



EQUAZIONI INTEGRALI A NUCLEI SOMMABILI (*)

GIULIO PLATONE

SYMMARIUM. -- Resolvit Auctor integrales aequationes primae, secundae, et tertiae speciei [ad complexum lebesghianum E , limitatum vel non limitatum, spatii euclidei $S_r \equiv (y_1, y_2, \dots, y_r)$ extensas], quatenus nucleus sit productus functionis $k, \alpha(y)$ pseudolimitatae in sensu stricto per functionem summabilem $A(y)$; praeterea determinat lebesghianum exclusionis solutionum. Quod ad eas aequationes evolvit Auctor theoriam a FREDHOLM propositam.

GENERALITÀ E POSIZIONE DEL PROBLEMA

1. - Nella fisica matematica si incontrano sovente equazioni integrali a nuclei singolari ed è noto che queste sono state risolte in casi particolari (trattati con metodi differenti e laboriosi, quantunque geniali) e solo nelle ipotesi che i nuclei iterati, oltre ad essere sommabili, risultino definitivamente limitati (¹).

Dall'esame della letteratura su tale argomento risulta che, pure essendosi conseguiti in altre direzioni notevoli progressi (²), finora - a quanto mi consta - nessun risultato positivo di carattere generale è stato raggiunto nel caso di nuclei illimitati sommabili ossia di classe $C_1[1]$ (³).

(*) Nota presentata dell'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi il 17 febbraio 1953.

(¹) Vedi per esempio i lavori di ABEL, BERTAND, CARLEMANN, EVANS, EGOROFF, FONTAPPIÉ, FREDHOLM, GIRARD, LIUVILLE, MIRANDA, PÈRÈS, PICARD, PICONE, POINCARÉ, SONNINO, TRICOMI, VILLAR, VOLTERRA, WEYL, ecc.

(²) Vedi i lavori di CARLEMANN, CIMINO, HILBERT, GIRARD, HILLE e TAMARKIN, VOLTERRA, ecc.

(³) Seguendo PICONE con $C_p[0]$ rappresento la classe delle funzioni la cui potenza p^{ma} è sommabile col peso θ su E ; pertanto $C_1[1]$ rappresenta le funzioni sommabili in E .

Data però l'impossibilità (rilevata da HILLE e TAMARKIN) ⁽⁴⁾ di estendere la teoria di FREDHOLM ai nuclei sommabili e sfuggendo il loro studio alle considerazioni della analisi funzionale lineare ⁽⁵⁾, è gioco forza limitarsi a casi particolari.

In vista della grande importanza teorica e pratica che tale questione riveste ne affronto lo studio limitandomi, in un primo tempo, a considerare l'equazione integrale di 2^a specie:

$$[1] \quad \varphi(x) = \lambda \int_E A(y) k(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

e la sua trasposta

$$[1'] \quad \psi(x) = \mu \int_E A(x) \psi(y) k(y, x) dy + g(x)$$

nelle ipotesi che:

1) E sia un lebesghiano, limitato o no, dello spazio euclideo ad r dimensioni $S_r^y = S_r(y_1, y_2, \dots, y_r)$.

2) $A(y) \subset C_1 [1]$.

3) $k(x, y), f(x), g(x) \subset [L]$, rappresentando $[L]$ l'aggregato delle funzioni di x, y (della sola x o della sola y) pseudolimitate (in senso ristretto) ⁽⁶⁾ nel lebesghiano $E^{(2)} = (E^x, E^y)$ dello spazio

$$S_{2r}^{xy} = S_{2r}(x_1, x_2, \dots, x_r, y_1, \dots, y_r)$$

(ovvero in E).

È chiaro che gli integrali vanno presi nel senso di Lebesgue.

Osservo subito che la risoluzione dell'equazione di terza specie

$$\theta(x) \varphi(x) = \lambda \int_E k(x, y) \varphi(y) dy + f(x)$$

si riconduce alla risoluzione della [1'] nel caso abbastanza generale che $\theta^{-1}(x)$ sia sommabile in E .

⁽⁴⁾ Vedi [2] pag. 218.

⁽⁵⁾ Vedi [3] pag. 322.

⁽⁶⁾ Chiamo pseudo limitata (in senso ristretto) in un insieme E una funzione $f(P)$ quasi ovunque continua in E e tale che ivi risulti $|f(P)| \leq L < +\infty$ esclusi al più i punti di un insieme Q di misura nulla (anche non chiuso).

Con qualche ulteriore precisazione la teoria che segue sussiste anche se $k(x, x)$ è pseudolimitata, ossia è quasi continua nel senso di TONELLI (anzichè quasi ovunque continua) ferma restando la limitazione $|f(P)| \leq L < +\infty$ in $E - Q$.

