ACTA
Vol. V - N. 5

SULLO STATO DI TENSIONE ELASTICA NEI CONTINUI OMOGENEI (*)

PIERO LOCATELLI

SVMMARIVM. — Aequationes statuuntur quibus genericus duplex symmeter tensor congruere debet, ut aequalis elastici corporis, elasticis constantibus viribusque ipsum urgentibus opportune abrogatis, internam tensionem exprimere valeat.

È ben noto che la deformazione infinitesima di un continuo tridimensionale è caratterizzata, in un assegnato riferimento, da sei funzioni dei punti dello spazio nel quale il continuo stesso è definito, e che, se si vuole mantenuta l'integrità di questo, tali funzioni non sono completamente arbitrarie, ma obbligate a rispettare le condizioni di congruenza, o di ST. VENANT, espresse, con l'uso di simboli abituali, dalle:

$$
[*]\quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial x^2} = 2\,\frac{\partial^2 \xi_{xy}}{\partial x\,\partial y} \qquad
\frac{\partial \xi_{xx}}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \xi_{zy}}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial^2 \xi_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial y^2} = 2\,\frac{\partial^2 \xi_{yz}}{\partial y\,\partial z} \qquad
\frac{\partial \xi_{yy}}{\partial z\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \xi_{yx}}{\partial z} + \frac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \xi_{xz}}{\partial y}\right)\\
&\frac{\partial^2 \xi_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_{xx}}{\partial z^2} = 2\,\frac{\partial^2 \xi_{zx}}{\partial z\,\partial x} \qquad
\frac{\partial \xi_{zz}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \xi_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial \xi_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \xi_{yx}}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

Sono queste sei equazioni algebricamente indipendenti, ma differenzialmente non tali. Che ciò sia ci è intanto assicurato dal fatto che esse dicono semplicemente che la deformazione è figlia di uno spostamento continuo, e del resto arbitrario, e che essa deve pertanto

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti, il 22 marzo 1941.

conservare la triplice arbitrarietà di questo. Ma ciò può anche essere visto in modo formale con tutta facilità se si fa ricorso all'algoritmo tensoriale, come a quello che, riunendo le componenti di deformazioni ξ_{ik} in un tensore, il tensore di deformazione, fa di esse un unico ente geometrico atto a ben sposare l'unicità del fatto fisico, riuscendo così particolarmente comodo e suggestivo.

Le [*] infatti assumono l'aspetto (1):

$$[**] \qquad \varepsilon^{irh}\,\varepsilon^{ksj}\,\xi_{ik\,|\,rs} = 0 \qquad (i, k, r, s, h, j = 1, 2, 3)$$

avendo con ε^{irh} indicato il tensore di Ricci, tensore triplo se lo spazio è tridimensionale (2).

Basta allora osservare che i primi membri delle [**] derivati rispetto alla variabile spaziale x_l e saturati col tensore fondamentale a_{hl} si annullano dando luogo a tre identità, talchè le [**] stesse si riducono a tre sole relazioni effettivamente indipendenti.

---

(1) Conformemente all'uso indico con indici in alto le componenti controvarianti di un tensore e con indici in basso le covarianti; una lineetta fra gli indici sostituisce il segno di derivazione (derivazione ordinaria, in coordinate cartesiane; derivazione tensoriale, in coordinate generali); sono soppressi i simboli di sommatoria quando stanno a rappresentare una semplice saturazione rispetto agli indici spaziali; ad esempio la prima delle [**] abbrevia la seguente:

$$\sum_{ikrs}{}_{1}^{3}\, \varepsilon^{irh}\, \varepsilon^{ksj}\, \xi_{ik|rs} = 0$$

(2) Nello spazio di metrica

$$ds^2 = a_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n.)$$

il tensore a_{ik} è il tensore fondamentale (se lo spazio è euclideo e le coordinate sono cartesiane, $a_{ik} = 1$ se $i = k$, $a_{ik} = 0$ se $i \neq k$). Esso è costante nel senso che la sua derivata tensoriale è nulla, ed è elemento essenziale nel prodotto scalare fra due vettori $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = a_{ik} u^i v^k$.

