ACTA
Vol. V - N. 11

I PIÙ GENERALI RIFLESSI DELLA CONGRUENZA DELLE DEFORMAZIONI SUGLI SFORZI ELASTICI(*)

PIERO LOCATELLI

SVMMARIVM. — Exponitur quid requiratur ut duplex symmeter tensor possit aequalis elastici corporis tensionem exprimere, quaecumque sint eius corporis vires et proprietates elasticae, licet haec quoque e situ pendeant.

In uno studio comparso in questi «Acta» (1) ho posto in rilievo l'esistenza di particolari legami cui devono soddisfare le componenti di un generico tensore doppio simmetrico perchè questo possa essere assunto come tensore degli sforzi interni di un continuo omogeneo (bidimensionale o tridimensionale), indipendentemente dalle costanti elastiche di questo e dalle forze di campo e di contorno.

La ricerca di analoghi legami per il caso di continui *non omogenei* costituisce l'argomento di questa Nota. Oltre agli scopi indicati nello studio citato, essa ne ha uno particolare che scaturisce dal considerare che lo stato di tensione, sotto determinate forze, di un continuo nel quale il legame sforzi-deformazioni (2) non sia lineare, purchè regolare, può essere assimilato allo stato di tensione, sotto quelle stesse forze, dello stesso continuo costituito di materiale a caratteristica lineare, ma *opportunamente* non omogeneo e non isotropo.

Le relazioni cui si perverrà saranno pertanto valevoli anche nel caso di continui a caratteristica sforzi deformazioni non lineare.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti nella Tornata dell'8 giugno 1941.

(1) P. LOCATELLI, *Sullo stato di tensione elastica nei continui omogenei.* Pontificia Academia Scientiarum, «Acta», vol. V, n. 5, 1941.

(2) Intendo sempre di riferirmi a deformazioni infinitesime.

Mi limiterò ai casi aventi più immediata possibilità di pratiche applicazioni nel campo della elastostatica, ossia ai casi bidimensionali e tridimensionali euclidei.

1°. – Consideriamo un continuo euclideo isotropo tridimensionale non omogeneo: il suo equilibrio elastostatico è retto dall'insieme di tre gruppi di equazioni: le sei [1] che scendono dall'equilibrio dell'elemento di volume, le sei [2] che stabiliscono il legame, vario da punto a punto, fra sforzi e deformazioni, le tre indipendenti [3] che nascono dalla congruenza della deformazione. Nessuna differenza formale distingue queste equazioni da quelle scritte per un continuo tridimensionale omogeneo: solo i due coefficienti che caratterizzano la natura elastica del continuo (tensore elastico) non sono due costanti, ma due funzioni del posto.

Ciò non introduce difficoltà concettuali, talchè la via per risolvere il problema proposto non muta, nelle sue linee fondamentali, rispetto a quella seguita nel caso di continui omogenei, ma presenta difficoltà di calcolo che m'è riuscito di superare estendendo un procedimento di cui si è valso Finzi in un suo recente lavoro (1). Si esprimeranno ancor qui le condizioni di congruenza in funzione degli sforzi e delle caratteristiche elastiche del continuo e si elimineranno queste ultime nelle relazioni così ottenute sfruttando ulteriori relazioni, alla loro volta ottenute dalle precedenti per successive derivazioni.

Le equazioni dell'equilibrio elasto-statico hanno, per il caso in cui ci siamo messi ed in veste tensoriale l'aspetto (2):

$$[1] \qquad p_{ik}|^{k} = F_i \qquad p_{ik} = p_{ki}$$

$$[2] \qquad \xi_{ik} = A\, p a_{ik} + B\, p_{ik} \qquad (i, k, r, s, h, j = 1, 2, 3)$$

$$[3] \qquad \varepsilon^{irh}\, \varepsilon^{ksj}\, \xi_{ik|rs} = 0$$

(1) B. Finzi, *Il problema ristretto tridimensionale nella teoria della plasticità.* « Atti R. Acc. Scienze », vol. 76. Torino, 1941.

(2) Conformemente all'uso indico con indici in alto le componenti controvarianti di un tensore e con indici in basso le covarianti; una lineetta fra gli indici sostituisce l'ordinario segno di derivazione (derivazione ordinaria, in coordinate cartesiane; derivazione tensoriale, in coordinate generali); sono soppressi i sim-

nelle quali: a_{ik} è il tensore fondamentale, ε^{irh} il tensore di RICCI, p_{ik} il tensore degli sforzi interni, ξ_{ik} il tensore di deformazione, p l'inva-

boli di sommatoria quando stanno a rappresentare una semplice saturazione rispetto agli indici spaziali.

