ACTA
Vol. V - N. 16

SOPRA UNA PROPRIETÀ DI LIMITE CARATTERISTICA DELLE FUNZIONI OLOMORFE (*)

MARIA ZEVI

SVMMARIVM. — Quoad functionem $f(z)$ complexi variabilis z, functio interpolaris quae a quolibet variabilium complexorum numero pendeat perpenditur, eiusque limes quinam sit, si haec variabilia ad z tendant, inquiritur; qua ratione auctor novas functionum holomorphicarum variabilis z notationes invenit.

In una nota del Prof. PICONE, dal titolo *Sul calcolo delle derivate d'ordine superiore*, in corso di stampa nel Periodico di Matematica, sono considerate le seguenti questioni.

Detta $f(z)$ una funzione della variabile complessa $z = x + iy$, definita in un campo A del piano (x, y), assunti arbitrariamente $n+1$ punti $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ del campo A, si ponga

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & \ldots & z_1^{n-1} & z_1^n \\ 1 & z_2 & \ldots & z_2^{n-1} & z_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_{n+1} & \ldots & z_{n+1}^{n-1} & z_{n+1}^n \end{vmatrix} = \mathrm{V}(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$$

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \cdot \mathrm{V}(z_1 z_2, \ldots, z_{n+1}) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \ldots & z_1^{n-1} & f(z_1) \\ 1 & z_2 & \ldots & z_2^{n-1} & f(z_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_{n+1} & \ldots & z_{n+1}^{n-1} & f(z_{n+1}) \end{vmatrix}$$

$$\sigma = |z_1 - z| + |z_2 - z| + \ldots + |z_{n+1} - z| \;;$$

(*) Nota presentata l'8 luglio 1941, dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi.

nella nota indicata, supposto il punto z in A, si studia il limite

$$\lim_{\sigma \to 0} f(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) , \tag{1}$$

e constatato che tale limite, se $f(z)$ è olomorfa in A, riesce

$$\frac{f^{(n)} z}{n!} ,$$

senza alcun vincolo fra gli $n+1$ punti $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, al tendere di essi a z, si domanda: data comunque la $f(z)$, dall'esistenza del limite [1] determinato e finito, per ogni punto z di A, si può dedurre l'olomorfia della $f(z)$?

Più in generale, dall'esistenza e finitezza dello stesso limite con prescritti vincoli fra i punti $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, quale classe di funzioni si caratterizza?

A tali domande è risposto nella nota indicata in due casi particolari, istruttivi, ed è mostrato che:

I. – *La classe delle funzioni $f(z)$ che, considerate come funzioni di x e di y sono dotate in* A *delle derivate parziali rispetto ad x e ad y prime e seconde finite e continue, e per le quali esiste, determinato e finito, per ogni punto z di* A, *il limite*

$$\lim_{\zeta \to 0} f(z, z+\zeta, z-\zeta) , \tag{2}$$

essendo ζ variabile complessa è data dalle funzioni che possono decomporsi nella somma di una funzione olomorfa in z e di una funzione lineare in x e in y.

II. – *La classe delle funzioni $f(z)$ che, considerate come funzioni di x e di y, sono differenziabili in* A, *secondo* Stolz, *e per le quali esiste determinato e finito, per ogni punto z di* A, *il limite*

$$\lim_{\zeta \to 0} f(z, z+\zeta,\ z+\varepsilon\zeta) \tag{3}$$

dove ε è un fissato numero complesso diverso da zero e da uno e ζ tende a zero con anomalia determinata (funzione di z), *è quella delle funzioni olomorfe in* A.

Tali esempi mostrano la profonda differenza delle circostanze che si presentano a seconda che nel tendere a z dei punti $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$, essi si mantengano allineati con z o non si mantengano tali; nel primo caso, per lo studio della questione, si è dovuto ammettere l'esistenza del limite [2], comunque il vettore ζ tende a zero, ed inoltre l'esistenza e la continuità delle derivate parziali prime e seconde della $f(z)$, pervenendo a caratterizzare le funzioni che possono decomporsi nella somma di una funzione olomorfa in A e di una funzione lineare; nel secondo è bastato supporre la differenziabilità secondo STOLZ della funzione $f(z)$ delle variabili x e y e l'esistenza e finitezza del limite [3] mantenendo (funzione di z) immutata l'anomalia del vettore infinitesimo ζ, cioè immutata l'orientazione del triangolo dei punti z_1, z_2, z_3, che tende a concentrarsi nel suo vertice in z, mantenendosi omotetico ad un triangolo fisso, per dedurre che la classe delle funzioni coincide con quella delle funzioni olomorfe in A.

