



PROPRIETÀ
DELLE STRUTTURE ELASTOPLASTICHE
NELLO SPAZIO DELLE IPERSTATICHE (*)

(Con cinque figure)

LEO FINZI

SVMMARYM. — Auctor enucleat proprietates cuiusdam geometricae repraesentationis, a se propositae, quae idonea est ad determinandum statum contentionis et statum deformationis in structura quae sit perfecte elastoplastica; huius autem repraesentationis praecipuam ostendit utilitatem in structuris continuis monodimensionalibus computandis.

Per determinare lo stato di sforzo e di deformazione in strutture reticolari elastoplastiche caricate ai nodi mi sono valso in recenti ricerche (1) di uno spazio rappresentativo particolarmente conveniente: è uno spazio che ha tante dimensioni quante sono le iperstatiche, ad ogni punto del quale, entro un determinato campo, corrisponde uno stato di sforzo e di deformazione.

Mostro in questa Nota come tale spazio offra una suggestiva rappresentazione geometrica del principio di HAAR-VON KARMAN nonché di quello di GREENBERG.

Inoltre, poichè questo spazio ha un numero di dimensioni che dipende solo dal numero delle iperstatiche, qualunque sia quello delle aste, esse si presta particolarmente allo studio di strutture con gran numero di aste e con due o tre iperstatiche, perchè in questo caso lo spazio rappresentativo diventa semplicemente il piano o lo spazio tridimensionale, mentre invece lo spazio rappresentativo di PRAGER (2),

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Carlo Somigliana il 16 febbraio 1953.

(1) L. FINZI, *Sforzi e deformazioni nelle strutture reticolari elastoplastiche*. «Rend. Ist. Lomb. Scien. e Lett.», vol. LXXXV, 1952.

(2) W. PRAGER, «Jour. Aeron. Scien.», vol. 15, n. 6, 1948.

che ha tante dimensioni quante sono le aste, è un iperspazio a un gran numero di dimensioni.

Al limite, per una struttura continua monodimensionale lo spazio di PRAGER ha infinite dimensioni e diviene uno spazio funzionale, mentre lo spazio rappresentativo proposto ha ancora due o tre dimensioni se due o tre sono le iperstatiche.

A questo caso limite dedico l'ultima parte di questa Nota.

§ 1. - LO SPAZIO DELLE IPERSTATICHE. - Nelle ricerche precedenti ho considerato una generica struttura reticolare caricata ai nodi da carichi P_j , composta di n aste perfettamente elastoplastiche.

Ho riguardato m delle n aste come iperstatiche e, detti X_1, X_2, \dots, X_m gli sforzi corrispondenti, ho espresso gli sforzi N_s nelle aste non sovrabbondanti in funzione dei carichi P_j e delle iperstatiche X_i mediante le seguenti $n-m$ equazioni di equilibrio:

$$[1] \quad N_s = \sum_1^m a_{is} X_i + \sum_j a'_{sj} P_j \quad (s = 1, 2, \dots, n-m)$$

Interpretando le iperstatiche X_i come coordinate cartesiane ortogonali di un punto di uno spazio a m dimensioni è possibile, attraverso alle [1], far corrispondere ad ogni punto R di tale spazio uno stato di sforzo equilibrato nella struttura.

Tale spazio rappresentativo dirò brevemente *spazio delle iperstatiche*.

Quando poi si impongano allo sforzo in ogni asta le condizioni di plasticità, ecco che diviene possibile nello spazio delle iperstatiche delimitare una regione cui corrispondano stati di sforzo non soltanto equilibrati ma anche plasticamente possibili.

Ho mostrato come tale regione sia un poliedro convesso che ho denominato *campo degli sforzi*.

La condizione di plasticità per ogni asta sarà tradotta da relazioni del tipo:

$$[2] \quad |N_s| \leq \bar{N} \quad (s = 1, 2, \dots, n-m); \quad |X_i| \leq \bar{X}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

essendo \bar{N}_s e \bar{X}_i gli sforzi limiti, noti a priori in base alle caratteristiche fisiche delle aste, cui corrisponde il sopravvenire di una perfetta plasticità.

Si osservi come lo spazio delle iperstatiche sia un particolare sottospazio coordinato dello spazio di PRAGER, ogni punto del quale ha come coordinate cartesiane ortogonali gli sforzi $X_1, X_2, \dots, X_m, N_1, N_2, \dots, N_{m-n}$ in tutte le n aste iperstatiche o no, e si osservi pure che il campo degli sforzi può pensarsi come la proiezione sul sottospazio X_1, X_2, \dots, X_m dell'intersezione del parallelepipedo snervamento definito dalle [2] con il sottospazio di equilibrio definito dalle [1].

