ACTA
Vol. V - N. 3

SOPRA UNA CERTA EQUAZIONE FUNZIONALE (*)

GIORGIO GALBURA

SVMMARIVM. — Quamdam aequationem functionalem, quam SEVERI in quibusdam geometricis quaestionibus invenerat, Auctor perscrutatur, definiens quid requiratur quidque sufficiat ut huius aequationis integrale (quod ipse determinat), positis generalioribus hypothesibus, constituatur.

F. SEVERI, nel 1902, ha considerato incidentalmente (1) l'equazione funzionale

$$\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y)=f(x,y) \tag{1}$$

ove $\varphi(x)$ è la funzione incognita, mentre $f(x,y)$ è una funzione nota. Egli ha determinato l'espressione della soluzione $\varphi(x)$ per valori interi di x, posto che essa esiste.

Noi riprendiamo qui (2) lo studio della [1], determinando tra l'altro la condizione necessaria e sufficiente perchè la [1] abbia una soluzione dotata di derivate dei primi due ordini e trovando, sotto questa ipotesi, la forma generale della soluzione.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio F. Severi il 22 marzo 1941.

(1) F. SEVERI, *Sopra alcune singolarità delle curve di un iperspazio*. Mem. della R. Accademia di Torino, 1902. In questa Memoria si trova considerata l'equazione stessa per funzioni di un numero qualunque di variabili.

(2) La ricerca mi è stata suggerita dall'Ecc. SEVERI, in relazione ad argomento trattato dal Prof. FABIO CONFORTO nel corso sulle « Funzioni abeliane e matrici di Riemann » da questi tenuto presso il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica.

1. - Si osservi anzitutto, che se $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ sono soluzioni, rispettivamente, delle equazioni

$$\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y)=f_1(x,y)$$

$$\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y)=f_2(x,y)$$

la combinazione lineare $A\varphi_1(x)+B\varphi_2(x)$, con coefficienti costanti A e B, è soluzione dell'equazione

$$\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y)=Af_1(x,y)+Bf_2(x,y)$$

In particolare, la differenza tra due soluzioni della [1] è soluzione dell'equazione di Cauchy:

$$\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y)=0 \qquad [2]$$

In altre parole: Considerato un campo funzionale C, il quale contenga sempre la somma di due sue qualunque funzioni, *la soluzione generale, entro* C, *della* [1] *si ottiene aggiungendo ad una soluzione particolare di essa, appartenente a* C, *la soluzione generale della* [2] *in* C.

2. - Notiamo ora che, se la [1] ha soluzione, la $f(x,y)$ deve necessariamente soddisfare alle condizioni seguenti:

1) $f(x,y)$ è simmetrica rispetto alla retta $x=y$, perchè tale è il primo membro della [1];

2) $f(x,y)$ assume un valore costante $a=-\varphi(0)$ sugli assi coordinati, perchè, se nella [1] si pone $x=0$, si ha $f(0,y)=-\varphi(0)=a$; e, se in essa si pone $y=0$, si ha analogamente $f(x,0)=a$.

Inoltre, se la [1] ammette una soluzione $\varphi(x)$ dotata delle derivate dei primi due ordini, la $f(x,y)$ dovrà possedere le derivate parziali dei primi due ordini; di più le sue derivate parziali seconde miste dovranno essere uguali, e si avrà:

[3] $$\varphi'(x+y)-\varphi'(y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

[4] $$\varphi''(x+y)=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\ ; \quad \text{cioè:}$$

3) la derivata seconda mista della $f(x,y)$ è funzione della sola somma $x+y$

[5] $$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}=\psi(x+y)$$

ove la $\psi(z)$ è una funzione integrabile.

Dico che le 1), 2) e 3) sono condizioni non solo necessarie, ma anche sufficienti, affinchè la [1] ammetta una soluzione derivabile sino al secondo ordine.

Infatti, data $\psi(z)$ integrabile, la sola funzione che soddisfaccia alle condizioni 1), 2), 3), è la seguente:

[6] $$f(x,y)=\int_0^x du \int_0^y \psi(u+v)\,dv+a$$

Dire che la $f(x,y)$, soddisfa alle 1), 2), 3), equivale pertanto a dire che essa ha la forma [6].