Dietro consiglio del Prof. PICONE[1], ho voluto considerare in generale tali circostanze, considerare cioè il limite [1] assumendo un numero arbitrario di punti, in un primo tempo allineati con z ed in un secondo non allineati con z e precisamente formanti i vertici di un $(n+1)$-*gono* regolare avente il centro in z.

Ed ecco a quali interessanti risultati sono pervenuta.

I'. – *Si fissino $n+1$ numeri reali $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ funzioni di z e si assuma un vettore infinitesimo ζ. I punti $z_1 = z + t_1\zeta$, $z_2 = z + t_2\zeta, \ldots, z_{n+1} = z + t_{n+1}\zeta$ sono evidentemente allineati con z, e giacenti su una retta per z avente l'anomalia di ζ. Ebbene si ha che: la classe delle funzioni $f(z)$ delle variabili x e y, continue in* A *con le derivate parziali dei primi n ordini, per le quali esiste determinato e finito il limite*

$$[4] \qquad \lim_{\zeta \to 0} f(z + t_1\zeta, z + t_2\zeta, \ldots, z + t_{n+1}\zeta)$$

ove ζ tende a zero con $n+1$ assegnate anomalie, è costituita dalle funzioni che possono decomporsi nella somma di un polinomio arbitrario di grado $n-1$ in x e in y e di una funzione di z, olomorfa in A.

Per $n=1$ si perviene dunque alla olomorfia della $f(z)$ essendo però in tal caso sufficiente supporre la differenziabilità della funzione secondo STOLZ.

---

(1) Mi è grato ringraziare pubblicamente il Prof. PICONE per i suggerimenti datimi nell'espletare il presente lavoro.

II'. – *Supposto* $n \geqslant 2$ *e detta* ε *una radice* $(n+1)$*-ma dell'unità si ponga per un vettore infinitesimo* ζ

$$z_1 = z + \zeta \quad z_2 = z + \varepsilon\zeta \quad \ldots \quad z_{n+1} = z + \varepsilon^n \zeta$$

con che i punti $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ *formano i vertici di un* $(n+1)$*-gono regolare avente il centro in* z. *Ebbene si ha che: la classe delle funzioni di* x *e di* y *differenziabili in* A *secondo* STOLZ *per le quali, per ogni punto* z *di* A, *esiste determinato e finito il limite*

$$\lim_{\zeta \to 0} f(z+\zeta, z+\varepsilon\zeta, \ldots, z+\varepsilon^n\zeta) \tag{5}$$

ove ζ *tende a zero mantenendo immutata la sua anomalia* (funzione di z), *è precisamente quella delle funzioni olomorfe in* A.

Tale teorema cade in difetto per $n=1$, nel qual caso i punti

$$z_1 = z + \zeta, \qquad z_2 = z - \zeta,$$

vengono a trovarsi allineati con z e l'esistenza e finitezza del limite [5] caratterizza, a norma del teorema I', le funzioni olomorfe, quando ζ tende a zero potendo assumere due anomalie distinte.

1. DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA I'.

Per gli n + 1 punti

$$z_1 = z + t_1\zeta \quad z_2 = z + t_2\zeta \quad \ldots \quad z_{n+1} = z + t_{n+1}\zeta$$

si ha

$$f(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = \frac{1}{\zeta^n} \frac{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^{n-1} & f(z+t_1\zeta) \\ 1 & t_2 & \ldots & t_2^{n-1} & f(z+t_2\zeta) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_{n+1} & \ldots & t_{n+1}^{n-1} & f(z+t_{n+1}\zeta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & \ldots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & t_{n+1} & \ldots & t_{n+1}^{n-1} & t_{n+1}^n \end{vmatrix}} \tag{6}$$

L'ipotesi dell'esistenza e continuità, per la $f(x, y)$, delle derivate parziali fino a quelle d'ordine n incluse, consente di scrivere, posto $\zeta = \xi + i\eta$,

$$f(z + t_k\zeta) = f(x + t_k\xi, y + t_k\eta) = f(z) + (\xi f_x + \eta f_y) t_k$$
$$+ \frac{1}{2} (f_x\xi + f_y\eta)^{(2)} t_k^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!} (f_x\xi + f_y\eta)^{(n)} t_k^n + \omega_k(\zeta) |\zeta|^n t_k^n ,$$

essendo

$$(f_x\xi + f_y\eta)^{(n)} = \sum_0^n {}_k \binom{n}{k} \xi^k \eta^{n-k} f_{x^k y^{n-k}} ,$$

ove $\lim_{\zeta \to 0} \omega(\zeta) = 0$.