§ 2. - DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO E DI DEFORMAZIONE. - Lo stato di deformazione nasce dal sovrapporsi di una parte elastica direttamente proporzionale agli sforzi, e pertanto nota quando questi siano noti, e di una parte dovuta al sopravvenire della plasticità.

Le equazioni di congruenza forniscono ulteriori condizioni per determinare lo stato di sforzo e di deformazione corrispondente ad assegnati carichi. Esse sono del tipo:

$$[3] \quad \sum_1^n a_{sr} \Delta_r = \sum_1^m b_{st} X_t + \sum_j b'_{sj} P_j \quad (s = 1, 2, \dots, m)$$

dove Δ_r è il cedimento plastico dell'asta r e a_{sr}, b_{st}, b'_{sj} sono coefficienti costanti e $b_{st} = b_{ts}$.

Quando i carichi non hanno provocato al loro sopraggiungere la plasticizzazione di alcuna asta, i cedimenti Δ_r sono nulli ed è sufficiente imporre le condizioni di congruenza [3] (con $\Delta_r = 0$) per individuare nel campo degli sforzi il punto R che con le sue coordinate fornisce lo stato di sforzo effettivo.

Di qui, essendo note le caratteristiche elastiche di ogni asta, si risale facilmente allo stato di deformazione.

Nel caso invece in cui siano in atto o peggio siano e siano stati in atto incogniti cedimenti plastici Δ_r in alcune aste, le [3] da sole non permettono la determinazione del punto R che definisce lo stato di sforzo.

Per giungervi è necessario imporre ulteriori condizioni.

Particolarmente adatte allo spazio rappresentativo adottato si mostrano quelle tradotte dai principi di HAAR-VON KARMAN ⁽¹⁾ e di GREENBERG ⁽²⁾.

Il principio di HAAR-VON KARMAN afferma che: « nell'ipotesi che per nessuna asta abbia a verificarsi una fase di scarico, l'energia di deformazione calcolata per gli effettivi valori delle tensioni è più piccola di quella calcolabile in base ad ogni altro complesso di tensioni che sia in equilibrio con le forze esterne e compatibile con le leggi di plasticità ».

In altre parole: « il punto R rappresentativo dello stato di sforzo effettivo è quello, tra quanti appartengono al campo degli sforzi cui corrisponde la minima energia di deformazione ».

Il principio di GREENBERG non va soggetto alla restrizione che in alcuna asta abbiano a verificarsi ritorni ed afferma che: « per una data variazione dei carichi, la variazione di energia elastica calcolata in base all'effettiva variazione degli sforzi è più piccola di quella calcolabile per ogni altra variazione di sforzo che sia compatibile con le condizioni di plasticità e in equilibrio con la data variazione dei carichi ».

In altre parole: « al variare dei carichi il campo C degli sforzi si trasforma nel campo C'. Corrispondentemente il punto R rappresentativo dello stato di sforzo si muove fino a raggiungere il nuovo campo nel punto R'. R' è il punto del campo C' per raggiungere il quale da R è stata necessaria la minima variazione dell'energia interna ».

Con uno dei due principi citati, operando nello spazio delle iperstatiche e dopo aver tracciato il campo degli sforzi, è possibile con semplici procedimenti geometrici che illustrerò tra poco individuare il punto R rappresentativo dello stato di sforzo e risalire poi allo stato di deformazione.

Fin qui, per generalità, abbiamo parlato di un sistema con un numero qualsivoglia di iperstatiche. D'ora in poi per rendere più agevole l'intuizione e più semplice la trattazione analitica, faremo riferimento a un sistema avente ancora un numero qualsivoglia di aste ma con due iperstatiche sicchè lo spazio delle iperstatiche diventi un piano e il campo degli sforzi un poligono convesso.

(1) Cfr. W. PRAGER, loco citato.

(2) H. J. GREENBERG, « Quart. Appl. Math. », 1949, pag. 85.

§ 3. - LINEE ISOENERGETICHE NEL PIANO DEGLI SFORZI. - Consideriamo ora nel piano delle iperstatiche X_1 e X_2 il luogo dei punti per cui è stazionaria (minima) l'energia di deformazione.

Esso sarà individuato dal sistema:

$$[4] \quad \frac{\partial E}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial X_2} = 0 .$$

Osserviamo ora che l'energia di deformazione E dipende dai carichi e dalle iperstatiche mediante la relazione

$$[5] \quad E = \frac{1}{2} \sum_{rs} b_{rs} X_r X_s + \sum_{rj} b'_{rj} X_r P_j + \frac{1}{2} \sum_{j\lambda} b''_{j\lambda} P_j P_\lambda$$

dove i coefficienti $b''_{j\lambda}$ sono costanti strutturali come quelle b_{rs} , b'_{rj} , già introdotte.

