ACTA
Vol. II - N. 4

PRELIMINARI PER UNA NECESSARIA REVISIONE DELLA TEORIA DELL'ABERRAZIONE ANNUA

I FONDAMENTI TEORICI DEL PROBLEMA(*)

VITTORIO NOBILE

SVMMARIVM. — Theoria aberrationis, prout nunc est recepta, implicite supponit centrum solis ac centrum substantiae G universi systematis solaris inter se coincidere; id, etsi mathematicam tractationem planiorem efficit, non est vero satis proximum veritati. Itaque A. notas geometricas et dynamicas motus Solis circa G exponit, alteram aberrationis k_1 constantem inducit, ac denique ostendit quomodo, aptis investigationibus, haec constans, solaris orbis radium, ac periodus terminorum solarium aberrationis determinari possint.

Cum investigationes nostra aetate accuratissimae fieri valeant, sperare licet ex iis non solum numeros qui significent novas constantes de quibus agitur cognitum iri, verum etiam forte emendationem valoris constantis k (aberrationis annuae).

In alcune mie Note del 1923 (1) mi sono occupato del problema dell'aberrazione, principalmente in vista delle sue attinenze con quello della scelta dei sistemi di riferimento pei moti stellari. Sono stato condotto, in quella occasione, ad esprimere la correzione di aberrazione sotto una forma vettoriale molto semplice e concisa e singolarmente appropriata al tipo delle speciali ricerche costituenti allora il mio scopo principale. Oggetto particolare della mia attenzione era propriamente in

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Giuseppe Armellini, il 30 gennaio 1938.

(1) *Sopra una notevole espressione assoluta del fenomeno dell'aberrazione totale*, « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », serie 5ª, vol. XXXI, fasc. 12° e vol. XXXII, fasc. 1°.

quegli studi la correzione corrispondente alla parte secolare dell'aberrazione: argomento che strettamente si collega alle questioni innanzi citate sui fondamenti di una dinamica stellare, mentre il problema dell'aberrazione annua, la cui impostazione mi sembrava allora sufficientemente rigorosa, rimane a quelle questioni estraneo, in quanto che l'effetto corrispondente può sempre supporsi preventivamente corretto oppure eliminato con opportuna combinazione delle osservazioni. In occasione di uno studio diretto ad altro problema ed anche nel corso di una necessaria rielaborazione, per fini didattici, della materia riguardante l'aberrazione ho avuto occasione recentemente di esaminare più dappresso le vedute attuali sull'aberrazione annua e l'assetto della corrispondente teoria e mi è occorso di notare come la suddivisione ordinariamente fatta nelle trattazioni sulla materia della velocità dell'osservatore in tre componenti, alle quali corrispondono rispettivamente le aberrazioni secolare, annua e diurna, non risponda a criteri meccanicamente rigorosi e conduca a una rappresentazione solo parziale del fenomeno.

Che sia necessario, ai fini del problema, considerare il vettore velocità dell'osservatore come risultante di quattro anzichè di tre velocità fra loro ben distinte e come una di esse venga, nella usuale impostazione matematica del problema, tacitamente soppressa è cosa che si rende subito evidente. Non è evidente però, neppure in via di approssimazione, la legittimità di questa soppressione, chè anzi un esame più approfondito della questione conduce a conclusioni sicuramente negative al riguardo e la teoria attuale dell'aberrazione cosiddetta annua appare chiaramente incompleta, non solo dal punto di vista teorico ma anche da quello pratico, potendosi presumere, in base a valutazioni preventive che qui per brevità tralascio, che i termini trascurati non siano numericamente irrilevanti.

