ACTA
Vol. V - N. 15

SUR LES INVARIANTS DE CONTACT EN GEOMETRIE PROJECTIVE DIFFERENTIELLE (*)

SHIING-SHEN CHERN

SVMMARIVM. — Auctor demonstrat quomodo Cartanica methodus, quae vocatur « du repère mobile », quaestionibus invariantia contactus varietatum tangentium respicientibus applicari possit.

INTRODUCTION

On connait la fécondité de la méthode du repère mobile (1) de M. E. CARTAN pour étudier les questions diverses dans la géométrie projective différentielle. L'étude faite par M. CARTAN lui-même de la déformation projective des surfaces (2) fournit un exemple célèbre. Le but de cette Note est de montrer comment cette méthode s'applique à des questions concernant les invariants de contact des variétés tangentes.

§ 1. LES INVARIANTS DE CONTACT DES COURBES PLANES. – Commençons par considérer le cas le plus simple, c'est la géométrie différentielle projective des courbes planes (3). Le repère projectif dans le

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 27 giugno 1941.

(1) On trouve les généralités de cette méthode et quelques-unes de ses applications dans le livre: E. CARTAN, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitée par la méthode du repère mobile.* Paris, 1937.

(2) Voir CARTAN, *Sur la déformation projective des surfaces*, « Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, série 3, t. 37 (1920), pp. 259-356.

(3) Voir CARTAN, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective.* Paris, 1936, spécialement pag. 91-111. Ce livre sera cité dans le suivant comme: CARTAN, *Connexion projective.*

plan se compose de trois points *analytiques* linéairement indépendants A, A_1, A_2, définis à un facteur commun près. Une famille de repères étant donnée, elle satisfait aux *équations du déplacement infinitesimal* de la forme

$$\begin{aligned} dA &= \omega_0^0 A + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 , \\ dA_1 &= \omega_1^0 A + \omega_1^1 A_1 + \omega_1^2 A_2 , \\ dA_2 &= \omega_2^0 A + \omega_2^1 A_1 + \omega_2^2 A_2 , \end{aligned} \tag{1}$$

où les formes de PFAFF $\omega_\alpha^\beta(\alpha, \beta = 0, 1, 2)$ s'appellent les *composantes relatives*. Soit C une courbe décrite par le point *géométrique* A. On attache à chaque point A de C un repère AA_1A_2 tel que AA_1 soit la tangente de C au point A. La famille de repères AA_1A_2 ainsi obtenus est dite du premier ordre et est caractérisée analytiquement par la condition

$$\omega_0^2 = 0 . \tag{2}$$

Le repère du premier ordre le plus général $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$ relatif au point A est alors donné par les équations

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A , \\ \bar{A}_1 &= \rho(A_1 + \lambda A) , \\ \bar{A}_2 &= \sigma(A_2 + \mu A_1 + \nu A) , \end{aligned} \tag{3}$$

où les quantités $\rho, \sigma, \lambda, \mu, \nu$, qu'on appelle les paramètres sécondaires, sont arbitraires. En désignant par $\bar{\omega}_\alpha^\beta(\alpha, \beta = 0, 1, 2)$ les composantes relatives de la famille de repères $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$, on trouve

$$\bar{\omega}_0^1 = \frac{\omega_0^1}{\rho} , \quad \bar{\omega}_1^2 = \frac{\rho\,\omega_1^2}{\sigma} ,$$

d'où

$$\frac{\bar{\omega}_1^2}{\bar{\omega}_0^1} = \frac{\rho^2}{\sigma} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_0^1} . \tag{4}$$

Cela étant, on dit que deux courbes C et C^* ayant le point commun A sont tangentes au point A, si elles ont un repère du premier ordre commun en A. Alors les deux familles de repères du premier ordre de C et C^* relatifs au point A se confondent. Considérons deux familles de repères du premier ordre, attachés aux differents points de C^*, telles que l'une contienne le repère AA_1A_2, et l'autre $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$.

Soient θ_α^β et $\bar{\theta}_\alpha^\beta$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2)$ les composantes relatives de chacune de ces deux familles. Au point A considéré, on a, correspondant à la formule [4],

$$\frac{\bar{\theta}_1{}^2}{\bar{\theta}_0{}^1} = \frac{\rho^2}{\sigma} \cdot \frac{\theta_1{}^2}{\theta_0{}^1} .$$

Il en résulte que

$$\frac{\bar{\theta}_1{}^2}{\bar{\theta}_0{}^1} \Big/ \frac{\bar{\omega}_1{}^2}{\bar{\omega}_0{}^1} = \frac{\theta_1{}^2}{\theta_0{}^1} \Big/ \frac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^1} ,$$

de sorte que la valeur de

$$\text{[5]} \qquad \mathrm{I} = \frac{\theta_1{}^2}{\theta_0{}^1} \Big/ \frac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^1}$$

au point A soit indépendante du choix du repère du premier ordre attaché à A. Il en suit que I est un invariant projectif des deux courbes C et C^*.

