PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XVI - N. 13
pag. 123-128

LA GRAVITÀ ALLA SUPERFICIE DI UN PIANETA SFEROIDICO NON DI ROTAZIONE (*)

GIOVANNI BOAGA

SVMMARIVM — Investigationes a Pizzetti peractas continuans, Auctor formulas invenit, quibus computari potest gravitas in planetae alicuius superficie, dummodo planetae forma sit elipsois, quae non sit e rotatione confecta.
His formulis potest ex gravitatibus valoribus, qui in duobus orbis terrarum hemisphaeris observantur, valor gravitatis in terrae aequatore computari; ex quo poterit confirmari vel reici vulgata coniectura de elliptica aequatoris forma.

PAOLO PIZZETTI nel suo classico trattato « *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti* » (1) risolve il problema, così detto di STOKES, nel caso di un pianeta sferoidico non di rotazione, poco diverso da una sfera, pervenendo per la gravità superficiale alla seguente espressione:

$$[1] \qquad g = g_c \left\{ 1 + (E - 5\gamma) \frac{x^2}{2c^2} + (H - 5\gamma) \frac{y^2}{2c^2} \right\}$$

dove g_c, gravità polare, è definita dalla:

$$g_c = \frac{\varepsilon . M}{c^2} - \varepsilon\, c \left\{ (E + H) \frac{M}{2c^3} - \frac{\omega^2}{2\,\varepsilon} \right\}$$

e

$$\gamma = \frac{\omega^2\ c^3}{\varepsilon\, M}$$

con c semi asse polare, ε costante di attrazione, M massa del pianeta, ω velocità angolare, E ed H – quantità adimensionali – assimilabili ai doppi valori degli schiacciamenti delle due ellissi meridiane fra loro ortogonali

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini il 14-III-1957.
(1) Editore « Spoerri », Pisa - 1913.

di semi assi a, c e b, c con a e b semi assi dell'ellisse equatoriale e $a>b>c$; E ed H sono supposti tali da poter trascurare le combinazioni E^2, H^2, EH, $E\gamma$, $H\gamma$ e simili.

Il riferimento cartesiano trirettangolo è, come d'uso in queste ricerche, con l'origine coincidente con il centro di massa del pianeta e con gli assi x, y, z lungo i semi assi a, b, c rispettivamente.

Il Pizzetti si è fermato alla formula [1]; gli studi di Corradino Mineo (2) e di Carlo Somigliana (3) ci hanno suggerito di continuare le ricerche di Pizzetti e la conseguente elaborazione ci ha portato a risultati che riteniamo non privi di interesse in vista anche delle possibili applicazioni che potranno avere in riferimento agli studi di W. Heiskanen (4), K. Jung (5), A. Isotow (6), J. Schongolowitsch (7), ecc.

Ciò premesso osserviamo che, posto per quanto detto:

$$a = c\left(1 + \frac{E}{2}\right) \qquad b = c\left(1 + \frac{H}{2}\right) \tag{2}$$

l'equazione della superficie del pianeta triassico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

assume la forma:

$$(1 - E)\,x^2 + (1 - H)\,y^2 + z^2 - c^2 = 0 \tag{3}$$

Esprimendo le coordinate cartesiane per mezzo delle geografiche (φ, latitudine e λ, longitudine con origine nel meridiano fondamentale a, c) tenendo conto delle:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a^2 \,.\, W.\, \cos\varphi.\, \cos\lambda = c^2(1 + E)\,.\, W.\, \cos\varphi.\, \cos\lambda \\ y &= b^2 \,.\, W.\, \cos\varphi.\, \operatorname{sen}\lambda = c^2(1 + H)\,.\, W.\, \cos\varphi.\, \operatorname{sen}\lambda \\ z &= c^2 \,.\, W.\, \operatorname{sen}\varphi = c^2 \,.\, W.\, \operatorname{sen}\varphi \end{aligned}\right. \tag{4}$$

(2) C. Mineo: – Sulla gravità superficiale di un pianeta supposto ellissoidico a tre assi – Bollettino della Unione Matematica Italiana, anno 1928.

(3) C. Somigliana: – Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione – Memorie della Società Astronomica Italiana, Vol. IV, anno 1929.

(4) W. Heiskanen: – Ist die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid? – Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig.

(5) K. Jung: – Über das dreiachsige Ellipsoid und seine Zufallswahrscheinlichkeit – Gerland Beiträge, zur Geophysik, B. 59, 1943.

(6) A. Jsotow: – Krassowskijs Referenzellipsoid und die neusten Fortschritte der wissenschaftlichen Geodäsie – Vermessungstechnik, 1933.

(7) J. Schongolowitsch: – Das äussere Schwerefeld der Erde und die eliesbezuglichen fundamentalen konstanten, Ibidem, 1934.

con

$$W = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (E \cos^2 \lambda + H \operatorname{sen}^2 \lambda) \cos^2 \varphi \right\}$$

come facilmente si verifica, introducendo le [4] nella [3], la [1] diviene:

$$[5] \qquad g = g_c \left\{ 1 + \frac{1}{2} (E \cos^2 \lambda + H \operatorname{sen}^2 \lambda) \cos^2 \varphi - \frac{5}{2} \gamma \cos^2 \varphi \right\}.$$

Indicando con $S(\lambda)$ il binomio funzione di λ messo in evidenza nella [5], che rappresenta il *doppio dello schiacciamento della sezione ellittica meridiana di longitudine* λ, la [5] stessa assume la forma:

$$g = g_c \left\{ 1 + \frac{1}{2} [S(\lambda) - 5\gamma] \cos^2 \varphi \right\}$$

corrispondente a quella della classica *formula di CLAIRAUT* per l'ellissoide di rotazione, alla quale anzi si giunge ponendo $S(\lambda) = 2\alpha$, con α schiacciamento dell'ellissoide rotazionale.

