ACTA
Vol. IV - N. 14

ENERGIA NEI FENOMENI ELASTICI EREDITARII (*)

VITO VOLTERRA
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Auctor extendit ad elastica corpora quasdam proportiones quae attinent ad systemata finitum numerum graduum libertatis habentia cum hereditariorum phaenomenorum ratio habetur. Ita generalis conclusione deducitur labor quem externum robur explet, partim in cyneticam vim, partim in elasticam vim mutari, partim vero disperdi. Potest etiam supputari quantum roboris disperdatur propter hereditaria phaenomena.

I. – Una delle principali applicazioni della teoria dei funzionali è stata da me rivolta allo studio dei fenomeni naturali che io chiamai *ereditarii*, cioè di quelli nei quali un sistema risente attualmente l'azione di cause che si sono esercitate nel passato. La denominazione di ereditario ha incontrato però qualche difficoltà da parte di alcuni naturalisti per i quali il concetto di ereditario implica un passaggio da uno ad altro soggetto.

Potrebbe sembrare quindi più appropriato di sostituire la denominazione di *storico* a quella di *ereditario*, in quanto si può ritenere storico ogni avvenimento del passato. Però in questa nota ho continuato a servirmi della parola fenomeni ereditarii in quanto essa si ricollega direttamente ad altre memorie nelle quali avevo già fatto uso del vocabolo ereditario. Mutandolo poteva nascere qualche confusione e lo ho pertanto conservato.

I sistemi materiali in cui si verificano fenomeni ereditarii possono dipendere da un numero finito di parametri o possono essere dei sistemi continui. Ai primi ho consacrato vari scritti ed anche ai secondi

(*) Nota presentata il 19 maggio 1940.

ho rivolto la mia attenzione quando ho studiato la ereditarietà nei corpi elastici.

Però è solo in lavori più recenti che ho esaminato la questione energetica nei casi ereditarii. In una memoria pubblicata nel « Journal des mathèmatiques » ho ampiamente trattato la questione energetica nei sistemi ereditarii aventi un grado finito di libertà. Nella presente nota studio un caso ereditario di sistemi continui: quello dei solidi elastici dal punto di vista energetico.

In ambedue i casi si giunge ad analoghe conclusioni.

Ora siccome il procedimento usato per i corpi elastici si basa sopra postulati e impiega metodi ed artifizi che sono una estensione di quelli adoperati per i sistemi aventi un numero finito di gradi di libertà, per maggiore chiarezza comincerò dal ripetere brevemente la teoria energetica pel caso di un sistema avente un solo grado di libertà e solo in ultimo tratterò la energetica per i corpi elastici nel caso ereditario.

Chiamiamo q il parametro da cui dipende un certo fenomeno e denotiamo con t il tempo.

Se noi scriviamo

$$\mathrm{F}\big(q(t)\big)$$

avremo una quantità che dipende dal valore del parametro nell'istante t (istante attuale). Ora

$$q(t-\tau)$$

è il valore del parametro stesso in un istante $t-\tau$ cioè in un istante che ha preceduto di τ l'istante attuale, quindi

$$\int_0^{\mathrm{T}_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau \tag{1}$$

è una quantità che dipende da tutti i valori del parametro q in un periodo di tempo di ampiezza T_0 che precede l'istante attuale. Essa è una particolare espressione propria delle quantità che risentono la eredità del parametro q durante l'intervallo di tempo

$$(t-\mathrm{T}_0,\, t).$$

Analogamente

$$aq(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau$$

ove a denota una costante, dipenderà dal valore attuale di $q(t)$ e dall'eredità lasciata da questo parametro durante l'intervallo di tempo $(t - T_0, t)$.

Esso sarà un'espressione lineare e perciò la corrispondente eredità si dirà lineare.

Riprendiamo l'espressione [1]; allorchè essa denota un'azione (forza) questa sarà acceleratrice se $\Phi(\tau)$ sarà positivo, mentre se $\Phi(\tau)$ sarà negativo l'azione sarà ritardatrice. Inoltre ogni elemento dell'integrale

$$\Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau$$

può assumersi come una componente dell'azione totale e precisamente può ritenersi esser quella componente che dipende dall'eredità del parametro q nell'intervallo di tempo $(t - \tau - d\tau,\ t - \tau)$. Vedremo tra poco come può modificarsi questo concetto dell'azione ereditaria elementare.

