

SUL PROBLEMA DELLA FLESSIONE COMPOSTA IN REGIME ELASTO PLASTICO (*)

(Con quattro figure)

GUSTAVO COLONNETTI

Accademico Pontificio

SUMMARIVM. — Compositam flexionem in elasto-plastico regimine perpendens (quod antea fecerat nemo), auctor ostendit quibus limitibus coarctetur huius problematis solutio iuxta generalem rationem doctrinae DE SAINT-VENANT, et experimentorum seriem proponit, quibus elasto-plasticorum deformationum studium summo opere proficere possit.

Nei miei precedenti saggi sulla *Statica dei corpi elasto plastici* ⁽¹⁾ ho mostrato come il problema dell'equilibrio delle travi potesse venire affrontato per via indiretta valendosi delle espressioni che, secondo DE SAINT-VENANT, spettano alle tre componenti della deformazione elastica

$$\varepsilon_x \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}$$

per attribuirle alle componenti della deformazione totale

$$\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x \quad \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} \quad \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx}$$

La sollecitazione, che dovrebbe essere uno dei dati del problema, resta così determinata implicitamente, e può venir calcolata in conseguenza.

(*) Nota presentata nella Tornata del 6 giugno 1942.

(1) Cfr. G. COLONNETTI, *La statica dei corpi elasto plastici*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Commentationes », vol. II, n. 12 (1938); ovvero: G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, ed. Einaudi, Torino, 1941, pag. 379 e segg.

Basta ricorrere alle note espressioni delle tre componenti speciali di tensione non identicamente nulle, in funzione delle componenti della deformazione elastica

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

e dedurne i valori delle caratteristiche della sollecitazione relativa alla sezione generica

$$\mathcal{N} = \int_A \sigma_x dA$$

$$\mathcal{M} = \int_A \sigma_x y dA$$

$$\mathcal{T} = \int_A \tau_{yz} dA$$

.....

Si constata allora che l'intervento delle deformazioni plastiche non influisce sulle deformazioni totali *qualitativamente*, ma solo *quantitativamente*, in quanto sostituisce

allo sforzo normale effettivamente applicato \mathcal{N}

uno sforzo normale fittizio $\mathcal{N} + E \int_A \bar{\varepsilon}_x dA$

al momento flettente effettivamente applicato \mathcal{M}

un momento flettente fittizio $\mathcal{M} + E \int_A \bar{\varepsilon}_x y dA$

allo sforzo tagliante effettivamente applicato \mathcal{T}

uno sforzo tagliante fittizio $\mathcal{T} + G \int_A \bar{\gamma}_{yz} dA$

.....

rendendo ragione dei due fatti nuovi che caratterizzano il modo di deformarsi di una trave in regime elasto plastico, e cioè:

1°) che le deformazioni non sono più delle funzioni lineari delle forze esterne;

2°) che una quota parte di dette deformazioni ha carattere permanente, cioè continua a sussistere anche quando le forze esterne hanno cessato di agire.

* * *

Nel tentare l'applicazione di questi risultati alla teoria delle travi inflesse, io mi sono, di proposito, sempre limitato a considerare il solo caso particolare in cui l'intervento delle deformazioni plastiche è determinato dalla tensione normale σ_z ; più precisamente: dal fatto che questa tensione normale raggiunge il limite di elasticità del materiale.

Una tale impostazione del problema è pienamente giustificata fin che si ha a che fare soltanto con sollecitazioni a semplice flessione od a pressoflessione, nelle quali, delle diverse componenti speciali di tensione, è presente la sola σ_z .

Ma nel caso generale della flessione composta - in cui coesistono sollecitazioni alla flessione (od alla pressoflessione) ed al taglio, e per conseguenza tensioni normali e tensioni tangenziali - è evidente che il raggiungimento dei limiti di elasticità ed il conseguente intervento delle deformazioni plastiche non potranno più farsi dipendere soltanto da questa o da quella particolare componente speciale di tensione; ma dovranno essere messi in relazione coll'intero stato di tensione che quelle componenti definiscono; e in particolare coi valori estremi (massimi e minimi) delle tensioni che quello stato, in ciascun punto materiale, comporta.