Il tensore di Ricci è un tensore nplo (doppio nello spazio a 2 dimensioni, triplo in quello a 3) ed è così definito: $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = 0$ se almeno 2 indici sono uguali; $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} \pm = \sqrt{\|a_{ik}\|}$ se gli indici sono tutti distinti, valendo il segno + o il segno — secondo la classe della permutazione $i_1 \ldots i_n$ rispetto alla fondamentale $1 \ldots n$. (se lo spazio è euclideo e le coordinate sono cartesiane, le componenti non nulle del tensore di Ricci sono $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \pm \sqrt{\|a_{ik}\|} = \pm 1$). Nello spazio tridimensionale il tensore di Ricci è elemento essenziale nel prodotto vettoriale. Precisamente, se $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}$, si ha $w_h = \varepsilon_{hik} u^i v^k$.

A tali condizioni, differenziali del secondo ordine, deve dunque soddisfare un tensore doppio simmetrico perchè possa essere considerato come tensore di deformazione di un qualsivoglia continuo.

Sorge allora spontanea la domanda se le sei funzioni che caratterizzano lo stato di tensione in un punto di un continuo siano, alla loro volta, obbligate da qualche vincolo ed, in caso affermativo, quale sia la natura di esso.

Il rispondere a tale domanda, se può avere qualche valore da un punto di vista puramente speculativo, ne ha anche da un punto di vista applicativo quando si tengano presenti alcune considerazioni.

Una prima si riallaccia ai tentativi di soluzione di nuovi problemi elastici: in essi uno dei modi di procedere può essere quello di « dare », aiutati dall'intuizione, lo stato di tensione e risalire da questo agli sforzi al contorno, alla deformazione ed allo spostamento; sarà allora necessario fin dall'inizio, ad evitare inutili fatiche, accertare che lo stato di tensione così « dato » cominci a rispettare, se ve ne sono, i vincoli cui sopra s'è fatto cenno.

Una seconda riguarda invece i tentativi, numerosi nel passato e neppure oggi forse del tutto abbandonati, di costruire dei modelli elastici di fenomeni fisici: un primo criterio per accertare la possibilità di buon esito sarà il constatare se quegli enti che dovranno essere rappresentati da sforzi interni rispondano, anche qui, agli eventuali inderogabili vincoli che li dominino.

Premesso allora che, caratterizzando lo stato di tensione con un tensore doppio simmetrico, abbiamo già soddisfatto le condizioni che nascono dall'imporre l'equilibrio alla rotazione di ogni singolo elemento del continuo quando l'equilibrio alla traslazione sia assicurato da opportune forze di massa, delle quali supponiamo di disporre a nostro piacimento, la domanda cui s'è accennato si formula così: possono sei funzioni qualunque dei punti dello spazio essere assunte come stato di tensione (come componenti del tensore simmetrico degli sforzi interni) di un opportuno corpo dotato di opportune forze di massa e di contorno ed, eventualmente, di opportuni vincoli? O invece, pure disponendo di tutte queste forze e delle caratteristiche del continuo, ciò non è sempre possibile? Ed in questo caso a quali relazioni devono ubbidire quelle sei funzioni?

Sono ovvie le modifiche alle domande così formulate quando, invece che ad un continuo tridimensionale, ci si riferisca a continui bidimensionali o più che tridimensionali. Pur limitandosi a corpi a due e a tre dimensioni, come a quelli che consentono pratiche e reali applicazioni, anche tecniche, il problema posto e la sua soluzione, per essere come si vedrà essenzialmente legati al tensore di Ricci, cambiano sostanzialmente nei due casi, rientrando fra quelli strettamente connessi alle dimensioni dello spazio.

Una seconda differenziazione scaturisce poi dal porre al continuo l'obbligo di essere isotropo ed omogeneo, o solo isotropo, o solo omogeneo, o qualunque.

È oggetto di questa Nota lo studio e la soluzione del problema sopra esposto per continui bidimensionali e tridimensionali omogenei; sarà oggetto di una seconda Nota il caso di continui, sempre bi e tridimensionali non omogenei.

1. – Nell'insieme delle equazioni fondamentali della statica dei sistemi elastici tridimensionali si distinguono tre diversi gruppi di equazioni. Il primo gruppo [1] afferma l'equilibrio d'ogni singolo elemento di volume sotto l'azione delle forze che gli sono applicate: comprende tre equazioni che nascono dall'imporre l'equilibrio alla traslazione e dicono che la divergenza del tensore degli sforzi interni eguaglia le forze di volume; e tre equazioni che nascono dall'imporre l'equilibrio alla rotazione e dicono che il tensore degli sforzi è simmetrico talchè esso ha solo sei componenti distinte.