Allora la funzione

[7] $$\varphi(x)=\int_0^x dt \int_0^t \psi(u)\,du-a\ ,$$

che ci dà una soluzione particolare dell'equazione ottenuta dalla [3] ponendovi al posto di $f(x,y)$ la [6] e facendovi poi $y=0$, soddisfa alla [1], ove $f(x,y)$ sia data dalla [6].

Infatti si ha

$$\int_0^{x+y} dt \int_0^t \psi(u)\,du - \int_0^x dt \int_0^t \psi(u)\,du - \int_0^y dt \int_0^t \psi(u)\,du - a + 2a =$$

$$= \int_y^{x+y} dt \int_0^t \psi(u)\,du - \int_0^x dt \int_0^t \psi(u)\,du + a = \int_0^x \left[\int_0^{t+y} \psi(u)\,du - \int_0^t \psi(u)\,du \right] dt +$$

$$+ a = \int_0^x dt \int_t^{t+y} \psi(u)\,du + a = \int_0^x dt \int_0^y \psi(u+t)\,du + a = f(x,y)$$

Si giunge pertanto al seguente risultato:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè la [1] *abbia una soluzione derivabile sino al secondo ordine, è che* $f(x,y)$ *sia della forma* [6] *con* $\psi(z)$ *funzione arbitraria, purchè integrabile. La soluzione generale della* [1] *(in campo funzionale che contenga tutte le funzioni dotate delle derivate dei primi due ordini, e, assieme a due sue funzioni qualunque, anche la loro somma) è data allora dalla funzione*

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}(x) + \int_0^x dt \int_0^t \psi(u)\,du - a \qquad [8]$$

ove $\overline{\varphi}(x)$ *indica la soluzione generale della* [2] *(nel campo* C*).*

Il risultato si può anche enunciare così:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la [1] *abbia una soluzione derivabile sino al secondo ordine, è che la* $f(x,y)$ *sia simmetrica rispetto alla retta* $x = y$, *costante sugli assi coordinati, e che la derivata seconda mista di* $f(x,y)$ *sia funzione solo di* $x + y$.

3. – Ora dimostriamo come la soluzione della [1], data, per valori interi di x, da Severi (1), quando la $f(x,y)$ abbia la forma [6] si riduce alla [8].

(1) Op. cit. nota 1.

L'espressione indicata da SEVERI è la seguente:

$$\varphi(x)=\varphi(1)x+\sum_{1}^{x-1}{}_{i}\, f(1,x-1)\ . \tag{9}$$

Se al posto di $f(1,x-i)$ s'introduce la sua espressione data dalla [6] e si usufruisce dell'identità

$$\int_0^x du\int_0^y \psi(u+\nu)\,d\nu=\int_0^{x+y} dt\int_0^t \psi(u)\,du-\int_0^x dt\int_0^t \psi(u)\,du-\int_0^y dt\int_0^t \psi(u)\,du$$

si trova

$$\varphi(x)=\varphi(1)x+\sum_{1}^{x-1}{}_{i}\left\{\int_0^{x+1-i} dt\int_0^t \psi(u)\,du-\int_0^{x-i} dt\int_0^t \psi(u)\,du-\int_0^1 dt\int_0^t \psi(u)\,du+a\right\}=$$

$$=\varphi(1)x+\int_0^x dt\int_0^t \psi(u)\,du-\int_0^1 dt\int_0^t \psi(u)\,du-(x-1)\int_0^1 dt\int_0^t \psi(u)\,du+(x-1)a=$$

$$=\int_0^x dt\int_0^t \psi(u)\,du-a+\left[\varphi(1)-\int_0^1 dt\int_0^t \psi(u)\,du-a\right]x$$

ossia, ponendo

$$\varphi(1)-\int_0^1 dt\int_0^t \psi(u)\,du-a=k$$

$$\varphi(x)=kx+\int_0^t dt\int_0^x \psi(u)\,du-a \tag{10}$$

espressione che rientra nella [8], e in particolare coincide con la [8] stessa, se il campo C sopra considerato è quello delle funzioni continue. Si noti inoltre che, come era prevedibile a priori, *per valori* *interi di* x, la [10] coincide con la [8] *qualunque sia il campo* C *considerato.* Infatti, qualunque soluzione, anche discontinua, $\bar{\varphi}(x)$ della [2], coincide, per valori interi di x con la funzione $x\,\bar{\varphi}$ [1].

