PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XV - N. 11
pag. 137-152

DIMOSTRAZIONE INTRINSECA DEL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH SOPRA UNA CURVA (*)

EDOARDO VESENTINI

SVMMARIVM. — Auctor per viam intrinsecam extruit, super algebricam curvam irreducibilem, seriem quae eumdem habet ordinem eamdemque dimensionem quam series canonica. Ex quo potest intrinsecus demonstrari theorema Rieman-Roch super curvam, vel per quasdam topologicas animadvertiones ab O. ZARISKI factas, vel per intrinsecum reductionis theorema quod F. SEVERI in fine huius Notae demonstrat.

In una recente Nota F. SEVERI [**12**] (1), allo scopo immediato di ridurre al minimo i richiami di carattere proiettivo nella geometria sopra una curva algebrica, con lo scopo finale di « ulteriori avvicinamenti all'algebra astratta », cioè di consentire l'elaborazione d'una teoria geometrica dei corpi di funzioni algebriche definite sopra corpi numerici arbitrari, ha apportato alcune varianti al *metodo rapido* ([**9**]; [**10**], Cap. V, pag. 145-169), sostituendo un lemma proiettivo preliminare con proposizioni di carattere intrinseco.

Una delle questioni fondamentali per lo sviluppo ulteriore di questo nuovo indirizzo è costituita dalla dimostrazione, per via intrinseca, del teorema di Riemann-Roch. Una dimostrazione di questo tipo — oltre a quelle, di cui diremo nel n. 1, conseguite con i metodi della teoria aritmetica delle funzioni algebriche — è stata data da O. ZARISKI [**18**] mediante considerazioni di carattere topologico, e, come vedremo nel n. 2, tale dimostrazione potrebbe essere senz'altro inserita nella nuova trattazione di F. SEVERI, se, fra i fatti di indole proiet-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 23 aprile 1953.

(1) I numeri in neretto entro parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia posta alla fine del presente lavoro.

tiva ammessi validi da O. ZARISKI, non figurasse anche l'ipotesi relativa all'esistenza di almeno una serie lineare avente i caratteri (ordine e dimensione) della serie canonica (1).

Nel presente lavoro elimineremo questa ipotesi costruendo una tale serie, sulla base delle premesse di F. SEVERI, con argomentazioni poggianti sulla teoria topologica delle corrispondenze algebriche. In tal modo, la questione posta da F. SEVERI appare risolta dalla dimostrazione di O. ZARISKI. Tuttavia le considerazioni che condurranno al risultato sopra detto permetteranno di adattare alle nuova trattazione della geometria sopra la curva, la vecchia dimostrazione del teorema di Riemann-Roch, data dal CASTELNUOVO sulla base di una formula di SCHUBERT.

Per raggiungere lo scopo prefissoci muoveremo (n. 2) dalle premesse di indole proiettiva poste alla base della Nota [**12**] (nn. 1, 2, pag. 143-145), ed il ricorso ad esse è lecito, in quanto il presente lavoro si propone appunto di inserirsi nella trattazione inaugurata da [**12**]. Alla scopo di esaminare tali premesse, nel n. 6 ne illustreremo brevemente i legami con la teoria delle funzioni razionali sulle superficie di Riemann, e nel n. 7 mostreremo come, utilizzando soltanto una parte di esse, si possa egualmente definire sopra la curva una serie lineare effettiva avente l'ordine delle serie canonica.

1. – Lo scopo propostosi dal SEVERI ([**12**], pag. 143) era già in parte raggiunto anche dal suo primitivo metodo rapido, il quale si è rivelato strumento di grande efficacia, permettendo a W. L. CHOW [**4**] di elaborare la teoria geometrica dei corpi di funzioni algebriche senza propositi completamente intrinseci, ma di dimostrare il teorema di Riemann-Roch per i corpi di funzioni algebriche aventi, come corpo delle costanti, un corpo perfetto. Una trattazione del caso in cui il corpo delle costanti è algebricamente chiuso trovasi anche in W. GRÖBNER [**6**] il quale però, per giungere ad una dimostrazione intrinseca del teorema di Riemann-Roch, ha dovuto introdurre *l'ipotesi* relativa

(1) Per completare la teoria intrinseca della Nota [**12**] col teorema di Riemann-Roch, basta un'ipotesi meno esigente di quelle di ZARISKI [**18**], o di GRÖBNER [**6**]. Si veda in proposito una *Osservazione di* F. SEVERI al n. 8 della presente Nota.

