ACTA
Vol. IV - N. 16

IN MARGINE D'UNA NOTA DEL COLONNETTI (*)

(Con 3 figure)

GIUSEPPE ALBENGA

SVMMARIVM. — Perpenditur tensionis status, quatenus ad spatium attinet, qui efficitur ex coactionibus hominis arte productis.

In una Nota dal titolo *Contributo alla teoria delle travi inflesse in stato di coazione*, pubblicata nel volume III degli « Acta » dell'Accademia Pontificia delle Scienze, GUSTAVO COLONNETTI ha studiato lo stato di tensione che, l'aggiunta di compressioni laterali provoca in una trave soggetta a flessione retta composta. Egli ha trattato il caso piano: qualche utile considerazione può trarsi dall'esame dello stato spaziale di tensione in una tal trave, ed è appunto quanto mi propongo di fare, servendomi della classica e suggestiva rappresentazione di MOHR, ed astraendo dai procedimenti e dai dispositivi che si possono adottare per realizzare lo stato di coazione previsto e per mantenerlo.

Consideriamo al solito una trave prismatica con la fibra media coincidente con l'asse coordinato z: poniamo l'origine 0 nel baricentro della sezione trasversale iniziale: gli assi x ed y siano quelli principali di inerzia della sezione, yz il piano di simmetria del carico. Nelle ordinarie ipotesi della Resistenza dei Materiali sul cubetto elementare di lati paralleli agli assi coordinati agiranno allora le tensioni rappresentate nella figura 1 *a*. Assumeremo come positive le tensioni nor-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Gustavo Colonnetti, il 15 aprile 1940.

mali (σ) di trazione, e le tensioni tangenziali (τ) che, rispetto al centro dell'elemento di volume, danno un momento di senso orario. Scelti gli assi σ e τ della rappresentazione di MOHR come mostra la figura *1b*, il circolo delle tensioni giacenti nel piano $y\, z$, (come è principale) o in un qualunque piano ad esso parallelo, è definito dai punti

P, di coordinate 0, $-\tau_{zy}$, che dà la tensione sull'elemento $dz\, dy$

Q di coordinate σ_z e τ_{zy}, che dà la tensione sull'elemento $dy\, dx$.

Il punto Q' simmetrico di Q rispetto all'asse è il *polo* della rappresentazione, cioè quel punto che col raggio vettore proiettante il generico punto ($\sigma\tau$) del circolo di MOHR, dà la traccia della giacitura dell'elemento sul quale essa tensione agisce.

A completare la rappresentazione di MOHR osserviamo che la tensione σ_x, nulla, è tensione principale e che quindi i circoli relativi ai due piani principali rimanenti sono quelli di diametro $0\sigma_1$ e $0\sigma_2$ rappresentati nella figura 1*c*.

Nella flessione composta (esclusi i lembi) uno di questi circoli è tutto contenuto nel campo delle σ positive, un altro in quello delle σ negative, il terzo, al quale sono interni i due precedenti, taglia l'asse delle τ. Seguendo il criterio di sicurezza del MOHR, quest'ultimo circolo è il solo che importa considerare. OTTO MOHR ha infatti postulato che gli stati di tensioni ammissibili siano quelli per cui tutti i punti rappresentativi delle tensioni sono contenuti in una certa regione del piano $\sigma\tau$, simmetrica rispetto a σ, che è possibile determinare sperimentalmente. La figura 2 dà ad esempio, la forma della curva di separazione della zona sicura dall'altra per un conglomerato cementizio, quale venne ricavato da precise esperienze svizzere. La curva ha in A un punto angoloso e la regione delle σ positive ammissibili è assai piccola rispetto a quelle delle σ negative sicure, che va molto estendendosi nella parte non disegnata.

Come si modifica lo stato di tensione provocando opportune tensioni normali aggiuntive sulle faccie del cubetto?

Facciamo variare dapprima la sola σ_z comprimendo il cubetto parallelamente all'asse z. In questa ipotesi:

τ_{zy} rimane costante

$\sigma_x = \sigma_y = 0$,

il punto P non modifica la sua posizione,

il punto Q descrive una retta parallela all'asse σ.

Poichè il punto P permane sull'asse delle τ per quanto grande sia la compressione σ_z, agendo su questa sola non si riuscirà mai ad eliminare le tensioni positive: solo per σ_z tendente a $-\infty$ la σ_1 tenderà al valore 0. E poichè coll'aumentare della compressione $-\sigma_z$ il circolo delle tensioni di centro 0_x diviene molto grande, esso uscirà parzialmente fuori della zona sicura (fig. 2) assai prima che la grandezza di σ_1 sia divenute trascurabile.

Il risultato di eliminare del tutto le tensioni positive si ottiene subito, come è noto, applicando sulla faccia $dx\,dz$ una opportuna tensione normale σ_y.

Nella figura 3 sono raccolti alcuni casi caratteristici di sollecitazione. Partendo da quello stato di tensione che si rappresentò nelle figure 1*a* e 1*c* e che è ora riprodotto nella figura 3*a*, e aggiungendo alla σ_z una tensione normale eguale e contraria, si passa allo stadio della figura 3*b*: il corrispondente circolo x è il minimo compatibile con la presenza della tensione tangenziale τ_{zy}: i circoli 1 e 2, relativi ai piani principali normali a quello yz sono eguali, e l'uno contenuto ancora tutto nella zona negativa, l'altro in quella positiva. Se la σ_z continua a decrescere algebricamente il circolo x (fig. 3*c*) si fa sempre maggiore: quando σ_z tende a $-\infty$, come già si osservò il circolo x tende a confondersi con l'asse τ e solo al limite scompariranno le tensioni positive.