Montrons que l'invariant I ainsi défini se confond avec l'invariant de contact bien connu de SMITH-MEHMKE (1). A cet effet definissons les coordonnées non homogènes x, y d'un point M relatives au repère AA_1A_2 par l'équation

$$\text{[6]} \qquad \mathrm{M} = \mathrm{A} + x\mathrm{A}_1 + y\mathrm{A}_2 .$$

---

(1) FUBINI-ČECH, *Introduction à la géométrie projetive différentielle des surfaces.* Paris, 1931, pag. 17-20.

La droite AA_1 étant la tangente en A, l'équation de la courbe C au voisinage de A s'écrit

$$y = \frac{1}{2} m x^2 + \dots , \tag{7}$$

où les termes non écrits sont au moins du troisième ordre par rapport à x. De même, l'équation de C^* par rapport AA_1A_2 est de la forme

$$y = \frac{1}{2} m^* x^2 + \dots . \tag{8}$$

En utilisant les conditions suivantes pour la fixité du point M (1):

$$\begin{aligned} dx + \omega_0{}^1 + x(\omega_1{}^1 - \omega_0{}^0) + y\,\omega_2{}^1 - x^2\,\omega_1{}^0 - xy\,\omega_2{}^0 &= 0 , \\ dy + \omega_0{}^2 + x\,\omega_1{}^2 + y(\omega_2{}^2 - \omega_0{}^0) - xy\,\omega_1{}^0 - y^2\,\omega_2{}^0 &= 0 , \end{aligned} \tag{9}$$

on trouve immédiatement que

$$\frac{\omega_1{}^2}{\omega_0{}^1} = m ,$$

et, de la même manière, que

$$\frac{\theta_1{}^2}{\theta_0{}^1} = m^* .$$

Il en résulte que

$$I = \frac{m^*}{m} , \tag{10}$$

qui démontre notre énoncé.

---

(1) Cartan, *Connexion projective*, pag. 88.

Avec la définition précédente de l'invariant I on peut démontrer très simplement les théorèmes de C. SEGRE et de B. SEGRE. Prenons sur la tangente commune AA_1 un point $P = A + \varepsilon A_1$ infiniment voisin à A. Un point sur la droit PA_2 étant de la forme $P + \tau A_2$, les points M et N où PA_2 recontre les courbes C et C^* sont donnés par les valeurs suivantes de τ:

$$\tau = \frac{1}{2} m \varepsilon^2 + \dots ,$$

$$\tau^* = \frac{1}{2} m^* \varepsilon^2 + \dots .$$

Il en suit que le rapport anharmonique $(MN, A_2 P)$ tend vers I lorsque ε tend vers zéro. En remarquant de [3] que le point A_2 est arbitraire, on obtient le théorème de C. SEGRE: *Prenons un point arbitraire* A_2 *dans le plan. Soient* P, M, N *les points d'intersection d'une droite passant par* A_2 *avec la tangente commune* AA_1 *et les deux courbes. La limite du rapport anharmonique* $(MN, A_2 P)$ *lorsque la droite tend vers* $A_2 A$ *est indépendante du choix de* A_2 *et est égale à* I.

On démontre le théorème de B. SEGRE d'une manière analogue. L'équation de la conique tangente aux droites AA_1, $A_1 A_2$ respectivement aux points A et A_2 est de la forme

$$y = l x^2 ,$$

où l est un paramètre. Il en suit que parmi ces coniques celle qui a un contact du second ordre avec C en A a l'équation

$$y = \frac{1}{2} m x^2 ,$$

et celle qui a avec C^* un contact du second ordre en A a l'equation

$$y = \frac{1}{2} m^* x^2 .$$

Ces deux coniques ont un contact double, leur invariant étant manifestement égal à I. En remarquant que le point A_2 et la droite $A_2 A_1$ passant par A_2 son arbitraires, on a le théorème de B. SEGRE: *L'invariant des deux coniques qui passent par le point* A_2 *et y ont une droite tangente* $A_2 A_1$ *et qui sont osculatrices en* A *aux courbes* C *et* C^* *ne dépend ni du point* A_2, *ni de la droite* $A_2 A_1$ *et il est égal à* I.