Come al solito (vedi [6] pag. 1 e 2) denoto con

L	lo pseudo estremo superiore di $k(x, y)$ in $E^{(2)}$,
N	il lebesghiano di singolarità » » » »
Q	» limitatezza » » » »
$I = N + Q$	» irregolarità » » » »
a	» singolarità di $A(y)$ in E .
d	» » » » $f(x)$ o di $g(x)$ in E ,
M	un confine superiore dell'integrale esteso ad E di $ A(y) $.

Sarà quindi:

- (I) $k(x, y)$ continua in $E^{(2)} - N$ mis N (su S) = 0 (N anche non chiuso)
- (II) $|k(x, y)| \leq L$ continua in $E^{(2)} - Q$; mis Q (su S) = 0
- (III) $\int_E |A(y)| dy \leq M$
- (IV) mis a (su S_r) = mis d (su S_r) = 0.

* * *

Pongo il problema della risoluzione della [1] in forma corrente nel seguente modo:

Assegnato il nucleo $A(y)k(x, y)$ e il termine noto $f(x)$ } con $k(x, y)$ e $f(x) \subset [l]$ } determinare le eventuali funzioni di $[l]$ che verificano la [1] quasi ovunque in E , e contemporaneamente determinare il lebesghiano di esclusione delle medesime; ossia l'insieme dei punti x di E , nei quali il secondo membro della [1] non ha, generalmente, senso.

Analoghe considerazioni valgono per la [1'], ma poichè

$$\mu A(x) \int_E \psi(y) k(y, x) dy$$

appartiene ad $[_A l]$ ⁽⁷⁾ è chiaro che la risoluzione della [1'] è posta coerentemente se le soluzioni $\psi(x)$ si cercano in C , [1] anzichè in $[l]$, il che non può farsi con la [1].

OSSERVAZIONE I. - È manifesto che tutta la teoria seguente può svilupparsi con le dovute modificazioni, anche se i termini noti f e g sono funzioni della x e della y , anzichè della sola x . Ciò anzi renderebbe più simmetrici i risultati.

⁽⁷⁾ $[_A l]$ rappresenta l'insieme delle funzioni del tipo $A(x)k(x, y)$ con $A(x) \subset C_1[1]$ e $k(x, y) \subset [l]$.

RISOLUZIONE DELLE [1] PER $|\lambda| < \frac{1}{LN}$

2. - Tutto ciò premesso, e posto ⁽⁸⁾

$$\bar{I} = (I_x^*, E^y) + (I_y^*, E^x), \quad \mathcal{J} = I + \bar{I}$$

dove I_x^* e I_y^* rappresentano rispettivamente le proiezioni efficaci (rispetto all'integrazione) di I su S_x^* e su S_y^* , si dimostra facilmente che:

TEOREMA I. - Nelle ipotesi poste al n. 1 e per $|\lambda| < \frac{1}{LM}$ l'equazione integrale [1] possiede in $[U]$ la sola soluzione

$$[3] \quad \varphi(x) = f(x) + \lambda(k * f)_A = f + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^{r+1} (k^{A, r-1} f)_A$$

col nucleo risolvente

$$[4] \quad h(x, y; \lambda) = k(x, y) + \lambda k^A + \lambda^2 k^A + \dots,$$

quasi uniformemente convergente in $E^{(2)}$, anche esso appartenente al $[U]$ avente per insieme di irregolarità $\mathcal{J} = I + \bar{I} = N + \bar{N} + Q + \bar{Q} = \mathcal{O} + \bar{\mathcal{O}}$.

L'insieme di esclusione della soluzione $\varphi(x)$ e del 2° membro della [1] è invece

$$J = I_x^* + d, \text{ mis } J \text{ (su } S) = 0.$$

Nel caso che E sia un dominio, risulta $Q \subset N$, ⁽⁹⁾ e quindi $I = N + Q = N$ e $\mathcal{J} = \mathcal{O}$.

Per $x \subset E - J$ e per $(x, y) \subset E^{(r)} - I$, $\varphi(x)$ e $h(x, y)$ sono svilup-pabili in serie di potenze di λ date rispettivamente dall'ultimo membro della [3] e della [4].

⁽⁸⁾ Vedi [6] pag. 2 e seg.

⁽⁹⁾ Sia infatti, per assurda ipotesi, P_0 un punto di Q non appartenente ad N . Risulterebbe $|f(P_0)| > L$ e quindi - per la continuità di $f(P)$ in P , su $E - N$ - dovrebbe risultare $|f(P)| > L$ su tutto un intorno di P_0 , $(E - N)$, di misura positiva, il che è assurdo.

Se invece E è chiuso e di misura positiva i punti di Q appartengono ad N o a quella parte della frontiera di E i cui punti non sono d'accumulazione di punti interni di E .