Nelle formule precedenti noi abbiamo tenuto conto dell'eredità limitatamente all'intervallo di tempo T_0 anteriore all'istante attuale; noi abbiamo cioè supposto che l'eredità vada dissipandosi col tempo, tanto da poter ammettere che sia

$$\Phi(t) = 0 \qquad \text{per } t \geqslant T_0$$

In tal caso T_0 si chiama la *durata dell'eredità.*

II. – In questo paragrafo, come ho annunziato precedentemente, riprenderò brevemente la teoria energetica nel caso di un sistema avente un sol grado di libertà.

Immaginiamo un sistema meccanico avente un sol grado di libertà, la cui configurazione sia quindi individuata da un solo parametro q.

I piccoli movimenti spontanei nel noto schema vibratorio di un tale sistema dipenderanno dall'equazione differenziale ben nota

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) = 0$$

Se noi supponiamo che la forza viva o energia cinetica del sistema sia

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)^2 = \mathrm{T}$$

e il potenziale delle forze interne sia

$$\mathrm{P} = -\mathrm{E} = -\frac{1}{2} a^2 q^2 ,$$

l'equazione delle forze vive avrà la forma

$$d(\mathrm{T}+\mathrm{E}) = 0$$

ossia

$$\mathrm{T}+\mathrm{E} = \mathrm{cost} .$$

$\mathrm{E} = \frac{1}{2} a^2 q^2$ esprimerà l'energia potenziale interna del sistema.

Se il moto anzichè libero sarà forzato, l'equazione fondamentale si scriverà

[2] $$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) = \mathrm{Q}(t)$$

denotando $\mathrm{Q}(t)$ la forza esterna ed in questo caso avremo

$$d(\mathrm{T}+\mathrm{E}) = \mathrm{Q}\,dt$$

Questa equazione dice che il lavoro delle forze esterne va impiegato ad aumentare l'energia totale del sistema, cioè la somma della forza viva (energia cinetica) e dell'energia interna (energia potenziale). Supponiamo ora che il sistema sia soggetto ad azioni interne ereditarie, e per considerare il caso più semplice supponiamo ch'esse siano azioni ereditarie lineari. Dovremo allora aggiungere l'azione ereditaria al termine $a^2 q$ che figura nel primo membro. Come abbiamo detto precedentemente questa azione ereditaria potrà scriversi

$$\int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau$$

supponendo l'eredità di natura invariabile col tempo e supponendo che T_0 sia la sua durata.

Dovremo ora ammettere quest'azione ereditaria acceleratrice o ritardatrice? È facile persuadersi che essa opera in senso opposto dell'azione interna $a^2 q(t)$ in modo che, come equazione generale da sostituirsi alla [2], dovremo assumere

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + a^2 q(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau = Q(t) \tag{3}$$

ove $\Phi(t)$ è una quantità essenzialmente negativa. Si ponga ora

$$a^2 + \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\, d\tau = m$$

e l'equazione precedente diverrà

$$\frac{d^2 q(t)}{dt^2} + m q(t) - \int_0^{T_0} \Phi(\tau) \left[q(t) - q(t-\tau) \right] d\tau = Q(t) \tag{3'}$$

Un semplice ragionamento ci porta a concludere che m è positivo altrimenti q non cambierebbe o crescerebbe.

Consideriamo il funzionale

$$E_p = \frac{1}{2} m q^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \Phi(\tau) \left[q(t) - q(t-\tau) \right]^2 d\tau \;;$$

il suo differenziale potrà scriversi

$$m\ddot{q}(t)\,\delta q(t) - \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right] d\tau\, \delta q(t)$$

$$+ \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right] \delta q(t-\tau)\, d\tau$$

Il primo termine è il prodotto della forza totale interna attuale cambiata di segno per il differenziale $\delta q(t)$ dello spostamento attuale. Potremo dunque chiamare $-E_p$ il *potenziale dell'insieme di tutte le azioni interne.*

E_p è un funzionale il quale dipende dallo stato attuale del sistema e da tutti gli stati che ha attraversato il sistema nell'intervallo di tempo T_0 che ha preceduto l'istante attuale. Ora dal punto di vista ereditario il sistema si trova nelle stesse condizioni in due istanti diversi quando, non solo i parametri che definiscono lo stato del sistema hanno gli stessi valori nei due istanti, ma sono rispettivamente uguali tra loro anche i valori dei parametri stessi nei due intervalli di tempo d'ampiezza T_0 che precedono i due detti istanti.