Des considérations analogues conduisent à un invariant de contact nouveau. Supposons que le point commun A ne soit pas un point d'inflexion des deux courbes C et C^* et que ces courbes aient un contact du quatrième ordre en A. Cela signifie que les familles de repères du quatrième ordre de C et C^* au point A se confondent. Pour les composantes relatives d'une famille de repères du quatrième ordre on a les relations

$$[11] \quad \omega_0{}^2 = 0, \quad \omega_1{}^2 - \omega_0{}^1 = 0, \quad \omega_2{}^2 - 2\omega_1{}^1 + \omega_0{}^0 = 0, \quad \omega_2{}^1 - \omega_1{}^0 = 0.$$

Si AA_1A_2 est un repère du quatrième ordre attaché au point A, le repère le plus général $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$ du quatrième ordre en A est donné par les équations

$$[12] \quad \begin{aligned} \bar{A} &= A, \\ \bar{A}_1 &= \rho(A_1 + \lambda A), \\ \bar{A}_2 &= \rho^2\left(A_2 + \lambda A_1 + \frac{1}{2}\lambda^2 A\right). \end{aligned}$$

En désignant par $\bar{\omega}_\alpha^\beta\ (\alpha, \beta = 0, 1, 2)$ les composantes relatives de la famille $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$, on trouve

$$\bar{\omega}_0{}^1 = \frac{\omega_0{}^1}{\rho}, \quad \bar{\omega}_2{}^0 = \rho^2 \omega_2{}^0,$$

de sort que

$$[13] \quad \frac{\bar{\omega}_2{}^0}{\bar{\omega}_0{}^1} = \rho^3 \frac{\omega_2{}^0}{\omega_0{}^1}.$$

Soient $\theta_\alpha^\beta\,(\alpha, \beta = 0, 1, 2)$ les composantes relatives d'une famille de repères du quadrième ordre de C^*, qui contient le repère AA_1A_2. L'équation [13] et l'équation analogue pour l'effet sur $\theta_2{}^0/\theta_0{}^1$ d'un changement de repère [12] montrent que la valeur de

$$\text{[14]} \qquad J = \frac{\theta_2{}^0}{\theta_0{}^1} \Big/ \frac{\omega_2{}^0}{\omega_0{}^1}$$

au point A est un invariant projectif. Il est un invariant de contact pour deux courbes ayant un contact du quatrième ordre.

On peut donner une interprétation géométrique à l'invariant J. Soit AA_1A_2 un repère commun du quatrième ordre de C et C^* en A. Relative au repère AA_1A_2 l'équation de C s'écrit

$$\text{[15]} \qquad y = \frac{1}{2}x^2 + px^5 + \dots ,$$

et celle de C^* s'écrit

$$\text{[16]} \qquad y = \frac{1}{2}x^2 + p^*x^5 + \dots .$$

En utilisant les conditions de fixité du point [9], on trouve

$$\frac{\omega_2{}^0}{\omega_0{}^1} = 2_0 p\,, \quad \frac{\theta_2{}^0}{\theta_0{}^1} = 2_0 p^*\,,$$

de sorte que

$$\text{[17]} \qquad J = \frac{p^*}{p}\,.$$

Les deux courbes C et C^* ont en A la même conique osculatrice, qui a l'équation

$$\text{[18]} \qquad y = \frac{1}{2}x^2\,.$$

Cela étant, on constate facilement la signification suivante pour J: *Prenons sur la conique osculatrice comune* [18] *un point quelconque* Q *et joignons-le à un point* P *de* [18] *infiniment voisin de* A. *La droite* QP *rencontre* C *et* C^* *aux points* M, N, *dont le rapport anharmonique avec* Q, P *tend vers* J *lorsque la droite* QP *tend vers* QA. La démonstration de ce théorème est immédiate, si l'on identifie Q avec le point A_2 du repère.

§ 2. L'extension à l'espace projectif à n dimension. – Nous allons étendre les considérations précédentes aux courbes tangentes dans l'espace projectif à n dimensions.

Un repère projectif dans l'espace à n dimensions se compose de $n+1$ points analytiques linéairement indépendants $A, A_1, \ldots, A_n$, définis à un facteur commun près. Les équations du déplacement infinitésimal d'une famille de repères $AA_1 \ldots A_n$ son de la forme

$$[19] \qquad dA_\alpha = \sum_{\beta=0}^{n} \omega_\beta^\alpha A_\beta \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n)$$

où ω_α^β sont les composantes relatives et où l'on écrit A_0 pour A. Les conditions pour la fixité du point

$$[20] \qquad M = A + x^1 A_1 + \ldots + x^n A_n$$

dans l'espace s'écrivent alors

$$[21] \qquad dx^i + \omega_0{}^i + \sum_{k=1}^{n} x^k \omega_k{}^i = x^i \left(\omega_0{}^0 + \sum_{k=1}^{n} x^k \omega_k{}^0\right) \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Cela étant, considérons dans l'espace une courbe C décrite par le point A. Soit k un entier $\leqq n-1$. Attachons à chaque point A de C un repère $AA_1 \ldots A_n$ tel que AA_1 soit la tangente de C en A, AA_1A_2 la variété plane osculatrice à deux dimensions, et, plus généralement, $AA_1 \ldots A_l$ la variété plane osculatrice à l dimensions, $(1 = 1, 2, \ldots, k)$.

