

IL PROBLEMA DI CLEBSCH E L'ELLISSE DI ELASTICITÀ (*)

(Con sei figure)

GIUSEPPE MARIA PUGNO

SUMMARIVM. — Disceptat Auctor de problemate Clebsch mediante ellipse elasticitatis transversali, demonstrans quaenam sit eius applicatio ad nonnulla systemata, ex arco constituta.

1. — Consideriamo una lastra incastrata lungo il suo contorno s ; un elemento superficiale dS di essa sia caricato da una forza dF normale alla lastra. Prendiamo deliberatamente in esame una forza infinitesima perchè fin d'ora supponiamo che le forze applicate siano proporzionali — attraverso ad un coefficiente, sia pur variabile da punto a punto, ma finito — all'estensione della superficie sulla quale insistono (fig. 1).

Assumiamo come elemento terminale l'elemento di superficie dS e domandiamoci l'ellisse di elasticità della lastra rispetto al detto elemento terminale; ossia domandiamoci la legge grafica che, attraverso ad una relazione di antipolarità, mette in relazione la intersezione, col piano della lastra, della retta d'azione della forza dF con l'asse attorno al quale, per effetto della forza dF stessa, l'elemento terminale dS viene a ruotare.

Il problema che ci proponiamo è il corrispondente di quello analogo che si pone nello studio del problema di DE SAINT VÉNANT e che può risolversi per mezzo dell'ellisse di elasticità ordinaria; naturalmente

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Colonnetti, il 12 gen. 1936.

nel caso presente dovremo far ricorso all'ellisse di elasticità trasversale introdotta da CARLO LUIGI RICCI, in quanto le forze sollecitanti e le conseguenti deformazioni non appartengono al piano del sistema elastico che le sopporta.

Inoltre, mentre gli elementi terminali che si assumono nel problema di DE SAINT VÉNANT sono sezioni rette dal solido, perciò di estensione finita, capaci di sopportare forze di intensità finita e tali, infine, da ammettere deformazioni proprie tanto piccole da poter essere tra-

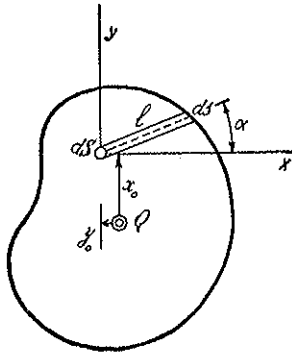


FIG. 1.

scurate a fronte di quelle che essi sopportano in grazia dell'elasticità di tutto il sistema elastico, nel presente problema gli elementi terminali devono essere necessariamente infinitesimi al fine di mantenere l'ipotesi dell'infinita piccolezza delle deformazioni proprie a fronte di quelle derivanti dall'elasticità dell'intero sistema; e quindi ne discende pure la infinita piccolezza della intensità delle forze applicate.

L'elemento terminale dS può immaginarsi collegato a ciascun elemento del perimetro della lastra da una trave di larghezza infinitesima incastrata perfettamente alla terra in corrispondenza del perimetro stesso, come abbiamo supposto al principio di questa trattazione.

Il complesso di tutte le infinite travi di larghezza infinitamente piccola che collegano l'elemento terminale ad ogni elemento del perimetro, costituisce il sistema elastico che giuoca nella deformazione dell'elemento dS . Questa concezione non è nuova; di fatto si incontrano,

nello studio delle lastre, procedimenti basati proprio su questi concetti più o meno differenti uno dall'altro e più o meno complicati a seconda del numero delle travi ipotetiche che si immaginano collegare l'elemento dS al contorno. Naturalmente, per risolvere questo problema, si richiedono alla realtà dei fatti le necessarie equazioni di elasticità; per esempio si sfrutta la uguaglianza delle deformazioni dell'elemento terminale pensato appartenente a due distinte travi e tante volte quanti sono i gruppi distinti di due travi che possono estrarsi tra tutte quelle che si ammette colleghino l'elemento terminale alla terra.

Ora le condizioni sopra dette sono già insite nella essenza della teoria della ellisse di elasticità che noi vogliamo utilizzare nel presente studio. Di fatto è evidente che la forza dF si decomporrà in tante componenti quante sono le travi ideali — nel caso nostro infinite — ciascuna delle quali, attraverso ad una trave, si sperderà alla terra; si tratta quindi di un aggregato in derivazione. Ma è notorio che la natura di tali aggregati è precisamente caratterizzata dalla costanza delle deformazioni dell'elemento terminale a qualunque sistema elastico componente sia esso pensato connesso.

Il programma del nostro lavoro è dunque il seguente: in primo luogo determinazione dell'ellisse di elasticità di una qualunque tra le infinite travi ideali e, in secondo luogo, composizione in derivazione di tutte le ellissi come quelle sopra dette; l'ellisse che ne risulterà sarà l'ellisse di elasticità della lastra rispetto all'elemento terminale considerato, cioè l'ellisse richiesta.