all'esistenza di almeno una serie lineare avente i caratteri della serie canonica. D'altra parte la sovrabbondanza di tale ipotesi è presumibile in quanto il teorema di Riemann-Roch, *insieme all'esistenza della classe canonica,* è stato acquisito per ogni corpo, K, di funzioni algebriche avente corpo delle costanti arbitrario, da F. K. SCHMIDT [**13**], mediante considerazioni aritmetiche ispirate alla classica memoria [**5**] di DEDEKIND e WEBER, e da A. WEIL [**16**] (1), sulla base di una definizione astratta dei differenziali di certi sviluppi in serie di potenze dei multipli interi dei *divisori* di K.

Sulla memoria [**5**] torneremo nel n. 6 allo scopo di illustrare il significato delle premesse di carattere proiettivo di [**12**] e [**18**].

Avvertiamo fin d'ora che, ponendoci nell'ordine d'idee di [**12**] e [**18**], nel seguito considereremo soltanto il caso di funzioni algebriche definite sul corpo numerico complesso.

1. - Sia F. SEVERI [**12**] che O. ZARISKI [**18**] si basano su alcune proprietà elementari delle serie lineari sopra una curva algebrica irriducibile, C, proprietà che ritengono acquisite per via proiettiva. Quelle ammesse valide da F. SEVERI sono le seguenti.

a) Nozione di serie lineare g_n^r come insieme dei gruppi di livello di una combinazione lineare di funzioni razionali, definite sopra la curva C, aventi in comune un gruppo di livello. I gruppi di livello di C risultano dunque in corrispondenza proiettiva con i punti di uno spazio proiettivo complesso a r dimensioni.

Proprietà involutoria di una g_n^r. Nozione di serie lineare completa, relativo teorema di esistenza ed unicità, e, come conseguenza di questo, il teorema del resto nella forma invariantiva. Distinzione fra serie lineari semplici e composte.

b) Viene acquisito per via proiettiva il fatto che ogni g_n^r semplice ha un numero finito ($\geqslant 0$) di coppie neutre.

(1) Un'altra dimostrazione del teorema di Riemann-Roch — di cui siamo venuti a conoscenza solo allorchè la redazione del presente lavoro era già ultimata — è stata data da A. WEIL nel suo libro *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Paris, Hermann 1948, Parte I, pag. 3-27, mediante la considerazione della varietà diagonale sulla varietà delle coppie di punti della curva data. L'esistenza di *divisori canonici* è ivi ottenuta in base ad un teorema di carattere algebrico stabilito in A. WEIL, *Foundations of algebraic geometry*, Am. Math. Soc. Colloquium Publ., vol. XXIX, 1946, pag. 238-239.

c) Esistenza su C di (almeno) due serie lineari g_m e g_n, complete, aventi dimensioni > 1, semplici, prive di punti fissi, individuate da due gruppi, privi di elementi comuni, costituiti, rispettivamente, da m e n punti semplici, distinti, di C.

Sulla base di tali premesse e senza altri riferimenti di carattere proiettivo, F. Severi ha dimostrato ([**12**], n. 6, pag. 149-150) che la differenza fra l'ordine e la dimensione di *ogni* serie lineare completa di C, avente l'ordine sufficientemente elevato, è eguale ad un *medesimo* intero non negativo, p, il quale risulta un invariante di C rispetto alle trasformazioni birazionali, e prende il nome di *genere* di C. Per p vale il seguente teorema ([**12**], n. 5, pag. 149):

α) *n ($\geqslant p$) punti semplici distinti di* C *individuano una serie lineare completa avente ordine n e dimensione non minore di $n - p$.*

Chiamando rispettivamente *speciale* o *non speciale* una tale serie secondochè la sua dimensione supera o eguaglia $n - p$, si ha che ([**9**], nn. 3 e 4, pag. 932; [**12**], n. 6, pag. 150):

β) *È non speciale ogni serie lineare avente l'ordine o la dimensione maggiori, rispettivamente, di $2p - 2$ o di $p - 1$.*

γ) *Un gruppo di p punti generici, semplici, distinti, di* C *individua una serie lineare di dimensione zero.*

Le proprietà *a*) sono considerate acquisite proiettivamente anche da O. Zariski, il quale, anzichè formulare l'ipotesi *c*), ammette che su C siano date infinite serie lineari g_n^r di ordini indefinitamente crescenti e tali che $r \geqslant n - \pi$, essendo π il genere della superficie di Riemann, F, di C. A norma di α) (tenendo conto anche della *b*)), *questa ipotesi può desumersi dalla c*).