Nello spazio di metrica:

$$ds^2 = a_{ik}\,dx^i dx^k \quad (i, k = 1 \dots n)$$

il tensore a_{ik} è il tensore fondamentale (se lo spazio è euclideo e le coordinate sono cartesiane $a_{ik} = 1$ se $i = k$; $a_{ik} = 0$ se $i \neq k$). Esso è costante nel senso che la sua derivata tensoriale è nulla; è elemento essenziale nel prodotto scalare di due vettori: $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = a_{ik} u^i v^k$.

Il tensore di RICCI è un tensore $n$plo (doppio se lo spazio ha due dimensioni, triplo se lo spazio ha tre dimensioni) ed è così definito: $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = 0$ se almeno due indici sono eguali $(i_1, i_2 \dots i_n = 1, 2, \dots n)$; $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = \pm\sqrt{\|a_{ik}\|}$ se gli indici sono tutti distinti, valendo il segno $+$, o il segno $-$, secondo la classe della permutazione $i_1 \dots i_n$ rispetto alla fondamentale $1 \dots n$. Anche il tensore di RICCI è costante nel senso che la sua derivata tensoriale è nulla (se lo spazio è euclideo e le coordinate sono cartesiane, le componenti non nulle hanno il valore $\pm\sqrt{\|a_{ik}\|} = \pm 1$). Nello spazio tridimensionale esso è elemento essenziale nel prodotto vettoriale: precisamente se $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, si ha: $w_h = \varepsilon_{hik} u^i v^k$.

Le [1], [2], [3] trascritte in forma cartesiana diventano le ben note:

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z} = \mathrm{F}_x & \qquad p_{xy} = p_{yx} \\[2ex] \dfrac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{yz}}{\partial z} = \mathrm{F}_y & \qquad p_{yz} = p_{zy} \\[2ex] \dfrac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z} = \mathrm{F}_z & \qquad p_{zx} = p_{xz} \end{array} \right.$$

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \xi_{xx} = \mathrm{A}p + \mathrm{B}p_{xx} & \qquad \xi_{xy} = \mathrm{B}p_{xy} \\ \xi_{yy} = \mathrm{A}p + \mathrm{B}p_{yy} & \qquad \xi_{yz} = \mathrm{B}p_{xz} \\ \xi_{zz} = \mathrm{A}p + \mathrm{B}p_{zz} & \qquad \xi_{zx} = \mathrm{B}p_{zx} \end{array} \right.$$

$$[3] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial^2 \xi_{xy}}{\partial x \partial y} & \qquad \dfrac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} - \dfrac{\partial \xi_{zy}}{\partial x}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial y^2} = 2\dfrac{\partial^2 \xi_{yz}}{\partial y \partial z} & \qquad \dfrac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial z \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} + \dfrac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi_{xz}}{\partial y}\right) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial z^2} = 2\dfrac{\partial^2 \xi_{zx}}{\partial z \partial x} & \qquad \dfrac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} - \dfrac{\partial \xi_{yx}}{\partial z}\right) \end{array} \right.$$

riante lineare degli sforzi: $p = p_i^i$, A e B due funzioni caratteristiche del continuo:

$$A = \chi(x_1, x_2, x_3) \qquad\qquad B = \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

ed infine F_i le forze di campo.

Le [3] come è noto costituiscono un sistema di sei equazioni algebricamente indipendenti, ma non tali differenzialmente: sussistono infatti le tre identità che esprimono l'annullarsi della divergenza del primo membro delle stesse [3] (1); in virtù delle [2], le [3] assumono l'aspetto:

$$[3'] \qquad \Phi^{hj} \equiv \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} \{ (Ap)|_{rs} a_{ik} + (B p_{ik})|_{rs} \} = 0 \qquad (i, k, r, s, h, j = 1, 2, 3)$$

Se per comodo di scrittura poniamo:

$$Ap = \chi p = \psi(x_1, x_2, x_3)$$

$$\varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} a_{ik} = c^{hjrs}$$

otteniamo:

$$[3''] \qquad \Phi^{hj} \equiv c^{hjrs} \psi|_{rs} + \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} (\varphi p_{ik})|_{rs} = 0$$