Se poi si ammette che le deformazioni plastiche consistano in scorrimenti lungo piani obliquamente disposti rispetto alle direzioni principali, vien fatto di pensare che il loro intervento possa dipendere dai valori delle tensioni (normali e tangenziali) che si verificano in corrispondenza di questi piani.

È noto che su questo argomento sono state enunciate ipotesi diverse, sulle quali l'esperienza non ha ancor detto la sua ultima parola.

Nei casi più semplici sembra ragionevole adottare, sulla sezione retta generica, una distribuzione della componente $\bar{\epsilon}_x$ della deformazione plastica del genere di quella rappresentata con area punteggiata nella figura 1.

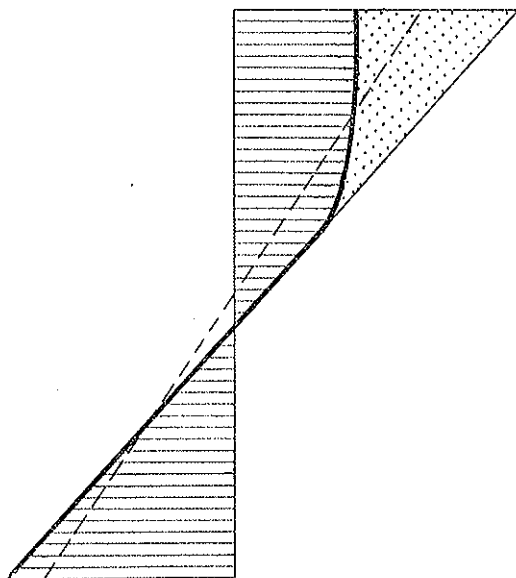


FIG. 1.

La quale si riferisce ad un caso molto particolare perchè è stata tracciata per una sezione (rettangolare) sollecitata soltanto a flessione e taglio, nella ipotesi che il materiale presenti allungamenti plastici soltanto là dove è sollecitato da tensioni positive.

Un simile caso particolare, pur nella sua semplicità, si presta tuttavia assai bene ad illustrare le nostre considerazioni con tutta la desiderabile generalità, in quanto implica una distribuzione dissimmetrica di deformazioni plastiche, e quindi una sollecitazione fittizia che comprende, oltre al momento flettente ed allo sforzo tagliante, anche uno sforzo normale.

Così stando le cose, per differenza rispetto al diagramma (sempre lineare) delle deformazioni totali $\epsilon_x + \bar{\epsilon}_x$, si potrà, dal diagramma (pun-

teggiato) della componente $\bar{\varepsilon}_z$, dedurre il diagramma (tratteggiato) dell'analogia componente ε_z .

E questo, con un semplice cambiamento di scala, si potrà poi interpretare come diagramma della tensione normale σ_z .

* * *

Consideriamo ora un tronco elementare di trave compreso fra due sezioni rette vicinissime SS ed $S'S'$ di quote z e $z + dz$.

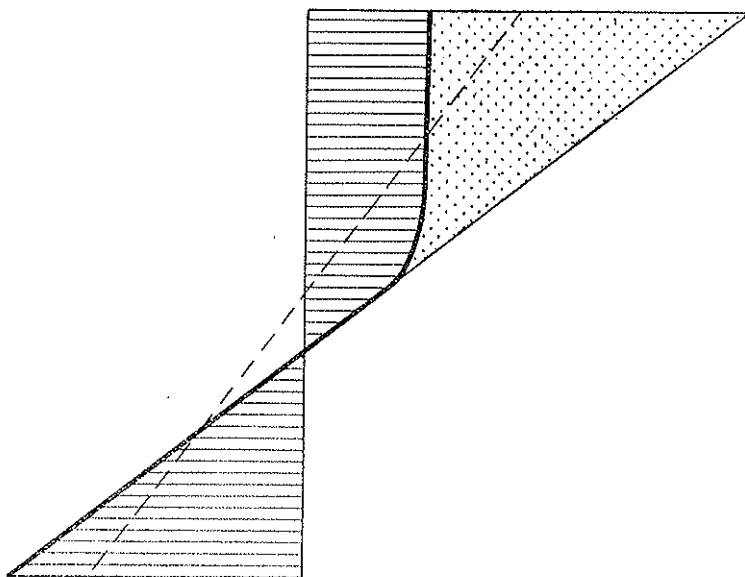


FIG. 2.

