

TEORIA E CALCOLO DELLE TRAVI
CON ARMATURE PREVENTIVAMENTE TESE
(IL PROBLEMA DEI MARGINI DI SICUREZZA) (*)

(Con quattro figure ed una tavola fuori testo)

GUSTAVO COLONNETTI
Accademico Pontificio

SUMMARIUM. — Auctor, qui iam tribus notis in his Actis de securitatis marginibus, quos vocant, disseruerat, peculiarem ostendit applicationem rationum, quibus ii margines determinari possunt; ex quo novam rationem deducit, qua supputentur trabes, quarum futurae antea tensae sint.

In una delle Note pubblicate sotto questo medesimo titolo ⁽¹⁾, io ho indicato un procedimento grafico che, nell'ipotesi della sezione parzializzata, permette di determinare, per ciascun valore del momento flettente, la posizione dell'asse neutro - o asse di separazione della sezione reagente - e di tracciare in conseguenza il diagramma delle tensioni interne.

Osservavo in quella occasione che, per quanto tale ipotesi nella nuova tecnica del cemento armato sia da considerarsi come non tollerabile in condizioni normali di esercizio, il calcolo delle tensioni a cui essa dà luogo può presentare qualche interesse ai fini della determinazione dei margini di sicurezza.

(*) Nota presentata il 7 ottobre 1942.

(¹) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il problema della sezione parzializzata)*. Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. IV, 1940.

Ma il problema dei margini di sicurezza è in realtà assai più complesso di quel che generalmente si creda; ed io mi propongo di ritornar qui sull'argomento onde approfondirne lo studio alla luce delle norme generali recentemente stabilite per tutte le strutture iperstatiche in stato di coazione (¹).

* * *

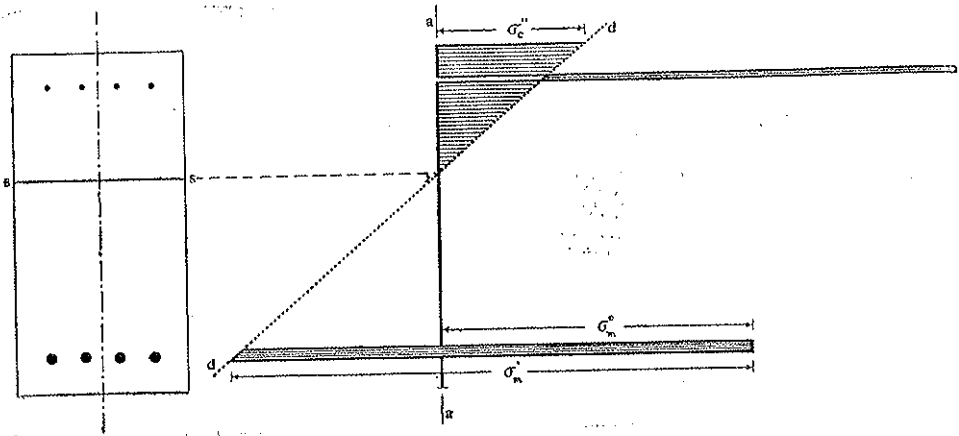


FIG. 1.

Supporrò che una sezione di trave, del tipo di quella rappresentata in figura 1, sia pervenuta, col crescere del momento flettente, al limite della sua resistenza; più precisamente supporrò che nella zona tesa, ormai ridotta alla sola sezione metallica, stia per essere raggiunto il limite di elasticità σ'_m dell'acciaio, e che, contemporaneamente, sul bordo della zona compressa stia per essere raggiunto il carico di rottura σ_c'' del calcestruzzo alla compressione.

Osserviamo - prima di inoltrarci nella discussione del problema - che, a questo stato limite, si arriva con un processo che interessa in diverso modo le diverse parti dell'armatura.

(¹) G. COLONNETTI, *Il problema dei margini di sicurezza nelle strutture iperstatiche in stato di coazione*. Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 1942.

Al crescere del momento flettente, la sollecitazione va infatti continuamente crescendo nelle armature che si trovano nella zona tesa della sezione; va invece continuamente diminuendo in quelle che si trovano nella zona compressa.