E_p è dunque un funzionale che riprende il valore iniziale allorchè il sistema ritorna, dal punto di vista ereditario, nelle stesse condizioni iniziali. Nella equazione [3'] la forza interna attuale è scritta sotto forma

$$-m\ddot{q}(t) + \int_0^{T_0} \Phi(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right] d\tau$$

ora quest'espressione può interpretarsi dicendo che il contributo di forza interna attuale proveniente dal tempuscolo $(\tau, \tau + d\tau)$ è dato da $\Phi(\tau)\left[q(t) - q(t-\tau)\right] d\tau$ ossia è proporzionale alla differenza tra il valore attuale del parametro q ed il suo valore nell'istante $t - \tau$. Ciò modifica il concetto di azione elementare ereditaria che avevamo precedentemente esposto. Fu appunto questa modificazione del concetto primitivo di contributo elementare ereditario, al quale abbiamo già alluso precedentemente, che diede luogo alle più feconde conseguenze.

Noi abbiamo detto che $\Phi(\tau)$ deve assumersi negativo, ma vi è da ricordare un'altra ipotesi sopra questa quantità. Siccome l'azione ereditaria tende ad estinguersi col tempo, così il valore assoluto di $\Phi(\tau)$ deve andare continuamente decrescendo col crescere di τ quindi potremo scrivere

$$\Phi(\tau)<0\ ,\quad (0\leqslant\tau<T_0)\ ,\quad \Phi(T_0)=0:\Phi'(\tau)>0\ ,\quad (0<\tau<\tau_0)$$

Riprendiamo l'equazione [3']. Se noi vogliamo ottenere il lavoro della forza esterna Q durante il tempuscolo dt dovremo calcolare

$$Q(t)\,q'(t)\,dt$$

e questo si esprimerà sotto la forma

$$q''(t)\,q'(t)\,dt+mq(t)\,q'(t)\,dt-q'(t)\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\left[q(t)-q(t-\tau)\right]d\tau$$

I primi due termini, come risulta ovviamente dall'analisi che conduce al principio delle forze vive, sono due differenziali esatti e cioè insieme formano

$$d\,\frac{1}{2}\left[q'^2(t)+mq^2(t)\right]$$

Il terzo termine non è un differenziale esatto ma differisce da

$$d\left\{-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\left[q(t)-q(t-\tau)\right]^2 d\tau\right\}$$

per la quantità

$$dt\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\left[q(t)-q(t-\tau)\right]\frac{dq(t-\tau)}{dt}\,d\tau$$

Ora quest'espressione può scriversi

$$dt\cdot\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\,\frac{d\left[q(t)-q(t-\tau)\right]^2}{d\tau}\,d\tau$$

e, con un'integrazione per parti, osservando che,

$$\Phi(T_0)=0 \ , \qquad \left[q(t)-q(t-\tau)\right]_{\tau=0}=0$$

si trasforma in

$$-dt\,\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi'(\tau)\left[q(t)-q(t-\tau)\right]^2 d\tau$$

onde otterremo finalmente

$$d\left\{\frac{1}{2}\,q'^2(t)+\frac{1}{2}\,mq^2(t)-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\left[q(t)-q(t-\tau)\right]^2 d\tau\,+\right.$$

$$\left.+\,\frac{dt}{2}\int_0^{T_0}\Phi'(\tau)\left[q(t)-q(t-\tau)\right]^2 d\tau\right\}=Q(t)\,dq(t)$$

E siccome (vedi [1])

$$\frac{1}{2}\,q'^2(t)=T \ , \qquad \frac{1}{2}\,mq^2(t)-\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi(\tau)\left[q(t)-q(t-\tau)\right]^2 d\tau=E_p$$

e possiamo porre

$$E_\delta=\frac{1}{2}\int_0^{T_0}\Phi'(\tau)\left[q(t)-q(t-\tau)\right]^2 d\tau \ ,$$

avremo

$$d(T+E_p)+E_\delta\,dt=Q(t)\,dq(t)$$

Ora E_δ è una quantità positiva, dunque il lavoro delle forze esterne supera sempre l'incremento della quantità

$$T+E_p \ .$$

Se noi scriviamo $T + E_p = E_m$ ed integriamo tra due tempi t_0 e t_1, dall'equazione precedente risulterà

$$E_m - E^0_m + \int_{t_0}^{t} E_\delta \, dt = L$$

ove E_m e E_m^0 sono i valori di E_m ai tempi t_1 e t_0, e il lavoro delle forze esterne è L.