On appelle un tel repère un *repère d'ordre* k au point A. Pour une famille de repères d'ordre k de la courbe C on a

$$\omega_l^m = 0 \quad (l = 0, 1, \dots, k-1; m = l+2, l+2, \dots, n). \tag{22}$$

Si $AA_1 \dots A_n$ est un repère d'ordre k au point A, le repère le plus général $\bar{A}\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$ d'ordre k en A est donné par les équations

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A_1, \\ \bar{A}_1 &= a_1{}^0 A + a_1{}^1 A_1, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{A}_k &= a_k{}^0 A + a_k{}^1 A_1 + \dots + a_k{}^k A_k, \\ \bar{A}_{k+1} &= a^0_{k+1} A + a^1_{k+1} A_1 + \dots\dots\dots + a^n_{k+1} A_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \bar{A}_n &= a_n{}^0 A + a_n{}^1 A_1 + \dots\dots\dots + a_n{}^n A_n, \end{aligned} \tag{23}$$

où les coefficients a sont arbitraires. En effectuant le changement du repère [23], on trouve, $\bar{\omega}_\alpha^\beta (\alpha, \beta = 0, 1, \dots, n)$ étant les composantes relatives de la famille de repères $\bar{A}\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$,

$$\bar{\omega}_0 = \frac{1}{a_1{}^1} \omega_0{}^1, \quad \bar{\omega}^k_{k-1} = \frac{a^{k-1}_{k-1}}{a^k_k} \omega^k_{k-1},$$

de sorte que

$$\frac{\bar{\omega}^k_{k-1}}{\bar{\omega}_0{}^1} = \frac{a_1{}^1 a^{k-1}_{k-1}}{a_k{}^h} \frac{\omega^k_{k-1}}{\omega_0{}^1} \tag{24}$$

Soient C et C^* deux courbes qui ont en A un contact d'ordre $k (1 \leqq k \leqq n-1)$ et dont les variétés planes osculatrices à l dimensions $(l = 1, 2, \dots, k)$ en A sont bien déterminées. Par dèfinition, cela signifie que les familles de repères d'ordre k de C et C^* en A se

Ces deux coniques ont un contact double, leur invariant étant manifestement égal à I. En remarquant que le point A_2 et la droite A_2A_1 passant par A_2 son arbitraires, on a le théorème de B. SEGRE: *L'invariant des deux coniques qui passent par le point* A_2 *et y ont une droite tangente* A_2A_1 *et qui sont osculatrices en* A *aux courbes* C *et* C^* *ne dépend ni du point* A_2, *ni de la droite* A_2A_1 *et il est égal à* I.

Des considérations analogues conduisent à un invariant de contact nouveau. Supposons que le point commun A ne soit pas un point d'inflexion des deux courbes C et C^* et que ces courbes aient un contact du quatrième ordre en A. Cela signifie que les familles de repères du quatrième ordre de C et C^* au point A se confondent. Pour les composantes relatives d'une famille de repères du quatrième ordre on a les relations

$$[11]\quad \omega_0{}^2=0,\quad \omega_1{}^2-\omega_0{}^1=0,\quad \omega_2{}^2-2\omega_1{}^1+\omega_0{}^0=0,\quad \omega_2{}^1-\omega_1{}^0=0.$$

Si AA_1A_2 est un repère du quatrième ordre attaché au point A, le repère le plus général $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$ du quatrième ordre en A est donné par les équations

$$[12]\quad \begin{aligned} \bar{A} &= A\,, \\ \bar{A}_1 &= \rho(A_1+\lambda A)\,, \\ \bar{A}_2 &= \rho^2\left(A_2+\lambda A_1+\frac{1}{2}\lambda^2 A\right). \end{aligned}$$

En désignant par $\bar{\omega}_\alpha^\beta\,(\alpha,\beta=0,1,2)$ les composantes relatives de la famille $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2$, on trouve

$$\bar{\omega}_0{}^1=\frac{\omega_0{}^1}{\rho}\,,\quad \bar{\omega}_2{}^0=\rho^2\,\omega_2{}^0\,,$$

de sort que

$$[13]\quad \frac{\bar{\omega}_2{}^0}{\bar{\omega}_0{}^1}=\rho^3\,\frac{\omega_2{}^0}{\omega_0{}^1}\,.$$

Soient $\theta_\alpha^\beta\,(\alpha, \beta = 0, 1, 2)$ les composantes relatives d'une famille de repères du quadrième ordre de C^*, qui contient le repère AA_1A_2. L'équation [13] et l'équation analogue pour l'effet sur $\theta_2{}^0/\theta_0{}^1$ d'un changement de repère [12] montrent que la valeur de

$$[14] \qquad J = \frac{\theta_2{}^0}{\theta_0{}^1} \Big/ \frac{\omega_2{}^0}{\omega_0{}^1}$$

au point A est un invariant projectif. Il est un invariant de contact pour deux courbes ayant un contact du quatrième ordre.

