

DEFORMAZIONI PLASTICHE E DEFORMAZIONI VISCOSE^(*)

(Con tre figure)

GUSTAVO COLONNETTI
Accademico Pontificio

SUMMARY. — Postquam significaverit quam variae esse possint permanentes deformationes, et quam opportunum sit eas distinguere quae originem plasticam ab iis quae viscosam originem habent, auctor ostendit has plerumque efficienter influere non posse in staticam illam compositionem quae plasticas deformationes sequi solet.

In occasione dei miei studi su la statica dei corpi elasto-plastici, mi è accaduto più di una volta di sentirmi obiettare che non tutti i materiali comunemente impiegati nelle costruzioni presentano caratteristiche di deformabilità del genere di quelle da me postulate.

Sta di fatto che certe deformazioni permanenti di alcuni corpi (che non posseggono limiti di snervamento ben definiti) piuttosto che alla plasticità del materiale sembrano attribuibili a quella che più propriamente si chiama la sua viscosità.

Caratteristico, a questo proposito, è il caso dei calcestruzzi, nei confronti dei quali l'attendibilità di calcoli esclusivamente basati su la mia teoria dell'equilibrio elasto-plastico potrebbe pertanto essere messa in dubbio⁽¹⁾.

^(*) Nota presentata il 5 luglio 1942.

⁽¹⁾ A. DANUSSO, *Le autotensioni, spunti teorici ed applicazioni pratiche*, «Rendiconti del Seminario matematico e fisico di Milano», R. Politecnico di Milano, 1935; G. OBERI, *Sul comportamento statico di archi incastrati notevolmente ribassati*, R. Politecnico di Milano 1937 (cfr. in modo particolare la nota a piè di pagina 28).

Ora io non ho mai voluto introdurre nelle mie considerazioni la variabile « tempo » per non dar luogo a complicazioni che mi sembrano e mi sembrano tuttora non strettamente indispensabili.

Tuttavia, se proprio ci si vuol porre da questo punto di vista, qualche precisazione è possibile; ed io mi propongo anzi di mostrar qui come se ne possano immediatamente trarre alcune conseguenze di un certo rilievo.

* * *

Noi chiamiamo *deformazione permanente* — in contrapposto con la *deformazione elastica* — quella parte della deformazione prodotta in un corpo dall'azione delle forze esterne, che permane anche quando le forze stesse hanno cessato di agire.

Ora l'esperienza dimostra che la grandezza di queste deformazioni permanenti è in relazione con la intensità delle forze e con la durata della loro azione; più precisamente dimostra che si possono ottenere deformazioni permanenti apprezzabili sia come effetto immediato dell'azione di forze sufficientemente grandi, sia come effetto dell'azione prolungata di forze anche molto piccole.

Giova pertanto distinguere i due casi e studiarli separatamente, attribuendoli rispettivamente alla *plasticità* ed alla *viscosità*, come a due proprietà distinte (se pur coesistenti) della materia.

Perciò noi converremo di chiamare plastiche le deformazioni permanenti che si presentano (insieme con le deformazioni elastiche) come effetto immediato dell'azione delle forze esterne, ammettendo che esse siano indipendenti dalla durata di azione di queste forze.

Queste deformazioni plastiche divengono apprezzabili solo quando l'intensità della sollecitazione oltrepassa un certo limite, variabile da caso a caso, che si chiama limite di elasticità.

Al di sotto di esso il materiale si comporta come perfettamente elastico, nel senso che le deformazioni che si verificano all'atto dell'applicazione delle forze esterne scompaiono completamente se queste forze esterne cessano (immediatamente appresso) di agire.

Se però l'azione delle forze esterne si prolunga nel tempo, può darsi che deformazioni permanenti facciano la loro comparsa, e ciò anche senza che il limite di elasticità sia stato superato; può darsi

ciò che, sotto l'azione di forze anche molto piccole, si manifestino nel materiale deformazioni crescenti, non suscettibili di scomparire (o almeno di scomparire immediatamente) quando le forze cessano di agire.

Ad esse noi daremo il nome di deformazioni viscosse.

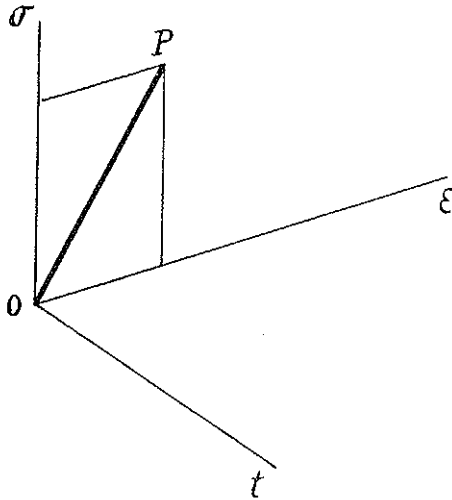


FIG. 1.