Nel caso nostro per una struttura due volte iperstatica:

$$[5'] \quad E = \frac{1}{2} (b_{11} X_1^2 + 2b_{12} X_1 X_2 + b_{22} X_2^2) + \\ + X_1 \sum_j b'_{1j} P_j + X_2 \sum_j b'_{2j} P_j + \frac{1}{2} \sum_{j\lambda} b''_{j\lambda} P_j P_\lambda$$

In tali condizioni le [4] si scrivono:

$$[4'] \quad \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial X_1} = b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + \sum_j b'_{1j} P_j = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial X_2} = b_{12} X_1 + b_{22} X_2 + \sum_j b'_{2j} P_j = 0 \end{cases}$$

Supponiamo ora che i carichi P_j varino proporzionalmente e gradualmente cosicchè sia:

$$[6] \quad P_j = \alpha_j P$$

Per P variabile gradualmente e α_j costante.

In queste ipotesi le [4'] assumono la forma:

$$[4''] \quad \begin{cases} b_{11} X_1 + b_{12} X_2 + P \sum_j b'_{1j} \alpha_j = 0 \\ b_{12} X_1 + b_{22} X_2 + P \sum_j b'_{2j} \alpha_j = 0 \end{cases}$$

Le [4''] sono le equazioni parametriche di una retta che ho chiamato *retta elastica* e ho indicato con r , e che ora chiamerò r_0 .

Questa retta passa per l'origine o i suoi punti danno gli stati di sforzo che si avrebbero per determinati carichi in assenza di cedimenti plastici.

Eliminando dalle [4''] il parametro P l'equazione della retta elastica può anche essere scritta nella forma:

$$[7] \quad X_2 = \frac{b_{11} \sum_j b'_{2j} \alpha_j - b_{12} \sum_j b'_{1j} \alpha_j}{b_{22} \sum_j b'_{1j} \alpha_j - b_{12} \sum_j b'_{2j} \alpha_j} X_1$$

Ad un dato valore di P corrisponde, mediante la [4''], un determinato punto Q di coordinate X_1^0 e X_2^0 sulla retta elastica r_0 .

Tra tutti i punti del piano $X_1 X_2$, Q è quello per cui è minima l'energia di deformazione.

Diciamo E_0 il valore dell'energia di deformazione corrispondente al punto Q e osserviamo che la [5] può porsi nella forma:

$$[5''] \quad E = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{rs} b_{rs} (X_r - X_r^0) (X_s - X_s^0)$$

tenuto conto che dalle [5'] e [4'] risulta:

$$[8] \quad E_0 = \frac{1}{2} \sum_{j\lambda} b''_{j\lambda} P_j P_\lambda - \frac{1}{2} \sum_{rs} b_{rs} X_r^0 X_s^0$$

Consideriamo le linee di livello dell'energia di deformazione.

Queste linee isoenergetiche saranno caratterizzate dall'equazione:

$$[9] \quad E = E_0 + \frac{1}{2} \sum_{rs} b_{rs} (X_r - X_r^0) (X_s - X_s^0) = \bar{E}$$

Queste linee sono ellissi aventi centro Q e sono reali solo per $\bar{E} > E_0$.

Tutte le ellissi ottenibili dalla [9] sono simili. La loro forma (rapporto tra i semiassi) e il loro orientamento non varia al variare di E_0 e quindi del punto Q e dei carichi P_j .

L'area di ogni ellisse è proporzionale a $\bar{E} - E_0$ cioè alla differenza tra il livello energetico corrispondente all'ellisse e quello minimo possibile.

§ 4. - RAPPRESENTAZIONE DEI CEDIMENTI PLASTICI NEL PIANO DELLE IPERSTATICHE. - Nelle precedenti ricerche ho constatato che, se facciamo variare il cedimento plastico Δ_s dell'asta *essesima* lasciando inalterati tutti gli altri cedimenti plastici, le equazioni di congruenza [3],

per un assegnato valore dei carichi P_j , individuano nel piano delle iperstatiche tanti punti rappresentativi dei vari stati, e tutti questi punti si trovano su una retta, che diremo r_s ⁽¹⁾, la cui direzione non dipende dai carichi P_j .

L'equazione di questa retta si ottiene eliminando Δ_s fra le due equazioni lineari di congruenza.

In particolare se tutti i cedimenti plastici sono nulli tranne il cedimento Δ_s , la retta r_s deve passare per il punto Q della retta elastica. Questo diviene pertanto il centro di un fascio costituito da tante rette quante sono le aste componenti la struttura.

L'ellisse di equazione [9] è particolarmente interessante perchè permette di individuare la direzione delle rette r_s quando sia noto il campo degli sforzi.

Ho mostrato infatti che le rette limiti del campo $|N_s| = \bar{N}_s$ e le rette r_s relative ad una medesima asta hanno direzioni coniugate rispetto all'ellisse di equazione [9].