On peut donner une interprétation géométrique à l'invariant J. Soit AA_1A_2 un repère commun du quatrième ordre de C et C^* en A. Relative au repère AA_1A_2 l'équation de C s'écrit

$$[15] \qquad y = \frac{1}{2}x^2 + px^5 + \dots,$$

et celle de C^* s'écrit

$$[16] \qquad y = \frac{1}{2}x^2 + p^*x^5 + \dots.$$

En utilisant les conditions de fixité du point [9], on trouve

$$\frac{\omega_2{}^0}{\omega_0{}^1} = 2_0 p, \quad \frac{\theta_2{}^0}{\theta_0{}^1} = 2_0 p^*,$$

de sorte que

$$[17] \qquad J = \frac{p^*}{p}.$$

Les deux courbes C et C^* ont en A la même conique osculatrice, qui a l'équation

$$[18] \qquad y = \frac{1}{2}x^2.$$

confondent. En désignant par $\theta_\alpha^\beta\,(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n)$ les composantes relatives d'une famille de repères d'ordre k de C^*, qui contient $AA_1 \ldots A_n$ et par $\bar{\theta}_\alpha^\beta$ celles d'une famille contenant $\bar{A}\bar{A}_1 \ldots \bar{A}_n$, on à, au point A considéré

$$\frac{\bar{\theta}_{k-1}^k}{\bar{\theta}_0^{\,1}} = \frac{a_1^{\,1}\,a_{k-1}^{k-1}}{a_k^{\,k}}\;\frac{\theta_{k-1}^k}{\theta_0^{\,1}}\,.$$

Il en résulte que la valeur de

$$[25] \qquad \mathrm{I}_k = \frac{\theta_{k-1}^k}{\theta_0^{\,1}} \Big/ \frac{\omega_{k-1}^k}{\omega_0^{\,1}}$$

est indépendante du choix du repère $AA_1 \ldots A_n$ et qu'elle est un invariant projectif des courbes C et C^* ayant un contact d'ordre k en A. Nous l'appellerons *l'invariant de contact d'ordre k* de C et C^*. On voit donc que deux courbes ayant en A un contact d'ordre k ont $k-1$ invariants de contact, à savoir $\mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots, \mathrm{I}_k$.

Dans le cas particulier où $k = n-1$, on peut donner un invariant de plus. Dans ce cas, en effet, la transformation [23] transforme la composante relative ω_{n-1}^n d'après la formule

$$\bar{\omega}_{n-1}^n = \frac{a_{n-1}^{n-1}}{a_n^n}\,\omega_{n-1}^n\,.$$

La transformation sur θ_{n-1}^n étant la même, on en déduit que

$$[26] \qquad \mathrm{I}_n = \frac{\theta_{n-1}^n}{\theta_0^{\,1}} \Big/ \frac{\omega_{n+1}^n}{\omega_0^{\,1}}$$

est un invariant de contact, que nous appellerons *l'invariant généralisé de* Smith-Mehmke. Pour $n = 2$, cet invariant I_n est précisément l'invariant de Smith-Mehmke.

Nous allons donner une interprétation géométrique de l'invariant I_k, qui est analogue au thèorème de C. Segre. Le repère $AA_1 \ldots A_n$ étant choisi comme indiqué plus haut, les équations de C au voisinage de A peuvent être écrites dans la forme

$$
[27] \quad \begin{aligned}
x^1 &= t, \\
x^2 &= b_2^2(t)^2 + b_3^2(t)^3 + \dots, \\
&\dots\dots \\
x^{k-1} &= b_{k-1}^{k-1}(t)^{k-1} + \dots, \\
x^k &= b_k^k(t)^k + \dots, \\
x^{k+1} &= b_{k+1}^{k+1}(t)^{k+1} + \dots, \\
&\dots\dots \\
x^n &= b_{k+1}^n(t)^{k+1} + \dots,
\end{aligned}
$$

où t est le paramètre sur C. Si l'on différencie l'équation pour x^k et on égale les coefficientes de $(t)^{k-1}$ dans les deux membres, on obtient, en tenant compte des conditions de fixité du point [21],

$$
[28] \qquad \frac{\omega_{k-1}^k}{\omega_0^1} = k \frac{b_k^k}{b_{k-1}^{k-1}}
$$