In quanto al modo di decomporre la velocità dell'osservatore, basta osservare che il moto rettilineo e uniforme (rispetto, s'intende, ad un triedro inerziale non collegato col sistema solare) compete *non al centro del Sole*, la cui accelerazione non può esser ritenuta nulla, ma *al centro di massa* G *dell'intero sistema*, supposto questo dinamicamente isolato dal resto dell'universo. Alla velocità di G e non a quella del Sole corrisponde dunque la parte puramente secolare dell'aberrazione e solo osservazioni fatte in G sarebbero scevre da effetti periodici dovuti alla causa in questione. In quanto ad un osservatore terrestre esso partecipa, oltre che al moto di G (traslazione del sistema) e a quello della rotazione della Terra, ai quali corrispondono le parti secolare e diurna, anche al moto del Sole intorno a G e *non soltanto a quello kepleriano* rispetto al Sole, come coll'attuale assetto della teoria viene sottinteso. La velocità del centro del Sole nel suo moto rispetto a G *deve dunque essere ancora vettorialmente sommata con quella del moto annuo rivolutivo della Terra* se si vuole l'importo integrale dell'effetto di aberrazione nella sua parte periodica non diurna.

Detto G'_a il vettore della velocità assoluta di G, S' quello della velocità del Sole nel suo moto relativo intorno a G, T' quello della velocità orbitale della Terra nel suo moto annuo [1] e σ infine il vettore che dà la direzione di una stella Σ (cioè il versore di $\Sigma - T$) la correzione di aberrazione secolare $\delta_0 \sigma$ sarà espressa, se si indichi inoltre con V la velocità della luce (in senso scalare), dalla formula [2]

$$V\,\delta_0\,\sigma = (G'_a \wedge \sigma) \wedge \sigma$$

e quella qui più particolarmente considerata, che chiamerò periodica riserbandomi di giustificare più innanzi completamente la denominazione, si scinde in due che indico con $\delta_1 \sigma$ e $\delta_2 \sigma$ e che sono espresse rispettivamente dalle relazioni

$$V\,\delta_1\,\sigma = (T' \wedge \sigma) \wedge \sigma \quad , \quad V\,\delta_2\,\sigma = (S' \wedge \sigma) \wedge \sigma \quad ,$$

corrispondendo la prima di esse all'aberrazione con periodo rigorosamente annuo e la seconda al termine addizionale il cui esame costituisce propriamente lo scopo del presente studio.

---

(1) Gli accenti indicano derivazioni rispetto al tempo.

(2) Cfr. le Note innanzi citate.

I. — IL MOTO DEL SOLE INTORNO AL CENTRO DI MASSA DELL'INTERO SISTEMA.

In linea preliminare va subito osservato, ai fini del calcolo effettivo del nuovo termine anzidetto, che esso (modulo del vettore $\delta_2 \sigma$) è certo numericamente piccolo di fronte all'altro corrispondente a $\delta_1 \sigma$. La massa del Sole è di poco inferiore a quella dell'intero sistema, onde la distanza fra il centro di massa S del Sole e G si mantiene piccola rispetto alle mutue distanze fra i pianeti. Per meglio precisare notiamo che, detto P_i uno dei pianeti, m_i la sua massa e M quella del Sole, sussiste la relazione vettoriale

$$[1] \qquad M(S-G) + \sum_i m_i (P_i - G) = 0$$

ovvero, indicando con Γ il centro di massa dell'insieme dei soli pianeti e con μ la somma delle masse di questi ultimi,

$$[2] \qquad M(S-G) + \mu(\Gamma - G) = 0$$

Sostituendo quindi a $P_i - G$ la somma $(P_i - S) + (S - G)$ e a $\Gamma - G$ la somma $(\Gamma - S) + (S - G)$ avremo rispettivamente dalla [1] e dalla [2] l'una o l'altra delle espressioni seguenti per $S - G$

$$[3] \qquad S - G = -\frac{\Sigma m_i (P_i - S)}{M + \mu} = \frac{\mu}{M + \mu}(S - \Gamma)$$