Appunto per tale ragione ho chiamato quest'ellisse *prima ellisse dei cedimenti plastici*.

Se ora consideriamo due punti A e B appartenenti ad una stessa retta r_s , è possibile anche misurare l'entità del cedimento plastico necessario per passare, nel rispetto dell'equilibrio e della congruenza, dall'uno all'altro.

Ho infatti mostrato che il cedimento Δ_s corrispondente è misurato dal rapporto fra il segmento AB e $D_s m_s$, essendo D_s il semidiametro parallelo alla retta r_s di una seconda ellisse che ho appunto chiamato *seconda ellisse dei cedimenti plastici*, mentre m_s è una costante (*modulo dell'asta*) che vale:

$$[10] \quad m_s = \sqrt{a_{1s}^2 + a_{2s}^2} \quad (2)$$

formata coi coefficienti costanti a_{is} definiti precedentemente.

La seconda ellisse dei cedimenti plastici ha per equazione:

$$[11] \quad \sum_{r,s}^2 c_{rs} X_r X_s = 1 \quad \text{per } c_{rs} = c_{sr} = \sum_m^2 b_{rm} b_{sm}$$

(1) Nelle Note precedenti era stata indicata con Δ_s .

(2) Dovendo in questa Nota considerare dei momenti che indico con M i moduli sono contrassegnati con m , invece che con M come nella Nota citata.

Dunque:

$$B - A = m_s \Delta_s \vec{D}_s$$

Passiamo ora da un punto A a un punto B non appartenenti ad una medesima retta r_s , mediante due o più cedimenti plastici.

Data la linearità delle equazioni [3], potremo sempre pensare che i cedimenti avvengano successivamente, cosicchè il vettore $B - A$ potrà riguardarsi come somma di più vettori ognuno diretto come una retta r_s . Il modulo di tali vettori sarà proporzionale al cedimento plastico corrispondente e il coefficiente di proporzionalità sarà $D_s m_s$. Dunque:

$$B - A = \sum_s m_s \Delta_s \vec{D}_s$$

§ 5. - DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO E DI DEFORMAZIONE CON IL PRINCIPIO DI HAAR-VON KARMAN. - Consideriamo una struttura reticolare composta di n aste, due volte iperstatica e soggetta ad assegnati carichi P_j . Supponiamo i carichi applicati gradualmente e proporzionalmente e supponiamo altresì che durante l'applicazione dei carichi nessuna asta abbia subito un ritorno in fase elastica.

In tal caso il principio di HAAR-VON KARMAN ci può consentire la determinazione dello stato di sforzo e di deformazione della struttura corrispondenti ai carichi P_j .

Potremo operare così:

a) scegliamo due aste qualsiasi come iperstatiche e diciamo X_1 e X_2 gli sforzi relativi;

b) valendoci delle equazioni di equilibrio [1] e delle condizioni di plasticità [2] tracciamo nel piano X_1, X_2 le coppie di rette che costituiscono il contorno del campo degli sforzi (vedi fig. 1);

c) individuato il campo, mediante le equazioni di congruenza [3] determiniamo (per tutti i $\Delta_r = 0$) il punto Q della retta elastica r_0 corrispondente alla minima energia di deformazione E_0 .

Se Q è interno al campo o sul contorno di questo le sue coordinate X_1 e X_2 danno i valori effettivi delle iperstatiche.

Quello di deformazione è caratterizzato da cedimenti plastici nulli.

d) Se il punto Q cade fuori del campo degli sforzi, da Q spicchiamo le ellissi isoenergetiche [9]. Esse raggiungeranno il campo in un punto R.

R individua l'effettivo stato di sforzo e di deformazione. Infatti le sue coordinate X_1 e X_2 danno gli effettivi valori delle iperstatiche e consentono quindi, per il tramite delle [1], di trovare gli sforzi in ogni asta. Quanto allo stato di deformazione esso è definito, avendo ormai calcolato gli sforzi nelle varie aste, quando siano noti i cedimenti plastici avvenuti.

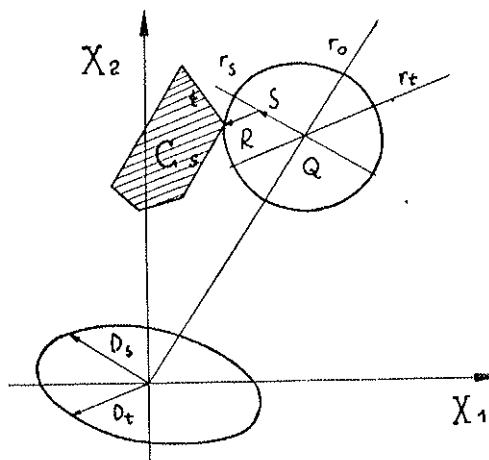


FIG. 1.