Questo risultato si ottiene determinando (col noto procedimento delle approssimazioni successive, già usato - in ipotesi di gran lunga più restrittive - dal VOLTERRA) la successione $\{\varphi_n(x)\}$

$$[4] \quad \varphi_n(x) = \lambda(k * \varphi_{n-1}) * f = f + \lambda \sum_{r=1}^{n-1} \lambda^{r-1} (\hat{k} * f)_\lambda$$

di soluzioni *approssimative*⁽¹⁰⁾ le quali, come si verifica facilmente, soddisfano la [1] con un errore puntuale dato (in valore e segno, e per $x \subset E - J$) da

$$[6] \quad e_n(x) = \varphi_{n+1} - \varphi_n = \lambda^n (\hat{k} * f)_\lambda$$

ossia dalla $(n+1)^{\text{mo}}$ termine della serie [3], di cui $\varphi_n(x)$ rappresenta la somma parziale n^{ma} .

Se ora denotiamo con l lo pseudoestremo superiore di $|f(x)|$ in E risulta, ⁽¹¹⁾

$$|e_n(x)| \leq |\lambda LM|^n l \quad \text{per } x \subset E - J$$

e quindi, essendo $|\lambda LM| < 1$, $e_n(x)$ è infinitesimo con $\frac{1}{n}$.

Passando al limite sotto il segno integrale nella [5] e nella [6], il che è lecito, si ha la [3].

3. - Similmente a quanto si è fatto per la [1] si ottiene che la n^{ma} soluzione approssimativa della [1] è data da

$$[5] \quad \psi_n(x) = g(x) + \mu A(x) \int_E \psi_{n-1}(y) k(y, x) dy = g(x) + \mu A(x) \left(g(y) * \sum_{r=0}^{n-1} \mu^{r-1} \hat{k}(y, x) \right).$$

Essa verifica la [1] con un errore puntuale

$$[6'] \quad \psi_{n+1} - \psi_n = \mu^n A(x) (g * \hat{k}^n)$$

e con un errore globale del primo ordine, non superiore in modulo a $|\mu LM|^n \int_E |g(y)| dy$, anch'esso infinitesimo con $\frac{1}{n}$.

⁽¹⁰⁾ Vedi [7] pag. 567.

⁽¹¹⁾ Vedi [6] pag. 4.

Dalla [5'] alla [6'], passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si deduce che:

TEOREMA I'. - Nelle ipotesi poste al n. 1 e per $|\mu| < \frac{1}{\text{L.M.}}$ l'equazione integrale [1'], trasposta della [1], ammette in $C_1[1]$ la sola soluzione

$$[3'] \quad \psi(x) = g(x) + \mu A(x) \int g(y) h(y, x) dy = g + A(x) \sum_{r=1}^{\infty} \mu^r g * k^r,$$

il cui insieme di esclusione è $J_A = J + \alpha$ (mis J_A (su S_r) = 0), laddove quello di irregolarità del nucleo risolvete (¹²) $A(x)h(x, y)$ è

$$J_A = J + (\alpha, E^y) \text{ (mis } S_A \text{ su } S_{2r} = 0).$$

Per $x \subset E - J_A$ la $\psi(x)$ è sviluppabile in serie di potenza di μ data dall'ultimo membro della [3].

OSSERVAZIONE II. - Per risolvere le [1] si può procedere anche nel modo seguente:

Scritta la [1] nella forma $[\varphi * (1 - \lambda k)]_A = f$ la sua soluzione, a norma del teorema generale di VOLTERRA esteso (¹³), è data ovviamente da:

$$\varphi = \left[\frac{A}{((1 - \lambda k(x, y))^{-1} * f)} \right]_A + \sum_{r=1}^{\infty} \lambda^r (k^r * f)_A$$

Per la [1'] si avrebbe invece

$$\psi * (1 - \mu A(x) k(y, x)) = g(x)$$

e quindi direttamente

$$\psi(x) = g * \frac{A}{(1 - \mu A(x) k(y, x))^{-1}} = g + A(x) \sum_{r=1}^{\infty} \mu^r g * k^r$$

PROPRIETÀ DELLE AUTOSOLUZIONI, SISTEMI FONDAMENTALI COMPETENTI

AI NUCLEI ITERATI $K_n = A(y) k^{n+1}(x, y)$

4. - Scriverò

$$c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n = 0^p.$$

Per indicare che n funzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ di $C_n[1]$ sono in media globalmente linearmente dipendenti del p^{mo} ordine in E , ossia

(¹²) Vedi [6] pag. 9.

(¹³) Vedi [8] pag. 151 e [8] pag. 6.

che esistono n costanti arbitrarie c_1, c_2, \dots, c_n , non tutte nulle, tali da aversi:

$$\int_{\mathbb{E}} |c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_n \varphi_n|^n dx = 0.$$

Nelle pagine seguenti chiameremo ancora con ovvia estensione di linguaggio, *rango* di un autovalore della [1] il numero massimo di autosoluzioni globalmente linearmente indipendenti dal 1° ordine ad esso competenti.

