

LA STATICA DELLE CUPOLE CERCHIATE (*)

(Con una figura e due tavole fuori testo)

GUSTAVO COLONNETTI

Accademico Pontificio

SUMMARY. — Auctor demonstrat e generali doctrina de elasticis coactionibus novam rationem dimetiendi tholos circulis munitos deduci posse.

Con questa Nota io intendo compiere un nuovo passo su la via, che perseguo da tempo, verso l'uso sistematico degli stati di coazione nei sistemi iperstatici.

* * *

Da un punto di vista assolutamente generale il problema va posto nei termini seguenti:

dato un sistema iperstatico di grado k cioè tale che i singoli suoi stati di tensione in equilibrio con forze esterne date si possano riferire biunivocamente e linearmente ai singoli sistemi di valori di k parametri indipendenti (incognite iperstatiche);

e supposto che ad esso venga impressa una coazione di ordine $h \leq k$ cioè tale che la si possa sempre caratterizzare biunivocamente e linearmente per mezzo di h parametri indipendenti (caratteristiche della coazione);

è noto che si possono stabilire k equazioni lineari e non omogenee tra le k incognite iperstatiche e le h caratteristiche della coazione (1).

(*) Nota presentata nella Tornata del 20 febbraio 1942.

(1) Cfr. G. COLONNETTI, *Scienza delle costruzioni*. Torino, Einaudi, 1941, pag. 371 e segg.

Se ne deduce che, assunti ad arbitrio i valori di h delle incognite iperstatiche - o di h funzioni lineari delle stesse - sono generalmente da considerarsi come determinate in conseguenza tanto le altre $k-h$ incognite iperstatiche come le h caratteristiche della coazione.

Ciò è quanto dire che, con un'opportuna scelta dello stato di coazione, si potrà sempre far in modo che h parametri dello stato di tensione assumano valori arbitrariamente prescelti.

* * *

Io ho avuto occasione di applicare per la prima volta questo procedimento nel calcolo della cupola che sto progettando per la costruzione Cattedrale di La Spezia.

Si tratta di una grande cupola (di ben 44 metri di diametro esterno) costituita da due sottili solette ellissoidiche collegate da sedici costoloni disposti secondo piani meridiani equidistanti.

Il calcolo di stabilità si può notoriamente condurre in due tempi: **nel primo dei quali** uno spicchio, isolato dal resto, viene trattato come un semiarco incastrato alla base e vincolato in sommità a subire soltanto spostamenti verticali.

Nel caso concreto lo spicchio, corrispondente ad un sedicesimo di giro, risulterà costituito da uno dei costoloni e dalle adiacenti porzioni delle due solette (fig. 1).

La curva delle pressioni (pel peso proprio dello spicchio e relativo sovraccarico consistente nella corrispondente frazione del peso del cupolino) potrà facilmente venir tracciata quando si siano costruite le linee di influenza delle incognite iperstatiche; essa presenta l'andamento indicato nella tavola I.

Nella stessa tavola è stata anche costruita (per punti) la deformata dell'asse geometrico dello spicchio, colle sue due proiezioni orizzontale e verticale.

Ora l'andamento della curva delle pressioni lascia prevedere possibili tensioni positive nei meridiani; mentre la proiezione orizzontale della deformata (quasi integralmente rivolta verso l'esterno) ci avverte che analoghe tensioni si verificheranno sicuramente nella quasi totalità dei paralleli.

