc. Insomma solo dopo un tempo fittizio $\tau - \tau_0 = k^2$, cioè un tempo reale $t - t_0 = k$ (molto grande) la differenza tra F_i ed F_i^0 sarà al più $(L_3 : \sqrt{k^5}) k^2 = L_3 / \sqrt{k}$ (e quindi piccola). Ma i valori F_i^0 soddisfano alla [47] per un tempo indefinito e perciò sarà:

$$|F_i| < \varepsilon + \frac{L_3}{\sqrt{k}}.$$

Dunque le F_i si conserveranno anch'esse come le F_i^0 prossime al loro (piccolo) valore iniziale $(F_i^0)_{\tau=\tau_0}$.

§ 8. GIROSTATO A PIÙ GIROSCOPI. — Supponiamo di avere un girostato sul quale siano armati più giroscopi rotanti i cui assi siano solidali con le pareti del girostato. Le coordinate ignorabili sono nullo che gli angoli $\sigma_1 \sigma_2 \dots$ di rotazione dei giroscopi; le appariscenti

Q_1, Q_2, Q_3 non sono altro che i tre angoli euleriani φ, ψ, θ formati dagli assi centrali di tutto il sistema (assi x, y, z) con gli assi fissi.

Se M_0 è la massa totale del sistema, w_0 la velocità del baricentro, A_0, B_0, C_0 sono i momenti inerziali centrali di tutto il sistema e p, q, r le componenti rotatorie rispetto agli assi centrali che abbiamo denominato con x, y, z , la forza viva dovuta al solo supporto dei giroscopi e al solo trascinamento di questi sarà:

$$T_0 = \frac{1}{2} (A_0 p^2 + B_0 q^2 + C_0 r^2 + M_0 w_0^2)$$

Siano ora A_h^*, B_h^*, C_h^* ($A_h^* = B_h^*$) i momenti inerziali centrali del giroscopio h^{mo} , M_h la sua massa e siano invece $A_h, B_h, C_h, D_h, E_h, F_h$ le sei coordinate inerziali del medesimo rispetto degli assi xyz ed $\alpha_h, \beta_h, \gamma_h$ i coseni degli angoli che il suo asse giroscopico fa con xyz .

Ometto l'indice h , si trova facilmente:

$$A = M(b^2 + c^2) + (1 - \alpha^2) A^* + \alpha^2 C^*; \quad D = bcM + \beta\gamma(A^* - C^*)$$

e le analoghe per B, C, E, F , ottenute da quelle già scritte, mantenendo ferme le lettere con asterisco e la M , e permutando circolarmente tutte le altre.

Per mezzo di queste grandezze riuscirà di esprimere l'altra seguente:

$$S_h = \sum_i m_{ih} \begin{vmatrix} p & q & r \\ x_{ih} & y_{ih} & z_{ih} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_h & \beta_h & \gamma_h \\ x_{ih} - a_h & y_{ih} - b_h & z_{ih} - c_h \end{vmatrix}$$

dove m_{ih} è la massa generica del punto materiale i^{mo} appartenente al giroscopio h^{mo} . Come si vede S_h è funzione lineare di p, q, r e pertanto sarà funzione lineare delle velocità φ', ψ', θ' (derivate temporali degli angoli euleriani).

Indicando con T_r la forza viva del moto relativo dei giroscopi rispetto al giostato, la quale è indipendente da φ, ψ, θ e loro derivate temporali, e tenendo presente l'espressione data poco sopra per T_0 , si trova la forza viva totale T :

$$T = T_0 + T_r + \sum_h S_h \sigma'_h.$$

Siamo così in grado di ricavare le equazioni lagrangiane. Quelle rispetto a $\sigma_1 \sigma_2 \dots$ forniscono altrettanti integrali primi come si è visto nella [1]; mediante questi ultimi è possibile eliminare $\sigma_1 \sigma_2 \dots$ dalle restanti equazioni lagrangiane, ottenendo così le equazioni [2] che qui, diventano:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial Q_i} = - \sum_r \gamma_r F_{ir} + \frac{\partial U}{\partial Q_i},$$

dove:

$$Q_1 = \varphi, \quad Q_2 = \psi, \quad Q_3 = \theta$$

$$\mathcal{T} = T_0 - \frac{1}{2} \sum \frac{S_h^2}{C_h^*}$$

$$F_{ir} = \frac{1}{C_r^*} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial S_r}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial S_r}{\partial Q_i} \right\} = \sum_{s=1}^3 D_{irs} \dot{Q}_s$$