Perciò è consigliabile che il dimensionamento delle armature venga eseguito tenendo presente, per l'armatura della zona compressa, il dia-

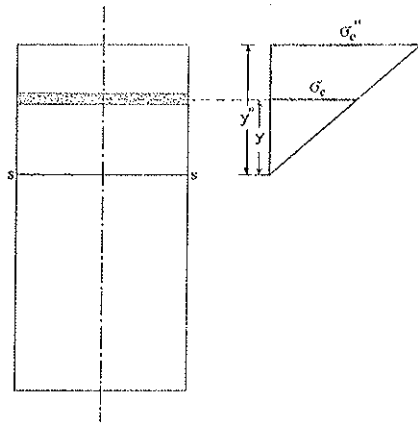


FIG. 2.

gramma delle deformazioni impresse (σ , ciò che fa lo stesso, delle tensioni applicate al momento del getto); per l'armatura della zona tesa, il diagramma delle tensioni determinate invece da quello che noi chiameremo, per intenderci, il momento flettente limite.

E si otterrà una utilizzazione integrale delle caratteristiche di resistenza dell'acciaio impiegato nelle due armature se dimensionamento e messa in tensione preventiva saranno stati previsti per modo che il limite di elasticità dell'acciaio venga raggiunto, nella prima, al momento del getto, nell'altra, sotto l'azione del momento flettente limite.

Così stando le cose, il sistema delle tensioni interne che fa equilibrio alla sollecitazione esterna, al limite di resistenza sopra accennato, si può idealmente immaginare scomposto in due parti costituite: l'una dalle tensioni *positive* nelle armature, supposte tutte tese al limite di elasticità; l'altra dalle tensioni *negative* della sola zona compressa,

calcolate come se nessuna tensione preventiva fosse intervenuta, epperò senza esclusione delle armature in essa zona incluse e con essa impiegate in compressione.

Queste tensioni *negative* dovendo, pel principio della conservazione delle sezioni piane, variare proporzionalmente alla distanza dall'asse di separazione ss (fig. 2), e proporzionalmente al modulo di elasticità del materiale, si potranno facilmente calcolare sotto forma di momenti statici delle aree elementari (ridotte al modulo base) per rapporto all'asse di separazione.

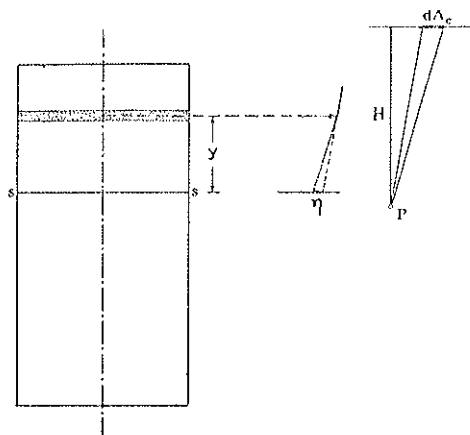


FIG. 3.

È perchè la sollecitazione si riduca, come noi vogliamo, ad una flessione semplice, occorre e basta che la risultante di queste tensioni *negative* sia eguale, in valore assoluto, alla risultante delle predette tensioni *positive* nelle armature, vale a dire al prodotto della sezione metallica A_m per il limite di elasticità σ'_m del relativo materiale.

Divisa pertanto la sezione in striscie elementari mediante corde parallele all'asse di separazione, e rappresentate idealmente queste striscie con forze fittizie misuranti le relative aree dA_c ridotte al modulo base (fig. 3), si collegheranno queste forze con un poligono funicolare di distanza polare arbitraria H .

Questo poligono, coi suoi successivi lati, dovrà intercettare sull'asse di separazione segmenti proporzionali ai momenti statici delle

aree, e quindi anche alle tensioni $\sigma_c dA_c$ che su di esse aree si esercitano.

