ACTA
Vol. V - N. 14

DI ALCUNE RECENTI MEDIE (*)

PIETRO MARTINOTTI

SVMMARIVM. — Opportune descriptis variis rationibus quibus medius numerus supputari solet, auctor novarum mediarum trigonometricarum duo affert exempla, demonstrans quam commoda sit methodus relationis ad functionem, qua methodo illae mediae computatae sunt.

DUE PROBLEMI DELLE MEDIE SOGGETTIVE

1) I molteplici punti di vista dai quali la Statistica teorica esamina genericamente le medie soggettive di un gruppo di dati, si possono ridurre a due soli, quando questo esame viene limitato, come ora si intende di fare, alla sola parte matematica; ad essi corrispondono i seguenti problemi fondamentali:

la determinazione di medie, quali espressioni matematiche di operazioni da eseguire sui dati;

la scelta del tipo più opportuno di media per ogni singolo caso pratico.

Di questi il secondo entra necessariamente nel campo concreto, e può trascinarvi una parte più o meno grande del primo, a seconda del maggiore o minor legame fra essi esistente.

Col proposito di fornire nuovi elementi di valutazione dei pregi e difetti dei diversi modi di concepire una media, tenendo conto di alcuni suoi tipi, recentemente aggiuntisi a quelli che hanno già for-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Marcello Boldrini nella Tornata dell'8 giugno 1941.

mato oggetto di analoghe considerazioni (1), e coordinando questi con i nuovi, si ritiene opportuno stabilire una classificazione dell'insieme delle più note espressioni matematiche di medie.

Sul comportamento di queste rispetto ai predetti problemi fonderà la classificazione stessa, e da questa, inoltre, si potranno indurre alcuni ulteriori sviluppi dell'importante e vasto campo di ricerche.

Il primo problema

2) È noto che le classiche medie

aritmetica
quadratica
geometrica
armonica

sia semplici che ponderate, di n dati $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ sono comprese come casi particolari nell'unico tipo di media m_k d'ordine k:

$$m_k = \sqrt[k]{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^k}{\sum_{i=1}^{n} p_i}}$$

corrispondentemente ai casi di $k = 1, 2, 0, -1$.

Medie ponderate aritmetiche, geometriche ed armoniche, i cui pesi p siano particolarmente espressi da:

$$p_i = \binom{n-i+h-1}{h-1} \qquad \text{oppure} \qquad \binom{i+h-1}{h-1}$$

(1) La presente nota è un complemento di *Estensioni nel concetto di media*. « Giornale degli Economisti » e « Annali di Economia », Cedam, Padova, 1939-XVII, ove è contenuta la breve bibliografia dell'argomento. Pubblicazioni successive a questa, e che hanno dato motivo alla presente, sono:

E. Pizzetti, *Medie ascendenti e medie discendenti*, Supplemento statistico, Ferrara, 1939-XVII. « Metron », Vol. XIV. Roma, A. Pratelli 1940-XVIII. — G. Zappa, *Osservazioni sulle medie combinatorie*, idem; *Sulle medie trigonometriche*, idem.

ove h può essere un intero qualunque, hanno formato oggetto di particolare studio, sotto la denominazione di « ascendenti o discendenti d'ordine h » perchè ottenibili anche con particolari operazioni procedenti in ordine inverso sui dati.

Un gruppo di medie più complesse delle m_k, e che le comprende in particolare, è quello delle così dette medie « combinatorie ». La loro formula è deducibile da quella delle m_k, sostituendo ai semplici termini $p_i a_i^k, p_i$ delle somme ivi contenute, i prodotti di un numero c di analoghi fattori

$$p_i a_i^k p_j a_j^k \ldots\ldots p_s a_s^k \qquad , \qquad p_i p_j \ldots\ldots p_s$$

le successioni di tali fattori essendo formate da tutte le combinazioni, sia semplici che con ripetizione, c a c degli n dati: all'indice di radice k va conseguentemente sostituito ck.

Più generalmente si sono costruite medie combinatorie con la radice $(ck - dh)^{esima}$ del quoziente di una frazione identica a quella risultante dalle predette sostituzioni, per un'altra simile, formata con le combinazioni d a d delle potenze h^e dei dati moltiplicati per i rispettivi pesi.

Si hanno inoltre le « medie trigonometriche » comprendenti la « media-seno » e la « media-coseno », che sono valori aventi per seno e per coseno rispettivamente le semplici medie aritmetiche dei seni e dei coseni dei dati.

Se dal complesso di queste varie espressioni si volesse indurre una più generale e comprensiva definizione, osservando che in esse sono sostanzialmente contenute varie operazioni algebriche applicate a funzioni – potenziali e logaritmiche – dei dati, si perverrebbe all'arida conclusione simbolicamente rappresentata da

$$m = \mathrm{F}\left|f(a_1),\ f(a_2) \ldots\ldots f(a_n)\right|$$

e che precederebbe di poco l'affermare che quale media si possa assumere una funzione dei dati, con l'unica condizione che non evada l'intervallo di questi.