Supporremo naturalmente che sul tronco di trave compreso fra quelle due sezioni non sia applicata alcuna forza esterna.

Immaginiamo tracciata, sulla sezione SS , una corda generica parallela all'asse neutro, e per essa condotto il piano parallelo all'asse z fino ad incontrare la sezione $S'S'$.

Per l'equilibrio della porzione di solido limitata da questo piano e dalle due sezioni rette considerate, deve (fra l'altro) essere verificata

l'equazione che si ottiene eguagliando a zero la somma delle proiezioni di tutte le forze sull'asse z

$$\int (\sigma_z + d\sigma_z) dA - \int \sigma_z dA = \int \tau_{yz} dA.$$

dove i due integrali al primo membro s'intendono naturalmente estesi a quella porzione della sezione retta che la corda considerata delimita,

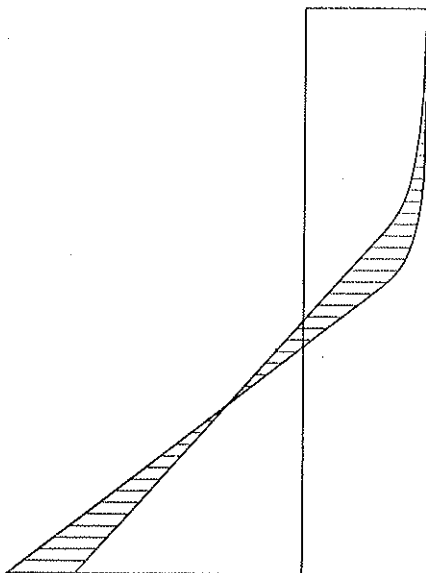


FIG. 3.

mentre l'integrale al secondo membro va invece esteso all'area della sezione longitudinale: area rettangolare che ha per lati la lunghezza b della corda e la distanza dz delle due sezioni.

Se pertanto si conviene di indicare con

$$\tau_{yz} \text{ media}$$

il valor medio della tensione tangenziale τ_{yz} su quest'area (o, al limite, sulla corda a cui l'area tende per dz tendente a zero) si ha

$$\tau_{yz} \text{ media} = \frac{1}{b} \int \frac{d\sigma_z}{dz} dA.$$

Questa formola si presta bene al calcolo grafico.

A tal fine si assumeranno le due sezioni SS ed $S'S'$ ad una distanza finita, ma abbastanza piccola, in relazione al grado di approssimazione che, col calcolo, si vuol raggiungere.

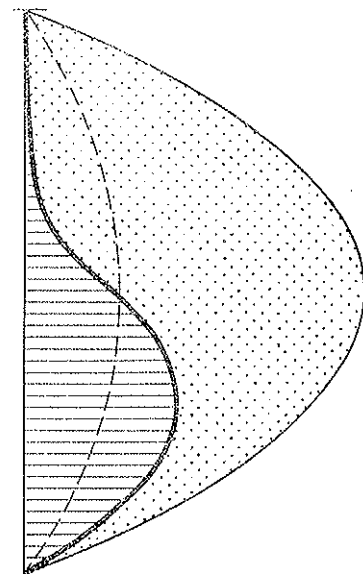


FIG. 4.

Per differenza tra i diagrammi delle σ_z relativi a quelle due sezioni (figg. 1 e 2) si otterrà (fig. 3) un diagramma approssimato della

$$\frac{d\sigma_z}{dz}$$

dal quale, con una integrazione e successiva riduzione di ordinate nel rapporto $1/b$, noi dedurremo il diagramma delle

$$\tau_{yz} \text{ medie}$$

Questo diagramma si trova rappresentato nell'area tratteggiata della figura 4, in una scala che non è necessariamente quella usata nelle figure 1 e 2 (che anzi è stata nel caso concreto volutamente alterata per maggiore chiarezza di rappresentazione).