Se n è il rango di un certo autovalore, ogni sistema di n competenti autosoluzioni globalmente linearmente indipendenti del 1° ordine, in \mathbb{E} , costituisce un *sistema fondamentale* di autosoluzioni, ed ogni altra soluzione è una loro combinazione lineare. *Spettro* della [1] è l'insieme dei punti del piano complesso λ che rappresentano gli autovalori.

Un sistema $[\varphi]$ di funzioni è *spettrale* per la [1] se è costituito da autosoluzioni della [1] e se inoltre ogni sistema fondamentale di questa può essere formato con funzioni del sistema $[\varphi]$. Come avviene nella teoria classica, gli autovalori della [1] non sono interni ad un cerchio di raggio conveniente (per noi $(LM)^{-4}$) e centro nell'origine. Solo quando λ è autovalore la [1] può avere più soluzioni e precisamente, o non ne ha, o ne ha infinite.

Si dimostra facilmente che:

I) *Un sistema di autosoluzioni della [1] o della [1'] rispettivamente competenti ad autovalori a due a due fra loro distinti è sempre di funzioni linearmente indipendenti.*

II) *Due autosoluzioni, una della [1] e una della [1'], rispettivamente competenti ad autovalori differenti sono fra loro ortogonali.*

III) *Se λ è un autovalore della trasporta della [1], condizione necessaria e sufficiente perchè la [1] possieda soluzione è che il termine noto f sia coortogonale ad ogni autosoluzione della trasporta.*

IV) *Se φ è un autosoluzione del nucleo $K =: A(y) k(x, y)$ competente all'autovalore λ lo è anche dell' n^{mo} nucleo iterato $K_n = A(y) k^n(x, y)$ rispetto all'autovalore λ^{n+1} ; ed ancora se φ è un autosoluzione del nucleo iterato K_n competente dell'autovalore α tra le radici $(n+1)^{\text{me}}$ di z ve ne è almeno una che è autovalore per il nucleo K .*

Possiamo anche concludere che:

V) Se λ descrive lo spettro a destra (a sinistra) del nucleo $K = A(y)k(x, y)$, λ^{n+1} descrive lo spettro a destra (a sinistra) del nucleo iterato $K_n = A(y)k^{n+1}$.

Un sistema fondamentale di autosoluzioni competenti ad un autovalore α a destra (a sinistra) del nucleo K_n , si ottiene aggregando sistemi fondamentali di autosoluzioni competenti agli autovalori a destra (a sinistra) di K che sono radici $(n+1)^{me}$ di α .

I sistemi fondamentali della [1] sono formati con funzioni $\subset [l]$, mentre quelli della [1'] con funzioni $\subset C_1[1]$: ecc.

Abbiamo dunque conseguito il risultato notevole di risolvere la [1] $\{la (1')\}$ nell'intorno dell'origine $\lambda = 0$ $\{\mu = 0\}$ e nell'ipotesi abbastanza generale che il nucleo risolvente (e quindi ogni suo iterato) pur non essendo pseudo limitato appartenga ad $[l_A]$ $\{ad [l]\}$; inoltre abbiamo precisato l'insieme di esclusione J $\{J_A = J + \alpha\}$ della soluzione.

RISOLUZIONI DELLE EQUAZIONI INTEGRALI [1] IN TUTTO IL PIANO COMPLESSO.

TEOREMA DI FREDHOLM.

5. - Ferme restando le ipotesi fatte al n. 1, affronto ora la risoluzione della [1] in tutto il piano complesso λ , ossia per $|\lambda| \leq R$, dove R è un numero prefissato, comunque grande.

Suppongo inoltre $\text{mis } E$ finita; a ciò, dal punto di vista pratico, posso sempre ricondirmi in quanto, in caso contrario, basta risolvere la [1] per $(x, y) \subset EQ$, dove Q è un intervallo di centro nell'origine e dimensioni sufficientemente grandi.

Intanto, da $k(x, y) \subset [l]$ e $\text{mis } E$ finita, risulta $k(x, y) \subset C_2[1]$.