4. - Se nella [1] facciamo $x=y$ essa diviene

[11] $$\varphi(2x)-2\varphi(x)=f(x,x)$$

e ogni soluzione della [2] è anche soluzione della [11].

Inoltre, se si pone $x=2^z$, $\varphi(2^z)=\Phi(z)$, $f(2^z,2^z)=\mathrm{F}(z)$, la [11] diviene

[12] $$\Phi(z+1)-2\,\Phi(z)=\mathrm{F}(z)\ .$$

Quest'equazione è ben nota, ed è stata risolta tra gli altri, sotto l'ipotesi che $\mathrm{F}(z)$ sia una funzione meromorfa, da HURWITZ (1).

Una volta che si conosca la soluzione generale della [12], si ha subito la soluzione generale della [11]. Non è detto però che essa sia soluzione della [1]; ma è certo che la soluzione generale della [1] è un caso particolare di essa (2).

Questa è pertanto un'altra via per la quale si può giungere alla soluzione generale della [1].

5. - Che (se si toglie la condizione che la $\varphi(x)$ debba avere derivate sino al 2° ordine) la [1] possa avere soluzione anche per funzioni $f(x,y)$ di forma più generale di quella data dalla [6], è evidente: se infatti si dà ad arbitrio una φ discontinua, e mediante essa si definisce $f(x,y)$, questa risulterà (almeno in generale) discontinua e non potrà avere la forma [6].

---

(1) HURWITZ, *Sur l'intégrale d'une function entiere*, « Acta Matematica », 20.
(2) Questa osservazione mi è stata indicata dal Prof. G. RICCI.

È però interessante vedere come, se ci si limita a considerare le funzioni $f(x, y)$ *simmetriche rispetto all'origine*, si possa determinare la condizione necessaria e sufficiente perchè la [1] abbia soluzione, e la espressione effettiva di una soluzione particolare, *in termini finiti*, senza fare alcuna ipotesi restrittiva per la soluzione.

Notiamo anzitutto che *qualunque sia la f*, se la [1] ha soluzione, si ha, se $f(0,0)=a$, $\varphi(0)=-a$; e quindi, ponendo nella [1] $x+y=0$,

$$\varphi(x)+\varphi(-x)=-f(x,-x)+a \ ;$$

e similmente:

$$\varphi(y)+\varphi(-y)=-f(y,-y)+a \ ,$$

$$\varphi(x+y)+\varphi(-x-y)=-f(x+y,-x-y)+a \ .$$

Sottraendo da quest'ultima le due equazioni precedenti, e tenendo conto della [1], si ha

$$f(x,y)+f(-x,-y)=f(x,-x)+f(y,-y)-f(x+y,-x-y)-a \ . \tag{13}$$

Questa è la *condizione necessaria* perchè la [1] abbia soluzione.

Se però supponiamo che la $f(x, y)$ *sia simmetrica rispetto all'origine*; che si abbia, cioè,

$$f(x,y)=f(-x,-y) \ , \tag{14}$$

la [14] è anche *condizione sufficiente* per l'esistenza di una soluzione.

Infatti, in tal caso la [13] diviene

$$2f(x,y)=f(x,-x)+f(y,-y)-f(x+y,-x-y)-a \ .$$

Allora la funzione

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}f(x,-x)+\frac{1}{2}a \tag{15}$$

soddisfa alla [1]. In vero si ha, tenendo conto della [15]:

$$\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y)=-\frac{1}{2}\left[f(x+y,-x-y)-f(x,-x)-f(y,-y)+a\right]=f(x,y).$$

Pertanto, se la $f(x,y)$ si definisce ad arbitrio sulla bisettrice $x+y=0$ per $x>0$, $y>0$ e uguale ad a nell'origine, e si definisce inoltre in base alla [14] nell'altro tratto di bisettrice, e in base alla [15] nel resto del piano, si ottiene un'equazione [1] che ammette soluzioni, una delle quali è data dalla [15].