ACTA
Vol. IV - N. 12

LOI DES FORCES DANS UN SYSTÈME GRAVITATIONNEL DU TYPE SOLEIL-PLANÈTE (*)

SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO

SVMMARIVM. — Nova doctrina a prof. Garcia proposita utens, auctor probat praecedentiam perihelii Mercurii posse explicari, si vis attrahendi serie quadam exprimatur, cuius primus terminus ad Newtonianam legem congruat, ceteri vero sint additicii termini, qui tamquam vires perturbantes habeantur.

INTRODUCTION. - Il est connu que la loi de NEWTON est seulement approchée et que pour l'explication de certains phénomènes, tel que celui de la précession du périhèlie de Mercure, elle se trouve en défaut et qu'il a fallu de la théorie de la Relativité Générale d'EINSTEIN pour trouver un résultat d'accord avec l'expérience.

Quelques mathématiciens avaient cherché jades l'explication de tel phénomène, dans le cadre de la Mécanique Classique, en supposant l'existence des forces perturbatrices qui varieraient en raison inverse de la troisième, quatrième et enième puissance de la distance. Mais c'est notre compatriote, le mathématicien pérouvien Prof. GODOFREDO GARCIA, qui a réussi à résoudre par ces considerations, le problème de la précession du périhèlie, dans un travail remarquable (1), en retrouvant la formule bien connue d'EINSTEIN, de même que les autres résultats que l'on déduit par la théorie de la Relativité Générale

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi il 26 marzo 1940.
(1) GODOFREDO GARCIA, *La Mecánica Clásica y la explicación del Corrimiento del perihelio de los planetas, de la deflexión de la luz y del Corrimiento de las rayas espectrales al rojo*, Rev. de Ciencias, Enero a Setiembre, 1932, Lima.

concernant le phénomène de la déflection de la lumière et le déplacement des raies spectrales vers le rouge.

Nous avons suivi la méthode du Prof. GARCIA que consiste dans le développement en série du potentiel en fonction des puissances croissantes de l'inverse $1/\rho$ de la distance, pour arriver à une équation différentielle générale. La difficulté de cette méthode réside dans la détermination précise des differentes constantes, ou plus exactement paramètres, qu'apparaissent quand on fait le développement en série. Le Prof. GARCIA était réussi à fixer la structure des paramètres du second et troisième terme de tel développement et alors nous nous somme aperçus que les paramètres varient selon une loi, formule [6], ce qui nous a permit de déduire une loi générale des forces centrales qui fixe le valeurs précises des différentes forces qu'interviennent dans un système gravitationnel du type Soleil-Planète. La loi en question est la suivante:

$$F_n = -\frac{nGMm}{\rho^{n+1}}\left(\frac{S}{c}\right)^{n-1} \tag{1}$$

Dans cette formule n est le nombre d'ordre de la force que l'on considère, ρ la distance, G la constante de la gravitation, M la masse du corps central supposé fixe, m la masse de la planète, S la constante des aires et c la vitesse de la lumière.

En première approximation pour $n = 1$ on a la loi de NEWTON:

$$F_1 = -\frac{GMm}{\rho^2}\left(\frac{S}{c}\right)^0 = -\frac{GMm}{\rho^2} \tag{2}$$

Pour $n = 3$ on obtient la force perturbatrice:

$$F_3 = -\frac{3\,GMm}{\rho^4}\left(\frac{S}{c}\right)^2 \tag{3}$$

qui est la cause de l'avance du périhélie de la planète.

DEMONSTRATION. — Supposons une masse centrale M, telle celle du Soleil, et développons le potentiel dû à cette masse en fonction des puissances croissantes 1, 2, 3, ..., n de l'inverse $1/\rho$ de la distance:

$$V = \frac{\mu_1}{\rho} + \frac{2\mu_2}{\rho^2} + \frac{3\mu_3}{\rho^3} + \dots + \frac{n\mu_n}{\rho^n} \tag{4}$$

Ici $\mu_1 = GM$ est le produit de la constante G de la gravitation par la masse centrale M, et $\mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots, \mu_n$ sont des paramètres inconnus à déterminer.

Quand il y a un second corps de masse m, telle celle d'une planète qui tourne autour du corps central, à chacun des termes du développement en série ci-dessus, correspondent les forces:

$$F_1 = -\frac{\mu_1 m}{\rho^2}\ ;\quad F_2 = -\frac{2\mu_2 m}{\rho^3}\ ;\quad F_3 = -\frac{3\mu_3 m}{\rho^4} \tag{5}$$

Nous avons trouvé que les paramètres à déterminer varient selon une loi très simple qui est la suivante:

$$\mu_n = \mu_1\left(\frac{S}{c}\right)^{n-1} = GM\left(\frac{S}{c}\right)^{n-1} \tag{6}$$

formule qui donne, faisant $n=1$, $n=2$, $n=3$, ... les valeurs $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ et alors les forces de la formule [5] deviennent comme il suit:

$$F_1 = -\frac{GMm}{\rho_2}\left(\frac{S}{c}\right)^0;\quad F_2 = -\frac{2\,GMm}{\rho^3}\left(\frac{S}{c}\right),\quad F_3 = -\frac{3\,GMm}{\rho^4}\left(\frac{S}{c}\right)^2;\quad \dots$$

Toutes ces forces s'expriment par la formule générale suivante:

$$F_n = -\frac{nGMm}{\rho^{n+1}}\left(\frac{S}{c}\right)^{n-1} \tag{1}$$

qui est la loi de forces centrales propres du système gravitationnel considéré (¹).

