

SOPRA L'IPOTESI DI BULLEN  
SULLA VARIAZIONE DISCONTINUA DELLA DENSITÀ  
NELL'INTERNO DELLA TERRA  
E SULLA CONSEGUENTE VARIAZIONE  
DELLA GRAVITÀ (\*)

GIOVANNI BOAGA

SUMMARIVM. — Doctor BULLEN, terramotuum effectus cum perpendisset, animadvertit terrarum orbem quattuor habere interruptionis superficies, quod ad interioris concretionis variationem. A., his studiis, a BULLEN peractis, breviter expositis, quattuor analyticas functiones, a seipso determinatas — iuxta elementa a BULLEN inventa — refert, quibus interiores concretiones significari valeant; haec autem sua studia applicans, de gravitatis variatione intra terrarum orbem agit. Praeterea adnotat quam differant concretiones et gravitates interiores, si ex hypothesis continua de concretionis variatione ad non-continuum quis grediatur; quod maximi est momenti ad geo-physica problemata quae huiusmodi hypothesis innituntur.

In una Nota del BULLEN pubblicata nel 1939<sup>(1)</sup> sono riportati i valori della densità interna terrestre a varie profondità da lui calcolate prendendo a base dei compiuti i dati ricavati da numerosi sismogrammi relativi a terremoti recenti. Egli viene così a stabilire che nell'interno della terra devono esistere quattro superficie di discontinuità rispettivamente alle profondità di 14, 42, 481, 2920 km., le quali

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini il 15 gennaio 1941.

(<sup>1</sup>) Cf. *Transaction of the R. Soc. of New Zealand*, Vol. 67, 1937.

con la superficie esterna del pianeta scompongono la terra in quattro corone sferiche ed un nucleo centrale. La seconda discontinuità sarebbe quella di MOHORovičić che la pose a 60 km., mentre il GUTENBERG a Sud della California la assegna a 39 km., valore questo ottenuto anche dal CALOI per la regione del Cansiglio. L'ultima invece sarebbe quella di WIECHERT che la pose a 2500 km. di profondità. Secondo i dati del BULLEN, a partire dalla superficie terrestre verso l'interno, la prima corona sferica sarebbe costituita con densità uniforme  $\rho_1 = 2,64$ ; nella seconda e terza corona sferica le densità  $\rho_2$  e  $\rho_3$  sono sempre crescenti e variano linearmente; nella quarta corona e nel nucleo centrale le densità  $\rho_4$  e  $\rho_5$  sono ancora sempre crescenti e variano secondo leggi paraboliche.

In base ai risultati ottenuti dal BULLEN abbiamo stabilito le seguenti funzioni per le variazioni della densità nelle varie corone sferiche e nel nucleo:

$$\begin{aligned}\rho_2 &= 48,189(1 - 0,9433 \cdot a) \\ \rho_3 &= 8,639(1 - 0,6187 \cdot a) \\ \rho_4 &= 6,254(1 - 0,0198 \cdot a - 0,3552 \cdot a^2) \\ \rho_5 &= 12,206(1 - 0,0075 \cdot a - 0,6909 \cdot a^2)\end{aligned}$$

con  $a$  distanza computata dal centro, ritenuto il raggio della terra unitario.

Tali funzioni riproducono con esattezza i valori assegnati da BULLEN alle varie profondità per le corone sferiche, mentre differiscono per qualche centesimo nel nucleo centrale. Nelle varie superficie di discontinuità le densità passano: da 2,64 a 2,80; da 3,00 a 3,32; da 3,69 a 4,23; da 5,56 a 9,69. Tali salti sono sempre crescenti e l'ultimo equivale a ben quattro volte la somma dei precedenti.

Come è facile provare con le funzioni su riportate si trova per lo schiacciamento terrestre il valore hayfordiano, mentre per la densità media si ha un valore inferiore di quattro centesimi al valore generalmente adottato. Per il rapporto C: (C-A) con C ed A momenti principali di inerzia polare ed equatoriale, si trova invece il noto valore 305,6.