(quest'ultimo risultato in virtù della linearità delle S_r rispetto alle \dot{Q} e in conformità delle [4]).

Abbiamo dunque 3 coordinate appariscenti ($y=3$) e supponiamo di disporre di 3 giroscopi ($x=3$ coordinate ignorabili σ_h). Se per semplicità immaginiamo che gli assi giroscopici siano paralleli ai tre assi centrali risulterà (ritornando per un momento a simboleggiare le F con doppio indice):

$$\left. \begin{aligned} F_{11} &= 0 & - \sin \theta \cos \varphi \cdot \psi' + \sin \varphi \cdot \theta' \\ F_{21} &= \sin \theta \cos \varphi \cdot \varphi' + 0 & + \sin \varphi \cdot \cos \theta \cdot \theta' \\ F_{31} &= - \sin \varphi \cdot \varphi' - \sin \varphi \cos \theta \cdot \psi' + 0 \end{aligned} \right\} 1^\circ \text{ giroscopio}$$

$$\left. \begin{aligned} F_{12} &= 0 & + \sin \varphi \sin \theta \cdot \psi' + \cos \varphi \cdot \theta' \\ F_{22} &= - \sin \varphi \sin \theta \cdot \varphi' + 0 & + \cos \varphi \cos \theta \cdot \theta' \\ F_{32} &= - \cos \varphi \cdot \varphi' - \cos \varphi \cos \theta \cdot \psi' + 0 \end{aligned} \right\} 2^\circ \quad \text{»}$$

$$\left. \begin{aligned} F_{13} &= 0 & + 0 & + 0 \\ F_{13} &= 0 & + 0 & - \sin \theta \cdot \theta' \\ F_{33} &= 0 & + \sin \theta \cdot \psi' & + 0 \end{aligned} \right\} 3^\circ \quad \text{»}$$

Se dunque nel girostato vi fosse un solo giroscopio, il terzo, si potrebbero desumere $\theta' \psi'$ in funzione di $F_{23} F_{33}$ (uniche F che in tal

caso comparirebbero nel problema). Sarebbe quindi possibile esprimere le funzioni ω , delle [11], per mezzo delle F ed applicare in conseguenza tutte le conclusioni alle quali siamo pervenuti nel paragrafo ultimo. Così le F_{23}, F_{33} , e conseguentemente $\theta' \psi'$ si possono mantenere per un tempo indefinito prossime ai valori iniziali e quindi sempre piccole se inizialmente piccole.

Se invece si dispone di due giroscopi possiamo conservare piccole tutte e tre le velocità $\varphi' \psi' \theta'$ e imporre quindi al girostato di muoversi lentamente, qualunque sia la posizione assunta nel tempo.

Dall'analisi fatta, nulla paraltro risulta circa l'andamento precessionale di una o più Q (Q' con segno costante) oppure oscillatorio (Q' con segno variabile), discriminazione questa che richiede un esame più approfondito.

In ogni modo le funzioni F e quindi le velocità Q' si possono considerare quasi periodiche, perchè la [30], quando si astragga dalle radici nulle, si riduce nel caso del girostato ($y = 3$) ad una equazione di secondo grado pura. Le velocità Q' si comportano dunque rispetto al tempo reale t quasi accoppiassero ad una ordinaria variabilità un fremito di periodo brevissimo $\frac{2\pi}{k|u|}$, dove u è anch'esso variabile.