A queste premesse Zariski aggiunge *l'ipotesi, d), che su* C *esista (almeno) una serie* $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$.

Nel presente lavoro mostreremo per via topologica che tale ipotesi può dedursi dalle premesse *a*) e *c*). In vista di questa conclusione ed allo scopo di inserire i risultati di Zariski nella nuova trattazione di Severi, mostreremo anzitutto che *il genere riemanniano π coincide con il genere p* introdotto in [**12**].

3. - Per giungere al risultato sopra detto, occorre premettere alcune considerazioni sulla teoria topologica delle corrispondenze algebriche e sui fondamenti topologici della geometria numerativa.

Data una corrispondenza algebrica, T, di indici l e s, e di valonza γ, fra i punti di C, dalla teoria topologica delle corrispondenze algebriche sopra una curva algebrica, sviluppata da O. CHISINI (1) e da S. LEFSCHETZ [7], si ha che il numero, u, dei punti uniti di T è dato dalla formula di CAYLEY-BRILL:

$$[1] \qquad u = l + s + 2\pi\gamma$$

Mediante considerazioni di carattere topologico (confrontare ad esempio: [**1**], pag. 558; [**2**], pag. 484) si dimostra che i punti uniti della somma, T + S, di due corrispondenze algebriche, T e S, fra i punti di C, sono i punti uniti di T ed i punti uniti di S, contati con le rispettive moltiplicità. In particolare la corrispondenza λ T, multipla di T secondo l'intero positivo λ, ha, come punti uniti, i punti uniti di T contati λ volte ciascuno. Mediante considerazioni di natura topologica si dimostra inoltre che, se T e S sono corrispondenze a valenza, anche T+S ha valenza, e questa è eguale alla somma delle valenze di T e di S.

Le due proposizioni precedenti sono ben note, e noi le abbiamo ricordate soltanto perchè *in base ad esse ed alla* [1], *e senza altri riferimenti alla teoria delle corrispondenze*, F. SEVERI ([**10**], n. 81, pag. 250-254) ha stabilito la formula di SCHUBERT che esprime il numero

$$[2] \qquad Z^m_{r,n} = n\nu\binom{m-1}{r} - \frac{1}{2}\,d\binom{m-2}{r-1} \quad ,$$

dei gruppi di $r+1$ punti di C, comuni da una $g^r_n (r \geqslant 1)$ e ad una serie γ^1_m (razionale o irrazionale) di indice $\nu \geqslant 1$, avente d punti doppi, nell'ipotesi che ambedue le serie siano prive di punti fissi.

In base all'osservazione precedente, oppure tenendo contro dei risultati conseguiti da B. L. VAN DER WAERDEN in [**15**], si conclude che *la* [2] *può considerarsi acquisita per via topologica.*

Supponiamo che la γ^1_m sia una serie lineare g^1_m. Considerando la corrispondenza algebrica di indici $m-1$, $m-1$, e valenza 1, nella

(1) Cfr. [**1**]. In questo lavoro la formula [**1**] viene stabilita nell'ipotesi che T abbia una valenza e che anche T^{-1} abbia una valenza (a priori non necessariamente eguale a quella di T). Ma quest'ultima ipotesi può dedursi, per via topologica, dalla prima, come risulta da [**2**].

quale sono coniugati i punti di C appartenenti ad un medesimo gruppo di g_m^1, dalla [1] si ha che

$$d = 2m + 2\pi - 2 \qquad (^1). \tag{3}$$

4. - Proviamo ora che

$$p = \pi \ . \tag{4}$$

Se $p = 0$, l'asserto è senz'altro dimostrato poichè in tal caso C è birazionalmente equivalente ad una retta ([**12**], n. 4, pag. 147-148). Supponiamo dunque $p > 0$, e consideriamo una serie lineare $|g_{2p}^p|$, definita a partire da un gruppo, G_{2p}, di $2p$ generici punti semplici distinti di C. A norma del teorema β), questa serie non ha punti fissi.