Ecrivons ensuite les équations de C^* par rapport au repère $AA_1 \dots A_n$ dans la forme

$$
[29] \quad \begin{aligned}
x^1 &= \tau, \\
x^2 &= c_2^2(\tau)^2 + (c_3^2(\tau)^3 + \dots, \\
&\dots\dots \\
x^{k-1} &= c_{k-1}^{k-1}(\tau)^{k-1} + \dots, \\
x^k &= c_k^k(\tau)^k + \dots, \\
x^{k+1} &= c_{k+1}^{k+1}(\tau)^{k+1} + \dots, \\
&\dots\dots \\
x^n &= c_{k+1}^n(\tau)^{k+1} + \dots,
\end{aligned}
$$

τ étant le paramètre. On trouve, analoguement à [28],

$$[30] \qquad \frac{\theta_{k-1}^{k}}{\theta_0^{\,1}} = k\,\frac{c_k^k}{c_{k-1}^{k-1}}\,.$$

Il en résulte que

$$[31] \qquad \mathrm{I}_k = \frac{c_k^k}{c_{k-1}^{k-1}} \Big/ \frac{b_k^k}{c_{k-1}^{k-1}} = \frac{c_k^k}{b_k^k} \Big/ \frac{c_{k-1}^{k-1}}{b_{k-1}^{k-1}}\,.$$

Dans le cas $k = n-1$, on trouve, dans la même manière, l'expression suivante pour l'invariant I_n:

$$[32] \qquad \mathrm{I}_n = \frac{c_n^n}{c_{n-1}^{n-1}} \Big/ \frac{b_n^n}{b_{n-1}^{n-1}} = \frac{c_n^n}{c_n^n} \Big/ \frac{c_{n-1}^{n-1}}{b_{n-1}^{n-1}}\,.$$

Des expression [31] et [32] pour I_k, I_n il est facile d'eux donner une interprétation géométrique simple. En effet, les points M de C et les points N de C^* peuvent être mis en correspondance biunivoque per la condition que la droite MN joignant les points correspondants rencontre la variété plane $\mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_n$. Cette correspondance est définie par l'équation $\tau = t$. Désignons par P_l le point où MN recontre la variété plane $\mathrm{AA}_1 \dots \mathrm{A}_{l-1}\mathrm{A}_{l+1} \dots \mathrm{A}_n$, $(l = 0, 1, \dots, n)$. Il est facile de vérifier que l'invariant I_k est égal à la limite du rapport anharmonique $(\mathrm{MN}, \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k)$ lorsque M, N tendent vers A. Dans le cas $k = n-1$, l'invariant I_n est égal à la limite de $(\mathrm{MN}, \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n)$. D'une manière prècise, on a le théorème:

Soient C et C^* deux courbes qui ont en A *un contact d'ordre $k (1 \leqq k \leqq 1)$ et soit $\mathrm{AA}_1 \dots \mathrm{A}_n$ un repère d'ordre k commun. Mettons les points* M *de C et les points* N *de C^* en correspondance par la condition que la droite* MN *rencontre la variété plane $\mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_n$. Si P_l est le point où* MN *recontre la variété plane $\mathrm{AA}_1 \dots \mathrm{A}_{l-1}\mathrm{A}_{l+1} \dots \mathrm{A}_n$, $(l = 0, 1 \dots n)$, la limite du rapport anharmonique $(\mathrm{MN}, \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k)$ lorsque* M *tend vers* A *est indépendante du choix du repère $\mathrm{AA}_1 \dots \mathrm{A}_n$ et est égale à I_k. Dans le cas $k = n-1$, la limite de $(\mathrm{MN}, \mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_n)$ est égale à I_n pour tout choix de $\mathrm{AA}_1 \dots \mathrm{A}_n$.*

Des invariants I_k et I_n on dèduit que les quantités

[33]
$$J_l = I_2 I_3 \dots I_l = \frac{c_l^l}{c_l^l}\,, \qquad (l = 2, \dots, k,\ si\ k \leqq n-2)\,,$$
$$J_l = I_2 I_3 \dots I_l = \frac{c_l^l}{b_l^l}\,, \qquad (l = 2, \dots, n,\ si\ k = n-1)$$

sont aussi des invariants de contact. Dans le cas $k = n-1$ ces invariants one été donnés par M. B. SEGRE [1], tandis que l'invariance de J_l pour $k \leqq n-2$ a été signalée par M. BUCHIN SU [2]. En employant les notations précédentes, on peut énoncer le théorème suivant: *L'invariant* J_k *est égal à la limite du rapport anharmonique* $(MN, P_0 P_k)$ *lorsque* M *tend vers* A, *tandis que, dans le cas* $k = n-1$, *l'invariant* J_n *est égal à la limite de* $(MN, P_0 P_n)$.