Sostituendo tali espressioni di $f(z + t_k\zeta)$ nella [6] si ha

$$\frac{(f_x\xi + f_y\eta)^{(n)}}{n!\,\zeta^n} + \frac{|\zeta|^n}{\zeta^n} \frac{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{n-1} & \omega_1(\zeta) t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{n-1} & \omega_2(\zeta) t_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^{n-1} & \omega_{n+1}(\zeta) t_{n+1}^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{n+1} & \dots & t_{n+1}^{n-1} & t_{n+1}^n \end{vmatrix}}$$

Il secondo addendo, essendo $\frac{|\zeta|^n}{\zeta^n}$ di modulo uno, tende a zero al tendere a zero di ζ, in virtù della tendenza a zero delle $\omega_k(\zeta)$, mentre il primo, assegnata al vettore ζ una anomalia di tangente μ, ha per limite l'espressione

[7] $$\frac{f_{x^n} + \binom{n}{1} f_{x^{n-1}y}\, \mu + \dots + \binom{n}{n-1} f_{xy^{n-1}}\, \mu^{n-1} + f_{y^n}\, \mu^n}{1 + \binom{n}{1} i\mu + \dots + \binom{n}{n-1} i^{n-1} + i^n \mu^n} .$$

Se si richiede che tale limite riesca, per ogni punto (x, y) di A, determinato per $n+1$ anomalie assegnate a ζ, cioè per $n+1$ valori diversi di μ, deve di necessità risultare, identicamente in A

$$f_{x^n} = \frac{f_{x^{n-1}y}}{i} = \frac{f_{x^{n-2}y^2}}{i^2} = \ldots = \frac{f_{xy^{n-1}}}{i^{n-1}} = \frac{f_{y^n}}{i^n}$$

cioè

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(f_x - \frac{1}{i} f_y\right) = 0 \ ,$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x \, \partial y^{n-2}}\left(f_x - \frac{1}{i} f_y\right) = 0 \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left(f_x - \frac{1}{i} f_y\right) = 0 \ ,$$

e deve pertanto aversi

[8] $$f_x - \frac{1}{i} f_y = \mathrm{P}(x, y) \ ,$$

ove $\mathrm{P}(x, y)$ designa un polinomio di grado $n-2$.

Si tratta ora di trovare tutte le soluzioni dell'equazione a derivate parziali [8].

Osserviamo che dette f e g due soluzioni distinte, si ha

$$(f-g)_x - \frac{1}{i}(f-g)_y = 0$$

e pertanto la $f-g$ riesce olomorfa in A. Tutte le soluzioni della [8] si hanno dunque aggiungendo ad una sua particolare una qualsivoglia funzione olomorfa. Ricerchiamo allora una particolare soluzione della [8]. È facile vedere che si può effettivamente verificare la [8] con un polinomio di grado $n-1$ nel quale anzi rimangono arbitrari n coefficienti. Ed invero, posto

$$P(x, y) = \sum_{0}^{n-2}{}_k P_k(x, y)$$

ove le $P_k(x, y)$ designano polinomi omogenei di grado k, se si vuole soddisfare alla [8] con un polinomio

$$Q(x, y) = \sum_{0}^{n-1}{}_k Q_k(x, y)$$

di grado $n-1$, ove le $Q_k(x, y)$ designano polinomi omogenei di grado k, deve aversi

$$\frac{\partial Q_{k+1}}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial y} = P_k \qquad (k=0, 1, \ldots, n-2)$$

Basterà dunque per il nostro scopo mostrare che, assegnato un polinomio omogeneo di grado m

$$P(x, y) = \sum_{0}^{m}{}_k p_k x^k y^{m-k} ,$$

esiste un polinomio omogeneo di grado $m+1$

$$Q(x, y) = \sum_{0}^{m+1} q_k x^k y^{m+1-k}$$

che verifica l'equazione

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial Q}{\partial y} = P(x, y)$$

e per il quale rimane arbitrario il coefficiente q_0.

Ora è immediato che tale equazione porta alle seguenti fra i coefficienti p_k e q_k

$$[9] \qquad (k+1)\,q_{k+1} - \frac{1}{i}\,(m+1-k)\,q_k = p_k \qquad (k=0,1,\dots,m)$$

soddisfatte le quali è soddisfatta l'equazione stessa.

Le equazioni [9] possono essere verificate assegnando arbitrariamente il coefficiente q_0 in seguito a che tutti gli altri riescono determinati.