Essendo P un generico punto di C (non appartente a G_{2p}), il gruppo di $p+1$ punti di C costituito da P e da p punti di G_{2p}, dà luogo ad *una* g_{p+1}^1 *non contenuta in* $|g_{2p}^p|$. Fissato un generico punto, X, di C, consideriamo il gruppo $\overline{G}_p$, dei p punti residui di X rispetto a g_{p+1}^1. Poichè g_{p+1}^1 non è contenuta in $|g_{2p}^p|$, risulta univocamente determinato (anche se $|g_{2p}^p|$ è composta) un gruppo, G_p, di p punti, residuo di $\overline{G}_p$ rispetto a $|g_{2p}^p|$. La corrispondenza algebrica fra X ed i p punti di G_p ha indici $Z_{p-1,\,2p-1}^{p+1}$, p, e valenza -1. Poichè g_{p+1}^1 non è contenuta in $|g_{2p}^p|$, tale corrispondenza non ha punti uniti. Dalla [1] si ha pertanto che

$$p + Z_{p-1,\,2p-1}^{p+1} - 2\pi = 0 \ ,$$

e da questa relazione, e dalle [2], [3], si deduce la [4].

5. - Fissati $p+2$ punti generici, semplici, distinti, di C, per la proposizione β) esiste una g_{p+2}^2 di cui tali gruppi costituiscono un gruppo di livello. A norma di γ), g_{p+2}^2 è completa, semplice e priva di punti fissi. Per tale serie vale il seguente

Teorema I. *Se* $p \geqslant 1$, *una serie lineare* g_{p+2}^2, *semplice e priva di punti fissi, ha* $\dfrac{p(p-1)}{2}$ *coppie neutre.*

(1) Questa relazione può ottenersi più direttamente, come caso particolare di una relazione di Hurwitz sui punti di diramazione delle superficie di ricoprimento. Cfr. ad esempio [**14**], Cap. VI, pag. 132-133.

Sia G_{p+2} un gruppo generico di g^2_{p+2}, gruppo che, nelle nostre ipotesi, non è restrittivo supporre costituito da $p+2$ punti semplici, distinti, di C, e siano g^1_{p+2} e g'^1_{p+2} due generiche serie lineari distinte, contenute in g^2_{p+2} ed aventi come gruppo comune G_{p+2}. Il numero, $Z^{p+2}_{1,p+2}$, delle coppie comuni a g^1_{p+2} ed a g'^1_{p+2} può ottenersi dalle [2], [3] e [4], e risulta espresso dalla relazione

$$[5] \qquad Z^{p+2}_{1,p+2} = p^2 + p + 1 \ ,$$

ma conviene determinare tale numero senza fare ricorso alla formula di SCHUBERT. A questo scopo indichiamo con T la corrispondenza algebrica in cui ad un generico punto, P, di C corrispondono i punti appartenenti ai gruppi di g'^1_{p+2} passanti per i $p+1$ punti di C, residui di P rispetto a g^1_{p+2}. T ha indici $(p+2)(p+1)$, $(p+2)(p+1)$ e valenza zero. I suoi $2(p+2)(p+1)$ punti uniti sono i punti del gruppo jacobiano di g^1_{p+2} ed i punti costituenti le $Z^{p+2}_{1,p+2}$ coppie comuni a g^1_{p+2} ed a g'^1_{p+2}; dalle (1), (3) e (4) segue la (5).

Fra le $Z^{p+2}_{1,p+2}$ coppie ora determinate, figurano le $\binom{p+2}{2}$ coppie di punti di G_{p+2}, e si può dimostrare, nel modo che rapidamente accenniamo, che ciascuna di tali coppie compare con molteplicità uno in $Z^{p+2}_{1,p+2}$.

Sulla superficie di Riemann, F, di C, in un opportuno intorno, U(0), di uno qualsiasi, 0, dei punti di G_{p+2}, definiamo una variabile uniformizzante z ([17], § 7, pag. 36). Poichè i punti di G_{p+2} sono a due a due distinti, l'affissa, z', di uno qualsiasi dei punti di U(0) corrispondenti a z in T, è una funzione olomorfa di z, con derivata non nulla in 0. Si ha dunque, in un opportuno intorno di 0

$$z' = a_1 z + a_2 z^2 + \dots , \ (a_1 \neq 0) ,$$

e si riconosce facilmente che, per la supposta genericità di g^1_{p+2} e di g'^1_{p+2} in g^2_{p+2}, risulta $a_1 \neq 1$. Infatti, se, fissato g^1_{p+2}, al variare di g'^1_{p+2} in g^2_{p+2}, a_1 fosse identicamente eguale a costante, per la g^2_{p+2} non varrebbe evidentemente la proprietà involutoria, contro l'ipotesi a).