Il secondo gruppo di equazioni [2] stabilisce il legame fra gli sforzi e le deformazioni: esso è di origine strettamente sperimentale: vi compaiono nel caso più generale ventuno coefficienti che caratterizzano il comportamento elastico del corpo soggetto agli sforzi; trattasi di sei equazioni nei predetti coefficienti, nelle sei distinte componenti del tensore degli sforzi e nelle sei componenti della deformazione. Usando il linguaggio tensoriale, potremo dire che il secondo gruppo di equazioni stabilisce una semplice proporzionalità, attraverso al tensore quadruplo elastico proprio del continuo in oggetto, fra il tensore degli sforzi interni e il tensore di deformazione.

Il terzo gruppo [3] nasce dall'imporre che il continuo a deformazione avvenuta abbia conservata la sua continuità, non siano, cioè, avvenute lacerazioni e strappi. Consta delle « condizioni di congruenza o di St. Venant » che già sono state ricordate: sono sei equazioni alle derivate seconde fra le componenti di deformazione e già s'è rilevato come esse debbano essere considerate come tre sole relazioni essenzialmente indipendenti.

Si constata subito che il problema dell'equilibrio elastico è dall'insieme delle sue equazioni fondamentali completamente impostato: si hanno infatti quindici incognite (le nove componenti del tensore degli sforzi e le sei del tensore di deformazione) in quindici equazioni (le sei del 1° gruppo, le sei del 2°, le tre del 3°).

Appare pertanto manifesto, ed è ben noto, il ruolo essenziale che compete alle condizioni di congruenza nel definire lo stato di tensione: vale però la pena di porre in luce quali siano i più generali riflessi che su questo esse esercitano: più generali nel senso che essi siano indipendenti e dalle costanti elastiche del corpo e dalle forze di campo e di contorno che lo sollecitano e dagli eventuali vincoli che lo trattengono. Ed in ciò sarà esauriente risposta alle domande poste.

Ci basterà trasformare le condizioni di congruenza in equazioni fra gli sforzi, servendoci del legame fra questi e le deformazioni. Tre, le equazioni omogenee indipendenti sostanzialmente da cui partiamo; tre, le equazioni omogenee indipendenti cui così arriviamo: compaiono in esse le sei componenti distinte del tensore degli sforzi e le ventuno del tensore elastico.

Introduciamo ora la restrizione che ci siamo posta di considerare continui omogenei: le ventuno componenti del tensore elastico diventano ventuno costanti che, per essere le equazioni omogenee si riducono a venti sole essenziali per noi.

Risolviamo allora una delle nostre equazioni, o, meglio opportune equazioni dedotte da queste, successivamente rispetto alle nostre costanti: avremo venti equazioni il cui primo membro sarà costituito da una delle costanti, mentre il secondo conterrà le derivate del tensore degli sforzi e le altre dicianove costanti. Deriviamo queste venti equazioni rispetto alle coordinate spaziali otterremo venti equazioni indipendenti che permetteranno di esprimere le costanti in funzione delle derivate del tensore degli sforzi. Portati questi valori delle costanti nelle nostre tre equazioni, le trasformeremo in tre altre nelle sole derivate del tensore degli sforzi e saranno queste le relazioni cercate.

Il problema così impostato e risolto per un corpo omogeneo non isotropo non cambia natura se questo è invece isotropo: il procedimento però si snellisce perchè i ventuno coefficienti si riducono a due e questi, per la ricordata omogeneità delle equazioni che li contengono, al loro rapporto ossia ad una sola costante essenziale. Il procedimento, pur non perdendo di generalità rispetto a quello per il corpo non isotropo, si presta ad essere esposto per esteso sviluppando i calcoli e le trasformazioni che sono stati esposti a parole.

2. – L'equilibrio elastico indefinito di un continuo tridimensionale è retto dalle:

$$[1] \qquad p_{ik}{}^{|k} = F_i \qquad\qquad p_{ik} = p_{ki}$$

$$[2] \qquad \xi_{ik} = C_{ikrs} p^{rs} \qquad\qquad (i, k, r, s, h, j = 1, 2, 3)$$

$$[3] \qquad \varepsilon^{irh} \varepsilon^{ksj} \xi_{ik\,|\,rs} = 0$$

nelle quali p_{ik} è il tensore degli sforzi interni, ξ_{ik} quello di deformazione, C_{ikrs} il tensore elastico, ε^{irh} il tensore di Ricci, che nello spazio tridimensionale è triplo.