e si vede dalla seconda come, potendosi attribuire al coefficiente di $S - \Gamma$ il valore di $^1/_{700}$ circa ed essendo la distanza $S\Gamma$ dell'ordine di grandezza delle mutue distanze planetarie (sarà fatta in seguito una opportuna precisazione), la SG non potrà che esser piccola in confronto alle distanze medesime. Sono probabilmente considerazioni di questa natura quelle che hanno indotto gli astronomi a disinteressarsi del termine « solare » dell'aberrazione, in quanto che se S e G coincidessero quel termine non esisterebbe. Ma, a parte il fatto che un calcolo sufficientemente preciso della distanza in questione e delle sue possibili variazioni è finora mancato, bisogna considerare che è *la velocità* del Sole nel suo moto relativo a G che interviene nel nostro problema e che su tale quantità nulla si può dire senza un esame diretto che non mi consta sia stato mai fatto. È pertanto tale esame che occorre intraprendere e ciò senza aspirare ad un rigore perfetto per cui il problema si renderebbe praticamente inaccessibile ma nell'intento di pervenire ad una soluzione che permetta di assegnare a $(\delta_2 \sigma)$ un valore convenientemente approssimato e di costruire così una teoria preferibile a quella attuale che assume arbitrariamente la evanescenza del termine in questione.

La [3] intanto mostra subito come la conoscenza del moto relativo dei pianeti intorno al Sole permetta, teoricamente, di pervenire alla immediata conoscenza del moto del Sole rispetto a G, ma l'uso diretto ed esclusivo della predetta relazione sarebbe ben poco opportuno in pratica, sia a cagione della insufficienza dei dati relativi al numero e alle masse dei pianeti minori e ultra-plutoniani, sia perchè il procedimento essenzialmente numerico che verrebbe di necessità ad imporsi non sarebbe atto a fornire alcuna indicazione sui caratteri generali (geometrici e dinamici) del moto, caratteri che bisogna invece anzitutto precisare. Tali indicazioni si possono molto più chiaramente e agevolmente desumere dalla conoscenza degli integrali classici del moto del Sole intorno a G, dopo di aver sostituito — e siamo così nell'ordine di idee accennato poco innanzi — al sistema reale uno schema convenientemente semplificato.

Passiamo dunque ad esaminare il contributo dato dai predetti integrali, ai fini del presente studio, e cioè dall'integrale (vettoriale) delle aree e da quello dell'energia.

Integrale delle aree. — Il teorema del momento degli impulsi, applicato al moto intorno al centro di massa G, ci permette di scrivere, colle notazioni già stabilite, l'integrale (vettoriale) delle aree sotto la forma

$$[4] \qquad \sum_i m_i (P_i - G) \wedge P'_i + M (S - G) \wedge S' = \mathbf{K}$$

essendo **K** un vettore costante e intendendosi che le velocità del pianeta P_i e del Sole (vettorialmente indicate con P'_i e S') siano riferite ad una terna di origine G e di orientamento invariabile. Quest'ultima relazione dà luogo a tre equazioni scalari distinte (integrali delle aree nel senso ordinario) che non occorre considerare qui separatamente.

Indichiamo ora con $\mathbf{v}_i$ il vettore della sola velocità orbitale del pianeta P_i *intorno al Sole*; si avrà allora ovviamente

$$P'_i = S' + \mathbf{v}_i$$

e la [4] potrà scriversi, dopo tale sostituzione e tenendo presente che per la definizione di G si ha

$$[5] \qquad \sum_i m_i (P_i - G) + M (S - G) = 0 \quad ,$$

sotto la forma

$$[6] \qquad \sum_i m_i (P_i - G) \wedge \mathbf{v}_i = \mathbf{K}$$

essendo la sommatoria estesa ai soli n pianeti.

Conviene però porre questo integrale sotto una forma che presenti completa la separazione fra gli elementi del moto orbitale dei pianeti rispetto al Sole e quelli del moto del Sole rispetto a G e a ciò si perviene sostituendo in primo luogo nella [6] alla differenza $P_i - G$ la somma $(P_i - S) + (S - G)$, con che l'equazione predetta diventa

$$\sum_i m_i (P_i - S) \wedge \mathbf{v}_i + (S - G) \wedge \sum_i m \mathbf{v}_i = \mathbf{K}$$

e quindi, notando che la derivazione (1) della [5] rispetto al tempo dà, tenendo conto della espressione innanzi data alla P'_i

$$[7] \qquad (M + \mu) S' + \Sigma m_i \mathbf{v}_i = 0 \quad .$$

(1) Le derivazioni di vettori e punti s'intendono, naturalmente, prese con riferimento al triedro colla origine in G sopra definito.