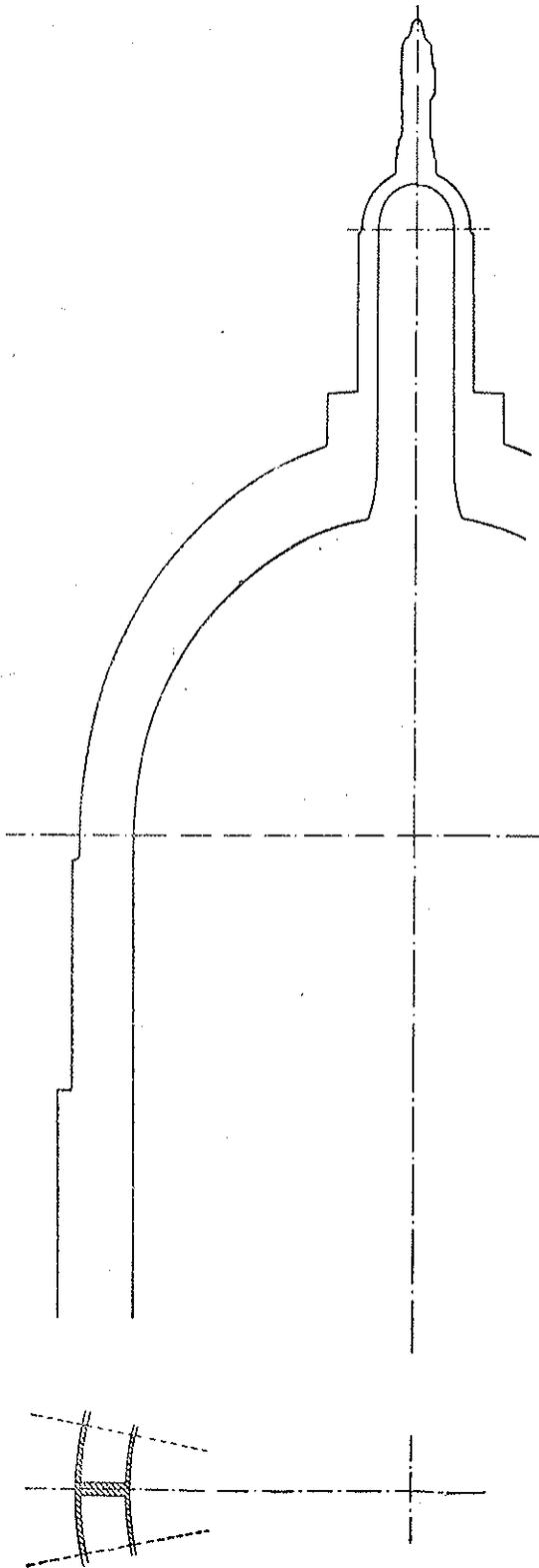


FIG. 1.

Questo risultato non ha nulla di singolare. È infatti proprio a queste tensioni che notoriamente si debbono le lesioni che, presto o tardi, affliggono quasi tutte le costruzioni di questo genere.

Ma queste tensioni - e le lesioni che ne possono derivare - debbono potersi evitare introducendo un opportuno stato di coazione.

A tal fine giova elevare il grado di iperstaticità della struttura mediante l'aggiunta di un certo numero di anelli di cerchiatura - o più precisamente: di sistemi di tiranti disposti secondo i lati di poligoni regolari, situati in piani orizzontali, coi vertici ancorati alle sedici costole.

Il necessario stato di coazione verrà poi creato mettendo questi anelli in tensione colla manovra di organi di registrazione opportunamente situati in corrispondenza dei predetti ancoraggi.

Il calcolo delle tensioni - o, ciò che fa lo stesso, delle forze orizzontali che i vari anelli debbono esercitare su ciascuno specchio, supposto sempre isolato dal resto della struttura - non presenta alcuna difficoltà quando si conoscano quelle certe linee d'influenza delle incognite iperstatiche originarie dello specchio, di cui abbiamo già parlato a proposito della determinazione della curva delle pressioni.

Coll'aiuto di queste linee i valori delle incognite iperstatiche originarie possono infatti venire immediatamente determinati per qualsiasi condizione di carico, non esclusa quella costituita dalle predette forze orizzontali che, in questo calcolo, van riguardate come delle forze esterne.

Ogni condizione che si voglia imporre alla curva delle pressioni (e per riflesso alle incognite iperstatiche originarie da cui essa dipende) si verrà così a tradurre in una equazione di condizione fra queste forze, e potrà pertanto venire utilizzata per determinarne i valori. E tante condizioni indipendenti si potranno imporre quanti sono gli anelli di cerchiatura, e quindi le incognite iperstatiche aggiunte.

La conclusione si è che la curva delle pressioni può venir condotta ad assumere un andamento tanto vicino quanto si vuole a quello dell'asse geometrico dello specchio (tav. II) realizzando così l'annullamento delle eventuali tensioni positive nei meridiani, come l'inversione di segno degli spostamenti orizzontali, con conseguente eliminazione di ogni tensione positiva nei paralleli.

