

# TEORIA E CALCOLO DELLE TRAVI CON ARMATURE PREVENTIVAMENTE TESE (\*)

(IL CASO DELLA PRESSO-FLESSIONE)

(Con 1 figura)

GUSTAVO COLONNETTI

*Accademico Pontificio*

SUMMARIVM. — Auctor exponit novam rationem computandi trabes, quarum fulturae antea distantiae sint, et ostendit quomodo haec ratio ad peculiarem casum presso-flexionis applicari valeat.

È noto che la tecnica del cemento armato si va oggi orientando verso l'uso di armature preventivamente tese, cioè incorporate nel calcestruzzo mentre sono elasticamente deformate.

A presa avvenuta, gli ancoraggi per la messa in tensione delle armature vengono soppressi, e queste tendono naturalmente a riprendere le loro dimensioni primitive; ma ne sono, almeno in parte, impediti dalla presenza del calcestruzzo che le avvolge.

Si viene così a creare uno stato di coazione in cui le armature restano tese ed il calcestruzzo compresso; stato di coazione che, in determinate circostanze, può conferire al sistema caratteristiche eminenti di resistenza alle sollecitazioni esterne (1).

---

(\*) Nota presentata il 15 settembre 1939.

(1) G. COLONNETTI, *Problemi nuovi e nuovi orientamenti*, «Il cemento armato», 1939, n. 2; *Prospettive autarchiche in materia di cemento armato*, id., 1939, n. 4; *La nuova tecnica del cemento armato*, id., 1939, n. 8.

Di qui la necessità di una teoria di questi stati di coazione e di un metodo di calcolo che ne metta in evidenza le caratteristiche.

\* \* \*

È chiaro che, agli effetti di questa teoria, si possono considerare come « deformazioni impresse » quelle che ciascun elemento dell'armatura, se fosse libero di riprendere il suo stato naturale non deformato, presenterebbe per rapporto allo stato in cui esso venne incorporato nel calcestruzzo; o, se si vuole, per rapporto alla cavità che nel calcestruzzo esso è destinato ad occupare.

Supposte le armature disposte tutte parallelamente all'asse geometrico della trave, assunto come asse delle  $z$ , tali deformazioni impresse soddisferanno alle condizioni seguenti:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\varepsilon}_x = -\frac{1}{m} \bar{\varepsilon}_z \quad \bar{\varepsilon}_y = -\frac{1}{m} \bar{\varepsilon}_z \\ \bar{\gamma}_{yz} = 0 \quad \bar{\gamma}_{zx} = 0 \quad \bar{\gamma}_{xy} = 0 \end{array} \right\} \text{(con } \bar{\varepsilon}_z \text{ indipendente da } z)$$

Vien fatto allora di chiedersi se sia possibile una soluzione del problema dell'equilibrio elastico della trave in cui le componenti della deformazione totale soddisfino a condizioni analoghe:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x = -\frac{1}{m} (\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z) \quad \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y = -\frac{1}{m} (\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z) \\ \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = 0 \quad \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = 0 \quad \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy} = 0 \end{array} \right\} \text{(con } \varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z \text{ indipendente da } z)$$

nel qual caso le condizioni stesse dovranno necessariamente riuscire soddisfatte dalle componenti della deformazione elastica:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_x = -\frac{1}{m} \varepsilon_z \quad \varepsilon_y = -\frac{1}{m} \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} = 0 \quad \gamma_{zx} = 0 \quad \gamma_{xy} = 0 \end{array} \right\} \text{(con } \varepsilon_z \text{ indipendente da } z)$$

Ma, come immediata conseguenza di queste, si deve avere <sup>(1)</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 & \sigma_y &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 & \tau_{zx} &= 0 & \tau_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione postulata comporta pertanto una sola componente speciale di tensione non identicamente nulla - la  $\sigma_z$  (indipendente da  $z$ ) - epperò altro non è che un caso generalizzato di presso-flessione.