Ora, se l'ellisse isoenergetica è in R tangente a un lato campo d'equazione $|N_s| = \bar{N}_s$, il cedimento plastico avvenuto è uno solo, riguarda l'asta s e la sua entità è data dal segmento QR letto nella scala fornita dalla seconda ellisse di plasticità.

Se si vuole: $\Delta_s = |R - Q|/D_s m_s$.

Supponiamo invece, come in figura, che l'ellisse isoenergetica tocchi il campo in un punto R che è vertice del poligono limite del campo. Sia tale vertice il punto di incontro di due delle rette di equazione $|N_s| = \bar{N}_s$, $|N_t| = \bar{N}_t$ relative alle aste s e t . In questo caso i cedimenti plastici avvenuti sono due, quelli relativi alle aste s e t .

Per determinarli è allora sufficiente raggiungere R da Q con due vettori di direzione r_s e r_t . I cedimenti plastici effettivi saranno dati da due segmenti in questione misurati ciascuno nella rispettiva scala fornita dalla seconda ellisse dei cedimenti plastici. E cioè, se

$R - Q = (S - Q) + (R - S)$ essendo $S - Q$ diretto come la r_s e $R - S$ diretto come la r_t , sarà:

$$\Delta_s = |S - Q| / D_s m_s, \quad \Delta_t = |R - S| / D_t m_t$$

§ 6. - DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO E DI DEFORMAZIONE CON IL PRINCIPIO DI GREENBERG. - Il principio di GREENBERG ripete in sostanza il principio di HAAR-VON KARMAN riferendosi però a variazioni δP dei carichi e alle corrispondenti variazioni δE dell'energia di deformazione.

In tali condizioni esso non è soggetto alla limitazione che il processo di carico nel suo insieme non comporti fasi di scarico (ritorno) per qualche asta.

Non è applicabile però per variazioni finite di carico ΔP se non quando si sappia che nell'intervallo ΔP non vi sono ritorni perchè in corrispondenza di un ritorno cambia l'espressione dell'energia di deformazione.

Se allora per una struttura si verificano fasi di scarico per qualche asta, bisogna dividere il processo in tante fasi in ognuna delle quali non vi sono ritorni.

Per la prima fase si opera con il principio di HAAR-VON KARMAN come indicato al paragrafo precedente.

Si passa dalla prima alla seconda fase quando un'asta, ad esempio l'asta h torna elastica. In questa seconda fase potremo applicare il principio di GREENBERG come si è applicato il principio di HAAR-VON KARMAN nella prima fase, soltanto dovremo partire dallo stato raggiunto alla fine della prima fase: nella valutazione dei livelli energetici dovremo perciò considerare avvenuto e invariabile il cedimento Δ_h dell'asta tornata elastica.

Ciò equivale a ripetere il procedimento indicato al § 5 adottando però come retta elastica una retta r'_0 traslata di $m_h \Delta_h \vec{D}_h$ rispetto alla retta r_0 . Corrispondentemente il centro delle nuove ellissi isoenergetiche sarà in un punto Q' traslato di $m_h \Delta_h \vec{D}_h$ rispetto al corrispondente punto Q .

Individuato il punto R che dà lo stato di sforzo effettivo in questa seconda fase come punto di tangenza delle ellissi isoenergetiche di centro Q' col campo, anche lo stato di deformazione è completamente

individuato dal vettore $Q' - Q$ che è proporzionale al cedimento Δ_n , e dall'altro o al più dagli altri due $m_s \Delta_s \vec{D}_s$ e $m_t \Delta_t \vec{D}_t$ che da Q' conducono in R e ottenibili come al paragrafo precedente.

Si passa dalla seconda fase a una eventuale terza e così via con criterio perfettamente analogo.

§ 7. - DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SFORZO E DI DEFORMAZIONE IN STRUTTURE CONTINUE MONODIMENSIONALI. - Mostriamo ora come la rappresentazione geometrica proposta si presti particolarmente alla determinazione dello stato di sforzo e di deformazione in strutture continue monodimensionali.

Faremo riferimento a strutture per le quali, agli effetti del sopravvenire della plasticità, abbia influenza il solo momento flettente.

Questa ipotesi si adatta abbastanza bene ai problemi pratici più comuni (¹).

Riguarderemo la struttura come perfettamente elastoplastica e cioè: la variazione di curvatura $\frac{d\varphi}{dy}$ in ogni sezione di coordinata y è proporzionale al corrispondente momento flettente $M(y)$ fino a quando $|M(y)| \leq \bar{M}(y)$.

$\bar{M}(y)$ segna il limite di plasticità per la sezione di coordinata y e in questa fase la sezione si comporta come perfettamente elastica.