Ed è interpretabile, con le solite cautele, come diagramma dei valori medii della componente γ_{yz} della deformazione elastica.

* * *

A questo punto giova ricordare che, per la supposta assenza di forze esterne sul tronco di trave considerato,

$$\mathfrak{S} = \frac{d\mathfrak{M}}{dz}$$

e che inoltre ⁽¹⁾

$$G \int_{\Lambda} \bar{\gamma}_{yz} dA = \frac{d}{dz} \left[E \int_{\Lambda} \bar{\varepsilon}_x y dA \right]$$

Ne segue che anche le componenti della sollecitazione fittizia saranno legate da una relazione analoga:

$$\mathfrak{S} + G \int_{\Lambda} \bar{\gamma}_{yz} dA = \frac{d}{dz} \left[\mathfrak{M} + E \int_{\Lambda} \bar{\varepsilon}_x y dA \right]$$

Dati dunque il momento flettente \mathfrak{M} e le deformazioni plastiche $\bar{\varepsilon}_x$ in funzione di z , non solo lo sforzo tagliante \mathfrak{S} , ma anche lo sforzo tagliante fittizio

$$\mathfrak{S} + G \int_{\Lambda} \bar{\gamma}_{yz} dA$$

son da considerarsi come determinati.

Si potrà perciò tracciare, coi metodi noti, il diagramma degli scorrimenti totali $\gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz}$ o, per esser più precisi, quello dei loro valori medii su ciascuna corda.

⁽¹⁾ Cfr. G. COLONNETTI, *La statica dei corpi elasto plastici*, Pontificia Accademia Scientiarum, « Commentationes », vol. II, n. 12 (1938), pag. 464; ovvero: G. COLONNETTI, *Scienza delle Costruzioni*, ed. Einaudi. Torino 1941, pag. 388.

Ne segue subito che anche i valori medii della componente $\bar{\gamma}_{yz}$ della deformazione plastica sono da considerarsi come determinati in conseguenza.

Ora il diagramma di queste

$\bar{\gamma}_{yz}$ medie

che è stato contrassegnato, al solito, con area punteggiata nella figura 4, non si estende soltanto a quella, od a quelle parti della sezione (prosime ai bordi) dove, per l'avvenuto superamento dei limiti di elasticità del materiale, eravamo stati condotti ad attribuire certi ben determinati valori alle $\bar{\epsilon}_x$; ma si estende anche a quelle altre parti (centrali) della sezione in cui le $\bar{\epsilon}_x$ erano identicamente nulle, ed in cui - se l'intensità dello sforzo tagliante non supera certi limiti - non v'era, a prima vista, ragione alcuna di credere che il primitivo regime elastico dovesse venire turbato.

* * *

Questa singolare conclusione merita di essere segnalata in quanto sembra offrire una spiegazione nuova di certi fatti ripetutamente osservati da taluni sperimentatori.

THUM e WUNDERLICH⁽¹⁾ sollecitando a flessione al di là dei limiti elastici certe barre di acciaio, hanno infatti constatato che la comparsa delle linee di Lüders non si verificava per quei valori del momento flettente per cui il limite di elasticità del materiale poteva ritenersi raggiunto ai bordi della sezione, bensì per valori assai superiori e tali da giustificare l'immediato estendersi del regime plastico alla intiera sezione.

Un tal fatto viene spiegato dal PRAGER⁽²⁾ ammettendo che, quando un elemento materiale entra in regime plastico, esso tenda a subire d'un tratto deformazioni discontinue a cui gli elementi vicini, che si trovano ancora in regime elastico, non si possono adattare. Potrebbe

⁽¹⁾ A. THUM e F. WUNDERLICH, *Die Fließgrenze bei behinderter Formänderung, Forschung a. d. Gebiete d. Ingenieurwesens*, t. 3 (1932), pag. 261.