È questa la equazione fondamentale energetica che volevamo stabilire.

Chiamiamo per definizione E_p l'energia potenziale interna ed E_m l'energia meccanica. Si avrà allora il principio energetico.

Il lavoro delle forze esterne oltrepassa sempre la variazione dell'energia meccanica di una quantità positiva. Se L è positivo questa legge può enunciarsi:

Il lavoro delle forze esterne non si trasforma completamente in energia meccanica ma resta sempre una parte residua positiva del lavoro stesso che non si trasforma in energia meccanica. Se mancano forze esterne (e quindi $L = 0$) *l'energia meccanica diminuisce costantemente, e, se il lavoro delle forze esterne è negativo, l'energia meccanica si trasforma solo in parte in lavoro esterno.*

III. – Passiamo adesso al caso della elasticità e annunziamo subito che alle ipotesi precedenti $\Phi(\tau) < 0$, $\Phi'(\tau) > 0$ (vedi paragrafo 2) noi sostitueremo le ipotesi che la forma

$$\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi_{rs} \xi_r \xi_s$$

sia negativa e la forma

$$\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi'_{rs} \xi_r \xi_s$$

sia positiva.

Chiamiamo u_1, u_2, u_3 le componenti degli spostamenti dei punti d'un corpo elastico secondo gli assi x_1, x_2, x_3 e chiamiamo

$$\gamma_1 = \gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \gamma_2 = \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \gamma_3 = \gamma_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\gamma_4 = \gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \gamma_5 = \gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3}, \quad \gamma_6 = \gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

le caratteristiche delle deformazioni (strain), mentre rappresentiamo colla forma

$$F = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s a_{rs} \gamma_r \gamma_s$$

il potenziale elastico quando manchino forze ereditarie.

Se queste invece sussistono assumeremo come potenziale elastico al tempo t

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s a_{rs} \gamma_r(t) \gamma_s(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi_{rs}(\tau) \left[\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau)\right] \left[\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau)\right] d\tau$$

$$= F + \Psi$$

ove T_0 è la durata della eredità e la forma

$$\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi_{rs} \xi_r \xi_s$$

è una forma definita negativa che si annulla per $\tau = T_0$

Denotando con

$$t_1 = t_{11}, \quad t_2 = t_{22}, \quad t_3 = t_{33}, \quad t_4 = t_{23} = t_{32}, \quad t_5 = t_{31} = t_{13}, \quad t_6 = t_{12} = t_{21}$$

le caratteristiche delle tensioni avremo nel caso ereditario

$$t_i(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_i(t)}$$

e le equazioni delle vibrazioni elastiche saranno

$$\text{[4]} \qquad \rho\left(\frac{d^2 u_i}{dt^2} - \chi_i\right) + \frac{\partial t_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial t_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial t_{i3}}{\partial x_3} = 0$$

$$\chi_i^{(\sigma)} = t_{i1} \cos n x_1 + t_{i2} \cos n x_2 + t_{i3} \cos n x_3$$

ove le χ_i sono le componenti delle forze di massa ρ la densità del corpo $\chi_i^{(\sigma)}$ le componenti delle tensioni superficiali n la normale esterna al contorno. σ dello spazio S occupato dal corpo elastico.

Dalle [4] si ricava

$$\text{[5]} \qquad \int_S \sum_1^3{}_i \, \rho\left(\frac{d^2 u_i}{dt^2}\frac{du_i}{dt} - \chi \frac{du_i}{dt}\right) d\mathrm{S} - \int_\sigma \sum_1^3{}_i \, \chi_i^{(\sigma)} \frac{du_i}{dt} \, d\sigma$$

$$= \int_s \sum_1^6{}_i \, t_i \frac{d\gamma_i}{dt} \, d\mathrm{S}$$

Ora poniamo

$$\lambda = \frac{1}{2} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi_{rs}\big(\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau)\big) \big(\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau)\big)$$