2°. – Se chiamiamo C_{mnhj} gli elementi reciproci di c_{hjrs}, ossia poniamo:

$$C_{mnhj} c^{hjrs} = a^r_m a^s_n$$

moltiplicando le [3''] per C_{mnhj} e saturando avremo:

$$[3'''] \qquad \psi|_{mn} + D^{ikrs}_{mn} (\varphi p_{ik})|_{rs} = 0$$

avendo posto:

$$D^{ikrs}_{mn} = C_{mnhj} \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj}$$

(1) P. Locatelli, loc. cit.

con che, ricordando la genesi di C_{mnhj} si ha: $D^{ikrs}_{mn} = D^{ikrs}_{nm}$.

Poniamo ora per semplicità di scrittura e per ricordarne la natura tensoriale:

$$\beta_{mn} = D^{ikrs}_{mn} (\varphi p_{ik})|_{rs}$$

la [3'''] diviene:

$$[3^{IV}] \qquad A_{mn} \equiv \psi|_{mn} + \beta_{mn} = 0$$

Le $[3^{IV}]$ non sono dunque, a meno di coefficienti, che le [3] espresse nelle derivate seconde degli sforzi interni e delle caratteristiche del continuo A e B. Si avrà pertanto:

$$\Phi^{hj} = \varepsilon^{hjrs} A_{rs} = A\, a^{hj} - A^{hj} = 0 \qquad (A = A_i^i)$$

e quindi prendendo la divergenza d'ambo i membri:

$$[*] \qquad A|_j = A^h{}_j|_h$$

Dalle $[3^{IV}]$ è facile eliminare la ψ; basta infatti derivare le [3'''] rispetto alle variabili spaziali, moltiplicare per il tensore di Ricci e saturare; ricordando allora l'emisimmetria di ε^{pnt} e la simmetria delle derivate $\psi|_{mnt}$ la $[3^{IV}]$ diviene successivamente:

$$[3^{V}] \qquad \psi|_{mnt} + \beta_{mn|t} = 0$$

$$\varepsilon^{pnt} \psi|_{mnt} + \varepsilon^{pnt} \beta_{mn|t} = 0$$

$$[4] \qquad \Theta^p{}_m \equiv \varepsilon^{pnt} \beta_{mn|t} = 0$$

La [4] è una relazione tensoriale, che non contiene la ψ, nella quale compaiono il tensore degli sforzi interni p_{ik} e la caratteristica del continuo $B = \varphi(x^i)$ con le loro derivate fino a quelle di ordine terzo. Scriviamo la [4] ponendo in evidenza la φ e le sue derivate: essa avrà la veste:

$$[4'] \qquad \Theta_{pm} \equiv \underset{3}{E}{}^{abc}_{pm} \varphi|_{abc} + \underset{2}{E}{}^{ab}_{pm} \varphi|_{ab} + \underset{1}{E}{}^{a}_{pm} \varphi|_{a} + \underset{0}{E}{}_{pm} \varphi = 0$$

dove i tensori $\underset{h}{E}^{\cdots}_{\cdots}$ sono i coefficienti che saturano le derivate di ordine h della funzione φ; essi sono funzioni solamente delle derivate di p_{ik} fino al terzo ordine.

La [4'] è un sistema di 9 equazioni: non tutte però sono algebricamente indipendenti perchè grazie a [4] si ha l'identità:

$$a^{pm}\,\Theta_{pm} \equiv 0$$

Le otto [4'] non ci permettono dunque di ricavare algebricamente le dieci distinte $\varphi|_{abc}$. Facciamo allora ricorso ad un metodo di eliminazione ispirato al citato lavoro di Finzi.

Deriviamo le [4']; abbiamo:

$$[5] \qquad \Theta_{pm|r} \equiv \underset{4}{F}^{abcd}_{pmr}\,\varphi|_{abcd} + \underset{3}{F}^{abc}_{pmr}\,\varphi|_{abc} + \underset{2}{F}^{ab}_{pmr}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{F}^{a}_{pmr}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{F}_{pmr}\,\varphi = 0$$

nella quale i tensori $\underset{h}{F}^{\cdots}_{\cdots}$ (funzioni delle derivate di p_{ik} fino al quarto ordine) sono i coefficienti che saturano le derivate di ordine h della funzione φ.