Lo sforzo non può crescere al di là del limite $\bar{M}(y)$ e al sopravvenire della plasticità si verificano tra le due facce di una sezione delle rotazioni relative plastiche $\Delta(y)$, mentre il momento flettente mantiene il valore $\bar{M}(y)$ indipendente da $\Delta(y)$ (²).

Al diminuire del momento flettente si accompagna un ritorno in fase elastica.

(¹) Quando anche lo sforzo assiale avesse una notevole influenza sul fenomeno plastico la trattazione che svolgeremo potrebbe essere ripresa tal quale apportandovi solo alcuni semplici adattamenti analoghi a quelli adottati da V. FRANCIOSI (*Sul calcolo a rottura delle strutture monodimensionali in regime elastoplastico*. « Giorn. Gen. Civ. », fasc. 7-8, 1952).

(²) La schematizzazione adottata non è affatto rigorosa, perchè, anche nell'ipotesi di perfetta plasticità di ogni fibra, la caratteristica sforzo-deformazione della sezione nel suo complesso è quella illustrata in fig. 2. Non si è però troppo lontani dal vero sostituendo il diagramma curvilineo con la spezzata tratteggiata in figura.

Per maggior chiarezza ci riferiremo a un caso concreto.

Considereremo pertanto una trave rettilinea incastrata agli estremi.

La trave sia omogenea e di sezione costante. Sia l la luce, J il momento di inerzia, E il modulo elastico, \bar{M} il momento limite uguale per tutte le sezioni.

Le trave sia soggetta ad un carico distribuito con la legge triangolare (vedi fig. 3) di valore complessivo P .

Poichè il carico è normale alla trave considerata, la struttura risulta due volte iperstatica. Come incognite iperstatiche potremo scegliere i valori del momento flettente in due sezioni qualsiasi.

Ad esempio potremo scegliere le sezioni C e D indicate in figura.

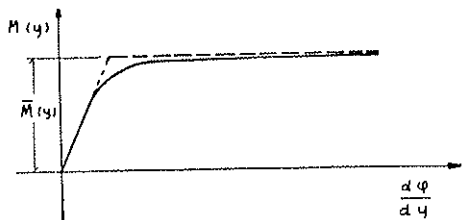


FIG. 2.

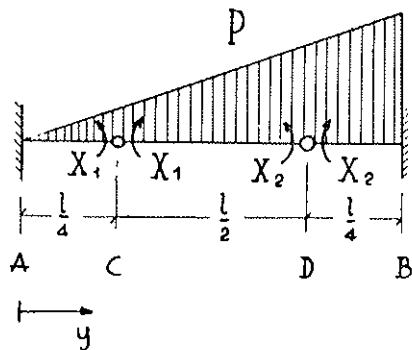


FIG. 3.

Diciamo X_1 e X_2 i momenti flettenti corrispondenti. In funzione di X_1 , di X_2 e di P è possibile esprimere il momento flettente $M(y)$ in una sezione generica di ascissa y .

Precisamente risulta, ponendo $z = \frac{y}{l}$:

$$[12] \quad M(y) = M(z) = \left(\frac{3}{2} - 2z\right) X_1 - \left(\frac{1}{2} - 2z\right) X_2 - \frac{Pl}{3} \left(z^3 - \frac{13}{16}z + \frac{3}{16}\right)$$

Risulta perciò, confrontando la [12] con la [1]:

$$[10'] \quad a_1(z) = \frac{3}{2} - 2z, \quad a_2(z) = -\frac{1}{2} + 2z$$

Se ora per ogni sezione di ascissa y poniamo la condizione di plasticità

$$[13] \quad |M(y)| = |M(z)| = \bar{M}$$

ecco che in corrispondenza di ogni valore di y , e quindi di z , la [13] tenuto conto della [12] che è una espressione lineare in X_1 e X_2 , individuerà una coppia di rette.

Tali coppie di rette sono tante quante sono le sezioni che compongono la trave e cioè infinite. Esse comunque invilupperanno il contorno di una regione del piano X_1, X_2 (il campo C degli sforzi) cui corrispondono stati di sforzo equilibrati e compatibili con le leggi di plasticità.

Determiniamo il contorno di tale regione.

La [13] si scinde nelle due:

$$[13'] \quad M(z) = \bar{M} \quad , \quad M(z) = -\bar{M}$$

Le rette che hanno per equazione la prima delle [13'] invilupperanno la linea le cui equazioni parametriche si ottengono risolvendo rispetto a X_1 e X_2 il sistema:

$$[14] \quad M(z) = \bar{M} \quad ; \quad \frac{dM(z)}{dz} = \frac{d\bar{M}}{dz}$$

Di questa linea dovremo considerare soltanto l'arco $H_0 H_1$ delimitato dai punti di parametro $z=0$ e $z=1$, e, grazie alla prima delle [13'], il campo degli sforzi dovrà trovarsi tutto da una banda del contorno formato dall'arco $H_0 H_1$ e dalle rette h_0 e h_1 tangenti in questi due punti (vedi fig. 4).

