ACTA
Vol. IV - N. 15

SUL CALCOLO DEGLI STATI DI REGIME IN CIRCUITI SOTTOPOSTI A F. E. M. PERIODICHE DI FORMA QUALUNQUE (*)

(Con una figura)

GIUSEPPE APRILE

SVMMARIVM. — Describitur quaedam ratio qua supputari potest regimen periodicum in circuitibus electro-motrici vi periodica cuiuslibet formae obnoxiis, dummodo sciatur transiens insertionis phaenomenon, supputationibus ad primam insertionis periodum coarctatis. Auctor ostendit exemplum de casu simplici typico.

1. – Consideriamo un generico circuito elettrico non puramente reattivo (e cioè a dissipazione non nulla) sul quale agisca, a partire da un certo istante t_0 una f. e. m. *periodica* di forma qualunque. In seguito all'attacco della f. e. m. ha luogo allora nel circuito un *fenomeno transitorio* di inserzione, attraverso il quale si passa asintoticamente, col trascorrere del tempo, ad uno stato limite di regime, o di oscillazione permanente.

Questo regime limite qualche volta è direttamente ricavabile in modo elementare (per esempio: caso di una f. e. m. sinusoidale): nel caso generale, in cui la forma della f. e. m. sia qualunque, esso può essere ottenuto calcolando (per esempio col calcolo operatorio) l'andamento del fenomeno transitorio di inserzione, e passando al limite per $t = +\infty$, cioè in pratica spingendo la calcolazione fino alla sensibile scomparsa della *parte evanescente* (« flüchtiger Anteil ») del transitorio medesimo.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi, il 19 maggio 1940.

Mi propongo di mostrare, in quanto segue, come possa però ricavarsi lo stato di regime cercato, limitando i calcoli a quando avviene durante il solo *primo periodo* a partire dall'istante di inserzione della f. e. m. periodica. L'interesse di ciò sta nel fatto che da un canto il transitorio di inserzione è spesso più agevole da calcolare se ci si limita al primo periodo, e d'altro lato viene resa superflua la successiva considerazione di vari periodi, realizzandosi una semplificazione non di raro sensibile.

2. – Osservo che in un intervallo temporale qualunque, da t_1 a t_2, l'evoluzione del circuito è condizionata dalle *forze elettromotrici* seguenti [1]:

a) forze *impresse* esterne, nel nostro caso la f. e. m. periodica alimentante il circuito;

b) forze elettromotrici di carattere *reattivo*, dipendenti dai valori delle variazioni di flusso nelle bobine, e dalla carica nei condensatori (f. e. m. di induzione, e f. e. m. di reazione dielettrica); flusso e carica vengono ad avere l'ufficio di coordinate lagrangiane, che determinano l'energia contenuta nel sistema;

c) forze *assorbite*, derivanti da resistenze ohmiche o da perdite equiparabili di energia.

Se il sistema è retto da leggi lineari, come vogliamo supporre, tutte queste forze producono i loro effetti, ciascuna indipendentemente dalle altre. L'effetto delle sole *forze esterne*, cioè della sola f. e. m., nel primo periodo a partire dall'inserzione, è dato dal *transitorio di inserzione*. L'effetto delle altre forze è invece una *variazione libera* generica, che pel *principio di estinzione* è un processo tendente asintoticamente al riposo.

Qualunque evoluzione che si svolga durante un periodo della f. e. m. può dunque considerarsi come somma del transitorio di inserzione e di *una certa* variazione libera. Ciò deve valere anche per un periodo dello stato di regime, il quale intanto è caratterizzato dal fatto che in esso l'evoluzione totale, trascorso il periodo, riproduce la configu-

(1) Nel senso usato dal GIORGI; v. *Che cos'è la forza elettromotrice?* Boll. Tecn. dell'Istit. Mil. della Trasmissione, n. 5 e 6, 1939.

razione all'inizio del periodo stesso. Pertanto, per trovare lo stato di periodica oscillazione, sotto l'azione della f. e. m. periodica, basta sommare al fenomeno transitorio, tracciato per il *primo periodo*, una variazione libera particolare: precisamente quella capace di *compensare* la differenza fra l'ordinata finale e l'ordinata iniziale dell'accennato transitorio, calcolato per il detto primo periodo dell'azione della f. e. m.

Con ciò lo scopo è raggiunto, poichè tale condizione è sufficiente a determinare in modo univoco la particolare variazione libera di cui si tratta.

La trattazione svolta si applica anche ovviamente, con le opportune varianti, a sistemi lineari non elettrici, come sistemi meccanici vibranti, sistemi termici con accumulazione e trasmissione di calore, ecc.

3. – Per maggiore chiarezza, mostrerò il seguente esempio numerico, in applicazione di quanto esposto.

