ACTA
Vol. II - N. 7

INTORNO AL TEOREMA DI COLONNETTI SUI SISTEMI ELASTO-PLASTICI (*)

(Con quattro figure)

EUGENIO FROLA

SVMMARIVM. — Auctor ostendit theorema Colonnetti circa systemata elasto-plastica nihil aliud esse nisi hypothesis illa fundamentalis de deformationis omnimodae congruentia.

Docet etiam rectam quamdam elementariam rationem, qua opus nos est algorithmis minimizantibus uti.

In un gruppo di Note comparse nell'estate scorsa sui Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (1) il prof. GUSTAVO COLONNETTI ha impostata una trattazione analitica rigorosa del problema, davvero capitale per la tecnica costruttiva, della valutazione delle eventuali deformazioni plastiche, alle quali può venire assoggettato un sistema elastico, senza che ne sia compromesso l'equilibrio statico.

Lo studio del prof. COLONNETTI viene concluso con un teorema, brillante estensione del noto teorema di MENABREA ai sistemi elasto-plastici.

Tale teorema di COLONNETTI, di cui non riporto la dimostrazione, rimandando il lettore alle Note anzi citate, può essere così enunciato:

« In un corpo, o sistema elastico, deformato sotto un dato sistema di carichi, sia raggiunta una certa configurazione di equilibrio, per la quale le componenti della deformazione siano in parte di natura elastica, in parte di natura plastica; specificando, dette:

$$\varepsilon_x, \ldots\ldots, \gamma_{yz}, \ldots\ldots$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Colonnetti, il 30 genn. 1938.

(1) « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », vol. XXV, serie 6a, fascicoli 8-11 (1937).

le parti elastiche della deformazione e dette:

$$\bar{\varepsilon}_x, \ldots\ldots, \bar{\gamma}_{yz}, \ldots\ldots$$

le parti plastiche impresse; supposto che le componenti della tensione siano indipendenti dalle $\bar{\varepsilon}_x, \ldots, \bar{\gamma}_{yz}, \ldots$ e che invece dipendano dalle $\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{yz} \ldots$, attraverso le relazioni:

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_x} \varphi(\varepsilon_x, \ldots\ldots, \gamma_{yz}, \ldots\ldots) \qquad \tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial \gamma_{yz}} \varphi(\varepsilon_x, \ldots\ldots, \gamma_{yz}, \ldots\ldots)$$

(valide nel campo elastico ordinario, dove $\varphi(\varepsilon_x, \ldots, \gamma_{yz}, \ldots)$ è la stessa forma quadratica, definita, positiva, che esprime l'energia potenziale elastica locale in teoria ordinaria dell'elasticità) le tensioni interne che caratterizzano lo stato di equilibrio considerato, son quelle che rendono minima l'espressione:

$$\iiint_V \varphi \, dV + \iiint_V (\sigma_x \bar{\varepsilon}_x + \tau_{yz} \bar{\gamma}_{yz} + \ldots) \, dV$$

per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere, compatibilmente colla deformazione plastica impressa, e colle forze in equilibrio ».

Questo elegante ed espressivo risultato, che può ben servire di base per ogni ulteriore analisi del fenomeno elasto-plastico, viene tratto come conseguenza analitica della premessa, certo irrefutabile, della congruenza della deformazione totale, di componenti:

$$\varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x, \ldots\ldots, \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz}, \ldots\ldots$$

e pur presentando tutti i vantaggi che il teorema di Menabrea offre nel campo elastico, è in ultima analisi un modo elegantemente espressivo di ripetere che le componenti totali della deformazione formano un sistema congruente.

Mi è parso quindi non inutile indicare un seconda via, parallela a quella indicata dal teorema di Colonnetti, per raggiungere i risultati che quest'ultimo porta con sè: è questa via quella della diretta applicazione dell'ipotesi della congruenza della deformazione totale (ipotesi che in un campo puramente elastico può analogamente sostituire il teorema di MENABREA).

Mi limito, per ora, ai sistemi reticolari esponendo questo metodo, che chiamerò della congruenza, che è del tutto elementare.

