ACTA
Vol. IV - N. 3

SULLA COSTANZA DEI TENSORI ε (*)

LUIGI MARCHETTI

SVMMARIVM. — Exposita, quoad tensores, notione « aequalitatis per parallelam transvectionem » et « constantiae », Auctor ex hac aequilitate demonstrat tensores ε nunquam mutari.

1. – Come è ben noto, i sistemi ε (rispettivamente covariante e controvariante) del calcolo differenziale assoluto (¹) sono stati introdotti, fin dal 1901, dal RICCI (²). Lo stesso autore annunciò, verificandola (³), la proprietà dei sistemi ε di comportarsi *come costanti* di fronte alla

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Tullio Levi-Civita, il 23 settembre 1939.

(¹) Intendendo con $\sqrt{a}$ la radice del discriminante della forma fondamentale

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

fissiamo il segno da dare ad essa per un determinato sistema di variabili indipendenti $x^1, x^2, \ldots, x^n$, e conveniamo che questo segno cambi operando una trasformazione con jacobiano < 0. *Il sistema d'ordine* n, i cui elementi $\varepsilon_{r_1 r_2 \ldots r_n}$ sono nulli, se gl'indici $r_1 r_2 \ldots r_n$ non sono tutti distinti, e uguali a $\sqrt{a}$, o a $-\sqrt{a}$, secondochè questi indici formano una permutazione di classe pari o dispari rispetto alla permutazione fondamentale $(1, 2, \ldots, n)$, *è covariante.* Gli elementi $\varepsilon^{r_1 r_2 \ldots r_n}$ del sistema reciproco *controvariante* sono rispettivamente uguali a 0, $+\frac{1}{\sqrt{a}}$, $-\frac{1}{\sqrt{a}}$. Indicando con Δ lo jacobiano di n funzioni $z_1, z_2, \ldots, z_n$ preso rispetto ad n variabili $x^1, x^2, \ldots, x^n$ e diviso per $\sqrt{a}$, si ha l'identità

$$\Delta \equiv \sum_{1}^{n}{}_{r_1 \ldots r_n} \varepsilon^{r_1 \ldots r_n} \frac{\partial z_1}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial z_n}{\partial x^{r_n}}$$

da cui deriva, come il RICCI stesso fa notare, la proprietà invariantiva di Δ. Vedi RICCI-CURBASTRO - T. LEVI-CIVITA, *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, in « Math. Ann. », B. 54, 1901, pag. 135.

(²) Id., pag. 135.

(³) Id., pag. 139.

derivazione covariante. Definita tale derivazione covariante in vari modi fu naturalmente sempre verificata la proprietà della costanza rispetto a tale derivazione (²). Tuttavia queste verifiche, per la costanza ed anche per l'invarianza, presentano l'inconveniente di non essere comprensive; si limitano a far vedere che quella certa proprietà sussiste, senza chiarire il significato della proprietà stessa.

Coll'introduzione del « parallelismo » da parte del LEVI-CIVITA è stato reso possibile il confronto di tensori, e quindi l'introduzione del concetto di « equivalenza per trasporto parallelo » da cui è risultato un perfezionamento per accertare il comportamento invariantivo.

Analogo perfezionamento mi propongo di esporre, in questa Nota, per la costanza.

2. – In una qualunque varietà sia dato un campo C, e in ogni punto di C sia attaccato un ben determinato tensore m^plo T di componenti

$$X^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p} \qquad (\text{con } p+q=m),$$

funzioni del posto, riferite ad un certo sistema di coordinate generali x^i $(i=1,2,\dots,n)$.

Se L è una linea della varietà contenuta in C, conveniamo di dire (³) che il tensore T è *costante lungo* L se le sue determinazioni nei punti di L sono *equivalenti lungo* L per trasporto parallelo, cioè se

$$\sum_1^n {}_j X^{k_1 \dots k_q}_{i_1 \dots i_p | j} \quad \lambda^j = 0 \qquad (i_1,\dots,i_p\,;\ k_1,\dots,k_q=1,2,\dots,n)$$

essendo $\lambda^j = \dfrac{d x^j}{d\mathrm{L}}$ $(j=1,\dots,n)$ i parametri della direzione di L.

(¹) Cfr. per esempio, CISOTTI, *Lezioni di calcolo tensoriale*, pag. 75, Ed. Poligrafica, Milano, 1928; FINZI, *Tensori vettoriali e loro derivazione*, in « Atti Acc. Lincei », Rendiconti, vol. XVI, 2° sem., 1932, pag. 404-409, serie VI.

(²) Cfr. in proposito A. MASOTTI, *Sul concetto di tensore costante in varietà qualunque*, in « Atti Acc. Lincei », Rendiconti, serie VI, vol. VII, 1928, pag. 457-459.

Ora, se questa costanza si manifesta qualunque sia la linea L, diremo che tale tensore T è *costante assolutamente* su C.

Ciò richiede che sia identicamente

$$X^{k_1 \ldots k_q}_{i_1 \ldots i_p \mid j} = 0 \qquad (i_1, \ldots, i_p\, ;\; k_1, \ldots, k_q\, ;\; j = 1, \ldots, n)$$

3. – Ciò premesso, posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^1_1 & \lambda^2_1 & \ldots & \lambda^n_1 \\ \lambda^1_2 & \lambda^2_2 & \ldots & \lambda^n_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^1_n & \lambda^2_n & \ldots & \lambda^n_n \end{vmatrix}$$

consideriamo la forma

$$F = \sqrt{a} \cdot \Delta$$

plurilineare nei parametri degli n vettori $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \ldots, \underline{\lambda}_n$, che ha per coefficienti (dei vari prodotti di questi argomenti) gli elementi $\varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, componenti covarianti del sistema ε.