Arriviamo così alla forma cercata dell'integrale delle aree

[8] $$\sum_i m_i (P_i - S) \wedge v_i - (M + \mu)\ (S - G) \wedge S' = \mathbf{K} \quad .$$

Tale relazione, della quale faremo uso qui per lo schema semplificato innanzi accennato, sussiste tuttavia nonostante la sua notevole semplicità — ed è quasi superfluo rilevarlo — nel caso più generale del problema, cioè qualunque sia la configurazione iniziale del sistema e l'atto iniziale di moto ed anche in presenza delle mutue perturbazioni.

Lo schema semplificato al quale qui ci atterremo, e che tuttavia permette di conseguire il progresso che abbiamo in vista, consiste nel trascurare, per un dato intervallo di tempo, le perturbazioni e nel considerare il moto dei pianeti intorno al Sole *come un insieme di moti kepleriani.* In conseguenza di tale ipotesi si potrà considerare costante il vettore rappresentato dalla prima somma che figura nella [8] e quindi, in virtù della relazione stessa, anche il prodotto vettoriale che segue nel primo membro. In tale ordine di approssimazione *è lecito dunque ritenere che la traiettoria relativa del centro del Sole intorno al centro di massa dell'intero sistema sia piana e percorsa con la legge delle aree.*

Integrale dell'energia. — Esaminiamo ora, sempre riferendoci al moto del sistema intorno a G, il contributo portato dall'integrale dell'energia allo studio della traiettoria di S.

Espressa la funzione potenziale U sotto la nota forma

$$U = fM \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} + f \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{\rho_{i,j}} \quad ,$$

dove ρ_i è la distanza di P_i dal Sole e $\rho_{i,j}$ quella fra P_i e P_j, l'integrale dell'energia si può scrivere, se si indica con V_0 la velocità del centro del Sole,

[9] $$M V_0^2 + \sum_i m_i P'^2_i = 2f \left(M \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} + \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{\rho_{i,j}} \right) + 2h$$

comprendendo la prima somma n termini (quanti sono i pianeti) e variando nella seconda i e j da 1 ad n, con $j \gtrless i$. Ora si ha, ricordando la relazione $P'_i = S' + v_i$ e ponendo V_0^2 in luogo di S'^2:

$$\sum_i m_i P'^2_i = \mu V_0^2 + \sum_i m_i v_i^2 + 2 S' \times \sum_i m_i v_i$$

e d'altra parte si ha per la [7]

$$2 S' \times \sum_i m_i v_i = -2 (M + \mu) V_0^2 \quad ,$$

quindi la [9] assume la forma

$$[10] \qquad -(M + \mu) V_0^2 + \Sigma m_i v_i^2 = 2 f \left(M \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} + \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{\rho_{i,j}} \right) + 2 h$$

Ma per la ipotesi fatta riguardo al moto dei pianeti rispetto al Sole (ipotesi che equivale a trascurare per un periodo di tempo non troppo lungo le perturbazioni) ha luogo per ogni singolo moto kepleriano la relazione

$$v_i^2 = 2 f \frac{M + m_i}{\rho_i} + 2 k_i$$

e quindi

$$\sum_i m_i v_i^2 = 2 f M \sum_i \frac{m_i}{\rho_i} + 2 f \sum_i \frac{m_i^2}{\rho_i} + 2 \sum_i m_i k_i \quad ;$$

si trova dunque, dopo aver sostituito tale espressione nel primo membro della [10] e dopo la soppressione di un termine comune nei due membri,

$$[11] \qquad (M + \mu) V_0^2 = 2 f \sum_i \frac{m_i^2}{\rho_i} - 2 f \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{\rho_{i,j}} + H \quad ,$$

avendo posto

$$H = 2 \sum_i m_i k_i - 2 h \quad .$$

Si noti ora in primo luogo che il gruppo di termini costituenti la seconda somma nella [11] può essere senz'altro soppresso poichè esso nasce dalla considerazione delle attrazioni mutue dei pianeti le quali sono state già implicitamente ritenute trascurabili, ai fini del nostro problema, quando si è supposto che il moto del sistema si riducesse ad un insieme di moti kepleriani. In quanto alla prima somma, essa può scriversi, tenendo conto delle equazioni delle orbite e chiamando rispettivamente a_i ed e_i i due elementi che caratterizzano l'orbita di P_i e v_i l'anomalia vera corrispondente ad un dato istante,