Il serait intéressant d'indiquer une généralisation possible de l'invariant I_n pour deux courbes ayant un contact d'ordre $n-1$. Pour une famille de repères $AA_1 \dots A_n$ d'ordre $k \leqq n-1$ de C les composantes relatives $\omega_k^{k+1}, \dots, \omega_k^n$ sont aussi des multiples de ω_0^1. Posons

[34]
$$\xi_k^\rho = \frac{\omega_k^\rho}{\omega_0^1}\,, \qquad \rho = k+1, \dots, n\,.$$

Après le changement de repères [23] les quantités $\bar{\xi}_k^\rho$ correspondantes à la famille de repères $\bar{A}\bar{A}_1 \dots \bar{A}_n$ sont liées aux ξ_k^ρ par les relations

[35]
$$a_1^1\, a_k^k\, \xi_k^\rho = \sum_{\sigma=k+1}^{n} a_\sigma^\rho\, \bar{\xi}_k^\sigma \quad (\rho = k+1, \dots, n)\,.$$

---

(1) B. SEGRE, *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori*, «Rendiconti Accad. dei Lincei», (VI) 22 (1925_2), pag. 392-399.

(2) B. SU, *Some arithmetical invariants of a curve in projective space of n dimensions*, à paraître dans le «Journal de Science Mathématique de l'Université de Tucuman».

On voit que la transformation sur ξ_k^{ϱ} est la transformation homographique la plus générale possible. Nous nous contentons ici de faire la remarque qu'il serait possible de définir, au moyen des ξ_k^{ϱ}, des invariants de contact de $n-k+1$ courbes ayant un contact d'ordre k les unes avec les autres au même point A.

Ajoutons encore une remarque concernant l'invariance de I_k par rapport aux projections. Projetons, en effet, les courbes C et C^* de la variété plane $A_{l+1} \dots A_n (l \geqq k)$ à $n-l-1$ dimensions dans $AA_1 \dots A_l$. Il est facile de vérifier que les projections de C et C^* ont en A un contact d'ordre k si $l \geqq k+1$ et qu'elles ont au moins un contaet d'ordre $k-1$ si $l=k$. De plus, dans le cas $l \geqq k+1$, l'invariant d'ordre k de C et C^* est égal à celui de leurs projections, tandis que, pour $l=k$, il est égal à l'invariant généralisé de Smith-Mehmke de leurs projections. En remarquant que la variété plane $A_{l+1} \dots A_n$ est arbitraire, on a le théorème: *L'invariant de contact d'ordre k de deux courbes reste inaltéré, si l'on les projette d'une variété plane arbitraire à $n-l-1$ dimensions $l \geqq k+1$, qui ne recontre pas la variété plane osculatrice à k dimensions, commune $AA_1 \dots A_k$, dans une variété plane à l dimensions, qui contient $AA_1 \dots A_k$. Cet invariant est aussi égal à l'invariant généralisé de* Smith-Mehmke *des projections des deux courbes dans $AA_1 \dots A_k$ d'une variété plane à $n-k-1$ dimensions, qui ne recontre pas $AA_1 \dots A_k$.*

§ 3. Quelques invariants de contact des surfaces dans l'espace ordinaire. – Indiquons comment nos considérations peuvent être appliquées aux surfaces tangentes dans l'espace projectif ordinaire.

A cet effet, considérons deux surfaces tangentes au point commun A. Prenons le repère $AA_1A_2A_3$ tel que le plan AA_1A_2 soit le plan tangent commun en A. En définissant les coordonnées non homogènes x, y, z d'un poins M par rapport au repère $AA_1A_2A_3$ par la relation

$$M = A + xA_1 + yA_2 + zA_3 , \tag{36}$$

on peut écrire les équations des deux surfaces respectivement dans les formes

$$[37] \qquad z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \dots,$$

$$[38] \qquad z = \frac{1}{2}(a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2) + \dots.$$

Il serait facile de vérifier, avec les méthodes employées plus haut, le fait bien connu que les quantités

$$[39] \qquad \frac{a_1c_1 - b_1^2}{ac - b^2}, \quad \frac{ac_1 - 2bb_1 + ca_1}{ac - b^2}$$

sont des invariants de contact.

Cependant, les méthodes précédentes conduisent, pour deux surfaces ayant un contact du deuxième ordre au point A, à deux invariants de contact qui me semblent nouveaux. On peut supposer les équations des deux surfaces dans les formes

$$[40] \qquad z = xy + \frac{1}{3}(px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3) + \dots,$$

$$[41] \qquad z = xy + \frac{1}{3}(p_1x^3 + 3q_1x^2y + 3r_1xy^2 + s_1y^3) + \dots,$$

où les termes non écrits sont au moins du quatrième ordre par rapport à x, y. Si $AA_1A_2A_3$ est le repère par rapport auquel les surfaces ont les équations des formes [40], [41], le repère le plus général $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ ayant la même propriété est donné par les équations

$$[42] \qquad \begin{gathered} \bar{A} = A, \quad \bar{A}_1 = \rho A + \alpha A_1, \quad \bar{A}_2 = \sigma A + \beta A_2, \\ \bar{A}_3 = \tau A + \lambda A_1 + \mu A_2 + \alpha\beta A_3, \end{gathered}$$

ou

[43]
$$\bar{A} = A\,, \quad \bar{A}_1 = \rho A + \alpha A_2\,, \quad \bar{A}_2 = \sigma A + \beta A_1\,,$$
$$\bar{A}_3 = \tau A + \mu A_1 + \lambda A_2 + \alpha\beta A_3\,,$$

où le changement [43] peut être regardé comme le produit de [42] et du changement