Con una ovvia estensione della teoria classica di DE SAINT VENANT, noi completeremo pertanto le nostre ipotesi sulla deformazione totale introducendo il concetto della conservazione delle sezioni piane, cioè ponendo:

$$\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \lambda + \mu y + \nu x \quad (\text{con } \lambda, \mu, \nu \text{ costanti})$$

e quindi:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E(\lambda + \mu y + \nu x - \bar{\varepsilon}_z)$$

Ciò posto, detta  $A$  una sezione retta generica della trave, ed  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N}_x$ ,  $\mathcal{N}_y$ , le tre componenti non nulle della sollecitazione esterna relativa a tale sezione, dovranno, per l'equilibrio, essere verificate le tre equazioni:

$$[1] \quad \mathcal{N} = \int_A \sigma_z dA \quad \mathcal{N}_x = \int_A \sigma_z y dA \quad \mathcal{N}_y = \int_A \sigma_z x dA$$

Se poi si passa a considerare il tronco di trave compreso fra due sezioni rette vicinissime di quote  $z$  e  $z + dz$ , dovrà inoltre essere soddisfatta la condizione <sup>(2)</sup>:

$$dz \int_A \frac{\sigma_z^2}{2E} dA + dz \int_A \bar{\varepsilon}_z \sigma_z dA = \text{minimum}$$

<sup>(1)</sup> Cfr.: G. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni*, vol. I (U. T. E. T. 1928), pag. 87, formule (40) e (41).

<sup>(2)</sup> G. COLONNETTI, *Sul problema delle coazioni elastiche*, «Rend. R. Accademia dei Lincei», serie V, vol. XXVII (1918); *Per una teoria generale delle coazioni elastiche*, «Atti R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LVI (1921); *La statica dei corpi elasto-plastici*, Pontificia Academia Scientiarum, «Commentationes», vol. II (1938), n. 12.

per rapporto a tutti i valori che l'espressione al primo membro può assumere compatibilmente colle deformazioni impresse e colle forze esterne date.

Ciò è quanto dire che dovrà essere verificata l'equazione:

$$[2] \quad \int_A (\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z) \delta\sigma_z dA = 0$$

per tutte le variazioni  $\delta\sigma_z$  che sono compatibili colle equazioni generali della statica, testè citate, ossia per tutte le variazioni  $\delta\sigma_z$  che soddisfano alle condizioni:

$$[3] \quad \int_A \delta\sigma_z dA = 0 \quad \int_A \delta\sigma_z y dA = 0 \quad \int_A \delta\sigma_z x dA = 0$$

Ora è facile verificare che nell'ipotesi assunta:

$$\varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \lambda + \mu y + \nu x$$

la [2] si riduce alla forma:

$$\lambda \int_A \delta\sigma_z dA + \mu \int_A \delta\sigma_z y dA + \nu \int_A \delta\sigma_z x dA = 0$$

che è identicamente verificata quando son soddisfatte le [3].

Se ne conclude che la deformazione postulata rappresenta una soluzione effettivamente possibile del problema proposto.

Siamo anzi in grado di precisare i valori che le costanti indeterminate  $\lambda, \mu, \nu$  dovranno assumere in ciascun caso concreto.

Se infatti nelle [1] si sostituisce a  $\sigma_z$  la sua espressione:

$$\sigma_z = E(\lambda + \mu y + \nu x - \bar{\varepsilon}_z)$$

quelle equazioni divengono:

$$\mathcal{N} = \lambda E_c \int_A \frac{E}{E_c} dA + \mu E_c \int_A \frac{E}{E_c} y dA + \nu E_c \int_A \frac{E}{E_c} x dA - E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z dA$$

$$\mathcal{N}_x = \lambda E_c \int_A \frac{E}{E_c} y dA + \mu E_c \int_A \frac{E}{E_c} y^2 dA + \nu E_c \int_A \frac{E}{E_c} xy dA - E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z y dA$$

$$\mathcal{N}_y = \lambda E_c \int_A \frac{E}{E_c} x dA + \mu E_c \int_A \frac{E}{E_c} xy dA + \nu E_c \int_A \frac{E}{E_c} x^2 dA - E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z x dA$$

In esse si è indicato con  $E_c$  il modulo di elasticità del calcestruzzo, assunto come valore di riferimento.

In conseguenza si denoteranno con:

$$\mathcal{A} = \int_A \frac{E}{E_c} dA \quad \mathcal{J}_x = \int_A \frac{E}{E_c} y^2 dA \quad \mathcal{J}_y = \int_A \frac{E}{E_c} x^2 dA$$

rispettivamente l'area della sezione *ridotta in calcestruzzo* ed i suoi due momenti d'inerzia rispetto ai due assi principali centrali, con cui s'intendono, al solito, coincidenti gli assi delle  $x$  e delle  $y$ .