$$[12] \qquad \Sigma\, m_i^2 \left(\frac{1}{p_i} + \frac{e_i}{p_i} \cos v_i\right)$$

e si vede che essa può scindersi in due parti delle quali la prima, indipendente dalle v_i, è costante e si intenderà conglobata nella costante H. In quanto all'altra, variabile, essa contiene fra i suoi termini uno in cui il fattore dipendente dalla massa, che chiameremo m_0, può ritenersi maggiore di qualunque altro che figura nella somma a due indici precedentemente soppressa ed è quello relativo a Giove. Però nella somma

$$\sum_i \frac{m_i^2 e_i}{p_i} \cdot \cos v_i$$

figurano i fattori e_i, generalmente molto piccoli pel nostro sistema planetario, e tra i più piccoli è quello di Giove, mentre relativamente grande è il denominatore. In generale, paragonando la somma in questione con quella a due indici, troviamo che i termini della prima sono notevolmente minori, in valore assoluto, di quelli della seconda, in quanto i denominatori sono dello stesso ordine di grandezza e i termini della prima contengono i fattori e_i; inoltre il numero dei termini della prima è minore (n invece di $n(n-1)/2$) e nella prima figurano promiscuamente i due segni onde è da attendersi una parziale elisione, ciò che non ha luogo nell'altra somma. Sarà quindi lecito trascurare la parte variabile della espressione [12] e potremo allora, nell'ordine di approssimazione a cui ci atteniamo, *considerare costante la velocità orbitale del Sole intorno a* G. E poichè, come abbiamo visto, non varia la velocità areale nello stesso movimento e sarà pertanto $pV_0 =$ costante (dove p è la distanza di G dalla tangente alla traiettoria in S) dovrà esser costante la p. Si avrebbero dunque due soli moti possibili [1]. Nel primo la traiettoria di S sarebbe una retta alla distanza p da G e nel secondo un circolo col centro in G e di raggio p. Si può facilmente vedere che il primo caso è da escludersi. Ammesso tale caso il Sole non potrebbe mantenere invariato il verso della velocità sulla retta perchè ciò implicherebbe l'allontanamento indefinito da G e quindi, per la [3], una dilatazione indefinita del sistema, ciò che sarebbe in aperto contrasto con una delle conclusioni più sicure della meccanica celeste (invariabilità degli assi maggiori delle orbite). Il moto di S, se rettilineo, non potrebbe dunque essere che oscillatorio; la velocità dovrebbe pertanto, in certe posizioni, annullarsi e poichè essa è costante dovrebbe rimanere sempre nulla (Sole fisso rispetto a G). In forza della [3] dovrebbe essere allora anche fisso, in una terna coll'origine del Sole e di orientamento invariabile, il centro di massa dell'insieme dei pianeti: risultato evidentemente inammissibile perchè ci porterebbe a stabilire le relazioni:

$$\sum_i m\, v_i = 0 \quad , \quad \sum_i m_i\,(P_i - S) = a$$

le quali non sussistono neppure in maniera approssimata [2].

Si è pertanto condotti alla conclusione che *la traiettoria relativa del Sole intorno a G può — nell'ordine di approssimazione dei nostri calcoli — considerarsi circolare e percorsa con moto uniforme.*

---

(1) La ricerca delle curve per le quali p è costante conduce ad una equazione differenziale del tipo di CLAIRAUT: il circolo corrisponde allora all'integrale singolare e l'insieme delle rette all'integrale generale.

(2) Che in senso rigoroso non possano sussistere basta ad assicurarlo l'osservazione che esse fornirebbero, se vere, sei integrali delle equazioni del moto del sistema rispetto al Sole, lineari rispetto alle componenti delle velocità e alle coordinate e *diversi dai quattro classici* noti pel moto eliocentrico, mentre esaurienti ricerche del PAINLEVÉ e del BRUNS accertano la inesistenza di altri integrali algebrici rispetto alle coordinate e alle componenti delle velocità.