Inoltre, poichè il sistema ortogonale $[X_i(x), Y_j(y)]$ dei polinomi di LEGENDRE nelle variabili x, y è completo ⁽¹⁴⁾ per l'approssimazione lineare globale in $E^{(2)}$ delle funzioni che sono ivi di classe $C_2[1]$, la funzione $k(x, y)$ si può approssimare in misura, mediante una successione di tali polinomi, ed essendo $\text{mis } E^{(2)} < +\infty$ tale successione approssimerà la $k(x, y)$ anche globalmente al 1° ordine; pertanto,

(14) Vedi [4] pag. 550.

prefissato ad arbitrio un numero positivo $\varepsilon < 1$, esiste, corrispondentemente, un numero naturale $\nu_0 = \nu_0(\mathbb{R}, \varepsilon)$ tale che, per ogni numero naturale $\nu > \nu_0$ si possono determinare ν^2 costanti c_{ij} :

$$c_{ij} = \iint_{\mathbb{E}^{(2)}} k(x, y) X_i X_j(y) dx dy$$

non tutte nulle, di guisa che, posto:

$$t(x, y) = k(x, y) - \sum_{i,j}^{1, \nu} c_{ij} X_i(x) Y_j(y),$$

risulti

$$[7] \quad \int_{\mathbb{E}^{(2)}} |t(x, y)| dx dy < \frac{\varepsilon}{RM}$$

e quindi minore di ε la misura del lebesghiano $U = U\left(|t| > \frac{1}{RM}\right)$ in $|t(x, y)| > \frac{1}{RM}$ (15).

Ma per ogni (x, y) non appartiene a \mathcal{Q} è:

$$|t(x, y)| \leq \text{p. e. s. } |k(x, y)| \text{ in } \mathbb{E}^{(2)} + \text{e. s. } \sum c_{ij} X_i(x) Y_j(y) \text{ in } \mathbb{E}^{(2)};$$

ne consegue che $t(x, y)$ è pseudo limitato in \mathbb{E} e che il suo insieme di limitatezza è contenuto in \mathcal{Q} .

Il lebesghiano U risulta chiuso se tale è \mathbb{E} .

Posto ora

$$[8] \quad V = U + I \quad \text{e} \quad \mathcal{L} = \mathbb{E} - V$$

dove I è il solito lebesghiano di irregolarità di $k(x, y)$ [e quindi di $t(x, y)$] si ha:

$$[9] \quad |t(x, y)| < \frac{1}{RM} \text{ per } (x, y) \in \mathcal{L} \quad \text{mis } \mathcal{L} > \mathbb{E}^{(2)} - \varepsilon.$$

(15) Infatti risulta $\frac{\varepsilon}{RM} > \int_{\mathbb{E}^{(2)}} |t| dx dy > \int_U |t| dy dy \geq \frac{\text{mis } U}{RM}$ da cui $\text{mis } U > \varepsilon$.

CASO IN CUI RISULTA $\text{mis } U \left(t(x, y) > \frac{1}{RM} \right) = 0$.

6. - A questo punto si può porre la seguente domanda: è possibile approssimare globalmente al 1° ordine una funzione pseudo-limitata in un insieme E , con un sistema di funzioni continue completo ivi per tale approssimazione, in modo che il modulo dell'errore puntuale abbia, in E , un prefissato pseudo confine superiore?

La questione è aperta. Comunque, per il momento suppongo che ciò sia possibile. Si può quindi scegliere ε talmente piccolo che $\frac{1}{RM}$ risulti un pseudo confine superiore di $|t(x, y)|$ in $E^{(2)}$. Sarà allora p. e. s. $t(x, y) \leq \frac{1}{RM}$ e pertanto $U \subset Q$ e quindi $V \subset \mathcal{J}$ ($\text{mis } V = 0$). Ciò detto, se n ($0 < n \leq \nu$) è la caratteristica della matrice quadrata formata dalle ν^2 quantità c_{ij} esisteranno $n(\nu - n)$ convenienti costanti

$$p_{k_1}, p_{k_2}, p_{k_3}, \dots, p_{k_n} \quad (k = n+1, n+2, \dots, \nu)$$

tali che, ponendo:

$$\beta_i(y) = \sum_{j=1}^{\nu} c_{ij} Y_j(y) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

risulterà

$$\sum_{j=1}^{\nu} c_{kj} Y_j(y) = \sum_{j=1}^n p_{kj} \beta_j(y) \quad (k = n+1, n+2, \dots, \nu)$$

e quindi ponendo ancora

$$\alpha_i(x) = X_i(x) + \sum_{k=n+1}^{\nu} p_{ki} X_k(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

si avrà

$$\sum_{i,j}^{1,\nu} c_{ij} X_i(x) Y_j(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(y) \quad (= S_n(x, y))$$

con le $\alpha_i(x)$, $\beta_i(y)$ continue e puntualmente linearmente indipendenti in E .

Si perviene così una volta fissato R ed ε , alla scissione del nucleo $A(y)k(x, y)$ in due parti

$$A(y)k(x, y) = A(y) \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \beta_i(x) + A(y)t(x, y)$$

di cui la prima è il prodotto di un nucleo *elementare* ⁽¹⁰⁾ per il peso $A(y)$ e la seconda è contenuta in $[L_A]$. Il fattore $t(x, y)$ ha lo stesso insieme N di singolarità di $K(x, y)$, ha l'insieme di limitatezza $\subset Q$ ed ha per pseudo estremo superiore un numero $\leq \frac{1}{RM}$; pertanto $t(x, y)$ appartiene a $[L]$.