Se si riflette poi che, ponendo nella frazione [7] una funzione $f(z)$ qualsivoglia che sia la somma di una funzione olomorfa in A e di un polinomio di grado $n-1$, la frazione stessa assume un valore indipendente da μ, il teorema I' può ritenersi dimostrato.

2. - Dimostrazione del teorema II'.

Con la posizione fatta

$$z_1 = z + \zeta\,, \quad z_2 = z + \varepsilon\zeta\,, \quad \dots\,, \quad z_{n+1} = z + \varepsilon^n\zeta$$

riesce (cfr. la nota citata del Prof. Picone)

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{f(z+\zeta) + \varepsilon f(z+\varepsilon\zeta) + \dots + \varepsilon^n f(z+\varepsilon^n\zeta)}{(n+1)\,\zeta^n}$$

Posto

$$\zeta = \xi + i\eta \qquad \varepsilon^k = \alpha_k + i\beta_k \qquad (k=0, 1, \dots n)$$

l'ipotesi della differenziabilità secondo Stolz per la $f(x,y)$ ci permette di scrivere

$$f(z+\varepsilon^k\zeta) = f(z) + (\alpha_k\xi - \beta_k\eta)\,f_x + (\alpha_k\eta + \beta_k\xi)\,f_y + \omega_k(\zeta)\,|\zeta|$$

essendo

$$\lim_{\zeta\to 0}\ \omega_k(\zeta) = 0\ .$$

Il numeratore dell'espressione $f(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ si può così scrivere

$$\sum_0^n{}_k (\alpha_k + i\beta_k)\left[(\alpha_k \xi - \beta_k \eta) f_x + (\alpha_k \eta + \beta_k \xi) f_y\right] + \omega(\zeta)|\zeta| =$$

$$= f_x\left(\xi \sum_0^n{}_k \alpha_k(\alpha_k + i\beta_k) - \eta \sum_0^n{}_k \beta_k(\alpha_k + i\beta_k)\right) +$$

$$+ f_y\left(\xi \sum_0^n{}_k \beta_k(\alpha_k + i\beta_k) + \eta \sum_0^n{}_k \alpha_k(\alpha_k + i\beta_k)\right) + \omega(\zeta)|\zeta| ,$$

dove

$$\lim_{\zeta \to 0} \omega(\zeta) = 0 .$$

Dobbiamo calcolare

$$\sum_0^n{}_k \alpha_k(\alpha_k + i\beta_k) , \qquad \sum_0^n{}_k \beta_k(\alpha_k + i\beta_k) .$$

Osserviamo che, per $n \geqslant 2$

$$\sum_0^n{}_k (\alpha_k + i\beta_k)\alpha_k + i \sum_0^n{}_k (\alpha_k + i\beta_k)\beta_k = \sum_0^n{}_k (\alpha_k + i\beta_k)^2 = \sum_0^n{}_k \varepsilon^{2k} = 0 ,$$

e che

$$\sum_0^n{}_k (\alpha_k + i\beta_k)\alpha_k - i \sum_0^n{}_k (\alpha_k + i\beta_k)\beta_k = \sum_0^n{}_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2) = n + 1$$

Si trova quindi

$$\sum_0^n{}_k (\alpha_k + i\beta_k)\alpha_k = \frac{n+1}{2} ,$$

$$\sum_0^n{}_k (\alpha_k + i\beta_k)\beta_k = -\frac{n+1}{2i} ,$$

$$f(z_1 z_2, \ldots, z_{n+1}) = \frac{\frac{n+1}{2}(\xi - i\eta)(f_x + if_y) + \omega(\zeta)|\zeta|}{(n+1)\zeta^n}$$

Se tale funzione di ζ deve aver limite determinato e finito per ζ infinitesimo vuol dire che il suo prodotto per ζ^{n-1} deve tendere a zero; deve cioè essere infinitesima, per ζ che tende a zero, la funzione

$$\frac{1}{2}\,\frac{\xi-i\eta}{\xi+i\eta}(f_x+if_y)+\frac{\omega(\zeta)}{n+1}\,\frac{|\zeta|}{\zeta}$$

Il secondo addendo di tale somma è infinitesimo, laddove il primo ha il valore

$$-\frac{1}{2}(f_x+if_y)$$

se la fissata anomalia di ζ è $\pm\frac{\Pi}{2}$; ha il valore

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-i\mu}{1+i\mu}$$

se μ è la tangente della fissata anomalia di ζ, supposta diversa da $\pm\frac{\Pi}{2}$. Segue quindi, in A,

$$f_x+if_y=0$$

cioè la olomorfia di $f(z)$.