Dunque $z' - z$ è funzione olomorfa di z con derivata non nulla in 0, e pertanto ([1]; [2]) la molteplicità di 0 per T è semplice.

Il numero

$$Z_{1,\,p+2}^{p+2} + \binom{p+2}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

è il numero delle coppie neutre di g_{p+2}^{2}.

Dal teorema ora dimostrato segue ovviamente il

Corollario. - *Se $p > 1$ su C esiste qualche serie speciale g_p^1.*

Nell'ipotesi che sia $p > 1$ ritorniamo alla serie g_{p+2}^{2} definita all'inizio di questo numero, e, indicando con g la serie multipla minima di g_{p+2}^{2} secondo l'intero $p-1$, dimostriamo che *le coppie neutre di g_{p+2}^{2} sono coppie neutre anche per g.*

Siano G^1 e G^2 due generici gruppi di g_{p+2}^{2} passanti per una, H_2, di tali coppie, e sia G^3 un terzo gruppo generico di g_{p+2}^{2} non passante per H_2. G^1, G^2 e G^3 sono linearmente indipendenti, e g è la serie congiungente i $\binom{3+p-1-1}{p-1} = \frac{(p-1)(p+2)}{2} + 1$ gruppi

$$i_1G^1 + i_2G^2 + i_3G^3 \,, \tag{6}$$

ove i_1, i_2, i_3, è una qualsiasi soluzione in interi non negativi della equazione $i_1 + i_2 + i_3 = p - 1$. Poichè fra i gruppi [6] ve ne è uno solo, $(p-1)\,G^3$, non passante per H_2, si conclude che H_2 è una coppia neutra per g.

In quanto, a norma di β), la dimensione di $|(p-1)\,g_{p+2}^{2}|$ è uguale a $p^2 - 2 \geqslant \frac{(p-1)(p+2)}{2}$, dal fatto che i gruppi [6] sono linearmente indipendenti si deduce che la dimensione di g è non inferiore, e quindi eguale ([**10**], n. 29, pag. 108) a $\frac{(p-1)(p+2)}{2}$. Essendo $\frac{(p-1)(p+2)}{2} > \frac{p(p-1)}{2}$, preso un qualsiasi intero, h, tale che $1 \leqslant h \leqslant \frac{p(p-1)}{2}$, e fissate h coppie neutre di g_{p+2}^{2}, le rimanenti $\frac{p(p-1)}{2} - h$ sono coppie neutre per la serie residua, rispetto a g, delle h coppie neutre fissate. Pertanto la serie residua, rispetto a g, delle $\frac{p(p-1)}{2}$ coppie neutre di g^2_{p+2} ha ordine

$$(p-1\ (p+2)-p(p-1)=2p-2\ ,$$

e dimensione non minore di

$$\frac{(p-1)\ (p+2)}{2}-\frac{p(p-1)}{2}=p-1\ ,$$

e quindi, in virtù della β), eguale a $p-1$. Ciò prova il

TEOREMA II. *Esiste su C almeno una serie speciale* g^{p-1}_{2p-2}.

Questo teorema elimina l'ipotesi *d*) di O. ZARISKI e, in base alla [4], consente di inserire la dimostrazione del teorema di Riemann-Roch, data da questo Autore, nella nuova trattazione di F. SEVERI. D'altra parte, l'aver acquisito per via topologica la formula [2] di SCHUBERT permette di trasportare nell'ambito di questa trattazione la classica dimostrazione data da CASTELNUOVO e rielaborata per via intrinseca da ENRIQUES.

OSSERVAZIONE I. - Le argomentazioni di questo numero restano valide, indipendentemente dalla [4], quando in esse si sostituisca π a p.

OSSERVAZIONE II. - Il modo con cui è stato acquisito il Corollario del Teorema I fa sì che esso presenti qualche interesse anche al di fuori della nuova sistemazione della geometria sulla curva. Infatti, il noto teorema di NÖTHER estensione del *teorema delle lacune* è stato dimostrato da O. CHISINI ([**3**]; [**10**], n. 52, pag. 166) con una semplice argomentazione intrinseca che, in base a β), è indipendente dal teorema di Riemann-Roch. Le considerazioni che ci hanno condotto al corollario precedente completano in tale senso il teorema di NÖTHER dimostrando, indipendentemente dal teorema di Riemann-Roch, che, se $p > 1$, su C esiste qualche gruppo speciale di p punti.