Ma se aggiungiamo ancora una tensione σ_z negativa ci sarà facile evitare la presenza di tensioni positive. La figura 3*d* rappresenta il caso

$$-\sigma_z = -\sigma_y = -\tau_{zy}$$

al quale corrisponde di nuovo il minimo raggio del cerchio x. In questa ipotesi i due circoli x ed 1 vengono a sovrapporsi: il raggio del circolo 2 si annulla. In casi meno particolari sempre imponendo al circolo x di esser tangente all'asse τ, ovvie proprietà della media geometrica mostrano che τ_{zy} si mantiene media proporzionale fra σ_y e σ_z, in accordo con le formule della citata nota del COLONNETTI.

La condizione di cose rappresentata dalla figura 3*d*, quando si accetti il criterio di MOHR, è la più favorevole che si può ottenere agendo sulle due compressioni addizionali σ_y e σ_z. È opportuno av-

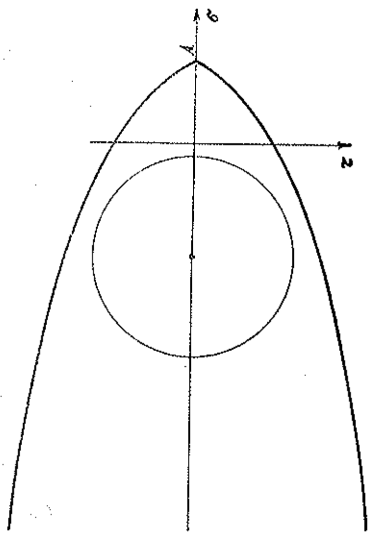

FIG. 2.

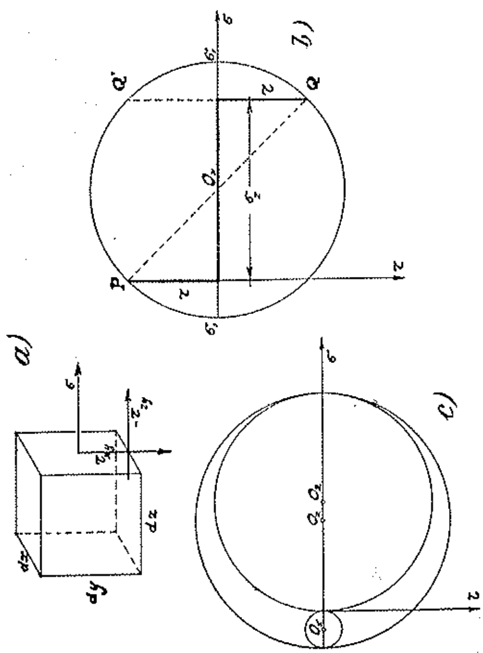

FIG. 1.

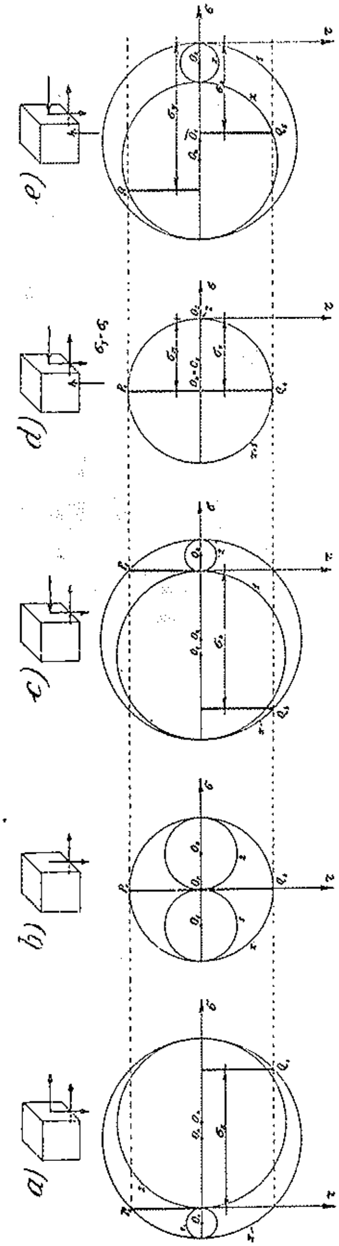

FIG. 3.

vertirlo esplicitamente perchè alcune parole di E. FREYSSINET nel suo volume *Une revolution dans la technique du Beton* possono far credere che aumentando oltre i limiti della citata figura, le tensioni σ_y e σ_z (naturalmente nel loro valore assoluto) e quindi spostando il circolo x verso destra, e perciò (fig. 2) verso una zona sempre più sicura, si possa realizzare un ulteriore vantaggio. Osserviamo però che così facendo, noi allontaniamo sempre più il circolo x dalla curva limitatrice della zona di sicurezza, ma lo stato di tensione diviene quello che è rappresentato nella figura 3 *e* e perciò nell'applicazione del criterio di MOHR non ci si deve più riferire al circolo x, ma a quello 1, che, per esser $\sigma_x = 0$, si mantiene tangente all'asse τ e contiene ora quel circolo x, nel quale prima era contenuto. Solo l'aggiunta di una opportuna σ_x permette di riportare il circolo 1 a coincidere con quello x o a cadere nell'interno di questo.

Si noti ancora che, per la legge di HOOKE generalizzata, la tensione σ_x è pure necessaria quando si intenda annullare le dilatazioni positive parallele all'asse x, che si avranno sempre finchè σ_x rimane nulla.