A differenza delle deformazioni plastiche, esse non possono più considerarsi come definite in funzione delle sole grandezze delle forze che le hanno prodotte; esse dipendono infatti anche dalla durata di azione di queste forze. Occorre perciò, nel loro studio, introdurre una variabile nuova: il tempo.

* * *

Tentiamo una rappresentazione geometrica del fenomeno.

A tal fine, assunti, a partire da un'origine O , tre assi coordinati

$\sigma \quad \epsilon \quad t$

su cui intenderemo rispettivamente rappresentate le tensioni, le deformazioni ed i tempi, incominciamo col tracciare sul piano $\sigma\epsilon$ la linea

rappresentativa del fenomeno per $t = 0$, vale a dire all'atto dell'applicazione del carico.

Se l'intensità di questo è tale che i limiti di elasticità del materiale non vengono sorpassati, noi siamo autorizzati a ritenere valida

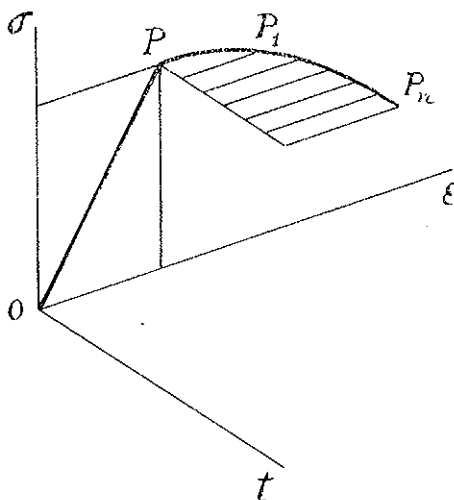


FIG. 2.

la legge di Hooke, cioè ad ammettere che tra le tensioni e le deformazioni interceda una relazione di semplice proporzionalità.

L'operazione sarà quindi graficamente rappresentabile con una retta OP (fig. 1).

Supponiamo ora che il carico si mantenga costante.

L'esperienza dimostra che la deformazione cresce secondo una legge rappresentabile (nel piano di equazione $\sigma = cost.$) con una curva

$$PP_1 \dots P_n$$

del genere di quella prospetticamente disegnata in fig. 2⁽¹⁾.

Al variare di σ questa curva descrive una superficie (fig. 3) la cui forma, naturalmente variabile da caso a caso, può in un certo senso assumersi a definizione della viscosità del materiale.

⁽¹⁾ W. H. GLANVILLE, *Studies in Reinforced Concrete. Building Research*, «Technical Paper», n. 12, 1930.

E qui, se vogliamo poter procedere oltre, bisogna evidentemente che noi facciamo qualche ipotesi.

Ora, fin che ci si limita (come noi vogliamo fare) alla considerazione di deformazioni molto piccole - per esempio dell'ordine di gran-

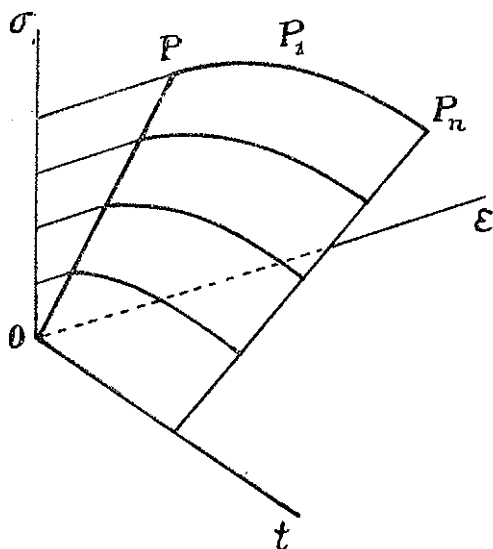


FIG. 3.

dezza delle deformazioni elastiche - sembra ragionevole postulare che, in ogni istante (vale a dire per ogni dato valore di t), le deformazioni si mantengano proporzionali alle forze che le hanno prodotte.

Ciò equivale ad assumere come superficie rappresentativa del fenomeno una rigata a generatrici contenute nei piani $t = \text{cost.}$ avente per direttrici la curva generica $PP_1 \dots P_n$ e l'asse dei tempi con cui la curva stessa viene ovviamente a coincidere per $\sigma = 0$ ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Come caso particolare va segnalata la possibilità che, per $\sigma = \text{cost.}$, le deformazioni crescano proporzionalmente al tempo (che cioè la curva $PP_1 \dots P_n$ si riduca ad una retta). Ciò si verifica se il materiale non è suscettibile di in-
crudimento.

Noi siamo allora condotti a postulare la proporzionalità tra le σ e le velocità di deformazione $\frac{\partial \epsilon}{\partial t}$. La superficie rappresentativa diventa un paraboloido iperbolico.

Per definire il comportamento del materiale basta dare il valore del coeffi-

Se ne può allora generalmente dedurre che, se il corpo è omogeneo, e quindi il coefficiente di proporzionalità è (per ogni valore di t) lo stesso in tutti i punti, le deformazioni viscosse costituiscono, come le deformazioni elastiche, un sistema congruente e compatibile coi vincoli⁽¹⁾; un sistema cioè che può sussistere anche da solo, e che per conseguenza continuerà a sussistere da solo, quando al cessare dell'azione delle forze esterne la deformazione elastica si sarà annullata.