Si ha infatti dalle figure 2 e 3

$$\frac{\sigma_c}{y} = \frac{\sigma_c''}{y''} \quad \text{ed} \quad \frac{\eta}{y} = \frac{dA_c}{H}$$

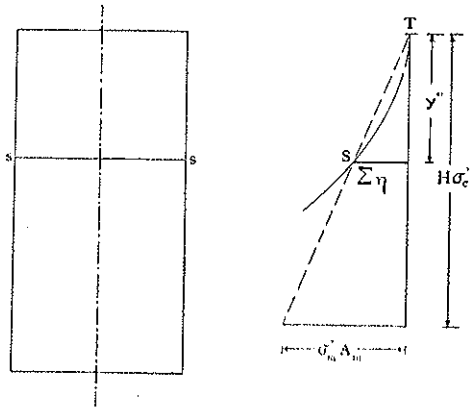


FIG. 4.

Da queste due relazioni si ricava

$$\eta = \frac{y dA_c}{H} = \frac{\sigma_c dA_c}{H \frac{\sigma_c''}{y''}}$$

e per l'intera sezione reagente

$$\Sigma \eta = \frac{\Sigma \sigma_c dA_c}{H \frac{\sigma_c''}{y''}} = \frac{\sigma'_m A_m}{H \frac{\sigma_c''}{y''}}$$

ovvero

$$\frac{\Sigma \eta}{y''} = \frac{\sigma'_m A_m}{H \sigma_c''}$$

La distanza y'' tra l'asse di separazione e la parallela ad esso, tangente al contorno della sezione, può quindi venir determinata molto semplicemente nel modo indicato in figura 4.

Basta infatti costruire, coi dati del problema che sono a nostra disposizione, un triangolo di base $\sigma'_m A_m$ e di altezza $H\sigma_c''$ tale che:

la base abbia la direzione dell'asse di separazione,

il vertice opposto coincida col punto T in cui il poligono funicolare (di cui si è parlato poc'anzi) incontra la tangente al bordo compresso della sezione,

uno dei lati uscenti da tale vertice coincida col primo lato di detto poligono.

Il terzo lato del triangolo intersecherà ulteriormente il poligono in un punto S dell'asse di separazione.

Determinata così la posizione di quest'asse, siccome è nota l'ordinata estrema σ_c'' del diagramma delle tensioni, questo potrà venire senz'altro tracciato.

Resteranno così immediatamente individuate (per differenza rispetto a σ'_m) le tensioni σ_m^0 che, al momento del getto, dovranno venire attribuite alle armature situate nella zona tesa della sezione.

Queste tensioni saranno sempre minori di quelle che si possono attribuire alle armature situate nella zona compressa; ciò che contrasta coll'uso ormai invalso di ripartire uniformemente sulla sezione metallica le tensioni e quindi anche le deformazioni impresse, uso a cui io stesso mi ero attenuto nei precedenti miei scritti sull'argomento.

La nuova ripartizione, non uniforme, delle deformazioni impresse, a cui ci ha condotti l'assunto di una integrale utilizzazione delle caratteristiche resistenti del materiale, implica, a pari margini di sicurezza, una ulteriore economia di acciaio.

Ferma restando la posizione della risultante delle tensioni al momento del getto, la maggiore tensione unitaria che spetta ora all'armatura della zona compressa (per rapporto a quella dell'armatura della zona tesa) ci condurrà infatti ad attribuire alla prima una sezione minore di quella che si sarebbe dovuto attribuirle nella ipotesi di una tensione preventiva uniformemente ripartita.

Ne segue che, pur volendo che la risultante delle tensioni al momento del getto cada nell'interno od al più sul contorno del nocciolo

centrale della sezione - come è necessario che avvenga perchè, in condizioni di normale esercizio, sia evitata ogni sollecitazione a trazione del calcestruzzo ⁽¹⁾ - il baricentro della sezione metallica potrà anche trovarsi fuori del nocciolo.

* * *

Nella tavola allegata questo nuovissimo procedimento di calcolo è stato applicato, a titolo di esempio, al caso della solita trave a sezione rettangolare di centimetri 15 di larghezza e 30 di altezza, che supporremo armata superiormente con quattro tondi da 4 mm. di diametro, ed inferiormente con quattro tondi da 9 mm. di diametro, simmetricamente disposti rispetto alla mediana verticale (asse delle y).