Analogamente tenendo conto della seconda delle [13'], si trova che il campo deve trovarsi tutto da una banda del contorno formato da un arco $K_0 K_1$ (delimitato dai due punti di parametro $z=0$ e $z=1$) e dalle rette tangenti k_0 e k_1 in questi due punti.

Nel caso nostro le equazioni parametriche tratte dalle [14], essendo $\bar{M} = \text{costante}$, sono le seguenti:

$$[14'] \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = \bar{M} + Pl \left(-\frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{192} \right) \\ X_2 = \bar{M} + Pl \left(-\frac{2}{3}z^3 + \frac{3}{4}z^2 - \frac{9}{64} \right) \end{array} \right.$$

Ciò vuol dire che l'arco $H_0 H_1$ appartiene a una cubica. Alla stessa cubica traslata appartiene l'arco $K_0 K_1$.

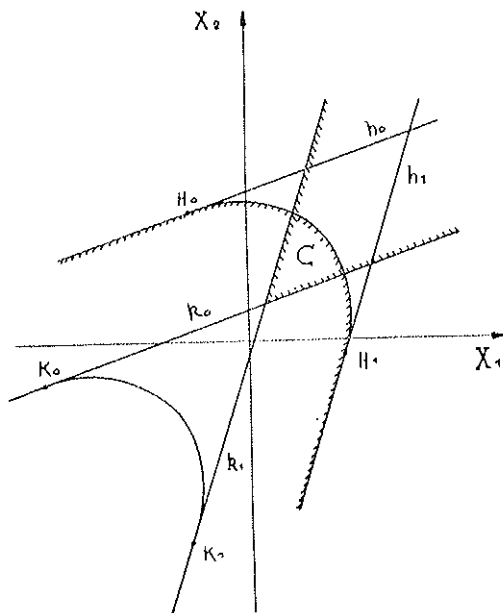


FIG. 4.

Consideriamo ora le equazioni di congruenza in assenza di cedimenti plastici. Esse sono due, tante quante sono le iperstatiche e si scrivono:

$$[15] \quad \begin{cases} \frac{7}{12} \frac{l}{EJ} X_1^0 - \frac{1}{12} \frac{l}{EJ} X_2^0 = \frac{Pl^2}{2880 EJ} \\ -\frac{1}{12} \frac{l}{EJ} X_1^0 + \frac{7}{12} \frac{l}{EJ} X_2^0 = \frac{29}{2880} \frac{Pl^2}{EJ} \end{cases}$$

Risolte rispetto ad X_1^0 e ad X_2^0 esse individuano nel piano delle iperstatiche in corrispondenza del valore stabilito per il carico P il punto Q di minima energia di deformazione E_0 mediante le sue coordinate X_1^0 e X_2^0 e conseguentemente (vedi fig. 5) la retta elastica r_0 . Risulta risolvendo il sistema [15]:

$$[16] \quad X_1^0 = \frac{9}{2880} Pl ; \quad X_2^0 = \frac{51}{2880} Pl .$$

Confrontando le equazioni [15] con le [3], constatiamo inoltre che i coefficienti caratterizzanti le due ellissi di plasticità assumono nel

nostro caso i valori seguenti:

$$[17] \quad b_{11} = \frac{7}{12} \frac{l}{EJ}; \quad b_{12} = b_{21} = -\frac{1}{12} \frac{l}{EJ}; \quad b_{22} = \frac{7}{12} \frac{l}{EJ}$$

sicchè conseguentemente dalle [11]:

$$[18] \quad c_{11} = \frac{25}{72} \frac{l^2}{E^2 J^2}; \quad c_{12} = c_{21} = -\frac{7}{72} \frac{l^2}{E^2 J^2}; \quad c_{22} = \frac{25}{72} \frac{l^2}{E^2 J^2}$$

Pertanto la prima ellisse di plasticità (che caratterizza i livelli dell'energia di deformazione e dà la corrispondenza tra rette limiti del campo e direzioni dei vettori rappresentativi dei corrispondenti cedimenti plastici) è caratterizzata dalla seguente equazione:

$$[19] \quad 7(X_1 - X_1^0)^2 - 2(X_1 - X_1^0)(X_2 - X_2^0) + 7(X_2 - X_2^0)^2 = \text{costante}$$

dove X_1^0 e X_2^0 assumono i valori [16].