Se si tiene conto che, così facendo,

$$\int_A \frac{E}{E_c} x dA = 0 \quad \int_A \frac{E}{E_c} y dA = 0 \quad \int_A \frac{E}{E_c} xy dA = 0$$

dalle tre equazioni scritte si ricavano subito i valori:

$$[4] \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{\mathcal{N} + E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z dA}{E_c \mathcal{A}} \\ \mu &= \frac{\mathcal{N}_x + E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z y dA}{E_c \mathcal{J}_x} \\ \nu &= \frac{\mathcal{N}_y + E_c \int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z x dA}{E_c \mathcal{J}_y} \end{aligned}$$

Deformazioni e tensioni si possono ormai pertanto considerare come delle funzioni note della sollecitazione esterna e delle deformazioni impresse.

In assenza della sollecitazione esterna, lo stato di coazione determinato nella trave dalle deformazioni impresse riesce caratterizzato dai valori:

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda} &= \frac{\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z dA}{Cl} \\
 \bar{\mu} &= \frac{\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z y dA}{J_x} \\
 \bar{\nu} &= \frac{\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z x dA}{J_y}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

\* \* \*

Queste formule si prestano bene al calcolo numerico, il quale riesce anzi singolarmente semplificato per il fatto che le deformazioni impresse sono differenti da zero solo in corrispondenza delle armature.

Detto pertanto  $E_a$  il modulo di elasticità di queste, si potrà senz'altro mettere in evidenza il valore (costante) del rapporto  $E_a/E_c$ .

Gli integrali che compaiono nelle espressioni di  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\bar{\nu}$  si ridurranno così a delle semplici sommatorie in cui ciascun termine corrisponde ad un elemento di armatura e dipende soltanto dalle dimensioni e posizione dell'elemento, e dallo stato di tensione (e quindi di deformazione) in cui esso si trovava all'atto della sua incorporazione nel calcestruzzo.

Consideriamo per esempio una trave a sezione rettangolare, di cm. 15 di larghezza e 30 di altezza, armata superiormente con tre tondi da 10 ed inferiormente con tre tondi da 16 mm. simmetricamente disposti rispetto alla mediana verticale (asse delle  $y$ ).

Supponiamo, tanto per fissar le idee,

$$E_a = 2000 \text{ t/cm}^2$$

ed

$$E_c = 250 \text{ t/cm}^2$$

quindi

$$\frac{E_a}{E_c} = 8$$

Avremo subito

$$Cl = 517 \text{ cm}^2$$

La distanza dell'asse orizzontale baricentrico (asse delle  $x$ ) dal bordo inferiore della sezione risulta eguale a cm. 14,32. In conseguenza

$$J_x = 43.158 \text{ cm}^4$$

Immaginiamo che le armature siano state incorporate nel calcestruzzo mentre erano sottoposte ad uno sforzo di trazione pari a  $2000 \text{ kg/cm}^2$ , sicchè

$$\bar{\varepsilon}_z = -\frac{1}{1000}$$

Si ha

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z dA = -\frac{67}{1000}$$

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z y dA = -\frac{307}{1000}$$