Comme la constante des aires a pour valeur $S = v\rho/2$ où v est la vitesse, la formule ci-dessus peut être mise sous la forme de la loi de NEWTON précedée d'un coéfficient A numérique:

$$[7] \qquad F_n = -A_n \cdot \frac{GMm}{\rho^2}$$

où A_n a pour valeur:

$$[8] \qquad A_n = n\left(\frac{v}{2c}\right)^{n-1}$$

On voit que A est un pure coéfficient numérique qui a pour valeur 1 quand $n = 1$ (loi de NEWTON) et de valeurs chaque fois plus petites quand plus grand est le nombre $n - 1$ de la puissance pour être la vitesse v de la planète toujours très petite en comparaison de la vitesse c de la lumière. Conséquemment quand n augmente, les forces perturbatrices sont en intensité de plus en plus petites que la force principale ou newtonienne, mais logiquement ces forces perturbatrices de structure différentes les unes des autres, doivent produire aussi des effets différents dans le système gravitationnel, et de ce fait la gravitation résulte être un phénomène très complexe méme dans le modèle simple que nous étudions.

Il nous suffit, à present, de vérifier que parmis les forces perturbatrices la F pour $n = 3$ est bien celle qui produit l'avance du périhélie.

L'équation différentielle de BINET est, comme l'on sait:

$$[9] \qquad \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{\mu_1}{S^2}$$

(¹) SANTIAGO ANTUNEZ DE MAYOLO, *Las Energias Primarias que componen el Electrón y sus interpretaciones*, Actas y Trabajos del Primer Congreso Peruano de Química, Julio 1938, Lima.

où toujours $\mu_1 = \mathrm{GM}$ et θ est l'anomalie. Cette équation différentielle devient pour le cas du développement en série du potentiel:

$$[10] \qquad \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{S}^2}\left[\mu_1 + \frac{2\mu_2}{\rho} + \frac{3\mu_3}{\rho^2} + \ldots + \frac{n\mu_n}{\rho^{n-1}}\right]$$

Et puisque nous connaissons, formule [6], la structure des différents paramètres, nous pouvons écrire:

$$[11] \qquad \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{S}^2}\left[\mathrm{GM} + \frac{2\,\mathrm{GM}}{\rho}\left(\frac{\mathrm{S}}{c}\right) + \frac{3\,\mathrm{GM}}{\rho^2}\left(\frac{\mathrm{S}}{c}\right)^2 + \ldots + \frac{n\,\mathrm{GM}}{\rho^{n-1}}\left(\frac{\mathrm{S}}{c}\right)^{n-1}\right]$$

qui est l'équation différentielle complète, sans coéfficients indeterminés, qui permet de résoudre dans le cadre de la Mécanique Classique, les problèmes complexes créés par les forces perturbatrices, qui peuvent se presenter dans le système Soleil-Planète.

En effet supposons le cas très particulier de considerer seulement le premier et le troisième terme du second membre de l'équation [11], c'est à dire les termes correspondants à $n = 1$ (loi de Newton) et $n = 3$ pour la force perturbatrice F_3. On a alors:

$$[12] \qquad \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{S}^2} + \frac{3\,\mathrm{GM}}{c^2 \rho^2}$$

qui est l'équation différentielle bien connue qui donne compte de l'avance du périhélie, phénomène qui depend du terme $3\,\mathrm{GM}/c^2\rho^2$ correspondant à la force perturbatrice F_3. On ferait de même pour étudier les effets des autres forces perturbatrices en prenant séparément le terme correspondant à celle qu'on étudie avec le premier terme qui correspond à la loi de Newton.

L'intégration de l'équation différentielle, formule [12], conduit à:

$$[13] \qquad \delta = \frac{3\,\mathrm{GM}}{c^2 p}\,\theta$$

où p est le paramètre de la section conique et θ l'anomalie.

Pour un tour complet, soit $\theta = 2\pi$ on a:

$$\Delta = \frac{6\pi \, GM}{c^2 p} \tag{14}$$

Le Prof. GARCIA transforme cette équation dans celle d'EINSTEIN en substituant le paramètre p de la section conique par:

$$p = a(1 - e^2) \tag{15}$$

où a est le demi-axe majeur et e l'excentricité. Puis au moyen de la troisième loi de KEPLER:

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \tag{16}$$

où T est le temps de révolution de la planète. Alors la formule [14] devient:

$$\Delta = \frac{24\pi^3 a^3}{c^2 T^2 (1 - e^2)} \tag{17}$$

qui est la formule d'EINSTEIN.

Ainsi on voit que c'est bien la force perturbatrice F_3, formule [3], qui est la cause de l'avance du périhélie. On voit aussi que l'équation différentielle [12] qui permet de trouver cet avance n'est qu'une approximation de l'équation générale [11], sans coéfficients indeterminés, qui tient compte de toutes les forces perturbatrices. Donc si nous devons conserver la notion de force pour l'explication des phénomènes du monde physique, notre formule [1] est bien la loi générale des forces propres du système Soleil-Planète consideré.