2. — L'ellisse di elasticità di una trave elementare sarà completamente definita quando saranno dati, di essa, il peso elastico $g = dG$, la posizione del medesimo, ed i due raggi ρ e ρ' longitudinale e trasversale (fig. 2).

Detto:

h lo spessore costante della lastra;

l la distanza dell'elemento dS da un elemento generico ds ;

x e y due assi ortogonali qualunque di riferimento giacenti nel piano della lastra e incrociantsi in dS ;

α l'angolo formato da un raggio vettore generico uscente da dS con l'asse x ;

risulta :

$$dG = \frac{E \cdot h^3}{l^3} \cdot l \cdot d\alpha = \frac{E \cdot h^3}{l^2} d\alpha$$

$$\rho = 0,289 \cdot l \quad \rho' = \text{infinitesimo}$$

Riguardo alla composizione in derivazione di ellissi come quelle definite, osserviamo che le sopra accennate condizioni caratteristiche dell'aggregato in derivazione, affermano la costanza dello spostamento δ .

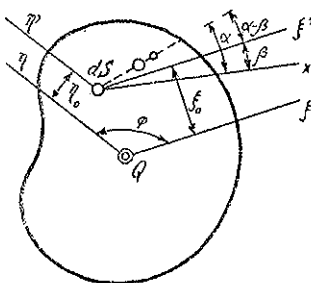


FIG. 2.

dell'elemento terminale a qualunque sistema elastico elementare lo si pensi collegato e l'uguaglianza di questo spostamento a quello Δ che lo stesso elemento subisce nell'ipotesi reale di connessione a tutto il sistema elastico, nonchè la costanza della rotazione $\bar{\varphi}$ e l'uguaglianza di questa alla rotazione $\bar{\Phi}$, essendo $\bar{\varphi}$ e $\bar{\Phi}$ le rotazioni che si producono nell'ipotesi di connessione generica parziale e nell'ipotesi reale di connessione all'intero sistema elastico.

Tenendo conto di quanto sopra, nonchè del fatto per il quale la forza ed il momento applicati al sistema complessivo devono essere rispettivamente la risultante delle forze ed il risultante dei momenti applicati ai sistemi componenti, si perviene alla seguente forma delle condizioni caratteristiche dell'aggregato

$$G = \Sigma g \quad , \quad S = \Sigma s \quad , \quad J = \Sigma j$$

ove g è uno dei pesi elastici componenti, G quello del complesso; s è il momento statico di un peso elastico componente rispetto all'asse della rotazione, S l'analogo momento statico del peso elastico del complesso rispetto al medesimo asse, j il momento centrifugo di un peso elastico componente rispetto all'asse della rotazione e all'asse del momento, J l'analogo momento centrifugo del peso elastico del complesso.

Troviamo confermato che le forme nelle quali possono essere scritte le condizioni caratteristiche degli aggregati di ellissi trasversali in derivazione e degli aggregati di ellissi ordinarie in serie sono le stesse. Gli stessi saranno dunque ancora i mezzi analitici e grafici che ci permetteranno di definire l'ellisse di elasticità e il peso elastico proprio al complesso dei due aggregati.

3. - La condizione $G = \Sigma g$ porge:

$$G = E \cdot h^3 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{l^2}$$

La condizione $S = \Sigma s$, scritta per una forza che faccia ruotare l'elemento terminale attorno all'asse x , porge:

$$S_x = \frac{E \cdot h^3}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen } \alpha}{l} \cdot d\alpha$$

e quindi detta x_0 la distanza del baricentro elastico O dall'asse x :

$$x_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \frac{\text{sen } \alpha}{l} \cdot d\alpha}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{l^2} \cdot d\alpha} .$$

Analogamente la medesima equazione, scritta per una forza che induca rotazione attorno all'asse y , detta y_0 la distanza del baricentro O dall'asse y , porge:

$$S_y = \frac{E \cdot h^3}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha}{l} \cdot d\alpha ,$$

e quindi:

$$y_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha}{l} \cdot d\alpha}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{l^2} \cdot d\alpha}.$$

La condizione $J = \Sigma j$ applicata a due assi baricentrici uno ξ formante l'angolo β con l'asse x e l'altro η formante l'angolo φ con l'asse ξ , porge:

$$J_{\xi\eta} = \frac{E \cdot h^3}{3} \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \text{sen}(\varphi + \alpha - \beta) - 3 \cdot \xi_0 \cdot \eta_0 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{l^2} d\alpha \right]$$

ove ξ_0 e η_0 sono le distanze dell'elemento dS dagli assi ξ e η , distanze note perchè la posizione del baricentro è già stata definita avendo già determinate le sue coordinate x_0 e y_0 ; il primo termine entro parentesi rappresenta il momento centrifugo rispetto a due assi ξ' e η' paralleli a ξ e η e passanti per l'elemento dS , mentre il secondo proviene dal trasporto del momento centrifugo dagli assi ξ' e η' a quelli ξ e η . Questa condizione, uguagliata a zero, si trasforma nella condizione di coniugio tra i due assi ξ e η in quanto, dato un asse ξ definito dalla sua fase β rispetto all'asse x noto, ne porge il coniugato η , fornendo, di questo ultimo, la fase φ rispetto a ξ .