II. — GLI ELEMENTI DELL'ORBITA SOLARE E I TERMINI SOLARI DELL'ABERRAZIONE.

Come ho già innanzi ricordato, la correzione dell'effetto di aberrazione dovuto al moto del Sole intorno al centro di massa dell'intero sistema si esprime senz'altro vettorialmente colla relazione

$$[13] \qquad V\delta_2\sigma = (S' \wedge \sigma) \wedge \sigma = \sigma \times S' \cdot \sigma - S'$$

È facile ora mostrare come, noti che siano alcuni elementi dell'orbita solare predetta, si possano facilmente dedurre dalla [13] le correzioni alle coordinate sferiche di una stella corrispondenti al nuovo tipo di aberrazione e come, viceversa, determinati mediante le osservazioni i valori numerici di quelle correzioni si possano dedurre quegli elementi del moto solare che occorrono per poter applicare le nuove correzioni ad altre posizioni osservate.

Si abbia una terna trirettangola di assi coordinati $Gxyz$ avente per origine il centro di massa G del sistema solare e tale che il piano Gxy sia parallelo a quello della eclittica media di una data epoca, essendo la semiretta delle x positive orientata verso l'equinozio di primavera. Il piano dell'orbita del Sole intorno a G (orbita supposta, per quanto si è premesso, circolare col centro in G) taglierà il piano Gxy secondo la linea dei nodi, la quale farà l'angolo Ω colla Gx (contato dalla Gx positiva, nel senso diretto). Sia inoltre i la inclinazione del piano dell'orbita solare sul piano Gxy: tale angolo sarà certamente piccolo perchè se le orbite dei pianeti fossero complanari (caso prossimo alla realtà) l'orbita di G giacerebbe nel piano delle altre e quindi nel piano Gxy.

Gli elementi Ω e i fissano dunque la posizione del piano dell'orbita solare e potranno considerarsi, nel nostro problema e nei limiti di approssimazione nei quali ci teniamo, quali costanti per un lungo periodo di tempo. Detto ora ψ l'angolo che la congiungente GS fa colla linea dei nodi (contato da questa nel senso diretto) consideriamo un nuovo triedro $G\xi\eta\zeta$ avente l'asse $G\xi$ diretto verso il nodo ascendente dell'orbita, quello $G\eta$ a 90° dal primo nel piano Gxy e $G\zeta$ coincidente con Gz. I coseni direttori del raggio vettore GS del Sole saranno allora, rispetto al secondo triedro,

$$\cos\psi \quad , \quad \operatorname{sen}\psi \cos i \quad , \quad \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen} i$$

e, detti $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{q}$ tre vettori unitari paralleli agli assi $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ e orientati nello stesso senso di questi, potremo scrivere, indicando con R il raggio dell'orbita solare,

$$[14] \qquad S - G = R\,(\cos\psi \cdot \boldsymbol{l} + \operatorname{sen}\psi \cos i \cdot \boldsymbol{m} + \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen} i \cdot \boldsymbol{q}) \quad .$$

Il vettore unitario σ (direzione di una stella Σ) sarà poi espresso, in relazione colla stessa terna $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ e in funzione delle coordinate eclittiche della stella, da

$$[15] \qquad \sigma = \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) \cdot \boldsymbol{l} + \cos\beta \operatorname{sen}(\lambda - \Omega) \cdot \boldsymbol{m} + \operatorname{sen}\beta \cdot \boldsymbol{q}$$

Deriviamo ora la [14] rispetto al tempo, considerando in essa variabili solamente S e l'angolo ψ, il quale può scriversi nt quando si indichi con n la velocità angolare del raggio vettore GS; avremo così:

$$S' = Rn\,(-\operatorname{sen}\psi \cdot \boldsymbol{l} + \cos\psi \cos i \cdot \boldsymbol{m} + \cos\psi \operatorname{sen} i \cdot \boldsymbol{q})$$

e quindi

$$[16] \qquad \sigma \times S' = Rn\,\Big[-\operatorname{sen}\psi \cos\beta \cos(\lambda - \Omega) + \\ + \cos\psi \cos i \cos\beta \operatorname{sen}(\lambda - \Omega) + \cos\psi \operatorname{sen} i \operatorname{sen}\beta\Big]$$