La [5] ottenuta derivando le otto [4'] è un sistema di ventiquattro equazioni contenenti le quindici derivate quarte $\varphi|_{abcd}$. Si osservi però che sussistono fra esse le nove identità sotto indicate:

$$\Theta_{pm|r}\,a^{mr} = \varepsilon_p^{\,nt}\,\Lambda_{mn}|_t^{\,m} \equiv 0$$

$$\Theta_{pm|r}\,a^{pr} = \varepsilon^{rnt}\,\Lambda_{mn|tr} \equiv 0$$

$$\Theta_{pm|r}\,\varepsilon_\varrho^{\,r\lambda}\,\varepsilon^{\varrho pm} = \varepsilon_\varrho^{\,r\lambda}\,\varepsilon^{\varrho pm}\,\varepsilon_p^{\,nt}\,\Lambda_{mn|tr} = \varepsilon_\varrho^{\,r\lambda}\,(a^{\varrho t}\,a^{mn} - a^{\varrho n}\,a^{mt})\,\Lambda_{mn|tr} =$$
$$= \varepsilon_\varrho^{\,r\lambda}\,(\Lambda|^{\varrho}{}_{r} - \Lambda_m{}^{\varrho}|^{m}{}_{r}) \equiv 0 \qquad (\Lambda = \Lambda_i^{\,i})$$

Abbiamo quindi nella [5] un sistema di quindici equazioni algebricamente indipendenti nelle quindici $\varphi|_{abcd}$.

Torna a questo punto opportuno introdurre un artificio di calcolo che, assolutamente inessenziale, riesce particolarmente comodo in quanto permette la completa applicazione di operazioni tensoriali, e fecondo in quanto suggerisce e rende spontanee trasformazioni che diversamente richiederebbero particolare virtuosismo.

Introduciamo un tensore $\underset{4}{G}{}^{abcd}_{pmrs}$ il quale goda di tutte le simmetrie rispetto agli indici $^{abcd}_{mnrs}$. Se si tiene presente che gli indici possono solamente assumere i valori 1, 2, 3, le sole componenti distinte del tensore così introdotto saranno del tipo: $\underset{4}{G}{}^{abcd}_{pmrr}$ e pertanto si potrà porre in un riferimento prefissato, ma del resto qualsivoglia:

$$\underset{4}{F}{}^{abcd}_{pmr} \equiv \underset{4}{G}{}^{abcd}_{pmrs}$$

Introducendo con analogo criterio i tensori:

$$\underset{3}{G}{}^{abc}_{pmrs} \equiv \underset{3}{F}{}^{abc}_{pmr} \; ; \quad \underset{2}{G}{}^{ab}_{pmrs} \equiv \underset{2}{F}{}^{ab}_{pmr} \; ; \quad \underset{1}{G}{}^{a}_{pmrs} \equiv \underset{1}{F}{}^{a}_{pmr} \; ; \quad \underset{0}{G}{}_{pmrs} \equiv \underset{0}{F}{}_{pmr}$$

la [5] si scrive:

$$[5'] \qquad \underset{4}{G}{}^{abcd}_{pmrs}\,\varphi|_{abcd} + \underset{3}{G}{}^{abc}_{pmrs}\,\varphi|_{abc} + \underset{2}{G}{}^{ab}_{pmrs}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{G}{}^{a}_{pmrs}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{G}{}_{pmrs}\,\varphi = 0$$

La [5'] ha carattere tensoriale, restando essa invariata rispetto a un generico cambio di riferimento: risolta rispetto a $\varphi|_{abcd}$ (¹) fornisce:

$$[5''] \qquad \varphi|_{ihjk} + \underset{3}{H}{}^{abc}_{ihjk}\,\varphi|_{abc} + \underset{2}{H}{}^{ab}_{ihjk}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{H}{}^{a}_{ihjk}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{H}{}_{ihjk}\,\varphi = 0$$

Deriviamo la relazione tensoriale [5'']; abbiamo:

$$[5'''] \quad \varphi|_{ihjkt} + \underset{4}{K}{}^{abcd}_{ihjkt}\,\varphi|_{abcd} + \underset{3}{K}{}^{abc}_{ihjkt}\,\varphi|_{abc} + \underset{2}{K}{}^{ab}_{ihjkt}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{K}{}^{a}_{ihjkt}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{K}{}_{ihjkt}\,\varphi = 0$$