La condizione $J = \Sigma j$ scritta per due assi coincidenti ambedue con l'asse ξ' , porge:

$$J_{\xi'\xi'} = \frac{Eh^3}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\alpha - \beta) \cdot d\alpha$$

e quindi, indicando con $\rho_{\xi'}$, il raggio d'inerzia non centrale rispetto all'asse ξ' e coniugato alla direzione di ξ , con ρ_{ξ} il raggio centrale d'inerzia coniugato alla direzione di ξ e con d_{ξ} la distanza tra gli assi ξ e ξ' , possiamo scrivere:

$$\rho_{\xi'}^2 = \rho_{\xi}^2 - d_{\xi}^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\alpha - \beta) \cdot d\alpha}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{l^2} \cdot d\alpha} - d_{\xi}^2$$

Analogamente, applicando l'equazione $J = \Sigma j$ a due assi coincidenti con l'asse η' , possiamo scrivere:

$$J_{\eta'\eta'} = \frac{Eh^3}{3} \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\varphi + \alpha + \beta) \cdot d\alpha$$

$$\rho_{\eta'}^2 = \rho_{\eta}^2 - d_{\eta'}^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\varphi + \alpha - \beta) \cdot d\alpha}{\int_0^{2\pi} \frac{1}{l^2} \cdot d\alpha} - d_{\eta}^2$$

È appena necessario ricordare che in tutte queste ricerche le distanze dagli assi sono state valutate normalmente ad essi, e, perciò, anche i raggi risultano valutati normalmente ai rispettivi assi.

L'ellisse che si richiede viene in tal modo ad essere definita in tutti i suoi necessari elementi.

3. - La trattazione che noi abbiamo, nelle sue linee teoriche, or ora adombrata, può rivelarsi praticamente interessante in vari problemi, uno dei quali ci sembra di particolare rilievo ed è quello che si presenta quando su una soletta sia impostato un arco o un pilastro. Il nocciolo della questione consiste allora nel determinare l'ellisse di elasticità della soletta o della lastra rispetto alla superficie di imposta del pilastro o dell'arco, allo scopo di passare, da quella alla ellisse ordinaria di un tronco elastico ideale da ritenersi sostituibile alla lastra e da aggiungersi all'arco o al pilastro in modo che le deformazioni della superficie di attacco di quello alla lastra siano quelle effettive.

Naturalmente, affinché un tale complesso sia ancora passibile di trattazione mediante l'ellisse di elasticità ordinaria, è necessario che le forze e le deformazioni non escano da un ben definito piano, il piano del sistema, cioè è necessario che la traccia di detto piano col piano della lastra contenga una delle due direzioni principali dell'ellisse trasversale di quest'ultima.

Ciò evidentemente avviene in due casi. In primo luogo quando la lastra abbia forma di un poligono regolare e l'elemento terminale sia scelto in corrispondenza del centro di figura di esso; allora, in virtù della simmetria centrale, l'ellisse è una circonferenza così che ad ogni

direzione corrisponde, come coniugata, la direzione ad essa normale ed ogni coppia di direzioni in tal modo corrispondenti è coppia di direzioni principali. In secondo luogo, quando la lastra ammetta un asse di simmetria e l'elemento terminale sia scelto sul detto asse, mentre il piano delle forze esterne contenga quell'asse o gli sia normale.

Esaminiamo dunque particolarmente questi due casi.

4. - Consideriamo un poligono regolare di n lati o di apotema a , e proponiamoci di determinare l'ellisse di elasticità di esso rispetto ad

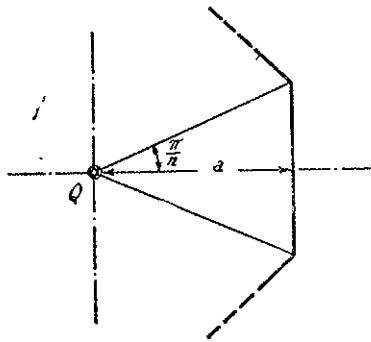


FIG. 3.

un suo elemento superficiale, contenente il suo centro di figura, assunto come terminale.