6. - Sia in [**12**] che in [**18**] trovasi affermato che la ipotesi *c*), relativa all'esistenza di serie lineari più volte infinite su C, si suppone acquisita *per via proiettiva*. Osserviamo anzitutto come questa espressione abbia un significato particolare, in quanto, all'esistenza di serie lineari soddisfacenti alla *c*), si giunge (cfr. ad es. [**10**], pag. 1, 2) fis-

sando un *qualsiasi* modello di C, senza fare intervenire in alcun modo la particolarità proiettive del modello stesso. Ciò risulta ulteriormente chiarito qualora si introducano la superficie di Riemann di C e le serie lineari su di essa seguendo DEDEKIND e WEBER [**5**].

Ricordiamo inoltre che si può giungere all'ipotesi *c*) anche mediante considerazioni di carattere funzionale involgenti soltanto la struttura della superficie di Riemann, F, di C. Infatti, sia data F, secondo la definizione di H. WEYL ([**17**] § 7, pag. 36), come varietà a due dimensioni orientata, chiusa, definita nel gruppo conforme, oppure secondo S. STOÏLOW ([**14**], Cap. II, pag. 34), come varietà a due dimensioni, per la quale esista un *ricoprimento riemanniano* sulla sfera complessa. È noto che, mediante considerazioni poggianti sul fatto che F ha una struttura analitica complessa, si prova che, per ogni intero n sufficientemente elevato ($> \pi$), esistono su F delle funzioni razionali non costanti i cui gruppi di livello sono costituiti da n punti. Risulta così provata l'esistenza su F di una g^1; dalla dimostrazione segue inoltre che, se $n > \pi + 1$, il numero delle g^1_n aventi un medesimo gruppo di livello è maggiore di uno ([1]). In base a questo risultato, a norma della Osservazione I, le argomentazioni del n. 5 consentono di provare l'esistenza su F di una serie $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$. Ed è opportuno rilevare in proposito che la dimostrazione del Teorema II può essere resa indipendente dall'ipotesi che la serie $g^2_{\pi+2}$ sia semplice. Pertanto l'esistenza su F di una $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$ risulta acquisita sotto un'ipotesi più ampia di *c*). Tuttavia l'ufficio di *c*) diviene *essenziale* qualora si vogliano mantenere i risultati ottenuti nel n. 5, nell'ambito della nuova trattazione [**12**], in quanto è proprio in base alla *c*) che acquista significato il genere p.

Nel n. 7 mostreremo che, sostituendo alla *c*) un'ipotesi, *c'*), più ampia della precedente — e quindi scostandosi inevitabilmente dalla [**12**] — si può egualmente definire una serie effettiva d'ordine $2\pi - 2$, intrinsecamente collegata a C.

([1]) Tale dimostrazione trovasi già in [**17**] (§ 17, pag. 119), ma preferiamo riferirci alla dimostrazione più semplice, data da R. COURANT, per la quale rinviamo a [**14**] (Cap. II, pag. 50-62), ove si evita il ricorso ai differenziali abeliani definiti su F.

7. – Data F secondo la definizione di H. Weyl [17], supporremo, c'), che su F esista una serie lineare g_n^1.

Sia T la corrispondenza nella quale sono coniugati i punti di F appartenenti ad un medesimo gruppo di g_n^1. T ha indici $n-1$, $n-1$, e valenza 1, e quindi, essendo U la corrispondenza identica, T + U ha indici n, n, e valenza 0. Indichiamo con gli stessi simboli T, U, T + U i cicli a due dimensioni che, nella varietà prodotto $\mathrm{F}\times\mathrm{F}$, rappresentano, rispettivamente, T, U, T + U.