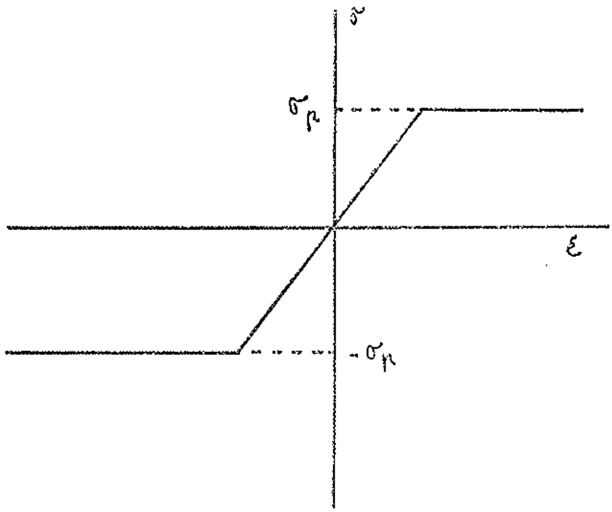

FIG. 1.

Sia dunque dato un sistema reticolare, per semplicità piano, necessariamente iperstatico, e siano alcune aste di esso, sovrabbondanti, sospettabili di deformazione plastica; tali aste siano in numero di n, siano A_i, l_i, area della sezione normale e lunghezza dell'i-esima di esse ($i = 1, 2, \ldots, n$); siano E il modulo di elasticità, supposto comune a tutte, e σ_p il carico, comune a tutte, per cui, secondo l'ipotesi semplificatoria fatta da COLONNETTI e qui accolta, il diagramma schematizzato di HOOKE presenta i punti angolosi, sia alla trazione che alla compressione, oltre i quali prosegue orizzontalmente (vedi fig. 1).

Ciò premesso, penso liberata la struttura dalle n aste sovrabbondanti, ottenendo una nuova struttura che chiamo principale: sottoposta la struttura principale agli effettivi carichi esterni (che gravano la struttura primitiva) calcolo, con le ordinarie teorie elastiche (nella struttura principale non sono possibili, per ipotesi, deformazioni plastiche), i mutui spostamenti dei due nodi cui faceva, nella travatura primitiva, capo l'asta i-esima, nella direzione dell'asta i-esima stessa: tale spostamento (combinazione lineare delle componenti dei carichi esterni) indico con a_i. Tolgo i carichi esterni e nella coppia di nodi corrispondenti all'asta j-esima applico due forze eguali ed opposte, unitarie, spiranti nella direzione della detta j-esima asta, nel senso di allontanare i nodi, e calcolo il mutuo spostamento dei nodi dell'asta i-esima in direzione dell'asta stessa: tale spostamento chiamo S_{ij}.

Detto X_j lo sforzo che si realizza effettivamente nell'asta j-esima del sistema primitivo (sotto le effettive condizioni di carico): lo spostamento mutuo che effettivamente si realizza tra i nodi, cui fa capo l'asta i-esima nella direzione dell'asta stessa, è dato ovviamente da:

$$a_i + \sum_{j=1}^{n} s_{ij} X_j \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n) \quad .$$

Ora, per l'ipotesi di congruenza, tale spostamento dev'essere eguale a quello subìto mutuamente dagli estremi dell'asta i-esima. Se l'asta fosse ancora in regime elastico tale spostamento sarebbe dato da

$$-\frac{X_i}{E A_i} l_i$$

se invece essa è già, come si suppone, in regime plastico, tale spostamento sarà indipendente dalla X_i (che dovrà essere uguale in valore assoluto a $\sigma_p A_i$) pur dovendo superare in valore assoluto $\frac{\sigma_p}{E} l_i$ (che è il massimo spostamento elastico realizzabile).

Se dunque tutte le n aste, come si suppone, sono in plasticità lo spostamento mutuo di ogni coppia di nodi è dato da:

$$[1] \qquad a_i + \sigma_p \sum_{j=1}^{n} s_{ij} A_j \rho_j \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n) \quad ; \quad (^1)$$

(1) Indicandosi con ρ_j una quantità che può essere eguale a 1 o a -1 e dipendente dal fatto che l'asta j-esima sia tesa o compressa.

dev'essere

$$[2] \qquad \left| a_i + \sigma_p \sum_{j=1}^{n} s_{ij} A_j \rho_j \right| \geqslant \frac{\sigma_p l_i}{E} \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

e l'allungamento unitario plastico avrà nell'asta i-esima la componente:

$$[3] \qquad \bar{\varepsilon}_i = \frac{a_i}{l_i} + \frac{\sigma_p}{l_i} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} A_j \rho_j - \frac{\sigma_p}{E} \rho_i \; .$$

Può accadere che le [2] non siano tutte soddisfatte: ciò vorrà dire che non tutte le n aste sono entrate effettivamente in plasticità; sarà quindi necessario eliminare per tentativi alcune di esse dal novero delle aste a deformazione plastica.