[44]
$$\bar{A} = A\,, \quad \bar{A}_1 = A_2\,, \quad \bar{A}_2 = A_1\,, \quad \bar{A}_3 = A_3\,.$$

Si les équations des surfaces [40], [41] par rapport au repère $\bar{A}\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$ défini par [42] sont

[45]
$$z = xy + \frac{1}{3}(\bar{p}x^3 + 3\bar{q}x^2y + 3\bar{r}xy^2 + \bar{s}y^3) + \ldots\,,$$

[46]
$$z = xy + \frac{1}{3}(\bar{p}_1x^3 + 3\bar{q}_1x^2y + 3\bar{r}_1xy^2 + \bar{s}_1y^3) + \ldots\,,$$

on obtient

[47]
$$\bar{p} = \frac{\alpha^2}{\beta}p\,, \quad \bar{s} = \frac{\beta^2}{\alpha}s\,,$$
$$\bar{p}_1 = \frac{\alpha^2}{\beta}p_1\,, \quad \bar{s}_1 = \frac{\beta^2}{\alpha}s_1\,,$$

d'où

[48]
$$\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}} = \frac{p_1}{p}\,, \quad \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}} = \frac{s_1}{s}\,.$$

D'autre part, le changement du repère [44] transforme les quantités p_1/p et s_1/s d'après les formules

[49]
$$\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}} = \frac{s_1}{s}\,, \quad \frac{\bar{s}_1}{\bar{s}} = \frac{p_1}{p}\,.$$

Il en résulte que les quantités

$$[50] \qquad H = \frac{1}{2}\left(\frac{p_1}{p} + \frac{s_1}{s}\right), \quad K = \frac{p_1}{p} \cdot \frac{s_1}{s}$$

sont indépendantes du choix du repère $AA_1A_2A_3$. Elles sont deux invariants de contact des surfaces [40], [41] au point A.

Pour donner une interprétation géométrique à H, K, considérons une quadrique Σ ayant un contact du deuxième ordre avec les deux surfaces au point A et prenons sur elle un point quelconque Q. Par un un choix convenable du repère $AA_1A_2A_3$ on peut supposer la quadrique Σ d'avoir l'équation

$$[51] \qquad z = xy$$

et le point Q de confondre avec A_3. Cela posé, prenons une droite quelconque passant par A_3 et infiniment voisine de A_3A. Soient P, M, N ses points d'intersection avec la quadrique Σ et les deux surfaces respectivement. On a donc

$$P = A + \delta A_1 + \varepsilon A_2 + \delta\varepsilon A_3$$

$$M = P + \left\{\frac{1}{3}(p\delta^3 + 3q\delta^2\varepsilon + 3r\delta\varepsilon^2 + s\varepsilon^3) + \ldots\right\}A_3,$$

$$N = P + \left\{\frac{1}{3}(p_1\delta^3 + 3q_1\delta^2\varepsilon + 3r_1\delta\varepsilon^2 + s_1\varepsilon^3) + \ldots\right\}A_3,$$

où δ, ε sont des infiniment petits. On en déduit que

$$[52] \qquad (MN, A_3p) = \frac{p_1\delta^3 + 3q_1\delta^2\varepsilon + 3r_1\delta\varepsilon^2 + s_1\varepsilon^3 + \ldots}{p\delta^3 + 3q\delta^2\varepsilon + 3r\delta\varepsilon^2 + s\varepsilon^3 + \ldots}.$$

Si la droite A_3P tend vers A_3A le long des deux directions asymptotiques, les limites du rapport anharmonique (MN, A_3P) sont p_1/p et s_1/s.

On arrive donc à l'interprétation géométrique suivante de p_1/p et s_1/s (c'est-à-dire de H et K): *Prenons une quadrique* Σ *ayant un contact du deuxième ordre avec les deux surfaces en* A *et un point quelconque* Q *sur* Σ. *Une droite quelconque passant par* Q *rencontre* Σ *et les deux surfaces aux points* P, M, N. *Lorsque cette droite tend vers* QA *le long des directions asymptotiques, le rapport anharmonique* (MN, QP) *tend vers* p_1/p *et* s_1/s *pour tout choix de la quadrique* Σ *et du point* Q *sar* Σ.