Detto K questo prodotto scalare e dette $\delta\lambda$ e $\delta\beta$ le correzioni da applicare col loro segno alle coordinate eclittiche della stella per correggerle dall'effetto dell'aberrazione qui considerata, la [13] si traduce nelle tre seguenti equazioni fra le quantità $\delta\lambda$ e $\delta\beta$

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{V}\left[\operatorname{sen}\beta\cos(\lambda-\Omega)\,\delta\beta+\cos\beta\operatorname{sen}(\lambda-\Omega)\,\delta\lambda\right]= \\
&\qquad\qquad=\mathrm{K}\cos\beta\cos(\lambda-\Omega)+\mathrm{R}n\operatorname{sen}\psi \\
[17]\quad &-\mathrm{V}\left[\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}(\lambda-\Omega)\,\delta\beta-\cos\beta\cos(\lambda-\Omega)\,\delta\lambda\right]= \\
&\qquad\qquad=\mathrm{K}\cos\beta\operatorname{sen}(\lambda-\Omega)-\mathrm{R}n\cos\psi\cos i \\
&\mathrm{V}\cos\beta\,\delta\beta=\mathrm{K}\operatorname{sen}\beta-\mathrm{R}n\cos\psi\operatorname{sen}i\quad,
\end{aligned}$$

equazioni compatibili perchè, essendo $\sigma^2=1$ e quindi identicamente

$$\left[\mathrm{V}\,\delta\sigma-(\mathrm{S}'\wedge\sigma)\wedge\sigma\right]\times\sigma=0\quad,$$

si avrà, ponendo le [17] sotto la forma

$$\mathrm{L}=0\quad,\quad\mathrm{M}=0\quad,\quad\mathrm{N}=0$$

e indicando con σ_1, σ_2, σ_3 le componenti di σ, pure identicamente

$$\mathrm{L}\,\sigma_1+\mathrm{M}\,\sigma_2+\mathrm{N}\,\sigma_3=0\quad.$$

Se ora indichiamo con k_1 il rapporto $\mathrm{R}n/\mathrm{V}$ fra la velocità del Sole nel suo moto orbitale in questione e quella della luce e notiamo che tale rapporto è certo notevolmente più piccolo della costante dell'aberrazione annua (1), vediamo che, dopo aver diviso in ciascuna delle [17] ambo i membri per V, si potrà senza errore sensibile, data la piccolezza dell'angolo i e la presenza del fattore k_1, sostituire nel secondo membro della seconda equazione l'unità al posto di $\cos i$ e nella terza sopprimere il termine in $\operatorname{sen} i$.

(1) Oltre agli argomenti accennati in principio, lo dimostra il fatto che il corrispondente effetto di aberrazione sia potuto finora passare inavvertito.

Identiche considerazioni valgono per la espressione [16] e permettono di dare a K la forma semplicissima

$$K = k_1 \cos\beta \operatorname{sen}\left[\lambda - (\psi + \Omega)\right]$$

Dalle prime due della [17] si deduce allora immediatamente

$$[18] \qquad \begin{aligned} \cos\beta\, \delta\lambda &= -\, k_1 \cos\left[\lambda - (\psi + \Omega)\right] \\ \delta\beta &= \quad k_1 \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\left[\lambda - (\psi + \Omega)\right] \end{aligned}$$

L'applicazione delle correzioni $\delta\lambda$ e $\delta\beta$ dovute al tipo di aberrazione in esame diventa pertanto immediatamente possibile appena che sia determinata la costante k_1 e sia noto l'angolo $\psi+\Omega$ relativo ad una data epoca, angolo che potremo chiamare *longitudine baricentrica* del Sole.