$$\int_A \frac{E}{E_c} \bar{\varepsilon}_z x dA = 0$$

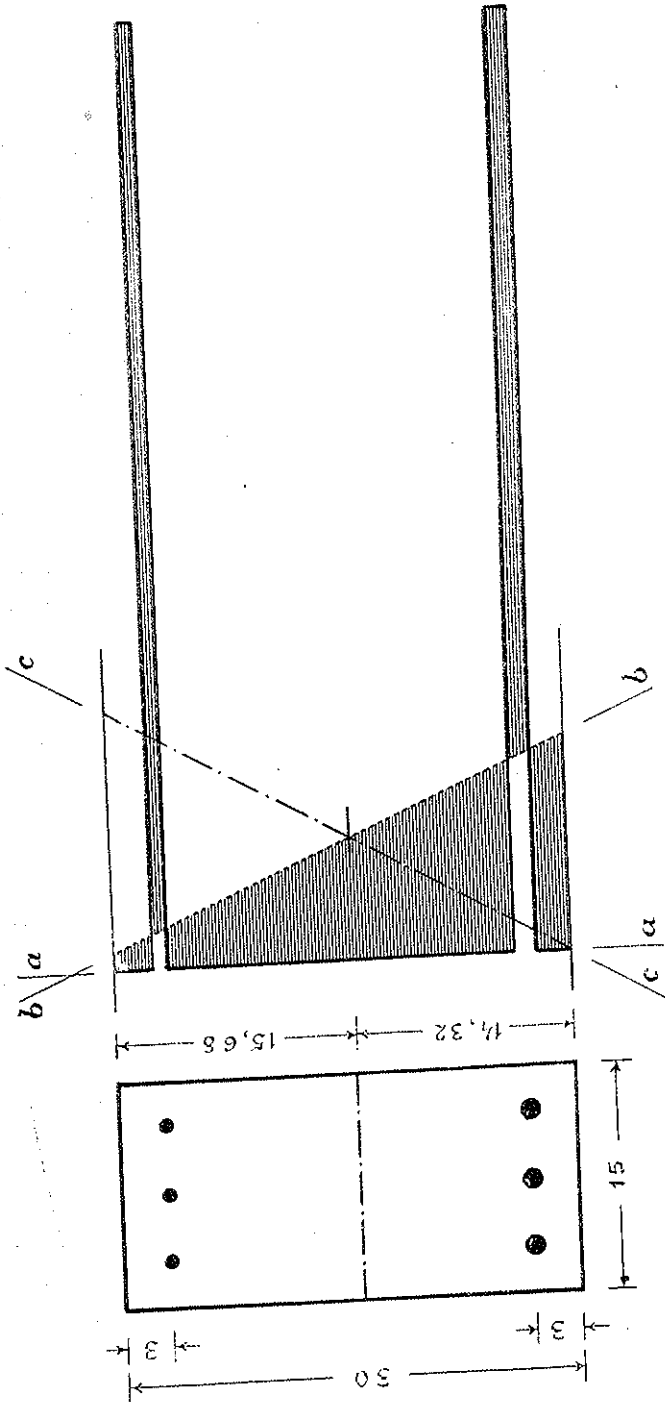


FIG. 1.



In conseguenza:

$$\bar{\lambda} = -\frac{0,13}{1000} \quad \bar{\mu} = -\frac{0,0071}{1000} \text{ cm}^{-1} \quad \bar{\nu} = 0$$

e lo stato di coazione, in assenza di sollecitazioni esterne, viene caratterizzato dai seguenti valori delle tensioni unitarie:

Tensioni unitarie $\sigma_z$ in kg/cm <sup>2</sup>	nel calcestruzzo	nelle armature
al bordo superiore della sezione	- 5	+ 1920
al bordo inferiore della sezione	- 57,5	+ 1580

Tale stato di coazione si può in modo molto espressivo rappresentare graficamente disegnando, a partire da una fondamentale  $aa$ , il diagramma delle deformazioni impresse  $\bar{\epsilon}_z$  (linea a tratto pieno nella figura allegata) e riferendolo poi ad una nuova fondamentale  $bb$  la cui posizione, per rapporto alla prima, sia definita precisamente dalle costanti  $\bar{\lambda}$  e  $\bar{\mu}$ .

Il diagramma rappresenta allora, colle sue ordinate contate a partire dalla fondamentale  $bb$ , le deformazioni elastiche  $\epsilon_z$  nella stessa scala che ha servito per la rappresentazione delle deformazioni impresse e delle due costanti  $\bar{\lambda}$  e  $\mu$ .

Vi si potranno d'altronde direttamente leggere le tensioni  $\sigma_z$ , così nel calcestruzzo come nelle armature, sol che si abbia l'avvertenza di servirsi all'uopo di nuove scale, in relazione coi rispettivi valori del modulo.

Inunagiamo ora che la trave venga sollecitata a flessione semplice: più precisamente che sulla sua sezione generica agisca un momento flettente  $\mathcal{M}_x$ .

Questo darà origine ad una distribuzione di tensioni:

$$\sigma_z = \frac{\mathcal{M}_x y}{J_x}$$

e ad una curvatura elastica:

$$\frac{\mathcal{M}_x}{E_c J_x}$$

Non v'è dubbio infatti che il fenomeno si manterrà perfettamente elastico, e la sezione interamente reagente, almeno fino a che non intervengano sforzi di trazione nel calcestruzzo; vale a dire: fino a che la nuova tensione (positiva) che si viene a determinare in corrispondenza del bordo inferiore della sezione non giunga ad eguagliare la tensione (negativa) che ivi preesiste in virtù dello stato di coazione.

Il fatto si verifica per

$$\mathcal{M}_x = 172.500 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

e la distribuzione di tensioni che ne consegue è la seguente:

Tensioni unitarie $\sigma_x$ in $\text{kg}/\text{cm}^2$	nel calcestruzzo	nelle armature
al bordo superiore della sezione	- 67,5	+ 1520
al bordo inferiore della sezione	0	+ 1940

Graficamente il nuovo stato di equilibrio si può rappresentare immaginando il solito diagramma delle deformazioni impresse riferito ad una nuova fondamentale  $cc$  ruotata rispetto a  $bb$  di

$$\frac{\mathcal{M}_x}{E_c J_x} = + \frac{0,0160}{1000} \text{ cm}^{-1}$$

e la cui posizione, per rapporto alla fondamentale primitiva  $aa$ , sarà perciò definita dai valori:

$$\lambda = \bar{\lambda} = - \frac{0,13}{1000} \quad \mu = \frac{\mathcal{M}_x}{E_c J_x} + \bar{\mu} = + \frac{0,0089}{1000} \text{ cm}^{-1}$$

\* \* \*

Ritiro e plasticità del calcestruzzo possono, com'è noto, modificare profondamente questi risultati: sono infatti delle nuove deformazioni impresse che vengono ad aggiungersi a quelle delle armature, e quindi a complicare le cose.