Riferendoci alla figura 3, possiamo subito scrivere:

$$\begin{aligned}
 G &= n \cdot \frac{E \cdot h^3}{a^2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{+\frac{\pi}{n}} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = n \cdot \frac{E \cdot h^3}{a^2} \left[\frac{\pi}{n} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right] = \\
 &= \frac{E \cdot h^3}{a^2} \left[\pi + \frac{1}{2} n \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right].
 \end{aligned}$$

Non è il caso di usare la relazione $J_{\xi\eta} = 0$ perchè sappiamo già che, scelta una direzione qualunque, la sua coniugata è ad essa nor-

male; così pure, al fine di determinare il momento d'inerzia rispetto ad un asse baricentrico qualunque, conviene determinare quello polare J_p rispetto al centro del poligono e poi dividerlo per due.

Abbiamo:

$$\begin{aligned} J_p &= n \cdot E \cdot h^3 \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{+\frac{\pi}{n}} \frac{\cos^2 \alpha}{a^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\cos \alpha} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{\cos \alpha} \cdot d\alpha = \\ &= n \cdot E \cdot \frac{h^3}{3} \cdot 2 \frac{\pi}{n} = \frac{2}{3} E \cdot h^3 \cdot \pi . \end{aligned}$$

E quindi:

$$J_{\xi\xi} = \frac{1}{3} \cdot E \cdot h^3 \cdot \pi \quad \text{e} \quad \rho_{\xi}^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi \cdot a^2}{\pi + \frac{1}{2} \cdot n \cdot \text{sen} \frac{2\pi}{n}}$$

Nella tabella I sono stati calcolati i valori di G e di ρ_{ξ} per poligoni regolari con numero di lati gradualmente crescente.

In questa tabella figurano anche il poligono regolare di due lati e quello di infiniti lati; il primo caso si riferisce ad una lastra a forma di striscia incastrata in corrispondenza dei due bordi, paralleli, distanti $2a$ uno dall'altro e indefinita nella direzione dei bordi; l'altro caso si riferisce alla circonferenza che può appunto considerarsi come un poligono regolare di infiniti lati infinitesimi.

Del resto le formule relative al cerchio possono anche essere ricavate direttamente in modo molto agevole. Detto $r = l = \text{cost}$ il raggio della circonferenza, abbiamo:

$$\begin{aligned} G &= \frac{E \cdot h^3}{r^2} \cdot \int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = \frac{E \cdot h^3}{r^2} (2\pi + \pi \cdot \text{sen} 4\pi) = 2 \cdot \frac{E \cdot h^3 \cdot \pi}{r^2} . \\ J_0 &= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \cos \alpha \cdot d\alpha}{\frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} d\alpha} = 0 \quad x_0 = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \text{sen} \alpha \cdot d\alpha}{\frac{1}{r^2} \int_0^{2\pi} d\alpha} = 0 \end{aligned}$$

che dimostrano come il baricentro elastico coincida col centro di figura e con l'elemento terminale.

TABELLA I.

n	$\frac{1}{2} n \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$	g	ρ^2	p
2	0	$\frac{E h^3}{a^2} \cdot 3,14159$	$0,3333 \times a^2$	$0,5775 \cdot a$
3	$1,5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,5 \times 0,86603 = 1,29904$	$\frac{E h^3}{a^2} \cdot 4,44068$	$0,2360 \times a^2$	$0,4860 \cdot a$
4	$2 \times 1 = 2$	$\frac{E h^3}{a^2} \cdot 5,14159$	$0,2040 \times a^2$	$0,4520 \cdot a$
5	$2,5 \times 0,99027 = 2,47567$	$\frac{E h^3}{a^2} \cdot 5,61726$	$0,1864 \times a^2$	$0,4315 \cdot a$
6	$3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \times 0,86603 = 2,59809$	$\frac{E h^3}{a^2} \cdot 5,73968$	$0,1827 \times a^2$	$0,4275 \cdot a$
7	$3,5 \times 0,78261 = 2,73913$	$\frac{E h^3}{a^2} \cdot 5,88072$	$0,1781 \times a^2$	$0,4220 \cdot a$
8	$4 \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \times 0,70711 = 2,82844$	$\frac{E h^3}{a^2} \cdot 5,97008$	$0,1755 \times a^2$	$0,4190 \cdot a$
.....
∞	$\pi = 3,14159$	$\frac{E h^3}{a^2} \cdot 6,28318$	$0,1667 \times a^2$	$0,4080 \cdot a$

La relazione $J_{\xi\eta} = 0$ porge:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{Eh^3}{3} \cdot \left[\int_0^{2\pi} \text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \text{sen}(\varphi + \alpha - \beta) - 6 \frac{\xi_0 \eta_0}{r^2} \cdot \pi \right] = \\
 &= \frac{Eh^3}{3} \cdot \left[\text{sen} \varphi \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) dx + \cos \varphi \cdot \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\alpha - \beta) \cdot dx = \right. \\
 &= \frac{Eh^3}{3} \left\{ \text{sen} \varphi \cdot \frac{1}{2} \left[\text{sen}^2(2\pi - \beta) - \text{sen}^2(-\beta) \right] + \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} \left[(2\pi - \beta + \beta) - \frac{1}{2} \text{sen}(4\pi - 2\beta) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \text{sen}(-2\beta) \right] \right\} = \frac{Eh^3}{3} \cdot \pi \cdot \cos \varphi = 0,
 \end{aligned}$$

e quindi $\varphi = \frac{\pi}{2}$, come dev'essere.