Se il corpo è isotropo, il tensore elastico ha due sole componenti distinte e le [2] diventano:

$$\xi_{ik} = A p\, a_{ik} + B p_{ik}$$

nelle quali A e B sono due costanti, a_{ik} è il tensore fondamentale e

$$p = p_{ik} a^{ik}$$

è l'invariante lineare degli sforzi.

Le [3] in virtù delle [2] diventano :

$$\varepsilon^{irh}\,\varepsilon^{ksj}\left\{\mathrm{A}\,a_{ik}\,p_{|rs}+\mathrm{B}\,p_{ik|rs}\right\}=0$$

e ponendo $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}=\nu$, si ha:

[4] $$\varepsilon^{irh}\,\varepsilon^{ksj}\left\{a_{ik}\,p_{|rs}+\nu\,p_{ik|rs}\right\}=0$$

Ricordando ora che:

[5] $$\varepsilon^{irh}\,\varepsilon^{ksj}\,a_{ik}=a^{rs}\,a^{hj}-a^{rj}\,a^{hs}$$

la [4] diviene:

$$(a^{rs}\,a^{hj}-a^{rj}\,a^{hs})\,p_{|rs}+\nu\,\varepsilon^{irh}\,\varepsilon^{ksj}\,p_{ik|rs}=0$$

ossia:

[4'] $$\Delta_2 p\, a^{hj}-p^{|hj}+\nu\,\varepsilon^{irh}\,\varepsilon^{ksj}\,p_{ik|rs}=0\,.$$

Dalla [4'], benchè inessenziale allo scopo che perseguiamo, scendono con tutta facilità le equazioni di Beltrami. Come è noto queste si riferiscono al caso che le forze di volume siano nulle; si ha allora:

[1'] $$p_{ik}{}^{|k}=0 \qquad\qquad p_{ik}=p_{ki}\,.$$

Ricordando che:

$$\varepsilon^{irh}\,\varepsilon^{ksj}=\begin{vmatrix} a^{ik} & a^{is} & a^{ij}\\ a^{rk} & a^{rs} & a^{rj}\\ a^{hk} & a^{hs} & a^{hj}\end{vmatrix}=$$

$$=a^{ik}(a^{rs}\,a^{hj}-a^{rj}\,a^{hs})-a^{is}(a^{rk}\,a^{hj}-a^{rj}\,a^{hk})+a^{ij}(a^{rk}\,a^{hs}-a^{hk}\,a^{rs})$$

la [4′] diviene:

$$\Delta_2 p a^{hj} - p^{|hj} +$$
$$+ \nu \left\{ p_{|rs}(a^{rs} a^{hj} - a^{rj} a^{hs}) - p^s{}_{k|rs}(a^{rk} a^{hj} - a^{rj} a^{hk}) + p^j{}_{k|rs}(a^{rk} a^{hs} - a^{hk} a^{rs}) \right\} = 0$$

ossia:

$$\Delta_2 p a^{hj} - p^{|hj} + \nu \left\{ \Delta_2 p a^{hj} - p^{|hj} - p^{sr}{}_{|rs} a^{hj} + p^{sh}{}_{|rs} a^{rj} + p^{jr}{}_{|rs} a^{hs} - p^{jh}{}_{|rs} a^{rs} \right\} = 0$$

od anche, tenuto conto delle [1′] e di quelle che si ottengono da queste per derivazione:

$$[4''] \qquad (1+\nu)\left(\Delta_2 p a^{hj} - p^{|hj}\right) - \nu \Delta_2 p^{hj} = 0$$

dalla quale in particolare moltiplicando per a_{hj} e saturando scende:

$$\Delta_2 p = 0$$

ed allora la [4″] si semplifica nella:

$$[4'''] \qquad p^{|hj} + \frac{\nu}{1+\nu} \Delta_2 p^{hj} = 0 \ .$$

Le [4‴] sono le note equazioni di Beltrami (1) alle quali l'algoritmo tensoriale permette di giungere, come s'è visto, con facilità conferendo loro veste particolarmente semplice.

(1) Beltrami E., *Op. Mat.*, Milano, 1920, tom. IV, pag. 511. — Sulla sufficienza delle equazioni di Beltrami confronta: Almansi E., « Rend. Lincei », 1907, vol. XVI, pag. 23. — Cfr. anche Finzi B., « Rend. R. Ist. Lombardo », 1934, vol. LXVII, pag. 261.