Non è detto naturalmente che il problema non possa venir affrontato e risolto anche in questo caso più generale. Chè anzi se fosse lecito limitarsi a considerare le sole  $\bar{\epsilon}_x$  (forma restando l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane) la soluzione sarebbe presto trovata, e tutto si ridurrebbe ad una meno particolare applicazione delle [4] e delle [5].

Tuttavia una estensione della nostra teoria in questa direzione ci sembra di dubbia utilità, data l'incertezza che regna sui dati stessi del problema, cioè sulla entità dei fenomeni di ritiro e di plasticità che si vorrebbero mettere in conto.

Allo stato delle cose ci sembra più interessante studiare il modo con cui in pratica si riesce ad attenuare l'influenza di quei fenomeni: l'adozione cioè di armature molto deformabili - fatte per esempio con acciai ad alto limite elastico - e le alterazioni che ne conseguono nello stato di equilibrio della trave.

Immaginiamo perciò che le armature siano fatte con un materiale che possa sopportare una tensione unitaria quadrupla, pari cioè ad  $8000 \text{ kg/cm}^2$ ; e che pertanto la loro sezione sia ridotta alla quarta parte di quella dianzi prevista.

Fermi restando i valori dei moduli, si ha:

$$A = 467 \text{ cm}^2$$

La distanza dell'asse orizzontale baricentrico (asse delle  $x$ ) dal bordo inferiore della sezione risulta eguale a  $\text{cm. } 14,80$ . In conseguenza

$$J_x = 36.478 \text{ cm}^4$$

Posto poi

$$\bar{\varepsilon}_z = -\frac{4}{1000}$$

si trova

$$\bar{\lambda} = -\frac{0,148}{1000} \quad \bar{\mu} = -\frac{0,0093}{1000} \text{ cm}^{-1} \quad \bar{\nu} = 0$$

e lo stato di coazione, in assenza di sollecitazioni esterne, viene così caratterizzato:

Tensioni unitarie $\sigma_z$ in kg/cm <sup>2</sup>	nel cal- cestruzzo	nelle armature
al bordo superiore della sezione	— 1,75	+ 7930
al bordo inferiore della sezione	— 71,5	+ 7480

Sotto l'azione del momento flettente

$$\mathfrak{M}_x = 172.500 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

le tensioni divengono:

Tensioni unitarie $\sigma_z$ in kg/cm <sup>2</sup>	nel cal- cestruzzo	nelle armature
al bordo superiore della sezione	— 73,62	+ 7470
al bordo inferiore della sezione	— 1,50	+ 7930

L'adozione di tensioni unitarie più elevate nelle armature conduce dunque a più elevate sollecitazioni anche nel calcestruzzo; e pertanto implica l'uso di calcestruzzi di più elevata compattezza.

Nelle armature poi, le variazioni delle tensioni unitarie determinate dall'intervento delle sollecitazioni esterne, per quanto lievemente

accresciute in valore assoluto, risultano, in valor relativo, grandemente ridotte.

Quest'ultimo risultato può avere qualche importanza dal punto di vista del comportamento dei materiali alle sollecitazioni ripetute (resistenza alla fatica). E meritava perciò di essere, sia pure incidentalmente, segnalato.

\* \* \*

S'intende che, nei casi più semplici, il problema trattato qui può anche venire risolto per via elementare, vale a dire imponendo di volta in volta l'eguaglianza delle deformazioni locali nelle armature e nel calcestruzzo.

HOYER, per esempio, tratta così il caso delle travi rettangolari a semplice armatura (1).

Ma bisogna provarsi ad affrontare i casi più complessi - in cui diverse armature sono incorporate nel calcestruzzo in differenti stati di tensione preventiva - per riconoscere tutta la superiorità del procedimento di calcolo che si fonda sulla teoria generale delle coazioni.

---

(1) E. HOYER, *Der stahlsaitenbeton*, Band I, Berlin, 1939, pag. 41 e seg.