$$\begin{aligned}
 \rho_{\xi}^2 &= \frac{r^2}{3} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2(\alpha - \beta) \cdot dx}{\int_0^{2\pi} dx} = \\
 &= \frac{r^2}{3} \cdot \frac{\frac{2\pi - \beta + \beta}{2} - \frac{1}{2} \text{sen}(4\pi - 2\beta) + \frac{1}{2} \text{sen}(-2\beta)}{2\pi} = \frac{r^2}{6}
 \end{aligned}$$

$$\rho_{\eta}^2 = \frac{r^2}{3} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) \cdot dx}{\int_0^{2\pi} dx} = \frac{r^2}{3} \cdot \frac{\int_0^{2\pi} \cos^2(\alpha - \beta) \cdot dx}{\int_0^{2\pi} dx} = \frac{r^2}{6}$$

e quindi:

$$\rho_{\xi} = \rho_{\eta} = \frac{r}{\sqrt{6}} = 0,408 \cdot r \approx .$$

5. - Il secondo caso che noi ci siamo proposti, cioè quello per il quale l'elemento terminale sia scelto su uno dei diametri principali della figura, non è passibile di una trattazione analitica generale non

troppo complicata. Perciò ci limitiamo all'esame di un caso che, ai nostri fini, è molto importante; cioè a quello della lastra rettangolare, con elemento terminale su una delle mediane del rettangolo.

Riferendoci alla figura 4, e detti a e b i semilati del rettangolo, e la distanza dell'elemento assunto come terminale dal centro di figura, φ e ψ gli angoli formati dalla mediana contenente l'elemento terminale

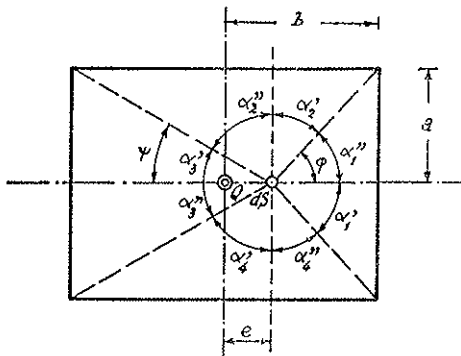


FIG. 4.

e dalle congiungenti questo elemento con i vertici del rettangolo, possiamo scrivere:

$$G = \frac{Eh^3}{(b-e)^2} \cdot \int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha + \frac{Eh^3}{a^2} \int_{\alpha_2'}^{\alpha_2''} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha + \frac{Eh^3}{(b+e)^2} \cdot \int_{\alpha_3'}^{\alpha_3''} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha + \frac{Eh^3}{a^2} \cdot \int_{\alpha_4'}^{\alpha_4''} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha$$

Risolvendo gli integrali e tenendo conto che:

$$\alpha_1' = -\varphi ; \quad \alpha_1'' = \varphi ; \quad \alpha_2' = -\frac{\pi}{2} + \varphi ; \quad \alpha_2'' = \frac{\pi}{2} - \psi ;$$

$$\alpha_3' = -\psi ; \quad \alpha_3'' = \psi ; \quad \alpha_4' = -\frac{\pi}{2} + \psi ; \quad \alpha_4'' = \frac{\pi}{2} - \varphi ,$$

risulta:

$$G = Eh^3 \left[\frac{\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi}{(b-e)^2} + \frac{\pi - \varphi - \psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi}{a^2} + \frac{\psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi}{(b+e)^2} \right]$$

Per $a=b$, $e=0$, risulta $\varphi = \psi = \frac{\pi}{4}$ e $G = \frac{Eh^3}{a^2} (\pi + 2)$ espressione che coincide con quella che si ricaverebbe ponendo $n=4$ nelle formule scritte per il poligono regolare con elemento terminale contenente il centro di figura.

Il momento statico S rispetto alla retta passante per l'elemento terminale e normale alla mediana di simmetria è espresso dalla:

$$S = \frac{Eh^3}{2(b-e)} \cdot \int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''} \cos^2 \alpha \cdot dx - \frac{Eh^3}{2a} \cdot \int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''} \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot dx - \frac{Eh^3}{2(b+e)} \cdot \int_{\alpha_3'}^{\alpha_3''} \cos^2 \alpha \cdot dx + \frac{Eh^3}{2a} \cdot \int_{\alpha_3'}^{\alpha_3''} \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \cdot dx,$$

che porge:

$$S = \frac{Eh^3}{2} \left[\frac{\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi}{b-e} - \frac{\psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi}{b+e} - \frac{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi}{a} \right]$$

Per $a=b$, $e=0$, risulta $\varphi = \psi = \frac{\pi}{4}$ e $S=0$.

