ACTA
Vol. IV - N. 23

SUL CALCOLO DEL REGIME PERIODICO NEI SISTEMI ELETTRICI CONTINUI SOTTOPOSTI A F.E.M. PERIODICHE DI FORMA QUALUNQUE (*)

(Con una figura)

GIUSEPPE APRILE

SVMMARIVM. — Auctor ostendit quomodo methodus, qua peculiaris « variatio libera » addenda « phaenomeno insertionis » perquiritur, extendi possit etiam ad systemata electrica continua, ut periodica regimina computentur.

1. - In un precedente studio (1) mi sono occupato della ricerca dello stato di regime in circuiti sottoposti a f. e. m. periodiche di forma qualunque, con una trattazione di sufficiente generalità da essere applicabile, sostanzialmente, anche ai sistemi continui. Per questi, tuttavia, intervengono tali circostanze, da rendere opportune alcune particolari considerazioni, circa l'impiego del metodo ivi esposto.

Che anche in un sistema elettrico *continuo*, cioè a parametri fisici distribuiti, limitato od illimitato, caratterizzato da linearità e da dissipazione non nulla, una f. e. m. periodica debba dare effettivamente luogo ad uno stato di regime periodico, può venire dimostrato diret-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi il 30 luglio 1940.

(1) Nota precedentemente presentata all'Accademia Pontificia, dall'Accademico G. Giorgi (*Sul calcolo degli stati di regime in circuiti sottoposti a f. e. m. periodiche di forma qualunque* (« Acta », Anno IV, Vol. IV, n. 15).

tamente, nei singoli casi particolari. Volendo dare una dimostrazione generale, sintetica, può osservarsi che i singoli « periodi » della f. e. m. sono tutti uguali: questo fatto dà luogo ad una vera e propria *simmetria temporale* (indifferenza rispetto al trascorrere di un numero intero di periodi); e non potendo l'*effetto* esser meno simmetrico della *causa*, ne consegue che l'evoluzione del sistema, prodotta dalla f. e. m., deve essere anch'essa periodica. Questa dimostrazione vale evidentemente anche per sistemi non lineari, purchè però *normali*, cioè aventi proprietà non variabili col tempo.

Volutamente ho escluso i sistemi non dissipativi (che d'altronde hanno solo importanza teorica) perchè in essi può talvolta non sussistere un vero regime periodico di ampiezza finita. Non vi è però ragione di escludere quei sistemi di composizione puramente reattiva che tuttavia si comportano come dissipativi, perchè suscettibili di convogliare energia all'infinito (come per esempio una linea elettrica semi-infinita senza perdite, oppure lo spazio fisico vuoto).

2. – Il metodo esposto nello studio sopra citato si fonda sul fatto che il « regime periodico » differisce dal « fenomeno di inserzione » per una « variazione libera » particolare. Supposto pertanto noto il fenomeno di inserzione, per ottenere il regime desiderato basta sommarvi algebricamente la detta variazione libera, talchè il problema è ridotto alla ricerca di questa.

I sistemi continui sono affetti da un numero infinito (infinità *continua*) di *gradi di libertà*, e pertanto lo « stato iniziale », che produce una variazione libera generica, è dato (per ognuna delle grandezze fisiche distribuite caratterizzanti l'attitudine del sistema a contenere energia) non da un *valore* ma da una *funzione* delle coordinate geometriche. L'energia posseduta dal sistema viene ad assumere pertanto la forma di un *funzionale* dipendente da tale funzione.

In pratica questa generalità viene limitata dal fatto che si considerano fenomeni relativi ad un modo ben determinato di impiego del sistema fisico in esame. Gli stati iniziali che entrano in gioco appartengono allora ad un campo funzionale ristretto: possono per esempio avere un dato andamento definito a meno di un certo parametro numerico. Il funzionale di cui sopra diviene allora un *funzionale misto,* che, riguardato come dipendente solo dal detto parametro, può identificarsi con una funzione ordinaria.

Supponiamo che in un certo sistema continuo, uno stato iniziale $A(x)$ dia luogo ad una determinata variazione libera $\mathfrak{L}$ comunque complicata, anche con onde di propagazione, ecc. Per la linearità del sistema, uno stato iniziale $kA(x)$ darà luogo ad una variazione libera $k\mathfrak{L}$ che, a parte il moltiplicatore k, ha uguale andamento della precedente. La ricerca di una particolare variazione, nella classe delle $k\mathfrak{L}$ viene pertanto ricondotta alla ricerca del numero k. Ciò è suscettibile di applicazioni pratiche, per le calcolazioni.

La variazione libera generica $\mathfrak{L}$ rappresenta il successivo passaggio, nel tempo, attraverso una infinità continua di *stati* S del sistema, funzione ciascuno delle coordinate geometriche. La $\mathfrak{L}$ è rappresentabile pertanto da una successione di infinite trasformazioni infinitesime, trasformanti ogni *stato* in quello relativo all'istante successivo, oppure da una molteplicità continua di funzioni.

Nei casi in cui i singoli *stati* S della molteplicità possano individuarsi mediante i valori di un parametro numerico k, questo viene a determinare il contenuto energetico, con un ruolo analogo a quello di coordinata lagrangiana. Allora, e specie se il parametro numerico agisce da semplice moltiplicatore di una funzione fissa, la trattazione pratica diviene simile a quella concernente i sistemi a parametri fisici concentrati, ciò che rende adoperabile con vantaggio il metodo di cui si è discorso in principio di questo paragrafo, come si scorgerà nell'esempio numerico che segue.