Chiudendo la digressione fatta per giungere alle [4'''], riprendiamo la [4']. Ricordando la [5], la [4'], moltiplicando per a_{hj} e saturando diviene:

$$2\,\Delta_2 p + \nu\,(a^{ik}\,a^{rs} - a^{is}\,a^{rk})\,p_{ik|rs} = 0$$

ossia

$$2\,\Delta_2 p + \nu\,(\Delta_2 p - p_{ik}|^{ik}) = 0$$

dalla quale:

$$\nu = \frac{-\,2\,\Delta_2 p}{\Delta_2 p - p_{ik}|^{ik}}$$

oppure:

[6] $$\frac{2}{\nu} + 1 = \frac{p_{ik}|^{ik}}{\Delta_2 p}\,.$$

La [4'], quando in essa si ponga per ν il valore dato dalla [6] dà:

[7] $$(p_{ik}|^{ik} - \Delta_2 p)\,(\Delta_2 p\, a^{hj} - p^{|hj}) + 2\,\varepsilon^{irh}\,\varepsilon^{ksj}\,\Delta_2 p\; p_{ik|rs} = 0\,.$$

Le [7] sono due sole equazioni differenzialmente indipendenti: esse infatti sono figlie delle tre [4'] fra le quali è stata fatta la eliminazione della ν (1).

Ricordando ora che, per essere il continuo omogeneo, ν è costante, dalla [6] si ha:

$$\left(\frac{p_{ik}|^{ik}}{\Delta_2 p}\right)_{|t} = 0 \qquad (t = 1, 2, 3)$$

---

(1) Formalmente del resto moltiplicando le [7] per a_{hj} e saturando si ottiene una identità scalare: perciò le [7] che erano tre sole indipendenti si riducono a due solamente.

dalla quale:

$$p_{ik}|^{ik}{}_{t}\,\Delta_2 p - p_{ik}|^{ik}\,\Delta_2 p|_t = 0 \tag{8}$$

Queste non sono che una unica equazione differenzialmente indipendente: invero esse affermano semplicemente che è nullo il gradiente dello scalare: $\Gamma = \dfrac{p_{ik}|^{ik}}{\Delta_2 p}$ (1).

Concludendo le due equazioni [7] e la [8] sono tre equazioni differenzialmente indipendenti cui deve soddisfare un tensore simmetrico p_{ik} perchè possa essere assunto come tensore degli sforzi interni in un continuo isotropo omogeneo tridimensionale.

Vale la pena di osservare che le equazioni ottenute non sono lineari: due (le [7]) sono di secondo ordine; la terza (la [8]) è del terzo ordine (2).

3. – In modo del tutto analogo può essere trattato il caso in cui il continuo sia bidimensionale (membrana). Limitandoci alle superfici sviluppabili (curvatura nulla), l'equilibrio elastostatico indefinito è retto dalle:

$$p_{ik}|^{k} = F_i \qquad p_{ik} = p_{ki} \tag{9}$$

$$\xi_{ik} = C_{ikrs}\,p^{rs} \qquad (i,k,r,s=1,2) \tag{10}$$

$$\varepsilon^{ir}\,\varepsilon^{ks}\,\xi_{ik|rs} = 0 \tag{11}$$

analoghe alle corrispondenti del caso tridimensionale, con la sostanziale differenza però che il tensore di Ricci, ε^{ir}, trattandosi di uno spazio bidimensionale, vi è doppio e non triplo e tale differenza improntera non solo il formale sviluppo dei calcoli, ma anche i risultati finali.

(1) Formalmente del resto dalle tre equazioni $\Gamma_{|t} = 0$ scendono le identità $\varepsilon^{iht}\,\Gamma_{|th} \equiv 0$ queste alla loro volta si riducono a due perchè da esse si trae la identità scalare: $\varepsilon^{iht}\,\Gamma_{|thi} \equiv 0$.

(2) Nello sviluppo del calcolo per il caso non isotropo s'è operato, come è facile rilevare, una inessenziale, ma spontanea, variante al calcolo indicato per il caso non isotropo.