Posto

$$[10] \quad \zeta_i = (\beta_i * \varphi)_A$$

$$[11] \quad \gamma(x, y; \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r t^{r+t} \quad (x, y) \in E^{(2)} - \mathcal{C}, \quad |\lambda| < R$$

$$[12] \quad p_i(x, \lambda) = \alpha_i(x) + \lambda(\gamma * \alpha_i)_A \quad x \in E - I_x^*$$

la [1] può scriversi nella forma

$$[13] \quad \varphi(x) = \left[f + \lambda \sum_{i=1}^n \zeta_i \alpha_i(\lambda) \right] + \lambda(t * \varphi)_A,$$

le cui eventuali soluzioni, supposte note le quantità ζ_i (a norma del teorema I, per $|\lambda| < \frac{1}{(RM)^{-1} \cdot M} = R$ e per $x \in E - J$) sarebbero date da

$$[14] \quad \varphi(x) = f + \lambda \sum_{i=1}^n p_i \zeta_i + \lambda(\gamma * f)_A$$

con le $p_i \in [L]$ e puntualmente e linearmente indipendenti in $E - I_x^*$.

Per determinare le ζ_i , posto

$$[15] \quad d_{ij}(\lambda) = (\beta_i * p_j)_A$$

$$[16] \quad q_i(y, \lambda) = \beta_i(y) + \lambda(\beta_i * \gamma)_A \quad x \in E - I_x^*$$

basta risolvere il sistema di n equazioni lineari algebriche

$$[17] \quad \zeta_i - \lambda \sum_{j=1}^n d_{ij} \zeta_j = (q_i * f)_A \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

ottenuto eliminando $\varphi(x)$ tra la [14] e la [10].

Pertanto le [1] per $\frac{1}{LM} \leq \lambda < R$, non ammettono soluzioni, ne ammettono una sola o ne ammettono infinite a secondo che tale sistema è incompatibile, compatibile e determinato o indeterminato.

⁽¹⁰⁾ Vedi [4] pag. 559 ovvero [1] pag. 436.

Se il determinante

$$[18] \quad D_{\Lambda}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda d_{11} & -\lambda d_{12} & \dots & -\lambda d_{1n} \\ -\lambda d_{21} & 1 - \lambda d_{22} & \dots & -\lambda d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda d_{n1} & -\lambda d_{n2} & \dots & 1 - \lambda d_{nn} \end{vmatrix}$$

del sistema [17] è $\neq 0$ e se Δ_{ji} rappresenta il complemento algebrico del termine che occupa la riga j^{ma} e la colonna i^{ma} , si ottiene:

$$[19] \quad \zeta_i = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ji}}{D_{\Lambda}(\lambda)} (g_j * f)_{\Lambda} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Sostituendo infine le ζ_i ora trovate nella [14] e ponendo

$$[20] \quad h_{\Lambda}(x, y; \lambda) = \gamma(x, y; \lambda) + \lambda \sum_i^{1, n} \frac{\Delta_{ji}(\lambda)}{D_{\Lambda}(\lambda)} p_i(x, \lambda) q_j(y, \lambda) \quad (x, y) \in \mathbb{E}^{(2)} - J$$

risulta che la soluzione cercata dovrebbe avere la forma

$$[21] \quad \varphi(x) = f + \lambda (h_{\Lambda} * f)_{\Lambda} \quad x \in \mathbb{E} - J.$$

Viceversa nelle ipotesi poste l'espressione $\varphi(x)$ data dalla [21] ha senso, è $\subset [L]$ e verifica la [1].

Per $|\lambda| < R$ le funzioni $\gamma(x, y; \lambda)$, $p_i(x, \lambda)$ e $q_j(y, \lambda)$ appartengono a $[L]$.

Si dimostra inoltre che la funzione olomorfa h_{Λ} , ora introdotta, per $|\lambda| < R$, coincide in tutto il piano complesso λ con quella definita,

per $|\lambda| < \frac{1}{RM}$, dalla serie $\sum_{r=0}^{\infty} \lambda^r k^{r+1} = h(x, y; \lambda)$ (vedi n. 2) e che, per