La distanza d del baricentro elastico dall'elemento terminale è espressa dalla $d = \frac{S}{G}$ e quindi dalla:

$$d = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi}{b-e} - \frac{\psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi}{b+e} - \frac{\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi}{a}}{\frac{\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi}{(b-e)^2} + \frac{\psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi}{(b+e)^2} + \frac{\pi - \varphi - \psi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi}{a^2}}$$

Il momento d'inerzia J' rispetto alla retta normale alla mediana di simmetria e passante per l'elemento terminale vale:

$$J' = \frac{Eh^3}{3} \left[\int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha + \int_{\alpha_2'}^{\alpha_2''} \sin^2 \alpha \cdot d\alpha + \int_{\alpha_3'}^{\alpha_3''} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha + \int_{\alpha_4'}^{\alpha_4''} \sin^2 \alpha \cdot d\alpha \right]$$

che, dopo aver espresso i limiti d'integrazione in funzione degli angoli φ e ψ , porge, se risolta:

$$J' = \frac{Eh^3}{3} \cdot \pi$$

indipendente da a , b , e , φ , ψ .

Il momento d'inerzia J rispetto alla mediana di simmetria vale:

$$J = \frac{Eh^3}{3} \left[\int_{\alpha_1'}^{\alpha_1''} \sin^2 \alpha \cdot d\alpha + \int_{\alpha_2'}^{\alpha_2''} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha + \int_{\alpha_3'}^{\alpha_3''} \sin^2 \alpha \cdot d\alpha + \int_{\alpha_4'}^{\alpha_4''} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha \right]$$

che, dopo le debite trasformazioni e la risoluzione degli integrali, porge:

$$J = \frac{Eh^3}{3} \cdot \pi = J'$$

Di conseguenza, detto ρ' il raggio trasversale, quello cioè steso normalmente alla mediana di simmetria, risulta:

$$\rho'^2 = \frac{J}{G} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\frac{\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi}{(b-e)^2} + \frac{\psi + \frac{1}{2} \sin 2\psi}{(b+e)^2} + \frac{\pi - \varphi - \psi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\psi}{a^2}}$$

$$\rho^2 = \rho'^2 - d^2$$

Per $a = b$, $e = 0$, risulta:

$$\rho^2 = \rho'^2 = \frac{1}{3} \frac{\pi \cdot a^2}{\pi + 2},$$

com'è facile riconoscere ponendo $n = 4$ nelle formule scritte per il poligono regolare con elemento terminale contenente il centro di figura.

6. - Trovati gli elementi caratteristici dell'ellisse trasversale della lastra, dobbiamo ora trovar quelli dell'ellisse ordinaria di un tronco ideale — il cui piano medio γ_{ξ} sia normale alla lastra e la intersechi secondo la mediana contenente l'elemento terminale (fig. 5) — capace

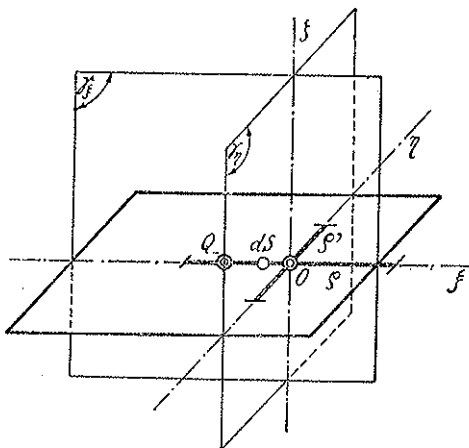


FIG. 5.

di permettere all'elemento terminale le medesime deformazioni di quelle permesse dalla lastra. A dir il vero, il piano medio del tronco ideale e del sistema elastico su di esso impostato potrebbe anche intersecare il piano della lastra secondo la normale η a tale mediana e passante per il baricentro elastico. Ma in tal caso l'elemento di giunzione dS starebbe fuori di quel piano medio γ_{η} , il che presenta poco riscontro in pratica.

Intanto la posizione del baricentro dell'ellisse ordinaria coincide con quella del baricentro dell'ellisse trasversale; ci si persuade di ciò pensando che tanto in un caso come nell'altro il baricentro deve tro-

varsi sulla retta d'azione della forza che induce traslazione pura per l'elemento terminale.

Detto W_0 il peso elastico ordinario, questo risulta determinato dalla costanza della rotazione φ dell'elemento terminale per effetto di una forza infinitamente piccola e lontana, caratterizzata da un certo momento M nelle due ipotesi di connessione dell'elemento terminale alla lastra o al tronco ideale.