Ancor qui, senza pregiudizio della generalità, l'esposizione dei calcoli materiali viene esposta per il caso isotropo. Le [10] allora si trasformano nelle:

[10']
$$\xi_{ik} = \mathrm{A}\, p\, a_{ik} + \mathrm{B}\, p_{ik}$$

e la [11], fatto: $\nu = \dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$, diviene:

[11']
$$\varepsilon^{ir}\,\varepsilon^{ks}\,(p_{|rs}\,a_{ik} + \nu\, p_{ik|rs}) = 0 \ .$$

Ricordando ora che

$$\varepsilon^{ir}\,\varepsilon^{ks} = \begin{vmatrix} a^{ik} & a^{is} \\ a^{rk} & a^{rs} \end{vmatrix} = a^{ik}\,a^{rs} - a^{rk}\,a^{is}$$

Si ha:

$$(a^{ik}\,a^{rs} - a^{is}\,a^{rk})\,(p_{|rs}\,a_{ik} + \nu\, p_{ik|rs}) = 0$$

dalla quale:

[12]
$$\Delta_2 p + \nu\,(\Delta_2 p - p_{ik}|^{ik}) = 0$$

Sebbene inessenziale al nostro scopo, osserviamo che dalla [12] se le forze di campo sono nulle, scende immediatamente la ben nota:

$$\Delta_2 p = 0$$

Si ha infatti:

$$p_{ik}|^{k} = \mathrm{F}_i = 0 \qquad\qquad p_{ik}|^{ik} = 0$$

e quindi la [12] diviene:

$$(1 + \nu)\,\Delta_2 p = 0 \qquad\qquad \Delta_2 p = 0\,.$$

Riprendendo la [12] si ha:

$$\nu = \frac{-\Delta_2 p}{\Delta_2 p - p_{ik}|^{ik}}$$

e, per essere ν costante:

$$[13] \qquad p_{ik}|^{ik}{}_l \Delta_2 p - p_{ik}|^{ik} \Delta_2 p|_l = 0 \, .$$

La [13] è una sola equazione indipendente: afferma infatti che è nullo il gradiente dello scalare $\Gamma = \dfrac{p_{ik}|^{ik}}{\Delta_2 p}$.

Concludendo la [13] rappresenta la condizione cui deve rispondere un tensore doppio simmetrico nello spazio bidimensionale perchè possa essere assunto come tensore degli sforzi interni di una membrana sviluppabile: trattasi di una equazione di terzo ordine non lineare.

Ad una equazione di terzo ordine, come è facile controllare, si arriva pure se in luogo di una membrana sviluppabile si considera una membrana a curvatura costante (superficie applicabile ad una sfera o ad una pseudosfera). Basterà sostituire alla [11] la: (1)

$$\varepsilon^{ik} \varepsilon^{rs} \zeta_{ik|rs} + k\,\theta = 0$$

essendo k la curvatura gaussiana e θ la dilatazione di campo: $\theta = \xi^i{}_i$

Se invece la membrana è applicabile a una superficie di rotazione la [11] deve essere sostituita da una più complessa relazione in cui compaiono le ξ_{ik} con le loro derivate fino alle terze (1) e pertanto la relazione corrispondente alla [13] diverrà del quarto ordine.

Se infine la membrana ha una metrica generica caratterizzata da un assegnato:

$$ds^2 = a_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

(1) Finzi B., *Sopra il tensore di deformazione di un velo*, « Rend. R. Ist. Lombardo », vol. LXIII, fasc. XI-XV.

la [11] viene sostituita da una relazione in cui compaiono la ξ_{ik} e le loro derivate fino alle quarte (¹). Si giungerà quindi in tal caso ad una relazione di quinto ordine.

Vuol essere considerato il fatto che, sia per i corpi tridimensionali che per le membrane, non s'è introdotta alcuna restrizione circa le forze in campo: lo si è fatto di proposito perchè, se nella statica tali forze hanno in generale poca importanza e, al solito, si riducono a quelle dovute alla gravitazione, non altrettanto può dirsi quando dall'equilibrio statico si sconfina in quello dinamico; le relazioni sopra trovate conservano il loro valore anche in presenza di quelle particolari forze di campo che sono le « forze d'inerzia », cioè le condizioni trovate perchè un tensore doppio simmetrico possa essere interpretato come tensore di sforzi in un continuo sono le stesse (le tre [7] e [8] per il caso tridimensionale, la [13] o le sue simili per le membrane) sia nel caso statico che nel caso dinamico.

(¹) B. Finzi, loc. cit.