(¹) Basta a tal fine moltiplicare ambo i membri della [5'] per il tensore g^{pmrs}_{ihjk} reciproco di $\underset{4}{G}{}^{abcd}_{pmrs}$ tale cioè che:

$$\underset{4}{G}{}^{abcd}_{pmrs}\, g^{pmrs}_{ihjk} = a^{a}_{i}\; a^{b}_{h}\; a^{c}_{j}\; a^{d}_{k}$$

e saturare.

nella quale i coefficienti K contengono le derivate di p_{ik} fino al quinto ordine. Saturando le [5‴] col tensore ε si ottiene:

$$[5^{IV}] \qquad \underset{4}{L}{}^{abcd}_{ihjm}\,\varphi|_{abcd} + \underset{3}{L}{}^{abc}_{ihjm}\,\varphi|_{abc} + \underset{2}{L}{}^{ab}_{ihjm}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{L}{}^{a}_{ihjm}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{L}{}_{ihjm}\,\varphi = 0$$

e questa ricordando la [5″] diviene:

$$[6] \qquad \underset{3}{M}{}^{abc}_{ihjm}\,\varphi|_{abc} + \underset{2}{M}{}^{ab}_{ihjm}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{M}{}^{a}_{ihjm}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{M}{}_{ihjm}\,\varphi = 0$$

Conviene ora esprimere i coefficienti della [6] mediante tensori aventi tre indici scoperti oltre quelli saturati: basta a tal fine compiere una sostituzione inversa a quella eseguita nel passaggio dalla [5] alla [5′]; avremo così:

$$[6'] \qquad \underset{3}{N}{}^{abc}_{ihj}\,\varphi|_{abc} + \underset{2}{N}{}^{ab}_{ihj}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{N}{}^{a}_{ihj}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{N}{}_{ihj}\,\varphi = 0$$

Ripetiamo la successione di trasformazioni che ci ha portato dalla [5′] alla [6′], ossia risolviamo la [6′] rispetto a $\varphi|_{abc}$, [6″], deriviamo la [6″], saturiamo col tensore ε, ricordiamo [6″]; avremo successivamente

$$[6''] \qquad \varphi|_{mnp} + \underset{2}{O}{}^{ab}_{mnp}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{O}{}^{a}_{mnp}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{O}{}_{mnp}\,\varphi = 0$$

$$[6'''] \qquad \varphi|_{mnpt} + \underset{3}{P}{}^{abc}_{mnpt}\,\varphi|_{abc} + \underset{2}{P}{}^{ab}_{mnpt}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{P}{}^{a}_{mnpt}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{P}{}_{mnpt}\,\varphi = 0$$

$$[6^{IV}] \qquad \underset{3}{Q}{}^{abc}_{mnr}\,\varphi|_{abc} + \underset{2}{Q}{}^{ab}_{mnr}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{Q}{}^{a}_{mnr}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{Q}{}_{mnr}\,\varphi = 0$$

$$[7] \qquad \underset{2}{R}{}^{ab}_{mnr}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{R}{}^{a}_{mnr}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{R}{}_{mnr}\,\varphi = 0$$

in quest'ultima i coefficienti R contengono le derivate di p_{ik} fino al sesto ordine.

Le [7] non sono tutte algebricamente indipendenti; per separarne quelle indipendenti basta saturarle col tensore ε ottenendo:

[7′] $$\underset{2}{S}{}^{ab}_{mn}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{S}{}^{a}_{mn}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{S}{}_{mn}\,\varphi = 0$$

Ripetiamo ancora una volta la successione di trasformazioni già illustrata; abbiamo successivamente:

[7″] $$\varphi|_{pq} + \underset{1}{T}{}^{a}_{pq}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{T}{}_{pq}\,\varphi = 0$$

[7‴] $$\varphi|_{pqt} + \underset{2}{U}{}^{ab}_{pqt}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{U}{}^{a}_{pqt}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{U}{}_{pqt}\,\varphi = 0$$

[7^{IV}] $$\underset{2}{V}{}^{ab}_{pq}\,\varphi|_{ab} + \underset{1}{V}{}^{a}_{pq}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{V}{}_{pq}\,\varphi = 0$$

[8] $$\underset{1}{W}{}^{a}_{pq}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{W}{}_{pq}\,\varphi = 0$$

in quest'ultima i coefficienti W contengono derivate delle p_{ik} fino al settimo ordine.