Sia un circuito costituito da una resistenza $R = 10^6$ ohm, in serie con un condensatore di capacità $C = 0{,}5 \times 10^{-6}$ farad. Su detto circuito agisca, a partire da un dato istante ($t = 0$) una f. e. m. $E_s(t)$ periodica a «denti di sega» di periodo $T = 0{,}1$ sec e di ampiezza 100 volt, vedi figura 1 (f. e. m. di questo tipo si incontrano in pratica in certi dispositivi di registrazione oscillografica). Si desidera trovare il regime di periodica oscillazione, per la tensione V al condensatore.

In base alla trattazione che precede, occorre anzitutto tracciare il *transitorio di inserzione* entro il *primo periodo*, cioè da $t = 0$ fino a $t = T$.

Per trovare detto transitorio, può considerarsi, anzichè la $E_s(t)$, una f. e. m. $E_L(t)$ che coincida con essa nel primo periodo, e prosegua oltre con lo stesso andamento linearmente crescente (vedi figura 1): per questa $E_L(t)$ il calcolo del transitorio è più agevole, e per esempio col calcolo operatorio si trova, per il transitorio in questione $V_L(t)$:

$$V_L(t) = 500\,(e^{-2t} + 2t - 1)\ \text{volt},$$

essendo la costante di tempo uguale a 0,5 secondi.

La curva relativa è la c della figura 1. L'ordinata per $t = T$ vale 9,35 volt. Bisogna adesso trovare quale variazione libera realizzi, in una durata $T = 0{,}1$ sec, un abbassamento di tensione eguale appunto a 9,35 volt, tale cioè da compensare esattamente l'aumento da 0 a 9,35 volt.

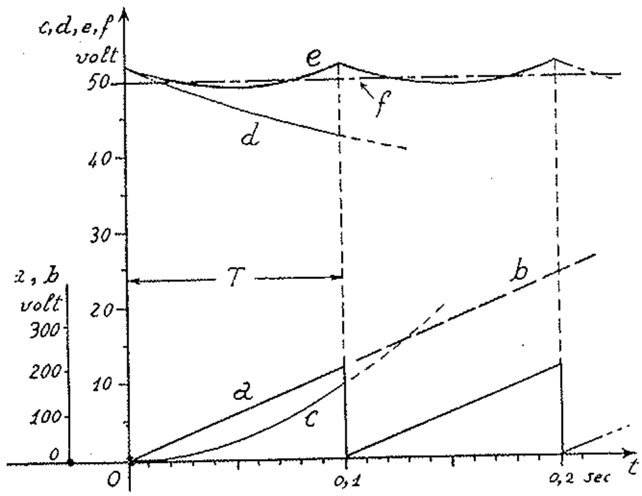

FIG. 1.

a = F. e. m. periodica a «denti di sega» $E_s(t)$
b = F. e. m. crescente linearmente in modo indefinito, $E_L(t)$
c = Andamento di $V(t)$ nel transitorio d'inserzione della $E_L(t)$
d = Variazione libera $V_v(t)$
e = Regime periodico, sotto la f. e. m. $E_s(t)$
f = Valore medio della f. e. m. $E_s(t)$

La variazione libera generica $V_v(t)$, che parte da $V = V_0$, avviene secondo la legge

$$V_v(t) = V_0\, e^{-2t}$$

Pertanto l'abbassamento di tensione vale

$$V_0 - V_0\, e^{-2t} = V_0 (1 - e^{-2t})$$

Possiamo dunque scrivere, per $t = T = 0{,}1$ sec:

$$9{,}35 = V_0 (1 - e^{-2 \times 0{,}1})$$

da cui si ricava

$$V_0 = 52 \text{ volt}$$

La variazione libera che parte da tal valore di V è espressa dalla curva d della figura 1.

Sommando le ordinate due curve c e d si ottiene immediatamente il diagramma e dello stato di regime periodico. Risulta una curva che oscilla attorno al *valore medio* della f. e. m. agente (50 volt) come del resto era da aspettarsi.

NOTA. - L'argomento del presente lavoro è stato anche trattato, precedentemente, da G. QUILICO, in un articolo *Sul calcolo dei regimi periodici non sinusoidali* (« L'Elettrotecnica », 25 marzo 1939). Ivi l'Autore si limita però al caso di circuiti caratterizzati da operatori funzionali del tipo $\frac{M(\Delta)}{N(\Delta)}$ con M ed N polinomi; e cioè circuiti contenenti un numero finito di elementi. I circuiti con numero infinito di elementi, e più ancora quelli con parametri distribuiti in modo continuo sono invece, come è noto, caratterizzati da operatori aventi in genere forma di funzione non razionali dell'operatore $\Delta = \frac{d}{dt}$.

La dimostrazione data sopra è per contro di applicabilità generale (purchè sussistano le due condizioni, di *linearità* e *di dissipazione non nulla*) e potrebbe pertanto servire di premessa ad una trattazione concernente i regimi periodici in sistemi continui. Solo che nel caso di tali sistemi va tenuto il debito conto, nelle calcolazioni, della eventuale esistenza di *propagazioni* e dei conseguenti « ritardi » di certi *effetti* rispetto alle *cause*.