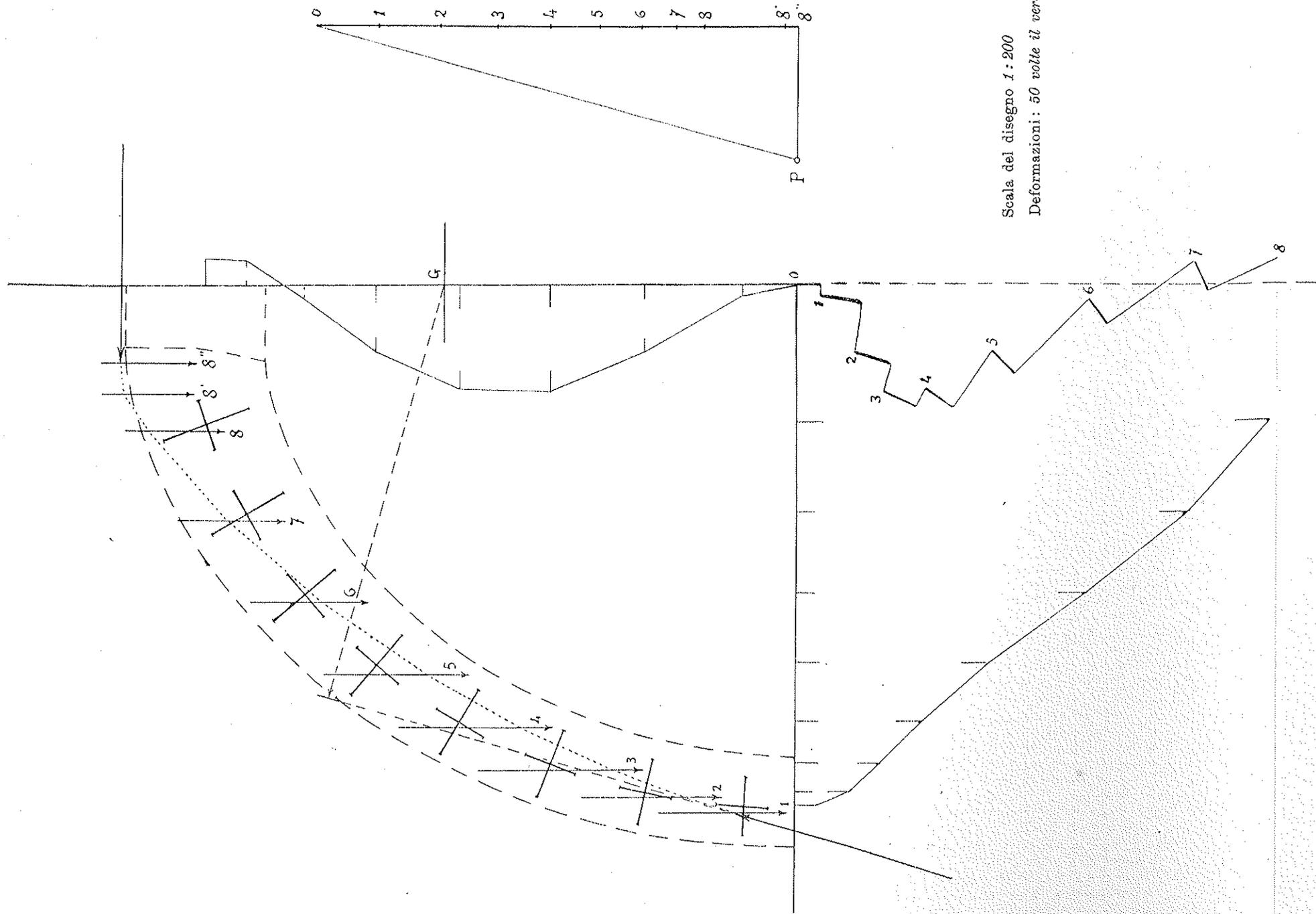
Resta, **in un secondo tempo**, da risolvere il problema del passaggio dalla curva delle pressioni nello spicchio isolato alla curva delle pressioni nella cupola, tenendo nel dovuto conto le azioni che in questa si esercitano, tra spicchio e spicchio, secondo i paralleli.

Ma anche questo problema diviene suscettibile di una soluzione singolarmente semplice ed immediata se si tien conto della libertà, che noi ci siamo riservata, di fissare a nostro arbitrio le tensioni negli anelli di cerchiatura.

Nulla ci vieta infatti di adottare come deformata dello spicchio in seno alla cupola quella stessa deformata che noi siamo stati condotti ad attribuire allo spicchio isolato. Perchè ciò avvenga basta che le deformazioni dei paralleli corrispondano agli spostamenti orizzontali dei relativi punti dello spicchio. E ciò si ottiene creando nei paralleli i necessari stati di tensione mediante forze opportune, per esempio mediante opportuni incrementi delle tensioni negli anelli di cerchiatura.

Accadrà allora che le forze orizzontali che comparivano nei nostri calcoli di stabilità dello spicchio isolato come dovute alle tensioni degli anelli di cerchiatura, saranno le stesse che compariranno nei calcoli di stabilità della cupola come risultanti delle tensioni degli anelli di cerchiatura e delle azioni che si esercitano tra spicchio e spicchio secondo i paralleli.