La gravità  $g(a)$  alla distanza  $a$  dal centro, trascurando come è lecito l'effetto della forza centrifuga e dello schiacciamento, è definita dalla

$$g(a) = \frac{4\pi\varepsilon}{a^2} \int_0^a \rho(a) a^2 \cdot da$$

con  $\varepsilon$  costante dell'attrazione. Introducendo in questa successivamente le  $\rho$  dianzi richiamate si possono calcolare i valori che la gravità assume a diverse profondità. Effettuando le sostituzioni ed eseguendo i calcoli si trova che la gravità superficiale acquista il valore di 983 *gal*, indi nelle immediate vicinanze della superficie terrestre e nelle prime tre corone sferiche aumenta continuamente fino a raggiungere un valore massimo di 997 *gal* alla profondità di 481 km., cioè alla profondità di separazione fra la terza e la quarta zona sferica; nella quarta corona la gravità diminuisce fino a raggiungere un minimo di 981 *gal*, inferiore di 2 *gal* a quello superficiale alla distanza di 1500 km., poscia aumenta fino a raggiungere un secondo massimo di 1048 *gal* nella superficie di separazione tra la quarta corona ed il nucleo centrale, cioè alla profondità di 2920 km.; nel nucleo centrale la gravità diminuisce sempre e nelle vicinanze del nucleo linearmente, fino a ridursi di valore nullo al centro.

Gli stessi risultati si ottengono con la seguente formula da noi ricavata da quella differenziale data da OLCKZAK e BANFIELD:

$$\rho = e^{\frac{\pi\varepsilon\Delta}{4} \frac{R^3}{a-\beta^2}}$$

con:

- $e$  base dei logaritmi neperiani,
- $\varepsilon$  costante di attrazione
- $\Delta$  densità media terrestre
- $R$  raggio della terra
- $\alpha$  e  $\beta$  velocità delle onde sismiche P ed S.
- $r$  distanza dal centro.

In una Nota inserita negli « Atti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere » (1939) abbiamo esposto il metodo di calcolo seguito per la determinazione delle costanti che figurano nella

$$\rho = 11,63 (1 - 1,280 \cdot a^2 + 0,746 \cdot a^4 - 0,225 a^6)$$

atta a rappresentare con variazione continua la densità nell'interno della terra in modo da soddisfare ai dati dell'ellissoide di HAYFORD ed ai valori geofisici  $(C-A)/C = 1/305,6$  e  $\Delta = 5,52$ .

Con questa ipotesi scende, con facili calcoli, la seguente funzione per la gravità interna alla distanza  $a$  dal centro:

$$g(a) = 0,9329 (0,333 \cdot a - 0,256 \cdot a^3 + 0,109 \cdot a^5 - 0,028 \cdot a^7) \cdot 10^{-5}$$

Nella Tabella numerica che segue abbiamo riportato i risultati dei calcoli eseguiti con queste formule e con quelle da noi ricavate con i dati del BULLEN per le densità e per le gravità a varie profondità:

$a$	Profondità km.	DENSITÀ			GRAVITÀ		
		ip. cont.	ip. disc.	diff.	ip. cont. gal	ip. disc. gal	diff. gal
1,0	0	2,67	2,64	+ 0,03	982	993	— 1
0,9	637	3,83	4,34	— 0,51	1020	995	+ 25
0,8	1254	4,97	4,37	— 0,24	1084	984	+ 100
0,7	1911	6,13	5,08	+ 1,05	1001	983	+ 18
0,6	2548	7,39	5,38	+ 1,91	997	1006	— 9
0,5	3185	8,42	10,15	— 1,73	856	984	— 128
0,4	3823	9,46	10,90	— 1,44	733	821	— 88
0,3	4460	10,36	11,48	— 1,12	579	636	— 57
0,2	5097	11,06	11,89	— 0,83	401	435	— 34
0,1	5734	11,48	12,13	— 0,65	206	223	— 17
0,0	6371	11,63	12,21	— 0,58	0	0	0

Dalle differenze riportate nelle colonne quinta ed ottava si vede che pur soddisfacendo le due ipotesi sulla variazione della densità, quella sulla variazione continua e quella sulla variazione discontinua, ai dati geodetici e geofisici oggi accettati, sensibili sono le differenze che si riscontrano fra le densità e fra le gravità interne, specialmente per queste ultime alle profondità di 1200 e 3200 km. Questo fatto mette indubbiamente in evidenza che bisogna essere molto cauti nel scegliere l'ipotesi continua o quella discontinua sulla variazione della densità interna, in tutti quei problemi a base matematica in cui si voglia studiare il comportamento di fenomeni nell'interno della terra e all'esterno, quando questi siano influenzati da fattori interni dipendenti dalla densità o dalla gravità. Si vede pertanto l'opportunità di ripigliare con l'ipotesi discontinua specialmente i classici problemi sulle maree terrestri trattati da vari Autori con ipotesi continue sulla variazione della densità terrestre.