Poichè T + U ha valenza zero, essendo z e z' due generici punti corrispondenti in T + U, si ha, sopra la varietà $\mathrm{F}\times\mathrm{F}$:

$$\mathrm{T}+\mathrm{U}\sim n\,\mathrm{F}\times z+n\,z'\times\mathrm{F}\quad,$$

([7], pag. 350); e da questa relazione si trae, con le notazioni di [7], che

$$\Big((\mathrm{T}+\mathrm{U})\cdot\mathrm{U}\Big)=n\,(\mathrm{F}\times z\cdot\mathrm{U})+n\,(z'\times\mathrm{F}\cdot\mathrm{U})\quad,$$

cioè che

$$(\mathrm{T}\cdot\mathrm{U})+(\mathrm{U}\cdot\mathrm{U})=2n\quad.$$

Ma, nell'omeomorfismo esistente fra F e U, ai $(\mathrm{T}\cdot\mathrm{U})$ punti di intersezione di T e U corrispondono in F i punti del gruppo jacobiano di g_n^1; dalla [3] si ha dunque che

$$(\mathrm{T}\cdot\mathrm{U})=2n+2\pi-2\quad,$$

e quindi

$$(\mathrm{U}\cdot\mathrm{U})=-(2\pi-2)\quad.$$

Dalla definizione adottata per F segue che ciascuno dei cicli T, U, T + U, ha una struttura analitica complessa. Si ha pertanto che l'indice di Kronecker $(\mathrm{U}\cdot\mathrm{U})$ eguaglia il numero dei punti di intersezione ([8], Cap. VIII, pag. 384). Dunque: *nella varietà* $\mathrm{F}\times\mathrm{F}$ *il gruppo caratteristico dell'identità è costituito da* $2\pi-2$ *punti* (*ciascuno dei quali porta il contributo di* -1 *all'indice di Kronecker* $(\mathrm{U}\cdot\mathrm{U})$).

In virtù dell'omeomorfismo esistente fra F e U risulta determinato su F un gruppo di $2\pi - 2$ punti, il quale dà luogo ad una serie $|g_{2\pi-2}|$, indipendente dalla g_n^1 considerata ed intrinsecamente connessa a F.

Sorge ora la questione se dall'ipotesi c') sia possibile dedurre che $|g_{2\pi-2}|$ è la differenza fra la *serie jacobiana* di una qualsiasi serie lineare infinita data su F, ed il doppio delle serie stessa. Tale proprietà esula evidentemente dalle considerazioni topologiche di cui ci siamo serviti fino ad ora, ma può essere stabilita, ancora in maniera intrinseca, mediante argomentazioni analoghe a quelle esposte [11] (n. 97, pag. 190-192; n. 141, pag. 304-306) dopo aver dimostrato, in base alla [3], che i gruppi jacobiani delle g_m^1 contenuti totalmente in una g_m^r, con $r > 1$, sono equivalenti.

8. – *Osservazione di* F. SEVERI. Per conseguire intrinsecamente il teorema di Riemann-Roch tutto riducesi, come si proverà, a stabilire intrinsecamente soltanto *l'esistenza su* C *di qualche* g_{2p-2} *speciale.*

Intanto la dimensione r della g_{2p-2} completa, speciale, esistente su C, soddisfa alla $r > p - 2$. D'altronde non può essere $r > p - 1$, se no la serie sarebbe non speciale (n. 2, teor. β)). Dunque $r = p - 1$. Esiste pertanto su C una g_{2p-2}^{p-1} completa. Non sappiamo per ora che questa serie è unica. Ad ogni modo la chiameremo una « serie canonica ».

Essa è priva di punti fissi. Infatti, se ne avesse uno (almeno), tralasciandolo si otterrebbe una g_{2p-3}^{p-1}. Preso allora un gruppo generico di $p - 1$ punti, vi sarebbero ∞^1 gruppi di $p - 1$ punti, aventi rispetto alla g_{2p-3}^{p-1} lo stesso gruppo residuo di $p - 2$ punti; epperò quel gruppo generico di $p - 1$ punti non sarebbe linearmente isolato.

Nè può esistere un gruppo di s punti, distinti o no, neutro per g_{2p-2}^{p-1}, perchè il residuo di quel gruppo sarebbe una g_{2p-2-s}^{p-2}, e, supposto $p > 2$ (¹), si concluderebbe come sopra che un gruppo generico di $p - 2$ punti non è linearmente isolato.

La g_{2p-2}^{p-1} è dunque priva di punti fissi, semplice, e tutti i rami di C sono rispetto ad essa lineari.

(¹) Se è $p = 2$ ogni coppia delle g_2^1 è neutra, ma in tal caso l'unicità della g_2^1 è ovvia.

Si stabilisce ora subito un *teorema di riduzione intrinseco* relativo alla considerata g_{2p-2}^{p-1}.