Posto

$$[19] \qquad \begin{aligned} X &= k_1 \cos(\psi + \Omega) \\ Y &= k_1 \operatorname{sen}(\psi + \Omega) \end{aligned}$$

potremo scrivere le [18] sotto la forma

$$\begin{aligned} -\cos\beta\, \delta\lambda &= X\cos\lambda + Y\operatorname{sen}\lambda \\ \delta\beta &= (X\operatorname{sen}\lambda - Y\cos\lambda)\operatorname{sen}\beta \end{aligned}$$

e queste daranno X ed Y e quindi, per le [19], immediatamente k_1 e $\psi+\Omega$ quando una serie di osservazioni di alta precisione abbia fornito valori attendibili per le correzioni $\delta\lambda$ e $\delta\beta$ relative all'epoca media delle osservazioni, per ciascuna stella.

Il valore dedotto per l'angolo $\psi+\Omega$ si riferirà all'epoca media predetta: tale valore paragonato con quello dedotto da altra serie relativa ad altra epoca fornirà la variazione unitaria di ψ cioè n, dopo di che dalla relazione $k_1 = Rn/V$ si otterrà il raggio R dell'orbita solare.

Tutto dipende dunque dalla conoscenza di una serie di valori sufficientemente precisi per le correzioni delle coordinate eclittiche di una o più stelle.

Non mi occuperò qui del problema della determinazione di tali quantità nei suoi particolari; solo accennerò, per ora genericamente, al metodo che potrà seguirsi.

Com'è noto, si usa nell'astronomia pratica dedurre la costante k dell'aberrazione annua da equazioni nelle quali le differenze fra le coordinate sferiche fornite da osservazioni assolute e quelle desunte da un catalogo sono legate ad alcune incognite quali la correzione Δk ad un valore approssimato k_0 assunto per k, la parallasse p della stella osservata (che generalmente è la Polare) e le correzioni $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$, supposte costanti e attribuite a residui errori del catalogo. Le equazioni hanno notoriamente la forma

$$a\Delta k + bp + \Delta\alpha + n = 0$$

o l'altra

$$a_1\,\Delta k + b_1\,p + \Delta\delta + n_1 = 0$$

secondo che si utilizzino per la determinazione delle incognite osservazioni di ascensioni rette o di declinazioni. Nel primo caso, note dalla risoluzione di un sistema di equazioni del primo tipo le quantità p e Δk e inoltre la $\Delta\alpha$, le equazioni del secondo tipo porgeranno il valore più probabile per $\Delta\delta$ (se non si sono fatte osservazioni dirette di declinazioni) e quindi si dedurranno agevolmente $\delta\lambda$ e $\delta\beta$ dalle note relazioni differenziali trigonometriche tra i due sistemi di coordinate.

Come ho detto, le $\Delta\alpha$ e $\Delta\delta$ (e quindi le $\delta\lambda$ e $\delta\beta$) sono interpretate, secondo la concezione attuale del problema, come errori nelle posizioni assunte dal catalogo. Dopo quanto ho innanzi esposto sulla sicura esistenza di altri termini periodici dovuti al moto orbitale del Sole intorno a G, è ben giustificata l'ipotesi che i termini $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$ introdotti dagli astronomi nel passato per ottenere dalle loro equazioni valori ben concordanti per l'incognita principale Δk, per la parallasse p e per la eventuale correzione della costante di nutazione rappresentino invece, in massima parte, l'importo dei termini corrispondenti al nuovo tipo di aberrazione qui segnalato. Tale è — per meglio dire — il significato che si dovrà attribuire ai valori che potranno dedursi per quei termini da osservazioni future, quando queste siano organizzate *ad hoc* ed eseguite coi mezzi moderni più perfezionati e quando si tenga conto della piena fiducia che si può avere, nell'epoca presente, nei dati di alcuni cataloghi, a causa del progressivo attenuarsi dei veri e proprî errori di osservazione.

In conformità di tali vedute ritornerò prossimamente sull'argomento della organizzazione pratica di queste osservazioni destinate a decidere esaurientemente la importantissima questione della entità dell'effetto qui studiato e a determinare numericamente il raggio dell'orbita solare e il periodo della rivoluzione: problemi i quali si collegano ad altri di alto interesse pratico e speculativo, come non mancherò di esporre.