Una classe ben distinta dalle precedenti è quella delle medie « riferite ad una prefissata funzione dei dati ». Nella loro definizione è contenuta la condizione essenziale che questa funzione $\varphi(a_1\, a_2 \,.....\, a_n)$ deve rimanere invariata quando i dati vengono sostituiti dalla loro media, di guisa che questa condizione si traduce nell'equazione

$$\varphi(a_1, a_2 \,.....\, a_n) = \varphi(m, m, \,.....\, m)$$

risolventesi nella media m.

È già stato dimostrato come a questa forma siano adattabili tutte quante le medie passate prima in rassegna.

Dal punto di vista puramente matematico questa definizione va sostanzialmente distinta dalle precedenti, perchè sostituisce alla presentazione diretta di un determinato tipo di media, la sua indiretta deduzione da una conveniente equazione. E questo è lo stesso procedimento che, alla fin fine, si segue nel dimostrare alcune proprietà – generalmente quelle di render massime o minime particolari grandezze – attribuibili alle più note medie; si traducono, infatti, dette proprietà in equazioni che in queste medie si risolvono.

Sinchè nella equazione indicata viene lasciata indeterminata la funzione φ, e se anche si pensa di sottoporre i dati e la loro media a condizioni differenti da quella particolare proprietà invariantiva della φ, si dovrebbe ammettere che contro la lamentata indeterminatezza delle definizioni dirette non si sia recato il minimo contributo.

Il secondo problema

3) Ma un giudizio ben diverso viene imposto dal necessario coordinamento dei due premessi problemi, il primo dei quali, soltanto, è stato preso sinora in considerazione.

È noto infatti che, mentre il riferimento ad una funzione è stato suggerito, sin dalla sua origine, dall'intendimento principale di inserire nel concetto di media un legame con le varie circostanze concrete che su la grandezza, cui i dati si riferiscono, possono influire, nulla di simile e nessun proposito analogamente concepito, sia pure in diverso senso, accompagna le dirette ricerche di medie.

Può bastare questa constatazione ad elevare notevolmente il livello della prima definizione sulle seconde; nè si vede come, data la conseguente inferiorità di queste, possano meritare interesse le laboriose ricerche di proprietà matematiche, alle quali esse sono state sottoposte.

Tale constatazione è venuta rafforzandosi per altre considerazioni, illustrate con una certa profusione di esempi, in seguito ai quali si è stati anche indotti ad ampliare il primitivo riferimento a funzioni.

Essenzialmente va rilevato l'ufficio di queste funzioni di rappresentare quantità dalle quali i dati dipendono, e la conseguente opportunità di attribuire ad un unico gruppo di dati, medie distinte per la loro specifica relatività.

Da questi rilievi si è ora tratti ad ammettere che, a maggior ragione, una distinzione fra medie di un medesimo gruppo di dati possa provenire da un semplice cambiamento nell'ordine di questi.

Che ciò si verifichi in un numero di casi maggiore di quello che potrebbe a tutta prima sembrare, è constatabile sotto entrambi i nostri punti di vista.

Matematicamente la dipendenza, o meno, della media dall'ordine dei dati si traduce nella condizione che le funzioni F e φ abbiano forma asimmetrica, o simmetrica, rispetto alle loro variabili, vale a dire ai dati. Ora è evidente che, se questi sono considerati separatamente dai rispettivi pesi, ogni espressione di medie ponderate è asimmetrica. La simmetria viene bensì acquistata, generalmente, dai prodotti dei dati per i relativi pesi. Di modo che non è necessario salire alle più moderne forme di medie, per incontrare casi nei quali queste possono mutare se i dati vengono variamente ordinati.

Si comprende che sinchè i pesi esprimono i numeri di dati fra loro uguali, la loro separazione da questi non è concepibile, ma sono pur frequenti i casi concreti nei quali la ponderazione è suggerita da altri criterî. E bene spesso il valore di ogni singolo peso è determinato appunto dal posto che occupa il dato corrispondente nel gruppo – naturalmente o convenzionalmente ordinato – cui appartiene.

Una stima del risultato finale di una classe di 30 alunni della nuova scuola media dipende necessariamente dalla graduale loro ripartizione nelle 5 categorie secondo le quali essi vengono a fine d'anno classificati, chè troppo prevedibile ed insignificante sarebbe la considerazione della media di 6 alunni per categoria.

Analogamente un'azienda avente gli operai suddivisi in più categorie diversamente retribuite, ha ragioni economiche e tecniche di tener conto, nel formare le medie annuali delle presenze per categorie, della graduatoria di queste.

Una banca che deve effettuare contemporaneamente diversi pagamenti, è ammissibile che ne calcoli un valor medio unico, comunque vengano ordinati; ma se essi devono avere scadenze differenti, non si può fare a meno del computo degli interessi; quel valor medio converrà riferirlo, ad esempio, al montante dei pagamenti tutti, e se vi sarà libertà di scelta, sarà preferibile quell'ordine di scadenze che darà un montante, e quindi un valor medio, minimo.

Da ciò emerge come la relatività della media all'ordine dei dati in taluni casi si renda necessaria, in altri solo opportuna, e superflua in altri; emerge pure come la stessa relatività acquisti maggior significato e mezzo di calcolo se accoppiata a quella che assume una funzione come elemento di riferimento.