Indicando con g_a, g_b i valori delle gravità equatoriali alle estremità degli assi equatoriali a, b, ossia, per quanto detto, nei punti di longitudine 0 e $\pi/2$, la [5] fornisce le:

$$[6] \qquad \begin{cases} g_a = g_c \left\{ 1 + \frac{1}{2} (E - 5\gamma) \right\} \\ g_b = g_c \left\{ 1 + \frac{1}{2} (H - 5\gamma) \right\} \end{cases}$$

Da queste, opportunamente combinate, si perviene alla seguente *relazione lineare fra le tre gravità* g_a, g_b, g_c:

$$g_a (H - 5\gamma) + g_b (5\gamma - E) + g_c (E - H) = 0$$

Eliminando g_c dalla [5] tenendo conto della prima delle [6] si giunge alla:

$$[7] \qquad g = g_a \left\{ 1 - \frac{1}{2} (E - 5\gamma) + \frac{1}{2} [S(\lambda) - 5\gamma] \cos^2 \varphi \right\}$$

atta ad esprimere la funzione della gravità per mezzo del parametro equatoriale g_a.

Analoga formula si può scrivere cambiando E in H e λ in $\pi/2 - \lambda$ per esprimere la funzione della gravità per mezzo dell'altro parametro equatoriale g_b.

Dalla precedente con facili sostituzioni si trae la:

$$[8] \qquad g(\varphi, \lambda) = (g_a \cos^2 \lambda + g_b \,\mathrm{sen}^2 \lambda) \cos^2 \varphi + g_c \,\mathrm{sen}^2 \varphi$$

che permette il calcolo della gravità in un punto qualunque della superficie del pianeta per mezzo dei tre parametri g_a, g_b, g_c.

In particolare, per l'ellissoide rotazionale, risultando $g_a = g_b$, la [8] fornisce la nota formula (8):

$$g = g_a \,.\, \cos^2 \varphi + g_c \,.\, \mathrm{sen}^2 \varphi$$

Scrivendo tre volte l'equazione [8] in corrispondenza di tre punti di coordinate $\varphi_i\ \lambda_i$ (con $i = 1, 2, 3$) ed aggiungendo al sistema così ottenuto la [8] stessa, si giunge alla seguente *relazione lineare fra quattro gravità:*

$$\begin{vmatrix} g(\varphi, \lambda) & \cos^2 \lambda \cos^2 \varphi & \mathrm{sen}^2 \lambda \cos^2 \varphi & \mathrm{sen}^2 \varphi \\ g(\varphi_1, \lambda_1) & \cos^2 \lambda_1 \cos^2 \varphi_1 & \mathrm{sen}^2 \lambda_1 \cos^2 \varphi_1 & \mathrm{sen}^2 \varphi_1 \\ g(\varphi_2, \lambda_2) & \cos^2 \lambda_2 \cos^2 \varphi_2 & \mathrm{sen}^2 \lambda_2 \cos^2 \varphi_2 & \mathrm{sen}^2 \varphi_2 \\ g(\varphi_3, \lambda_3) & \cos^2 \lambda_3 \cos^2 \varphi_3 & \mathrm{sen}^2 \lambda_3 \cos^2 \varphi_3 & \mathrm{sen}^2 \varphi_3 \end{vmatrix} = 0$$

nella quale non figurano nè gli elementi della forma del pianeta, nè quelli della sua grandezza.

Sviluppando il determinante rispetto agli elementi della prima colonna ed isolando $g(\varphi, \lambda)$ si trova la

$$[9] \qquad g(\varphi, \lambda) = \frac{1}{D_4} \sum_{i=1}^{3} D_i \, g(\varphi_i, \lambda_i)$$

con

$$D_i = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{sen}^2 \varphi_{i+j} \cos^2 \varphi_{i+j+1} \cos^2 \varphi_{i+j+2} \,\mathrm{sen}^2 (\lambda_{i+j+1} + \lambda_{i+j+2}) \,.$$
$$. \,\mathrm{sen}\,(\lambda_{i+j+1} - \lambda_{i+j+2})$$

atta ad esprimere la gravità $g(\varphi,\lambda)$ *in un punto generico di coordinate* φ,λ *per mezzo di tre gravità in corrispondenza di punti qualunque di coordinate* φ_i, λ_i ($i = 1, 2, 3$).

Ne consegue che la [8] è un caso particolare della [9].

---

(8) cfr. C. SOMIGLIANA: – l.c.

Con riferimento alla Terra, poichè esistono attualmente numerosissimi valori di gravità osservate a latitudini e longitudini assai differenti e distribuiti sia sull'emisfero australe sia su quello boreale, non riuscirebbe difficile – in analogia ai noti lavori di Helmert – determinare col metodo dei minimi quadrati, utilizzando la [8], i più probabili valori delle gravità g_a, g_b, g_c.

Se dai calcoli, tenendo conto anche degli errori medi delle incognite, risultasse

$$g_a \neq g_b$$

l'esistenza della ellitticità dell'equatore terrestre risulterebbe comprovata per via gravimetrica.