Si ha così una sezione metallica

$$A_m = 3 \text{ cm.}^2$$

pari al 0,67 % della sezione della trave ⁽²⁾.

Per

$$E_m = 2000 \text{ t./cm.}^2$$

ed

$$E_c = 250 \text{ t./cm.}^2$$

quindi

$$\frac{E_m}{E_c} = 8$$

si trova per l'area, ridotta al modulo del calcestruzzo, il valore

$$\alpha = 474 \text{ cm.}^2$$

⁽¹⁾ G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il proporzionamento dell'armatura)*. Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. IV, 1940.

⁽²⁾ Il baricentro della sezione metallica cade nel punto B dell'asse verticale di simmetria, che dista cm. 7 dal bordo inferiore della sezione.

La distanza dell'asse orizzontale baricentrico (asse delle x) dal bordo inferiore della sezione risulta eguale a cm. 14,6.

In conseguenza

$$J_x = 37118 \text{ cm.}^4$$

Supponiamo di impiegare nella costruzione delle armature un acciaio con limite elastico

$$\sigma'_m = 9 \text{ t./cm.}^2$$

e che il calcestruzzo presenti un carico di rottura alla compressione

$$\sigma_c'' = 0,32 \text{ t./cm.}^2$$

Assunta come distanza polare

$$H = 200 \text{ cm.}^2$$

si è trovato

$$y'' = 11,3 \text{ cm.}$$

Il diagramma delle deformazioni si presenta come in disegno con fondamentale di riferimento dd ; e può al solito venire interpretato come diagramma delle tensioni, così nel calcestruzzo come nelle armature, purchè si abbia l'avvertenza di servirsi all'uopo di nuove scale in relazione coi rispettivi valori del modulo.

Il momento flettente limite che queste tensioni equilibrano è

$$M_{\text{lim.}} = 531 \text{ t. cm.}$$

Le ordinate del diagramma relative alle armature, lette a partire dalla fondamentale aa ci daranno poi i valori delle deformazioni impresse (o rispettivamente delle tensioni che devono venire applicate al momento del getto).

Si trova così:

$$\text{per l'armatura superiore} \quad \bar{\epsilon}_z = - \frac{4,5}{1000}$$

$$\text{per l'armatura inferiore} \quad \bar{\epsilon}_z = - \frac{2,7}{1000}$$

cui corrispondono rispettivamente tensioni unitarie pari a 9000 ed a 5400 kg/cm² (1).

In base a questi valori si può senz'altro procedere al calcolo delle caratteristiche dello stato di coazione (2).

Si ha subito

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\epsilon}_z dA = - \frac{72}{1000}$$

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\epsilon}_z y dA = - \frac{403}{1000}$$

e per conseguenza

$$\bar{\lambda} = - \frac{0,152}{1000}$$

$$\bar{\mu} = - \frac{0,01087}{1000} \text{ cm.}^{-1}$$

In assenza di sollecitazioni esterne, lo stato di coazione viene pertanto caratterizzato dai seguenti valori delle tensioni unitarie:

<i>Tensioni unitarie σ_z in kg/cm²</i>	nel calcestruzzo	nelle armature
al bordo superiore della sezione	+ 3	+ 8960
al bordo inferiore della sezione	- 78	+ 4880

Questo stato di coazione si può al solito rappresentare graficamente riferendo il nostro disegno ad una nuova fondamentale bb la cui posizione, per rapporto ad aa , sia definita precisamente dalle costanti $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$.

(1) La risultante delle tensioni al momento del getto è di 18 t. ed è applicata nel punto D dell'asse verticale di simmetria, che dista cm. 9 dal bordo inferiore della sezione.

(2) G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il caso della presso flessione)*. Pontificia Academia Scientiarum « Acta », vol. IV, 1940.