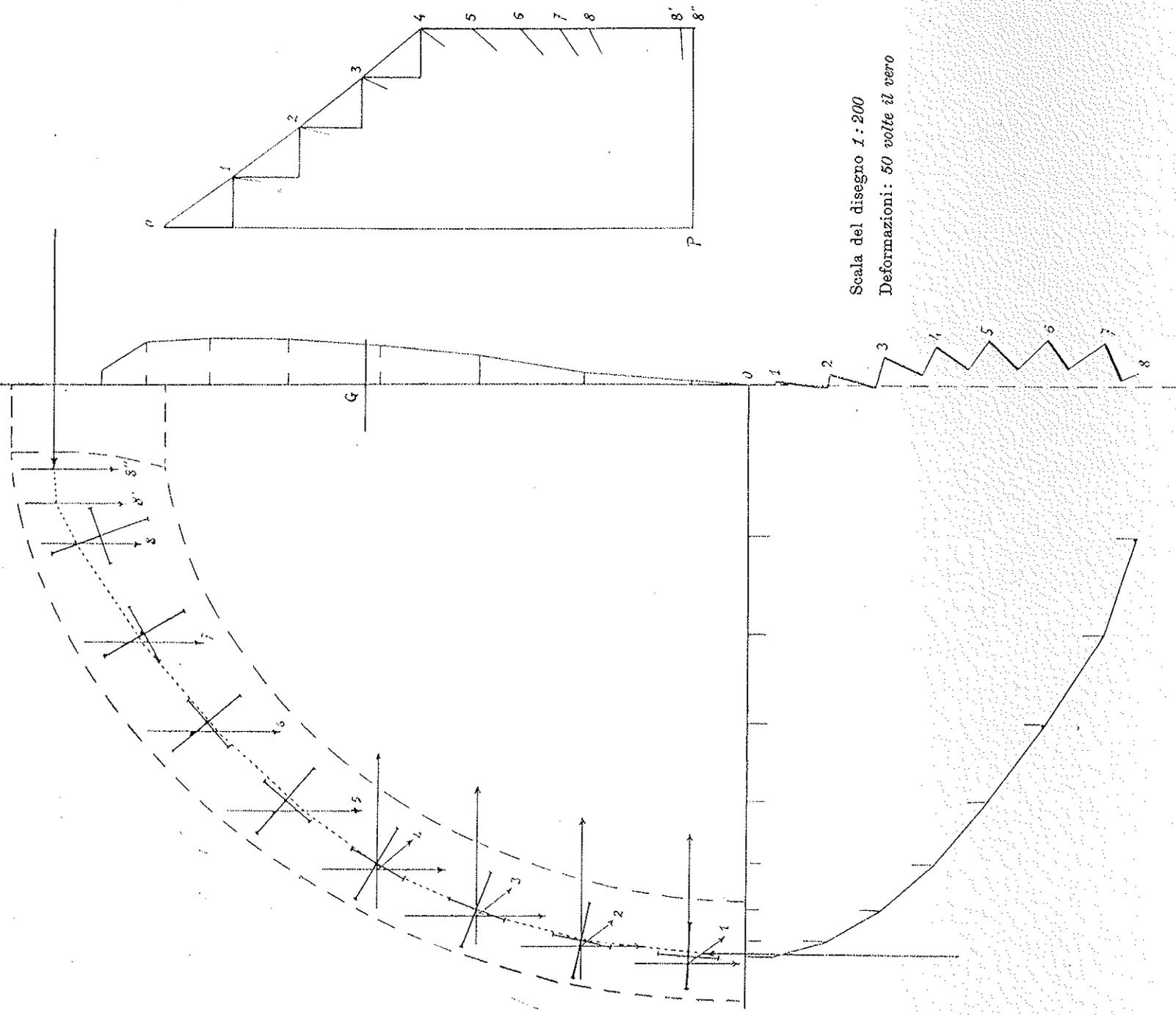
La stessa sarà perciò anche, nei due casi, la curva delle pressioni.



Scala del disegno 1 : 200
Deformazioni : 50 volte il vero

Carichi verticali in t.	
88,4	1
80,0	2
75,0	3
68,6	4
64,9	5
57,0	6
48,0	7
35,4	8
110,0	8'
15,7	8''

Reazione d'imposta	
X = 11282 <i>trn.</i>	Momento rispetto a G
Y = 687 t.	Componente verticale
Z = 180 t.	Componente orizzontale
R = 662 t.	Intensità risultante
$\frac{X}{R} = m. 16,97$	Distanza della linea di azione da G



Scala del disegno 1:200
 Deformazioni: 50 volte il vero

	Carichi verticali in t.	Tensioni orizzontali in t.
1	88,4	60,0
2	80,0	60,0
3	75,0	60,0
4	68,6	60,0
5	64,3	
6	57,0	
7	48,0	
8	36,4	
8'	110,0	
8''	15,7	

Reazione d'imposta	
Momento rispetto a G	$X = 13000 \text{ tm.}$
Componente verticale	$Y = 637 \text{ t.}$
Componente orizzontale	$Z = 0$
Intensità risultante	$R = 637 \text{ t.}$
Distanza della linea di azione da G	$\frac{X}{R} = \text{m. } 20,41$