La seconda invece, che consente la misura dei cedimenti plastici avvenuti, ha per equazione:

$$[20] \quad 25 X_1^2 - 14 X_1 X_2 + 25 X_2^2 = 72 \frac{E^2 J^2}{l^2}$$

Si noti che le due ellissi trovate hanno per assi le bisettrici degli assi coordinati, che sono orientate con l'asse maggiore lungo la bisettrice del primo quadrante e che il rapporto fra asse maggiore e asse minore vale $\sqrt{\frac{4}{3}}$ per la prima ellisse e $\frac{4}{3}$ per la seconda.

Dal punto Q trovato spiechiamo allora le ellissi isoenergetiche di equazione [19] fino a raggiungere il campo toccandolo nel punto R di coordinate X_1^R e X_2^R .

Introducendo nella [12] il valore delle iperstatiche trovate si ha lo stato di sforzo effettivo corrispondente al carico P, dopodichè si può determinare lo stato di deformazione.

La figura 5 illustra il procedimento nel caso in cui sia:

$$l = 400 \text{ cm}; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ Kg/cm}^2; \quad J = 2 \cdot 10^3 \text{ cm}^4; \\ \bar{M} = 5 \cdot 10^5 \text{ Kg cm}; \quad P = 18.000 \text{ Kg}.$$

Il campo si riduce al triangolo mistilineo C. Le ellissi isoenergetiche di centro Q raggiungono il campo nel punto R di coordinate $X_1^R = 62.400 \text{ kg cm}$, $X_2^R = 285.000 \text{ kg cm}$. In R sono plastiche le sezioni $z=0$ e $z=1$. I moduli di tali sezioni (per le [10] e [10']) valgono $m(0) = m(1) = \sqrt{10}/2$; mentre dalla figura risulta $D(0) = D(1) = 160.10^5 \text{ kg cm}$.

Le rotazioni plastiche $\Delta(0)$ e $\Delta(1)$ sono individuate dai due vettori $R-S$ e $S-Q$ le cui direzioni sono date dalla prima ellisse di plasticità.

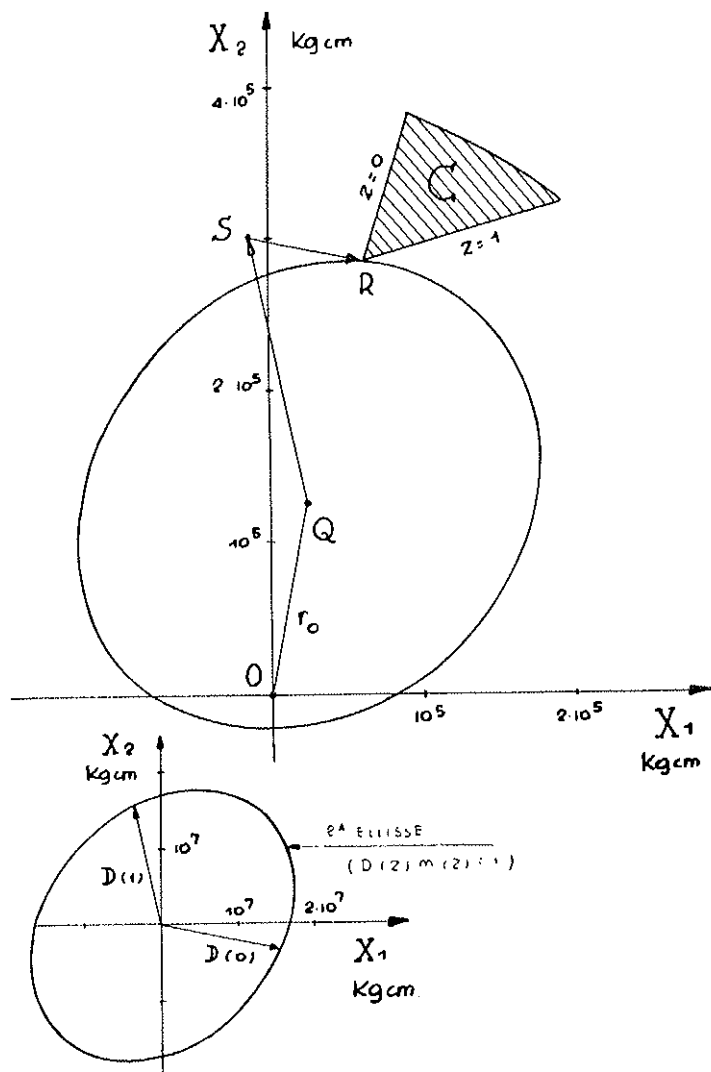


FIG. 5.

Esse valgono:

$$\Delta(0) = \frac{|R-S|}{D(0)m(0)} = 0,32 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta(1) = \frac{|S-Q|}{D(1)m(1)} = 0,70 \cdot 10^{-2}.$$