Immaginiamo ora che, in condizioni di normale esercizio, si voglia poter contare su di un margine di sicurezza eguale a *tre*; e che perciò la trave possa venir sollecitata da un momento flettente massimo

$$\mathcal{M}_x = \frac{531}{3} = 177 \text{ t.cm.}$$

Questo darà origine ad una distribuzione di tensioni

$$\sigma_x = \frac{\mathcal{M}_x y}{\mathcal{J}_x}$$

le quali si sovrapporranno alle tensioni dovute allo stato di coazione. La distribuzione di tensioni risultante è la seguente:

<i>Tensioni unitarie σ_x in kg/cm²</i>	nel calcestruzzo	nelle armature
al bordo superiore della sezione	— 70	+ 8540
al bordo inferiore della sezione	— 8	+ 5280

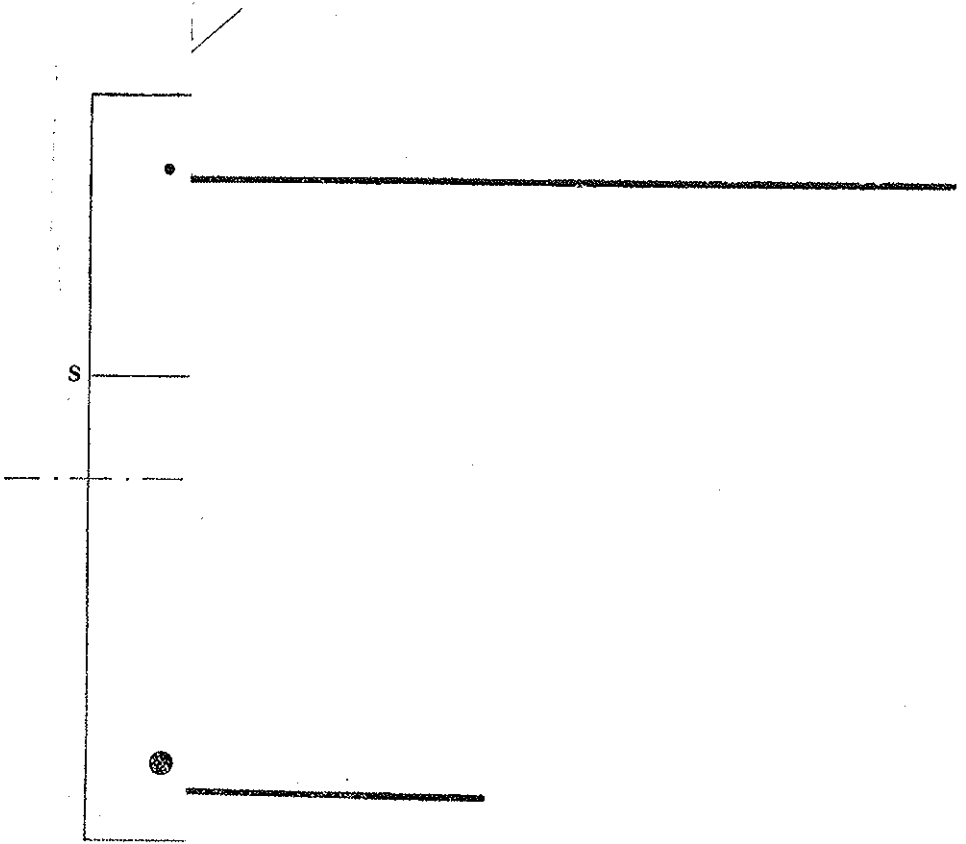
Graficamente il nuovo stato di equilibrio si può rappresentare immaginando il solito diagramma delle deformazioni riferito ad una nuova fondamentale *cc* ruotata rispetto a *bb* di