3. *Esempio numerico.* – Consideriamo un cavo elettrico semi-illimitato affetto *solo* da resistenza distribuita R e da capacità distribuita C, alimentato all'origine da una f. e. m. pulsante rettangolare E attraverso una resistenza concentrata r.

Siano: $R = 0{,}01$ ohm/m; $C = 10^{-12}$ farad/m; $r = 10$ ohm. La f. e. m. abbia il periodo $T = 2{,}65 \times 10^{-8}$ sec, e in ogni periodo sia $E = E_a = 10$ volt per i primi 2×10^{-8} sec ed $E = 0$ per il resto. Si tratta di trovare il regime periodico, per la corrente I di alimentazione.

(N. B. L'andamento della f. e. m. è stato scelto in modo da avere diagrammi espressivi, senza speciale riferimento a casi pratici possibili).

Per calcolare il fenomeno d'inserzione dovuto alla f. e. m. pulsante E conviene tener presente che questa nel primo periodo può rappresentarsi come somma delle due f. e. m. E_1 ed E_2:

$$E_1 = E_a \times 1(t) \text{ volt}$$

$$E_2 = - E_a \times 1(t - 2 \times 10^{-8} \text{ sec}) \text{ volt}$$

ove la notazione $1(t)$ (Giorgi) indica la « funzione telegrafica unitaria ». Il problema è così ricondotto alla determinazione dell'effetto di una f. e. m. eguale a

$$E_a \times 1(t) = 10 \times 1(t) \text{ volt}$$

Con il calcolo operatorio, o altrimenti, si trova che tale effetto I_a è dato dalla formula

$$I_a = \frac{E_a}{r} e^{\omega} \left[1 - \Phi\left(\omega^{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

ove è $\omega = \frac{Rt}{r^2 C}$; e Φ è la nota funzione di Gauss, integrale della « erroris functio » (Fehlerintegral).

È possibile così tracciare (fig. 1) la curva a che dà l'effetto di E_1 e la curva b, sovrapponibile alla precedente che dà l'effetto di E_2. Sommando le ordinate si ottiene la c_1, d_1, che rappresenta il fenomeno d'inserzione dovuto alla E nel primo periodo. La d_1 è evidentemente una variazione libera, che possiamo prolungare con d nel secondo periodo, e che sommata con il fenomeno d'inserzione trovato ci permette di avere la continuazione di questo (c_2, d_2) nel secondo periodo.

La variazione libera che bisogna sommare algebricamente al fenomeno di inserzione, per avere il regime periodico, è del tipo della d da cui differisce per un fattore numerico k che si tratta di trovare.

Per la periodicità dev'essere (v. figura):

$$km = m + kn$$

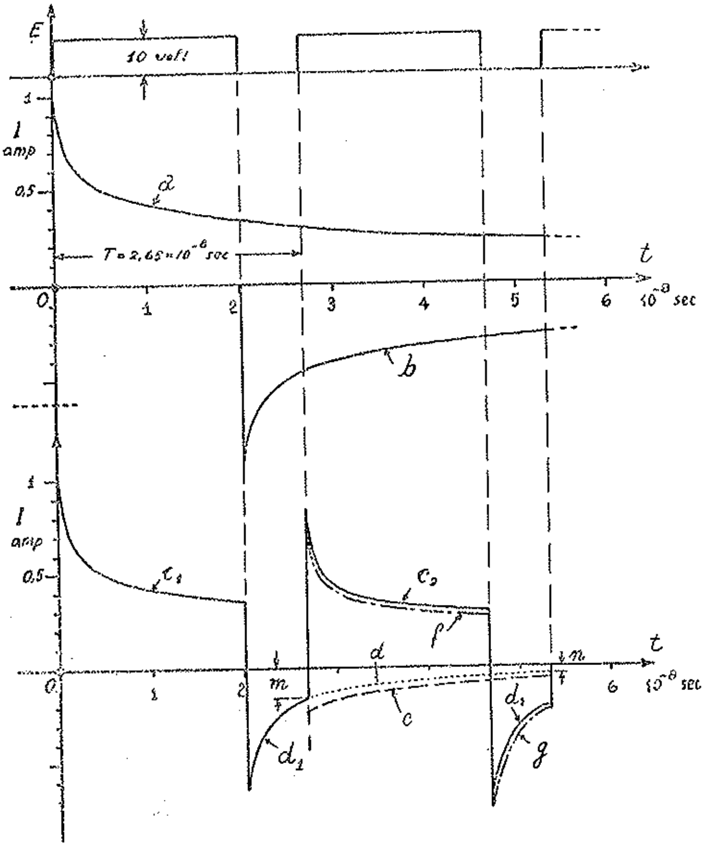

FIG. 1.

da cui si ricava k essendo m ed n quantità misurabili sui diagrammi, o calcolabili.

Il fattore k funge da parametro numerico determinante lo stato iniziale, che condiziona la variazione libera generica.

Trovato k si può dunque tracciare la variazione libera cercata (curva e). Le ordinate di e sommate con quelle del fenomeno di inserzione c_1, d_1, forniscono la curva f, g, cioè il regime periodico.