Risulta

$$\varphi = \frac{M}{G \cdot \rho^2} = M \cdot W_0$$

onde

$$W_0 = \frac{1}{G \cdot \rho^2}$$

Detto ρ_0 il raggio (adagiato nel piano della lastra) dell'ellisse ordinaria che vuolsi determinare, questo riesce definito dalla costanza del valore della traslazione δ dell'elemento terminale per effetto di una forza F baricentrica normale alla lastra nelle due ipotesi di connessione. Risulta:

$$\delta = \frac{F}{G} = F \cdot W_0 \cdot \rho_0^2$$

e sostituendo a W_0 il suo valore:

$$\rho_0^2 = \rho^2$$

e quindi $\rho_0 = \rho$.

Il raggio dell'ellisse ordinaria steso secondo la normale alla lastra dev'essere nullo perchè lo spostamento dell'elemento terminale nel piano della lastra è piccolissimo — se non si tiene in conto, com'è più che lecito, di quello che potrebbe prodursi per effetto di punta — e quindi trascurabile a fronte di quello normale alla lastra.

Ne consegue che l'ellisse ordinaria del tronco ideale che noi ci proponiamo di determinare ammette un peso elastico finito, un raggio nel piano della lastra pure finito, ed un raggio normale a tal piano nullo e, per questa ragione, è degenerare.

La trattazione di un arco o di un pilastro solidale ad una lastra, nei casi finora considerati, che sono praticamente i soli che possono presentarsi, è così ricondotta allo studio dell'arco o del pilastro idealmente prolungato con un tronco le caratteristiche elastiche del quale sono determinabili come sopra è stato detto.

Vi è infine da osservare che l'area di saldatura tra l'arco o il pilastro e la lastra che fino ad ora ha funzionato da elemento terminale è nella pratica tutt'altro che infinitesima; ne discende che noi potremo applicare la trattazione fin qui esposta riguardando come elemento terminale una infinitesima porzione dell'area di contatto scelta nell'intorno del baricentro di essa. La libertà che noi ci permettiamo non porta conseguenze fin tanto che l'area di contatto è sufficientemente lontana dal contorno; occorre però avvertire che le forze applicate agli elementi terminali possono in tal caso essere finite, come sono finite le spinte che l'arco o il pilastro e la lastra si scambiano mutuamente e che le tensioni interne da queste provocate non vanno ripartite sull'elemento terminale teorico infinitesimo, bensì sull'intera zona di saldatura tra i due sistemi solidali.

Nella tabella II sono stati calcolati i valori degli elementi dell'ellisse di elasticità trasversale di una lastra quadrata quando l'elemento terminale si sposti lungo una mediana dal centro al perimetro e venga ad occupare successivamente le posizioni distanti dal centro di $0, \frac{1}{2} b, \frac{2}{5} b, \frac{3}{5} b, \frac{4}{5} b$, essendo b il mezzo lato del quadrato, nonchè i valori degli elementi dell'ellisse ordinaria del tronco elastico ideale che permetta, all'elemento terminale, le stesse deformazioni di quelle permesse dalla lastra.

TABELLA II.

$b/a = 1$							
			0	1/5	2/5	3/5	4/5
I	e/b						
II	φ		0,785	0,896	1,030	1,195	1,376
III	$\frac{1}{2} \cdot \text{sen } 2\varphi$		0,500	0,489	0,440	0,347	0,193
IV	$\varphi + \frac{1}{2} \cdot \text{sen } 2\varphi$	II + III	1,285	1,385	1,470	1,537	1,569
V	$(b - e)/a$		1,000	0,800	0,600	0,400	0,200
VI	$(b - e)^2/a^2$	(V) ²	1,000	0,640	0,360	0,160	0,040
VII	$\frac{\varphi + \frac{1}{2} \text{sen } 2\varphi}{(b - e)^2/a^2}$	IV/VI	1,285	2,164	4,083	9,606	39,225
VIII	ψ		0,785	0,692	0,620	0,559	0,506
IX	$\frac{1}{2} \cdot \text{sen } 2\psi$		0,500	0,495	0,476	0,453	0,428
X	$\psi + \frac{1}{2} \text{sen } 2\psi$	VIII + IX	1,285	1,187	1,097	1,012	0,934
XI	$(b + e)/a$		1,000	1,200	1,400	1,600	1,800
XII	$(b + e)^2/a^2$	(XI) ²	1,000	1,440	1,960	2,560	3,240
XIII	$\frac{\psi + \frac{1}{2} \text{sen } 2\psi}{(b + e)^2/a^2}$	X/XII	1,285	0,824	0,560	0,395	0,288
XIV	$\varphi + \psi$	II + VIII	1,571	1,588	1,650	1,749	1,882
XV	$\pi - \varphi - \psi$	$\pi - \text{XIV}$	1,571	1,554	1,492	1,393	1,260

Segue TABELLA II.