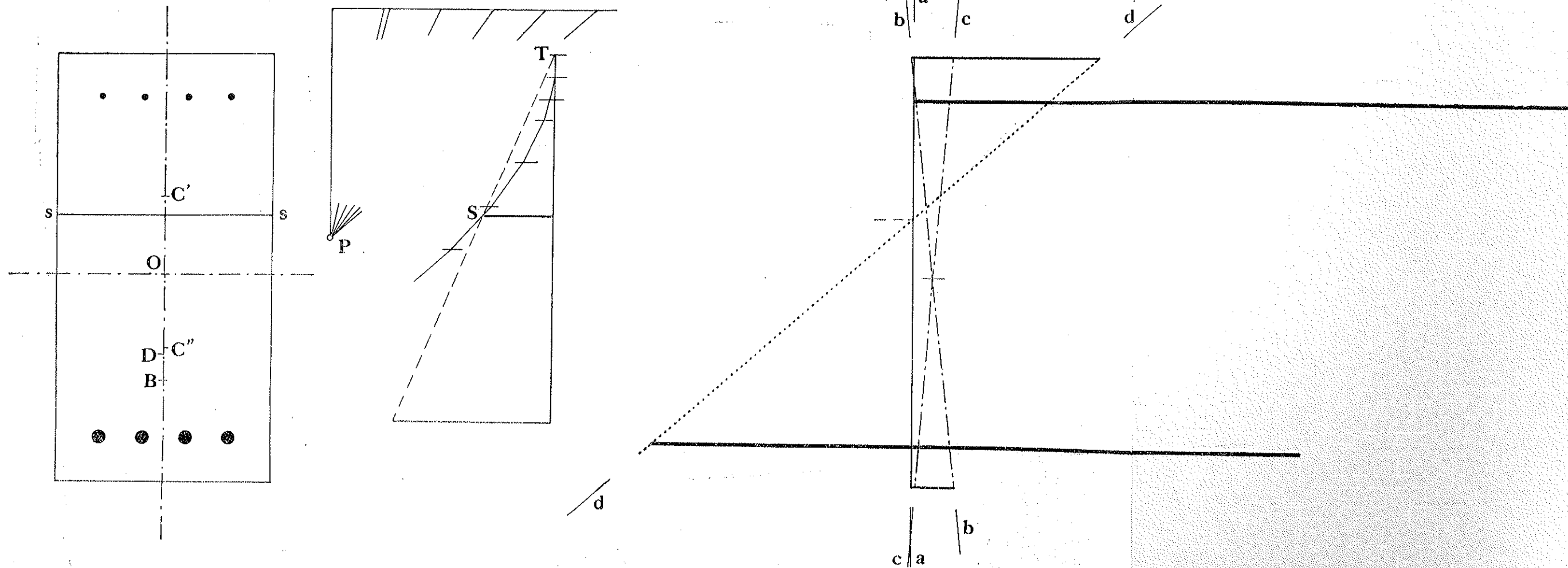
$$\frac{\mathcal{M}_x}{E_c \mathcal{J}_x} = + \frac{0,01907}{1000} \text{ cm.}^{-1}$$

e la cui posizione, per rapporto alla fondamentale primitiva *aa*, sarà perciò definita dai valori

$$\lambda = \bar{\lambda} = - \frac{0,152}{1000}$$

$$\mu = \frac{\mathcal{M}_x}{E_c \mathcal{J}_x} + \bar{\mu} = + \frac{0,00820}{1000} \text{ cm.}^{-1}$$





Resterebbe solo più a vedersi quel che può accadere al crescere ulteriore della sollecitazione; e, in particolare, per qual valore del momento flettente si determinerà la parzializzazione della sezione. Ma questi son problemi la cui risoluzione non presenta ormai più alcuna difficoltà (1).

Quel che questo semplicissimo esempio vuole ben chiaramente e definitivamente dimostrare si è che, nei problemi di questo genere, il margine di sicurezza, non può *neppure approssimativamente*, venire assicurato imponendo i soliti valori massimi alle sollecitazioni cui vengono sottoposti, in servizio, i singoli materiali; ma deve essere determinato in base ad una indagine diretta delle condizioni di carico per cui i rispettivi limiti di elasticità o di resistenza potrebbero essere effettivamente raggiunti.

(1) Cfr. G. COLONNETTI, *Teoria e calcolo delle travi con armature preventivamente tese (Il problema della sezione parzializzata)*. Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 1940; *Elasticità e resistenza di travi con armature preventivamente tese*. Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. IV, 1940.