Le [8] non sono tutte algebricamente indipendenti; per separarne le indipendenti basta saturarle col tensore ε ottenendo:

[8′] $$\underset{1}{X}{}^{a}_{p}\,\varphi|_{a} + \underset{0}{X}{}_{p}\,\varphi = 0$$

Dividendo per φ (che di sua natura è diverso da zero), la [8] diviene:

[8″] $$\underset{1}{X}{}^{a}_{p}(log\,\varphi)|_{a} + \underset{0}{X}{}_{p} = 0$$

da questa risolvendo rispetto a $(log\,\varphi)|_a$, cioè al solito moltiplicando per x^p_q reciproco di $\underset{1}{X}{}^{a}_{p}$ (tale cioè che $\underset{1}{X}{}^{a}_{p}\,x^p_q = a^a_q$) e saturando, si ha:

[8‴] $$(log\,\varphi)|_q + Y_q = 0$$

e questa, infine, derivata e saturata con tensore ε ci dà:

$$\varepsilon^{iqt} Y_{q|t} = 0 \tag{9}$$

La [9] è equivalente ad una sola equazione indipendente, ed è una equazione differenziale in p_{ik} di ottavo ordine, lineare nelle derivate di ordine massimo. Essa è la condizione cercata.

A tale condizione deve dunque soddisfare un generico tensore doppio simmetrico perchè possa essere assunto come tensore di sforzi interni in un continuo tridimensionale isotropo euclideo, anche se si dispone a piacimento di opportune forze di campo e di una opportuna variabilità da punto a punto dei parametri elastici del continuo stesso.

3°. – Veniamo ora ai continui bidimensionali non omogenei ma isotropi; l'equilibrio indefinito è retto ancora dalle [1] e [2], con l'avvertenza che gli indici sono suscettibili solo dei valori 1 e 2. Quanto alla [3] se il continuo bidimensionale è euclideo (curvatura gaussiana nulla: piano e sviluppabili) essa va sostituita dall'unica equazione scalare seguente:

$$\varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \zeta_{ik|rs} = 0 \qquad (i, k, r, s = 1, 2) \tag{10}$$

Questa espressa negli sforzi mediante la [2] diviene:

$$\varepsilon^{ir} \varepsilon^{ks} \left\{ (Ap)|_{rs}\, a_{ik} + (Bp_{ik})|_{rs} \right\} = 0 \tag{10'}$$

È questa un'unica equazione nelle due funzioni: $Ap = \psi(x_1, x_2)$ e $B = \varphi(x_1, x_2)$; essa pertanto, quando si disponga di tali funzioni a piacere, non impone nessuna restrizione al tensore p_{ik}.

Se il continuo non è euclideo, la [10] è sostituita da una più complessa equazione (1), ma si tratta sempre di una unica equazione scalare.

---

(1) B. Finzi, *Sopra il tensore di deformazione di un velo*. R. Ist. Lomb., vol. LXII, fasc. XI-XV, 1930.

Si può pertanto concludere in generale che nel caso isotropo bidimensionale (a differenza di quanto avviene nel caso tridimensionale) qualunque tensore doppio simmetrico può a priori essere assunto come tensore di sforzi interni di un continuo dotato di opportune forze di campo e di parametri elastici opportunamente variabili da punto a punto.

4°. – Abbandoniamo ora la restrizione posta che il continuo sia isotropo.

Nulla da aggiungere per il caso bidimensionale nel quale già nel caso isotropo nessuna condizione vien posta al tensore degli sforzi interni.

Per i continui tridimensionali euclidei osserviamo allora che il legame sforzi deformazioni sarà caratterizzato non più da due soli parametri (le funzioni A e B) ma da almeno tre. Questo terzo parametro (ed i successivi, se i parametri sono più di tre) comparirà nella [9] e basterà in generale la sua presenza, data la sua arbitrarietà, a togliere alla [9] stessa ogni carattere di vincolo al tensore p_{ik}.

Si può quindi concludere in generale che nel caso bidimensionale ed in quello tridimensionale euclideo, qualunque tensore doppio simmetrico può essere assunto a caratterizzare lo stato di tensione elastica di un continuo non omogeneo non isotropo quando si disponga di opportune forze di campo e di parametri elastici opportunamente variabili da punto a punto.