Due esempi

4) Si ritiene ora opportuno svolgere in pieno due casi nei quali le medie trigonometriche, rimaste sinora prive di esemplificazioni, vengono dedotte da riferimenti a funzioni.

Sia un sistema piano di n forze f_i applicate ad un punto materiale, e formanti con una direzione fissa gli angoli α_i.

Lungo questa direzione siano s_i gli spazi percorsi da quel punto nei tempi t_i, sotto la sola azione di ogni singola forza.

Delle diverse direzioni di queste, può essere riguardata come media rispetto alla risultante delle forze stesse, quella che, se fosse comune a queste, darebbe una componente, nella direzione del moto, uguale alla somma delle componenti delle forze date.

Tale direzione media dovrà formare con quella del movimento un angolo α tale che sia:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \cos. \alpha_i = \cos. \alpha \sum_{i=1}^{n} f_i$$

ed è:

$$\alpha = \text{arc. cos.} \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cos. \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

Si noti che quest'angolo va distinto da quello che determina la direzione della risultante, e che è dato da

$$\text{arc. cos.} \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \cos. \alpha_i}{F}$$

se con F si intende l'intensità di detta risultante, la quale è notoriamente diversa da $\sum_{i=1}^{n} f_i$.

Si può considerare, invece, la direzione media rispetto al lavoro complessivamente compiuto dal sistema di forze, la quale media, essendo riferita alla funzione degli angoli α_i:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i s_i \cos. \alpha_i$$

risulta determinata dall'

$$\text{arc. cos.} \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i s_i \cos. \alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i s_i}$$

Ed analogamente, rispetto alla potenza del sistema, espressa dalla funzione

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i s_i \cos. \alpha_i}{t_i}$$

si ha la media:

$$\text{arc. cos.} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i s_i \cos. \alpha_i}{t_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i s_i}{t_i}}$$

Sono quattro casi di media-coseno ponderata di un medesimo gruppo di dati, dai quali sono da attendere valori numerici diversi, perchè affetti da pesi differenti.

Quest'altro esempio riguarda il caso di una media-seno di una distribuzione continua di dati.

Una sorgente luminosa situata ad una altezza h in un locale, illumina una striscia di larghezza l, disposta sul pavimento nella direzione dei raggi, di lunghezza ed a distanza della sorgente, tali che i raggi incidenti agli estremi della striscia siano inclinati degli angoli α, β sul pavimento.

Se I è l'intensità della sorgente, l'illuminazione della striscia in un punto nel quale i raggi presentano l'inclinazione x, e per un tratto dx, è:

$$\frac{l\,\mathrm{I}\ \text{sen.}\, x}{\left(\frac{h}{\text{sen.}\, x}\right)^2}\, dx = \frac{l\,\mathrm{I}\ \text{sen.}^3\, x}{h^2}\, dx$$

Quindi l'illuminazione dell'intera striscia sarà:

$$\frac{l\,\mathrm{I}}{h^2}\int_{\alpha}^{\beta} \text{sen.}^3\, x\, dx = \frac{l\,\mathrm{I}}{h^2}\left\{\cos.\,\alpha - \cos.\,\beta - \frac{1}{3}\left(\cos.^3\,\alpha - \cos.^3\,\beta\right)\right\}$$

L'inclinazione media γ, alla quale la stessa striscia, disposta di traverso, verrà in ugual misura ed uniformemente illuminata, sarà tale da uguagliare la precedente illuminazione alla

$$\frac{l\,\mathrm{I}\ \text{sen.}^3\,\gamma}{h^2}$$

e quindi:

$$\gamma = \text{arc. sen.} \sqrt[3]{\cos.\alpha - \cos.\beta - \frac{1}{3}\left(\cos.^3\alpha - \cos.^3\beta\right)}$$

risultando ad una distanza dal piede della sorgente uguale a

$$h\,\frac{\sqrt{1 - \left\{\cos.\alpha - \cos.\beta - \frac{1}{3}\left(\cos.^3\alpha - \cos.^3\beta\right)\right\}^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{\cos.\alpha - \cos.\beta - \frac{1}{3}\left(\cos.^3\alpha - \cos.^3\beta\right)}}$$

Meno facilmente si possono trovare esempi di questo genere tra i fenomeni sociali, per la strana penuria d'impiego delle funzioni trigonometriche, che finora vi si incontra.

Riguardo ai precedenti esempi, come per altri simili appartenenti alla Fisica, si può obbiettare che vi prevale la risoluzione di un problema di equivalenza negli effetti prodotti da un valore unico che si vuol sostituire ai dati, sicchè l'attribuzione a questo valore del titolo di media diviene più convenzionale che essenziale. Ma ciò induce solo a riconoscere l'esistenza di una certa gerarchia nel diritto a quel titolo, senza intaccare la validità del metodo per i gradi più elevati, i quali costituiscono una notevole maggioranza delle medie relative, come appare ugualmente affermabile per queste, nel vasto campo delle medie soggettive.