Tale inconveniente, d'altronde comune anche al metodo di Colonnetti, discende dal fatto che l'ipotesi di congruenza, od il suo equivalente teorema di Colonnetti, se ci fornisce un mezzo per la separazione della deformazione elastica da quella plastica in quelle parti del sistema dove sappiamo *a priori* l'ultima presente, non ci indica le parti stesse in cui si manifesta la plasticità.

A questo punto mi pare interessante dimostrare direttamente come le mie equazioni coincidano perfettamente con quelle che ci vengono fornite sotto forma di principio di minimo dal teorema di Colonnetti.

Se applico il teorema di Colonnetti alla travatura elastica generale, ove studiata col metodo della congruenza, posso porre per l'energia potenziale elastica Φ:

$$\Phi = \Phi_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 l_i}{E A_i}$$

dove φ_1 è l'energia che compete al sistema principale, e $\frac{1}{2} \frac{X_i^2 l_i}{E A_i}$ l'energia che compete all'i-esima trave. L'espressione da minimizzare è dunque:

$$\Phi_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 l_i}{E A_i} + \sum_{i=1}^{n} X_i \bar{\varepsilon}_i l$$

e le equazioni che da esse si ricavano sono:

$$\frac{\partial}{\partial X_i}\Phi_i + X_i \frac{l_i}{E A_i} + \bar{\varepsilon}_i l_i \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$$

da cui sussiste [sempre che sia $\left| \frac{1}{l_i} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \right]_{X_j = \sigma_p A_j \varrho_j} \right| > \frac{\sigma_p}{E}$ $(i = 1, 2, \ldots\ldots, n)$]

$$\frac{1}{l_i}\left[-\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_i}\right]_{X_j = \sigma_p A_j \varrho_j} - \frac{\sigma_p \rho_i}{E} = \bar{\varepsilon}_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n) .$$

Ora per il teorema di Castigliano

$$\left[-\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_i}\right]_{X_j = \sigma_p A_j \varrho_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots\ldots, n) .$$

non è altro che il mutuo spostamento nella travatura principale dei nodi cui fa capo la trave i-esima nella direzione della trave stessa, sotto i carichi effettivamente applicati alla travatura principale e le effettive reazioni $\sigma_p A_j \rho_j$ delle n aste, cioè dev'essere:

$$\frac{1}{l_i}\left[-\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_i}\right]_{X_j = \sigma_p A_j \varrho_j} = \frac{a_i}{l_i} + \frac{\sigma_p}{l_i} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} A_j \rho_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots\ldots, n) \quad .$$

Ecco dunque dimostrata la perfetta coincidenza dei due metodi.

Mi propongo ora di trattare a fondo il caso, particolarmente semplice in cui vi siano solo due aste presentanti pericolo di plasticità.

Le espressioni dei mutui spostamenti dei nodi sono in questo caso:

$$a_1 + s_{11} X_1 + s_{12} X_2$$

$$a_2 + s_{21} X_1 + s_{12} X_2 \quad .$$

Incomincio ad osservare che per il principio di reciprocità è:

$$s_{12} = s_{21} \quad .$$

Tali mutui spostamenti, indicate con ε_1^*, ε_2^* le dilatazioni unitarie complessive (somme della dilatazione elastica ε e della plastica $\bar{\varepsilon}$) delle due aste devono essere eguali a:

$$\varepsilon_1^* \, l_1$$

$$\varepsilon_2^* \, l_2$$

Ora $\varepsilon_i^* l_i$ è una funzione lineare omogenea di X_i data da $\frac{X_i l_i}{E A_i}$ sino quando X_i è compreso tra $\sigma_p A_i$ e $-\sigma_p A_i$; non ha più alcun significato per valori di X_i più grandi di modulo di $\sigma_p A_i$ ed assume qualunque valore piu grande di $\frac{\sigma_p}{E} l_i$ per $X_i = \sigma_p A_i$ e qualunque valore (negativo) più piccolo di $-\frac{\sigma_p}{E} l_i$ per $X_i = -\sigma_p A_i$ riassumendo in formule è:

$$-\varepsilon_i^* l_i = f_i(X_i) = \begin{cases} \text{qualunque valore} \geqslant \sigma_p \dfrac{l_i}{E} & (X_i = \sigma_p A_i) \\ \dfrac{X_i}{E A_i} l_i & (-\sigma_p A_i < X_i < \sigma_p A_i) \\ \text{qualunque valore} \leqslant -\dfrac{\sigma_p l_i}{E} & (X_i = -\sigma_p A_i) \end{cases}$$

Il diagramma della funzione $f_i(X_i)$ è rappresentato in figura 2. Le condizioni di congruenza diventano dunque:

$$[4] \qquad \begin{aligned} a_1 + s_{11} X_1 + s_{12} X_2 + f_1(X_1) = 0 \\ a_2 + s_{12} X_1 + s_{22} X_2 + f_2(X_2) = 0 \end{aligned} \; .$$

La soluzione di questo particolare sistema ci permette di determinare le X_1, X_2 e di risolvere pienamente il problema propostoci.

Consideriamo infatti le [4] come due curve nel piano riferito al sistema cartesiano ortogonale di assi X_1, X_2. La prima di esse si comporrà di un segmento inclinato e di due semirette parallele all'asse X_2 ed entrambe da esso distanti $\sigma_p A_1$ (vedi fig. 3); la seconda è rappresentata da una curva analoga in cui è invertito il ruolo degli assi (vedi fig. 4).

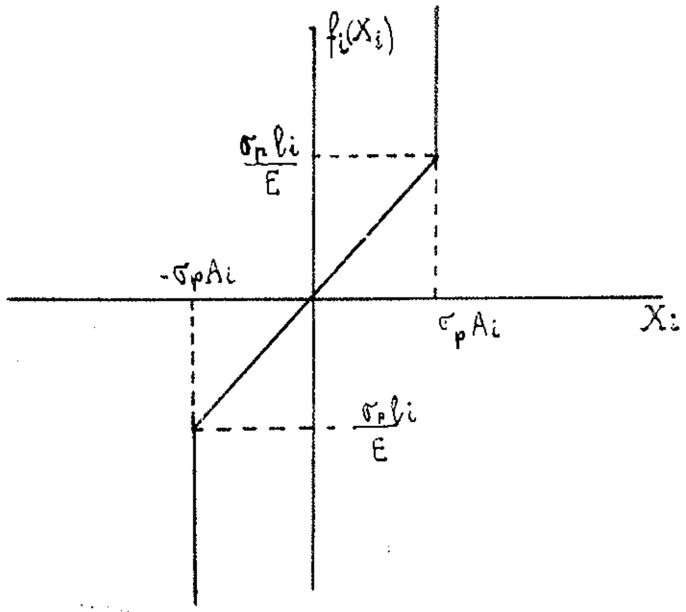

FIG. 2.

Si dimostra facilmente che tali curve non possono avere più di una intersezione; infatti i due rami verticali della prima curva hanno ovviamente inclinazione infinita sull'asse delle X_1 mentre l'inclinazione del ramo obliquo è data da:

$$\frac{s_{11} + \dfrac{l_1}{EA_1}}{s_{12}}$$

l'inclinazioue invece dei due rami orizzontali sempre sull'asse X_1 della seconda curva è ovviamente nulla, mentre quella del ramo obliquo è:

$$\frac{s_{12}}{s_{22} + \dfrac{l_2}{EA_2}}$$

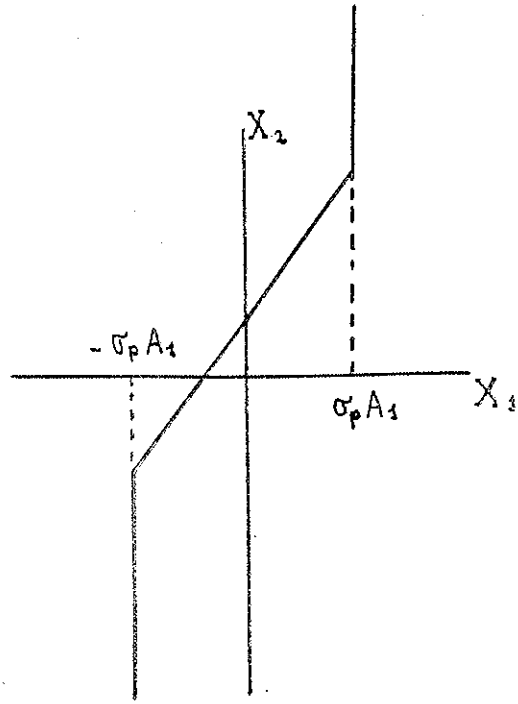

FIG. 3.

ma è d'altra parte:

$$\frac{s_{12}}{s_{22} + \dfrac{l_2}{EA_2}} < \frac{s_{11} + \dfrac{l_1}{EA_1}}{s_{12}}$$

Infatti tale disuguaglianza discende dalla:

$$\left(s_{11} + \frac{l_1}{EA_1}\right)\left(s_{22} + \frac{EA_2}{l_2}\right) > s_{12}^2$$

ora quest'ultima essendo s_{11}, s_{22}, $\frac{l_1}{EA_1}$, $\frac{l_2}{EA_2}$ tutte quantità positive è conseguenza *a fortiori* della:

$$s_{11}\, s_{22} > s_{12}^2$$

relazione che considerazioni energetiche permettono di dimostrare.

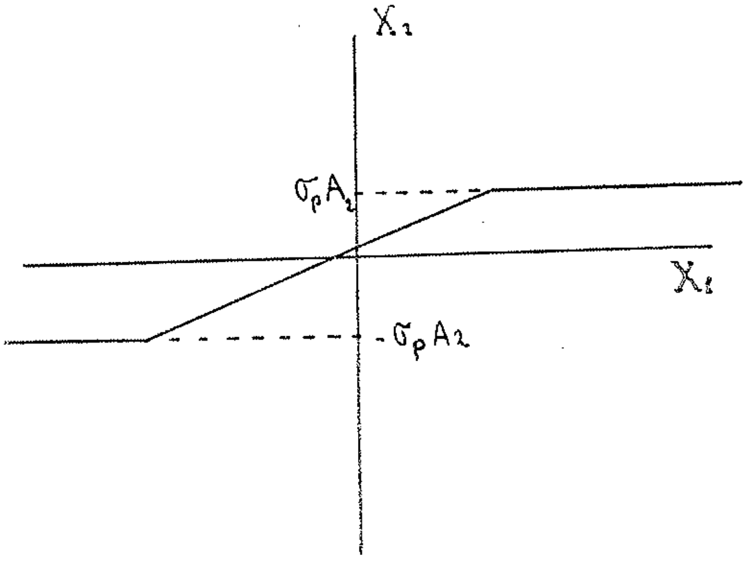

FIG. 1.

Posti infatti, nelle due coppie di nodi relativi alle due aste, due paia di forze eguali e contrarie, spiranti in direzione delle relative aste, di intensità x per il primo paio e y per il secondo, il lavoro di deformazione, che la travatura principale compie sotto tale condizione di carico, è dato da:

$$\frac{1}{2}\left(s_{11}\,x^2 + 2\,s_{12}\,xy + s_{22}\,y^2\right)$$

ma tale espressione dev'essere una forma definita positiva; deve quindi il suo determinante (con tutti i minori principali) essere positivo, segue dunque:

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} = s_{11}\,s_{22} - s_{12}^{\,2} > 0 \quad .$$

Le ordinate della seconda curva crescono sempre meno rapidamente di quelle delle prime; ciò basta ovviamente ad escludere la possibilità di più intersezioni; un esame anche rapido all'andamento delle curve ci assicura dell'esistenza dell'intersezione stessa, le cui coordinate ci forniscono i valori degli sforzi nelle due aste. Se uno o entrambi gli sforzi sono minori ai corrispondenti limiti di elasticità non vi sarà in una o entrambe le aste deformazione plastica, pur la soluzione trovata continuando ad essere perfettamente valida.