⁽²⁾ W. PRAGER, *Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique, Mémorial des Sciences Mathématiques*, vol. LXXXVII (1937), pag. 51 e segg.

allora accadere che le fibre situate in prossimità dei bordi della sezione fossero in qualche modo impedito di deformarsi plasticamente, e costrette ad oltrepassare il limite di elasticità comportandosi come se fossero ancora in regime elastico; e ciò fino a quando il momento flettente abbia raggiunto un valore tale da giustificare il passaggio allo stato plastico anche per le fibre interne. Allora le deformazioni plastiche si manifesterebbero d'un tratto sull'intera sezione.

Ora, io ho già avuto occasione di accennare ⁽¹⁾ ai gravi dubbi che nutro sulla attendibilità di esperienze in cui il manifestarsi dei fenomeni plastici verrebbe segnalato esclusivamente dalla comparsa delle linee di Lüders.

Ho detto allora come un tal modo di procedere mi sembri ben poco idoneo ad avvertire *il primo inizio* delle deformazioni plastiche.

L'esperienza mi ha infatti costantemente dimostrato che, assai prima che le linee di Lüders facciano la loro comparsa, si determinano frecce permanenti apprezzabili, indizio sicuro che la fase elastica del fenomeno è terminata e che qualche deformazione plastica si è in qualche parte verificata.

Tuttavia un eventuale ritardo nel manifestarsi dei fenomeni plastici - se sperimentalmente confermato - potrebbe forse spiegarsi anche senza far ricorso all'ipotesi della discontinuità delle deformazioni introdotta dal PRAGER.

Nel quadro della mia teoria dell'equilibrio elasto plastico, tale ritardo potrebbe infatti trovare la sua giustificazione nel fatto che, quando il momento flettente è accompagnato da uno sforzo tagliante (sia pur piccolo), i fenomeni plastici non possono più restare localizzati in prossimità dei bordi, ma debbono necessariamente estendersi a tutta la sezione.

Varrebbe intanto la pena di istituire nuove esperienze nelle quali - previo un più sicuro accertamento della esistenza o meno dell'accennato ritardo - venisse assodato se il tempo ed il modo con cui i fe-

(1) G. COLONNETTI, *Su la resistenza alla flessione in regime elasto plastico*, Pontificia Academia Scientiarum, « Commentationes », vol. III, n. 1 (1939); cfr. anche: E. GIACCHERO e F. LEBVI, *Conferme sperimentali della teoria di Colonnetti su l'equilibrio elasto plastico*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », vol. III n. 7 (1939).

nomeni plastici si rendono manifesti sia in qualche maniera connesso colla presenza di sforzi taglienti.

* * *

Che se le esperienze dovessero poi avere esito decisamente negativo - se cioè, anche in presenza di sforzi taglienti, le deformazioni plastiche si manifestassero dapprima soltanto in corrispondenza dei bordi, per estendersi in seguito e gradualmente alla parte centrale della sezione - ne dovremmo semplicemente dedurre che il quadro delle soluzioni a cui ci siamo riferiti è insufficiente a contenere tutta la gamma dei fenomeni dei quali ci stiamo occupando.

A questo era d'altronde ben prevedibile che si sarebbe, una volta o l'altra, arrivati.

Le soluzioni di cui si tratta sono state infatti trasferite dalla teoria classica dell'elasticità alla teoria dell'equilibrio elasto plastico, ammettendo non soltanto che siano verificate le ipotesi di DE SAINT-VENANT in ordine alla distribuzione delle forze applicate, ma anche che siano verificate restrizioni analoghe in ordine alla distribuzione delle deformazioni impresse.

Ora non è affatto detto che ciò debba necessariamente avvenire quando queste deformazioni impresse sono di origine plastica.

E se le supposte restrizioni non sono verificate, debbono originarsi stati di equilibrio non compresi nel nostro quadro, e cioè stati in cui faranno la loro comparsa quelle componenti speciali di tensione

$$\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}$$

che, seguendo DE SAINT-VENANT, noi avevamo supposte identicamente nulle.

Il problema dovrà allora venire affrontato in termini assai più generali, cioè per deformazioni impresse affatto qualunque; e la sua soluzione potrà presentare gravi difficoltà.

Ma questo è un altro discorso, che esorbita dai limiti dell'argomento che qui abbiamo impresso a trattare, e sul quale, occorrendo, ritorneremo in altra occasione.