$(x, y) \in \mathbb{E}^{(2)} - J$, soddisfa anchessa alla relazione di reciprocità

$$h_{\Lambda} - k = \lambda (k * h_{\Lambda})_{\Lambda} = \lambda (h_{\Lambda} * k)_{\Lambda};$$

oppure, ponendo

$$H_{\Lambda}(x, y, \lambda) = \Lambda(y) h_{\Lambda}(x, y, \lambda)$$

alla relazione

$$H_{\Lambda} - K = \lambda K * H_{\Lambda} = \lambda H_{\Lambda} * K.$$

RISOLUZIONE DELLA [1'] PER $|\lambda| < R$

6'. - Posto

$$\left. \begin{aligned} [10'] \quad & \eta_i = \psi * \alpha_i \\ [12'] \quad & q_i(x; \mu) = \beta_i + \mu (\beta_i * \gamma)_\Delta \\ [15'] \quad & \bar{d}_{i,j}(\mu) = (g_j * \alpha_i)_\Delta = (\beta_j * p_i)_\Delta = d_{ji}(\mu) \end{aligned} \right\} (i, j = 1, \dots, n)$$

la [1'], dopo aver eseguito sul nucleo $A(x)k(x, y)$ una decomposizione analoga a quella effettuata sul nucleo $A(y)k(x, y)$ al n. 6, può scriversi nella forma

$$\psi(x) = \left[g(x) + \mu A(x) \sum_{i=0}^n \beta_i * \eta_i \right] + \mu A(x) (\psi * t)$$

e la sua soluzione, supposte note le η_i , sarà data da (teorema I')

$$\psi(x) = g(x) + \mu A(x) \sum_{i=1}^n \eta_i q_i + \mu A(x) (g * \gamma) ,$$

rappresentando $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ una soluzione del sistema algebrico

$$[17'] \quad \eta_i - \mu \sum_{j=1}^n \bar{d}_{ij} \eta_j = g * p_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

trasposto al sistema [17].

Chiamato \bar{D}_R il determinante che si ottiene dal [18] sostituendo le d_{rs} con le $\bar{d}_{rs} = d_{sr}$ risulta facilmente:

$$\bar{D}_R = D_R \quad \bar{\Delta}_{ji} = \Delta_{ij} .$$

Ripetendo le considerazioni ed i calcoli già fatti per risolvere la [1] nel caso $\frac{1}{LM} \leq |\lambda| < R$ si conclude che:

TEOREMA II'. - Se è $(LM)^{-1} \leq \mu < R$, $D_R(\mu) \neq 0$ e $\text{mis } U = 0$, la [1'] ammette, nella classe $C_1[1]$, una sola soluzione data per $x \subset J_\Delta = J + a$, da

$$[21'] \quad \psi(x) = g(x) + \mu A(x) (g * \bar{h}_n) ,$$

dove si è posto, per $(x, y) \in E^{(2)} - J_A$

$$[20'] \quad \bar{h}_r(x, y; \mu) = \gamma(x, y; \mu) + \mu \sum_{i,j}^{1,n} \frac{\bar{\Delta}_{ij}}{D_r(\mu)} p_j(x) q_i(y) = h_r(x, y; \mu) .$$

RISOLUZIONE DELLA [1] E DELLA [1']
NEL CASO CHE λ SIA UN AUTOVALORE [$D_r(\lambda) = 0$]

7. - Se invece, per un particolare valore di λ (in modulo $< R$) si annulla il determinante $D_r(\lambda)$ la caratteristica di quest'ultimo sarà uguale ad $n - \rho$, con $\rho \geq 1$.

In tal caso se

$$\xi_1^{(x)}, \xi_2^{(x)}, \dots, \xi_n^{(x)} \qquad \eta_1^{(x)}, \eta_2^{(x)}, \dots, \eta_n^{(x)}$$

$$(k=1, 2, \dots, \rho)$$

sono due $\rho^{n^{\circ}}$ di sistemi fondamentali di autosoluzioni, rispettivamente dei sistemi [17] e [17'], le espressioni

$$\varphi_k(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i^{(x)} p_i(x, \lambda) \qquad \psi_k(x) = \lambda A(x) \sum_{i=1}^n \eta_i^{(x)} q_i(x, \mu)$$

$$(k=1, 2, \dots, \rho)$$

saranno due $\rho^{n^{\circ}}$ di sistemi fondamentali di autosoluzioni ⁽¹⁷⁾, rispettivamente della [1] e della [1'] per $\mu = \lambda$, sicchè, in tali ipotesi, ogni altra autosoluzione della [1] e rispettivamente della [1'] è del tipo

$$[22] \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\rho} a_k \varphi_k(x) \qquad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\rho} b_k \psi_k(x)$$

con le a_k e b_k costanti non nulle, e viceversa. Dunque λ è un autovalore delle [1].

È manifesto che: $\varphi(x) \in [U]$ e $\psi(x) \in C_1[1]$.