Colla regola di trasporto per parallelismo lungo il cammino elementare δx^j calcoliamo il δF (¹), trattando naturalmente ciascuna serie di variabili λ^i_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ come le ξ^i (componenti controvarianti di un vettore $\underline{\xi}$, che si trasporta per parallelismo), e $\sqrt{a}$ come funzione del posto.

Notiamo anzitutto che

[1] $$\delta \Delta = \sum_{1}^{n}{}_{\alpha, i}\, \Lambda^i_{\ \alpha}\, \delta \lambda^i_{\ \alpha}$$

(¹) T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, raccolte da E. Persico, pag. 165 s., ed. Stock., Roma, 1925.

dove si designano con Λ^i_α i complementi algebrici dei singoli elementi λ^i_α.

Ma abbiamo che (¹)

$$[2] \qquad \delta\lambda^i_\alpha = -\sum_{j,l}{}_1^n \left\{ {jl \atop i} \right\} \lambda^l_\alpha \, \delta x^j$$

Sostituendo nella [1] e modificando l'ordine delle sommatorie, si può scrivere

$$\delta\Delta = -\sum_{j,l,i}{}_1^n \left\{ {jl \atop i} \right\} \delta x^j \sum_\alpha{}_1^n \Lambda^i_\alpha \lambda^l_\alpha$$

La somma interna rispetto ad α dà il determinante Δ per $l = i$ e zero per $l \neq i$. Perciò è inutile considerare il contributo dei termini in cui l è diverso da i, perchè tale contributo è nullo. Rimane perciò della somma doppia rispetto ad l e ad i soltanto una somma semplice, per esempio rispetto ad i, e precisamente, raccogliendo Δ a fattore,

$$\delta\Delta = -\Delta \sum_{ji}{}_1^n \left\{ {ji \atop i} \right\} \delta x^j = -\Delta \sum_j{}_1^n \delta x^j \sum_i{}_1^n \left\{ {ji \atop i} \right\}$$

Il sommatorio interno non è altro che

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^j} \qquad (^2)$$

e quindi si ha

$$[3] \qquad \delta\Delta = -\frac{\Delta}{\sqrt{a}} \delta\sqrt{a}$$

(¹) T. Levi-Civita, op. cit., formula (52), pag. 158.

(²) Dalla (26) di pag. 130 della citata opera del Levi-Civita, si ha infatti:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^j} = \sum_i{}_1^n \left\{ {ij \atop i} \right\}.$$

In base alla [3] la differenziazione dell'invariante $F = \sqrt{a} \cdot \Delta$ dà

$$\delta F = 0$$

il che prova che le derivate covarianti dei coefficienti ε della forma invariante F sono *identicamente* nulle.

Analogamente, posto

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \lambda_{1|1} & \lambda_{1|2} & \dots & \lambda_{1|n} \\ \lambda_{2|1} & \lambda_{2|2} & \dots & \lambda_{2|n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n|1} & \lambda_{n|2} & \dots & \lambda_{n|n} \end{vmatrix}$$

potremo considerare la forma

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \Delta_1$$

plurilineare nei momenti degli n vettori $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \dots, \underline{\lambda}_n$, che ha per coefficienti gli elementi $\varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_n}$, componenti controvarianti del sistema ε.

Ripetendo considerazioni analoghe a quelle precedenti, abbiamo successivamente:

$$[1'] \qquad \delta\Delta_1 = \sum_{1}^{n}{}_{\alpha,i} \, \Lambda_{i|\alpha} \, \delta\lambda_{i|\alpha}$$

dove si designano con $\Lambda_{i|\alpha}$ i complementi algebrici dei singoli elementi $\lambda_{i|\alpha}$.

Ed avremo anche (1)

$$[2'] \qquad \delta\lambda_{i|\alpha} = \sum_{1}^{n}{}_{j,l} \begin{Bmatrix} il \\ j \end{Bmatrix} \lambda_{j|\alpha} \, \delta x^l$$

(1) T. Levi-Civita, op. cit., formula (52'), pag. 158.

Sostituendo in [1'], avremo successivamente:

$$\delta\Delta_1 = \sum_1^n {}_{j,l,i} \left\{ {il \atop j} \right\} \delta x^l \sum_1^n {}_\alpha \Lambda_{i|\alpha} \lambda_{j|\alpha} = \Delta_1 \sum_1^n {}_{i,l} \left\{ {il \atop i} \right\} \delta x^l = \Delta_1 \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x^l} \delta x^l$$

Sarà cioè:

$$[3'] \qquad \delta\Delta_1 = \Delta_1 \delta \sqrt{a}$$

E, per la [3'], la differenziazione dell'invariante

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{a}} \Delta_1$$

dà:

$$\delta F_1 = 0$$

il che prova che le derivate covarianti delle componenti controvarianti del sistema ε sono *identicamente* nulle.

E dall'essere nulle le componenti covarianti o controvarianti del tensore derivato risulta la costanza assoluta del tensore ε.