con che

$$\Psi = \int_0^{T_0} \lambda \, d\tau$$

si avrà

$$\sum_1^6{}_i\, t_i \frac{d\gamma_i}{dt} = \sum_1^6 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_i(t)} \frac{d\gamma_i}{dt} = \sum_1^6 \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \gamma_i(t)} \frac{d\gamma_i}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_i(t)} \frac{d\gamma_i}{dt} \right)$$

$$= \frac{d\mathrm{F}}{dt} + \int_0^{\mathrm{T}_0} \sum_1^6{}_i \frac{\partial \lambda}{\partial\big(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau)\big)} \left\{ \frac{d\big(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau)\big)}{dt} + \frac{d\gamma_i(t-\tau)}{dt} \right\} d\tau$$

$$= \frac{d\mathrm{F}}{dt} + \frac{d\Psi}{dt} - \int_0^{\mathrm{T}_0} \sum_1^6{}_i \left\{ \frac{\partial \lambda}{\partial\big(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau)\big)} \frac{d\gamma_i(t-\tau)}{d\tau} \right\} d\tau$$

$$= \frac{d\Phi}{dt} + \int_0^{\mathrm{T}_0} \sum_1^6{}_i \frac{\partial \lambda}{\partial\big(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau)\big)} \frac{d\big(\gamma_i(t) - \gamma_i(t-\tau)\big)}{d\tau} d\tau$$

$$= \frac{d\Phi}{dt} + \int_0^{\mathrm{T}_0} \left\{ \frac{d\lambda}{d\tau} - \frac{1}{2} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi'_{rs}(\tau) \big(\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau)\big) \big(\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau)\big) \right\} d\tau$$

Poniamo

$$\mathrm{X} = \frac{1}{2} \int_0^{\mathrm{T}_0} \sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \big(\gamma_r(t) - \gamma_r(t-\tau)\big) \big(\gamma_s(t) - \gamma_s(t-\tau)\big) \varphi'_{rs}(\tau)\, d\tau$$

e teniamo conto che la forma

$$\sum_1^6{}_r \sum_1^6{}_s \varphi'_{rs}(\tau)\, \xi_r \xi_s$$

si è supposta definita positiva. Inoltre siccome

$$\varphi_{rs}(\mathrm{T}_0) = 0$$

Risulterà

$$\int_0^{T_0} \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \, d\tau = 0$$

e quindi

$$\sum_1^6 t_i \frac{d\gamma_i}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} - X$$

onde ponendo

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^3 \int_S \rho \left(\frac{du_i}{dt}\right)^2 dS$$

la equazione [5] si scriverà

$$\frac{d}{dt}(T - \Phi) + X = \int_S \sum_1^3 \rho \chi_i \frac{du_i}{dt} \, dS + \int_S \sum_1^3 \chi_i^{(\sigma)} \frac{du_i}{dt} \, d\sigma$$

Moltiplicando per dt avremo

[6] $$d(T - \Phi) + X\,dt = \mathfrak{L}$$

essendo

$$\mathfrak{L} = \int_S \sum_1^3 \rho \chi_i \frac{du_i}{dt} \, dS + \int_\sigma \sum_1^3 \chi_i^{(\sigma)} \frac{du_i}{dt} \, d\sigma$$

il lavoro eseguito dalle forze esterne nel tempo dt. Chiamiamo per *definizione* $-\Phi$ *la energia elastica del corpo.* Avremo dunque che il lavoro eseguito dalle forze elastiche si trasforma in parte in forza viva dT in parte in energia elastica $-d\Phi$ ed in parte ($\chi\,dt$) si dissipa.

Se mancano le forze esterne la [6] ci dà

$$\frac{d}{dt}(T - \Phi) < 0$$

e quindi

$$T - \Phi$$

ossia la energia del sistema andrà continuamente diminuendo. Il moto non potrà cessare ad un dato istante. Infatti se il primo istante nel quale tutte le velocità fossero nulle incominciasse al tempo t non potrebbero essere tutte nulle le $\gamma_i(t) - \gamma_i(t - \tau)$ $(0 < \tau < T)$ quindi

$$\frac{d(T - \Phi)}{dt} < 0$$

il che prova che tutte le $\frac{du_i}{dt}$ non potrebbero essere nulle nell'istante t.