Per contro, se λ è un autovalore, per esempio della [1], e $\varphi(x)$ la competente autosoluzione, dovrà essere

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\rho} a_k \varphi_k = \sum_{k=1}^{\rho} a_k \sum_{i=1}^n \lambda \xi_i^{(k)} p_i = \lambda \sum_{i=1}^n p_i \sum_{k=1}^{\rho} a_k \xi_i^{(k)} = \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i p_i$$

⁽¹⁷⁾ L'indipendenza puntuale delle φ_k (e delle ψ_k) è conseguenza di quella delle p_i e delle $\xi_i^{(k)}$ (e rispettivamente delle q_i e $\eta_i^{(k)}$).

e quindi $(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_n^{(k)})$ è una ρ^{ma} di autosoluzioni indipendenti del sistema [17], che pertanto dovrà avere il suo determinante $D_n(\lambda) = 0$.
 Dunque:

Ogni zero di $D_n(\lambda)$ è un autovalore delle [1] e viceversa.

Inoltre, siccome, la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema lineare [17], avente caratteristica $n - \rho$, sia compatibile è che il vettore termine noto sia ortogonale alla varietà lineare delle soluzioni del sistema omogeneo ad esso trasposto, ne consegue che se

$$(\eta_1^{(k)}, \eta_2^{(k)}, \dots, \eta_n^{(k)}) \quad k = 1, 2, \dots, \rho$$

è un sistema fondamentale di autosoluzioni del sistema trasposto, dovrà essere

$$\sum_{i=1}^n \eta_i^{(k)} (q_i * f)_{\Delta} = \left[\left(\sum_{i=1}^n \eta_i^{(k)} q_i \right) * f \right]_{\Delta} = \psi_k * f = 0 \quad k = 1, 2, \dots, \rho$$

e viceversa.

Analogamente partendo dalla [1'] e dal sistema [17'] si avrà:

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^{(k)} (g * p) = g * \left(\sum_{i=0}^n \xi_i^{(x)} p_i \right) = g * \varphi_k = 0$$

e viceversa.

Raccogliamo le principali conclusioni nel seguente

TEOREMA DELL'ALTERNATIVA. - *Se prefissato ad arbitrio $R > \frac{1}{LM}$*

risulta $\text{mis } U \left(|t| > \frac{1}{LM} \right) = 0$ allora:

o le [1] hanno entrambe soluzioni comunque si assuma il termine noto $f(x)$ in $[L]$ e $g(x)$ in $C_1[1]$ ed in tal caso ciascuna equazione possiede una sola soluzione ed il parametro non è zero di $D_n(\lambda)$;

ovvero ciò non avviene, ed allora λ annulla $D_n(\lambda)$, ossia è autovalore per le [1], le quali pertanto hanno in comune, e con uguale rango, gli autovalori e per ognuno di essi ammettono soluzioni quando e solo quando i loro termini noti sono coortogonali ad un sistema fondamentale di autosoluzioni (e quindi a tutte le autosoluzioni) della propria trasposta.

Le soluzioni della [1] vanno cercate in $[L]$, sono della forma [14], ed il loro insieme di esclusione è $\subset J$; quelle della [1'] vanno cercate in $C_1[1]$, sono della forma [14'] ed hanno il loro insieme di esclusione $\subset J_{\lambda}$.

Il caso $\text{mis } U > 0$ sarà esaminato in una successiva nota.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*. Gauthier-Villars, Paris, 1927.
- [2] HILLE e TAMARKIN, *On the theory of linear integral equations*. In « *Annals of Mathematics* », 1930.
- [3] PICONE M., *Fondamenti di analisi funzionale lineare*. R. Istituto Nazionale di Alta matematica, 1948.
- [4] — *Appunti di analisi superiore*. Rondinella, Napoli, 1940.
- [5] PICONE e GHIZZETTI, *Teoria dell'integrazione lebesquiana*, D. U. S. A., 1942.
- [6] PLATONE G., *Teoria della composizione col peso $\Lambda(y)$ sommabile, nell'insieme delle funzioni pseudo-limitate*. Atti della XLII riunione della Soc. Italiana Progresso delle scienze, 1951.
- [6'] — *Teorema di unicità per equazioni integrali non lineari ottenute da funzioni di composizione a nucleo sommabile* in « *Acta* » della Pontificia Academia Scientiarum, Anno XIV, Vol. XIV, 1950.
- [7] — *Nuovi metodi per la risoluzione numerica dei sistemi di $p \geq 2$ equazioni in p incognite*. In « *Ricerca scientifica* », vol. II, nov. 1938.
- [8] VOLTERRE e PÉRÈS, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Gauthier-Villars, 1913.
- [9] VOLTERRA e FANTAPPIE, *Teoria de las funcionales*. Madrid, 1927.
- [10] VOLTERRA e PÉRÈS, *Leçon sur la composition ecc.* Gauthier-Villars, 1924.
- [11] — — *Theorie generale des fonctionnels*. Gauthier-Villars, 1936.