Aggiungiamo all'uopo ai gruppi di g_{2p-2}^{p-1} un punto qualunque O di C. Si ottiene una g_{2p-1}^{p-1} che, avendo l'ordine $> 2p - 2$ (un suo gruppo generico consta infatti di $2p - 1$ punti *distinti* fra loro) è non speciale e quindi completa. Questo significa che quando un gruppo G di $2p - 1$ punti contiene un gruppo canonico ed un punto O fuori di questo, la serie $|G|$ ha il punto fisso O.

Se pertanto un gruppo di una serie $|A|$ si può decomporre in un gruppo parziale B contenuto in un gruppo canonico K ed in un punto O fuori di K, la serie $|A|$ ha il punto fisso O. Infatti la serie $|K + O|$ ha il punto fisso O e la serie $|B + O|$ non è che il resto del gruppo $K - B$ rispetto a $|K + O|$.

Una volta acquisito il teorema di riduzione si ottiene il teorema di Riemann-Roch rispetto alla g_{2p-2}^{p-1} considerata, col ragionamento esposto a pag. 156-157 del *Trattato di Geometria Algebrica*. E dopo di ciò si conclude pure che la g_{2p-2}^{p-1} è unica, perchè, essendo essa speciale, è contenuta (parzialmente o totalmente) nella prescelta serie canonica e quindi, siccome ha l'ordine uguale, coincide con questa.

Per ravvicinare la definizione di genere data col metodo rapido (coincidente in sostanza con quella di Weierstrass) alla definizione pure intrinseca derivante dalla considerazione del gruppo jacobiano di una g_m^1 (*Trattato di Geometria Algebrica*, pag. 122) bastano le considerazioni del n. 3 e quelle finali del n. 7 della presente Nota del Dott. VESENTINI.

BIBLIOGRAFIA

[1] O. CHISINI, *Il teorema d'Abel e il principio di corrispondenza nel loro aspetto topologico*, «Rend. Ist. Lombardo», LIV (1921), pag. 552-569.

[2] — *Il general principio topologico di corrispondenza*, «Rend. Ist. Lombardo», LVII (1924), pag. 481-496.

[3] — *Intorno alla dimostrazione di un teorema di Nöther*, «Boll. U. M. I.», (1), III, (1924), pag. 197-200.

[4] W. L. CHOW, *Die geometrische Theorie der algebraischen Funktionen für beliebige vollkommene Körper*, «Math. Ann.», 114 (1937), pag. 655-682.

[5] R. DEDEKIND, H. WEBER, *Theorie der algebraischen Funktionen einer veränderlichen*, «Journ. reine ang. Math.», 92 (1882), pag. 181-290.

[6] W. GRÖBNER, *Idealtheoretischer Aufbau der algebraischen Geometrie*, Berlin-Leipzig, Teubner, 1941.

[7] S. LEFSCHETZ, *Correspondences between algebraic curves*, «Ann. of Math.», (2), 28 (1927), pag. 342-354.

[8] — *Topology*, «Am. Math. Soc. Colloquium Publ.», vol. XII, 1930.

[9] F. SEVERI, *Una rapida ricostruzione della geometria sopra una curva algebrica*, «Atti Ist. Veneto», $LXXIX_2$ (1920), pag. 929-938.

[10] — *Trattato di geometria algebrica*, vol. I, parte I, Bologna, Zanichelli, 1926.

[11] — *Serie, sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, vol. I, a cura di F. Conforto e di E. Martinelli, Roma, Cremonese, 1942.

[12] — *Una nuova visione della geometria sopra una curva*, «Acta Pontificia Acad. Scient.», XVI (1951), pag. 143-152.

[13] F. K. SCHMIDT, *Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen, I. Beweis des Riemann.Rochschen Satzes für algebraische Funktionen mit beliebigen Konstantenkörper*, «Math. Zeitschrift», 41 (1936), pag. 415-438.

[14] S. Stoïlow, *Principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Paris, Gauthier-Villars, 1938.

[15] B. L. van der Waerden, *Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie*, « Math. Ann. », 102 (1929), pag. 337-362.

[16] A. Weil, *Zur algebraischen Theorie der algebraischen Funktionen*, « Journ. reine ang. Math. », 179 (1938), pag. 129-133.

[17] H. Weyl, *Die idee der Riemannschen Fläche*, Berlin-Leipzig, Teubner, 1923.

[18] O. Zeriski, *A topological proof of the Riemann-Roch theorem*, « Am. Journ. of Math. », LVIII (1936), pag. 1-14.