* * *

Ora il lettore sa che nel caso delle deformazioni plastiche le cose vanno ben diversamente.

Il passaggio del materiale dal regime elastico al regime plastico si verifica infatti, per ipotesi, solo quando vien superato il limite di elasticità; e questo superamento può avvenire, e di solito avviene, in certi punti del corpo e non in certi altri, per modo che le deformazioni plastiche vi costituiscono un sistema generalmente non congruente (o quanto meno non compatibile coi vincoli) che non può realizzarsi da solo, ma esige, per realizzarsi, la concomitanza di un sistema di de-

ciente di proporzionalità, che nella fattispecie prenderà il nome *coefficiente di viscosità*.

A questo caso particolare si riferiscono tutti i tentativi che sono stati fatti per dare veste matematica ad una teoria dei solidi viscosi (Ofr. W. PRAGER, *Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique*, «Mémorial des sciences mathématiques», Paris, 1937, pag. 11 e segg.).

In realtà le cose non sono, generalmente parlando, così semplici.

Al crescere della deformazione i materiali naturali presentano quasi sempre fenomeni di incrudimento più o meno marcati; il coefficiente di viscosità cresce; la velocità di deformazione sotto carico costante diminuisce quindi col trascorrer del tempo; se essa tende a zero, il solido va verso uno stato limite di equilibrio.

Per definire il comportamento del materiale non basta più dare il valore di quel certo coefficiente; bisogna effettivamente definire la forma della superficie che noi abbiamo introdotta come rappresentativa della viscosità.

(¹) Potremmo addirittura dire che le deformazioni viscosse sono, nei corpi omogenei, ovunque proporzionali alle deformazioni elastiche (e quindi deducibili da queste con un semplice cambiamento di scala) se non ci fosse di mezzo il coefficiente di contrazione laterale m che, nel caso delle deformazioni viscosse, deve verosimilmente assumere il valore limite $\frac{1}{2}$ corrispondente alla invarianza del volume.

formazioni elastiche complementari, vale a dire tali che sia congruente e compatibile coi vincoli il sistema delle deformazioni risultanti (¹).

Accade così che le deformazioni plastiche di un dato elemento determinino uno stato di deformazione elastica - ed un corrispondente stato di tensione - negli elementi attigui che non hanno ancor raggiunto il loro limite di elasticità; stato che noi designiamo col nome di stato di coazione per distinguerlo dagli ordinari stati di deformazione e di tensione dovuti all'azione delle sollecitazioni esterne.

Il lettore sa anche che questo stato di coazione, sovrapponendosi al primitivo stato di deformazione elastica, tende a modificarlo nel senso di una limitazione delle tensioni in quei punti del corpo in cui il limite di elasticità è stato raggiunto; limitazione compensata da un accrescimento delle tensioni là dove la resistenza del materiale era inizialmente meno bene utilizzata.

In questo senso si può dire che, grazie ai fenomeni plastici, le tensioni interne emigrano, man mano che se ne presenta la necessità, dagli elementi che hanno toccato il limite delle loro possibilità di prestazione a quelli che posseggono ancora un margine più o meno largo di resistenza.

Così, grazie alla plasticità, la natura realizza - nei limiti che i dati del problema di volta in volta le impongono - la migliore possibile utilizzazione delle caratteristiche di resistenza del materiale.

* * *

Nel caso delle deformazioni viscosse, qualcosa di simile si verificherà soltanto nei corpi non omogenei.

Consideriamo per esempio il caso tipico delle strutture in cemento armato, in cui al calcestruzzo (notoriamente suscettibile di deformazioni viscosse) viene accoppiato l'acciaio che, nelle ordinarie condizioni di sollecitazione e di temperatura, non presenta fenomeni di viscosità apprezzabili.

(¹) G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, Torino (ed. Einaudi) 1941 pag. 365 e seg.

È evidente che alle deformazioni viscosse del calcestruzzo dovranno necessariamente corrispondere deformazioni elastiche (e conseguenti incrementi delle tensioni) nelle armature.

Si avrà cioè bensì un trasferimento delle tensioni dagli elementi più deformabili a quelli meno deformabili.

Ma si tratta di un fenomeno che - sia pur nell'ambito delle deformazioni permanenti, e con tutte quelle conseguenze che le deformazioni permanenti notoriamente comportano - fa semplicemente riscontro a quello che si verifica, in regime di perfetta elasticità, per il fatto che i due materiali accoppiati sono dotati di moduli elastici differenti.

Quell'altro trasferimento di tensioni che, in regime elasto-plastico, indipendentemente da ogni difetto di omogeneità dei materiali, tende a porre un limite alle massime sollecitazioni interessando alla resistenza regioni del corpo inizialmente meno impegnate, sembra non avere riscontro alcuno nel caso delle deformazioni viscosse.