ACTA
Vol. IV - N. 9

STATI DI COAZIONE DA ARMATURE INCROCIATE (*)

GUSTAVO COLONNETTI
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Exhibet auctor rationem accurate supputandi status coactionis, qui in lapidum glutine fiunt si producatur tensio duarum vel plurium fulturarum, iuxta varias directiones dispositarum.

Il calcolo rigoroso degli stati di coazione che si determinano in una massa di calcestruzzo mettendo simultaneamente in tensione due o più armature incrociate — cioè disposte secondo direzioni differenti (1) — presenta qualche difficoltà.

Ciò dipende dal fatto che ciascuna armatura viene ad essere sollecitata, non solo dalla sua tensione longitudinale, ma anche da pressioni laterali dipendenti dalle tensioni delle armature che essa incrocia.

Se però — conformemente a quanto io ho recentemente proposto (2) — le armature vengono preventivamente avvolte da un sottile strato di materia plastica, atto ad impedire che esse aderiscano al calcestruzzo, ogni azione sulla loro superficie laterale praticamente si annulla, ed esse restano soggette a sole tensioni longitudinali.

Il problema diviene allora suscettibile di una soluzione che è, ad un tempo, semplice e rigorosa.

* * *

Per fissar le idee su di un caso tipico — a cui molti altri casi potranno, per approssimazione, riferirsi — poniamo che in una certa

---

(*) Nota presentata il 18 febbraio 1940.

(1) G. COLONNETTI, *Contributo alla teoria delle travi inflesse in stato di coazione*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », III, 8 (1939).

(2) G. COLONNETTI, *Di un nuovo procedimento per la messa in tensione delle armature nelle strutture in cemento armato*, Pontificia Academia Scientiarum, « Acta », IV (1940).

regione di una data struttura coesistano tre armature, o sistemi di armature, disposte secondo tre direzioni fra loro ortogonali, che assumeremo senz'altro come direzioni degli assi coordinati di riferimento.

E supponiamo che, mediante piani paralleli ai piani coordinati, sia possibile isolare idealmente, nella massa del calcestruzzo, un parallelepipedo rettangolo tale che, attraverso le sue facce, non si trasmettano che azioni normali, uniformemente ripartite sulle facce stesse.

Lo stato di coazione così definito si potrà allora considerare come caratterizzato *nel calcestruzzo* dai valori (costanti) delle tre componenti speciali di tensione non identicamente nulle

$$\sigma_x \qquad \sigma_y \qquad \sigma_z$$

o dai valori (pure costanti) delle corrispondenti tre componenti della deformazione elastica

$$\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}\right) \qquad \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_y - \frac{\sigma_z+\sigma_x}{m}\right) \qquad \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\sigma_z - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}\right)$$

dove E è il modulo di elasticità normale del calcestruzzo, ed m è il coefficiente di contrazione trasversale.

Dette poi

$$\mathrm{A}_x \qquad \mathrm{A}_y \qquad \mathrm{A}_z$$

ed

$$a_x \qquad a_y \qquad a_z$$

le aree rispettivamente occupate dal calcestruzzo e dalle armature sulle facce del parallelepipedo normali ai tre assi, le analoghe componenti speciali di tensione *nelle armature* dovranno, per l'equilibrio, essere ordinatamente eguali a

$$\begin{array}{ccc} -\sigma_x \dfrac{\mathrm{A}_x}{a_x} & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_y \dfrac{\mathrm{A}_y}{a_y} & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_z \dfrac{\mathrm{A}_z}{a_z} \end{array}$$

Esse daranno origine a deformazioni elastiche le cui componenti nelle direzioni delle tensioni (le sole che qui ci interessino) saranno rispettivamente

$$-\frac{1}{nE}\sigma_x\frac{A_x}{a_x}$$

$$-\frac{1}{nE}\sigma_y\frac{A_y}{a_y}$$

$$-\frac{1}{nA}\sigma_z\frac{A_z}{a_z}$$

n essendo, al solito, il rapporto fra il modulo di elasticità normale del materiale di cui son fatte le armature ed il modulo di elasticità normale del calcestruzzo.

Tali deformazioni elastiche si sovrappongono (e pertanto si sommano) alle deformazioni impresse, le cui componenti analoghe noi denoteremo ordinatamente con

$$\bar{\varepsilon}_x$$

$$\bar{\varepsilon}_y$$

$$\bar{\varepsilon}_z$$

In queste condizioni, l'equazione generale dell'equilibrio nello stato di coazione che queste deformazioni impresse determinano [1]

$$\int_V \left[(\varepsilon_x+\bar{\varepsilon}_x)\,\delta\sigma_x + (\varepsilon_y+\bar{\varepsilon}_y)\,\delta\sigma_y + (\varepsilon_z+\bar{\varepsilon}_z)\,\delta\sigma_z\right] dV = 0$$

dovendo, com'è noto, riuscir verificata per tutte le variazioni compatibili colle leggi della statica, si scinde senz'altro nelle tre seguenti:

$$\frac{1}{E}\left[\left(1+\frac{A_x}{na_x}\right)\sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_z\right] = \bar{\varepsilon}_x$$

$$\frac{1}{E}\left[\left(1+\frac{A_y}{na_y}\right)\sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_z - \frac{1}{m}\sigma_x\right] = \bar{\varepsilon}_y$$

$$\frac{1}{E}\left[\left(1+\frac{A_z}{na_z}\right)\sigma_z - \frac{1}{m}\sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y\right] = \bar{\varepsilon}_z$$

---

[1] G. Colonnetti, *La statica dei corpi elasto-plastici*, Pontificia Academia Scientiarum, « Commentationes », II, 12 (1938).

Queste equazioni ci offrono la soluzione immediata del problema se a caratterizzare lo stato di coazione son date le tensioni σ e si cercano le deformazioni impresse $\bar{\varepsilon}$.

Risolte rispetto alle σ esse si prestano invece alla soluzione del problema inverso: in cui cioè son date le deformazioni impresse e si cercano le tensioni che esse determinano.

* * *

S'intende che, per determinare un triplice sistema di tensioni non nulle, non occorre che tutte e tre le deformazioni impresse siano diverse da zero. Basta evidentemente che differisca da zero una di esse: poniamo la $\bar{\varepsilon}_z$.

Delle nostre tre equazioni le prime due possono allora venir utilizzate per esprimere σ_x e σ_y in funzione di σ_z, mentre l'altra servirà a stabilire la legge di dipendenza di quest'ultima da $\bar{\varepsilon}_z$.

Ciò significa che le armature disposte parallelamente ad x o ad y, anche se non sono state messe preventivamente in tensione, partecipano al fenomeno determinato dalla messa in tensione dell'armatura disposta secondo z opponendosi alle deformazioni trasversali che questa tende a produrre nel calcestruzzo (in cui le prime si intendono semplicemente ancorate nel loro stato naturale non deformato).

Così esse entrano alla lor volta in tensione: e la funzione che esse compiono, nei confronti dello stato di coazione, non differisce sostanzialmente da quella che, negli stati di deformazione determinati da sollecitazioni esterne, noi siamo abituati ad affidare al *frettage*.