$b/a = 1$							
XVI	$G / \frac{Eh^3}{a^2}$	VII + XV + III + IX + XIII	5,141	5,526	7,316	12,194	41,394
XVII	ρ^2/a^2	1,0472/XVI	0,204	0,189	0,143	0,086	0,025
XVIII	$\frac{\varphi + \frac{1}{2} \text{sen } 2\varphi}{(b-e)/a}$	IV/V	1,285	1,732	2,450	3,842	7,845
XIX	$\frac{\psi + \frac{1}{2} \text{sen } 2\psi}{(b+e)/a}$	X/XI	1,285	0,989	0,784	0,632	0,519
XX	$\cos^2\psi - \cos^2\varphi$		0,000	0,200	0,396	0,572	0,720
XXI	$S / \frac{Eh^3}{2a}$	XVIII - XIX - XX	0,000	0,543	1,270	2,635	6,606
XXII	$2 \frac{d}{a}$	XXI/XVI	0,000	0,098	0,173	0,215	0,160
XXIII	d/a	$\frac{1}{2}$ (XXII)	0,000	0,049	0,086	0,108	0,080
XXIV	d^2/a^2	(XXIII) ²	0,000	0,002	0,007	0,012	0,006
XXV	$\rho^2/a^2 = \rho_0^2/a^2$	XVII + XXIV	0,204	0,187	0,136	0,074	0,019
XXVI	$\rho/a = \rho_0/a$	\sqrt{XXV}	0,452	0,432	0,369	0,272	0,138
XXVII	$G\rho^2/Eh^3$	XVI · XXV	1,049	1,033	0,985	0,902	0,786
XXVIII	$W_0 / \frac{1}{Eh^3}$	1/XXVII	0,954	0,968	1,015	1,108	1,271

$$\lim_{e \rightarrow b} G / \frac{Eh^3}{a^2} = \infty$$

$$\lim_{e \rightarrow b} \rho/a = 0$$

$$\lim_{e \rightarrow b} W_0 / \frac{1}{Eh^3} = \frac{24}{5 \times \pi}$$

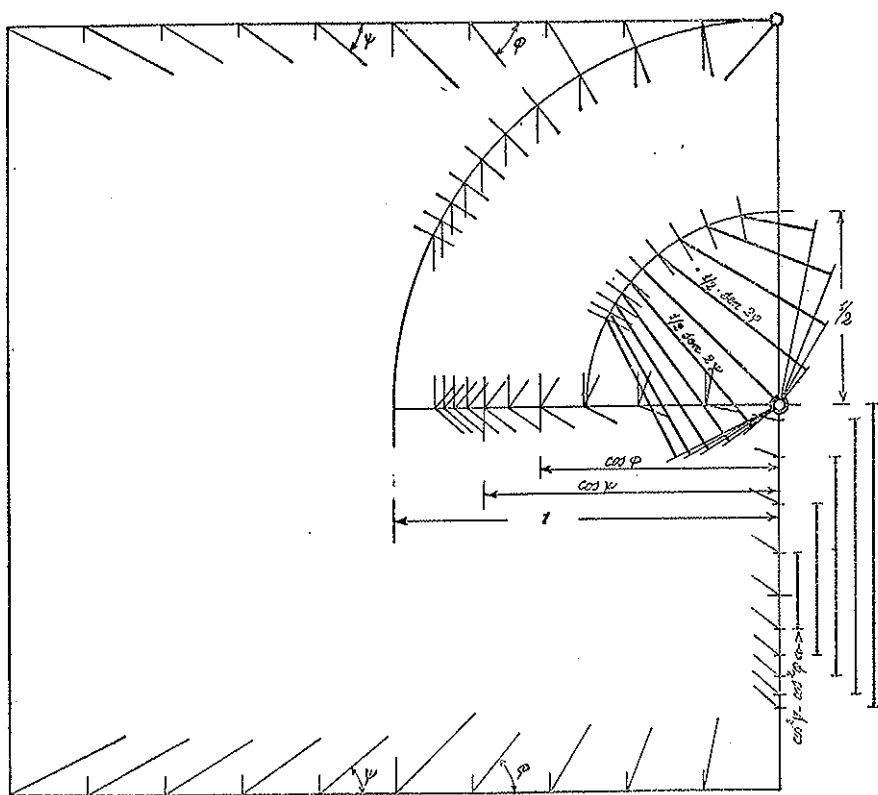


FIG. 6.

I valori di $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\varphi$, $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\psi$, $\cos^2 \psi - \cos^2 \varphi$ furono trovati graficamente com'è indicato nella figura 6 che non ci sembra necessitare schiarimento alcuno.