PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XV - N. 2
pag. 15-24

QUESTIONI ANALITICHE INERENTI AI PROBLEMI DI STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO ELASTICO (*)

LUIGI BROGLIO

SVMMARIVM. — Ut elastici aequilibrii instabilitatem in subtilibus structuris investiget, Auctor quaerit expressionem tensoris deformationis in elastica re quae finitis ab alio loco in alium translationibus subiciatur. Exhibet deinde expressiones laboris deformationis usque ad secundi ordinis terminos, quod attinet ad velum cylindricum, ad quodlibet velum, et ad quodlibet medium tridimensionale.

1. – Una struttura sottile, dotata di curvatura e irrigidita da opportuni elementi di riquadro (timpani, centine, ordinate, ecc.) può, come è noto, sostenere i carichi a guisa di velo o membrana o guscio, cioè aflessionalmente. Un siffatto comportamento statico consente spessori minimi con l'ovvia conseguenza però che laddove il velo risulti compresso si verificano condizioni qualitativamente non dissimili da quelle di una sottile asta caricata di punta. Sorge così per molte moderne strutture (volte-travi, volte di traslazione, ali e fusoliere a guscio dei velivoli, ecc.) un problema di stabilità elastica che generalizza gli analoghi più classicamente acquisiti – nella fattispecie il cilindro circolare assialmente compresso e il medesimo soggetto a torsione semplice – sia sotto l'aspetto geometrico, perchè dal cilindro circolare si passa a qualunque tipo di velo continuo, sia sotto il profilo dell'iniziale distribuzione di sforzi che, ben più complessa della semplice e costante compressione o del semplice e costante scorrimento, presenta contemporanee e variabili da punto a punto tutte e tre le componenti degli sforzi a membrana e cioè i flussi di tensione normale T_1 e T_2 secondo due direzioni ortogonali e il flusso di taglio S.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Gaetano Arturo Crocco nella riunione del 22 novembre 1951.

In tale ordine di problemi si presenta talora singolarmente efficace, come spesso accade nella trattazione delle più ribelli questioni di elasticità, l'impostazione energetica [1], secondo cui in una struttura soggetta agli sforzi a membrana T_1, T_2, S e per la quale siano e_1, e_2 gli allungamenti unitari (nelle direzioni T_1, T_2) e ω lo scorrimento, derivanti da una arbitraria terna congruente u, v. w, di spostamenti, il minimo moltiplicatore critico λ_{cr} del carico si ottiene minimizzando rispetto a u, v, w, il rapporto:

$$\lambda = \frac{W^{(1)}}{L^{(2)}}$$

ove $W^{(1)}$ è potenziale elastico corrispondente ai termini del primo ordine in u, v, w, ed $L^{(2)}$, il lavoro degli sforzi noti T_1, T_2, S, per effetto dei soli termini di e_1, e_2, ω, del secondo ordine in u, v, w.

Poichè il calcolo di $W^{(1)}$ rientra nella ordinaria elasticità lineare, risulta la importanza del calcolo di $L^{(2)}$, cioè dei termini di e_1, e_2, ω, del secondo ordine negli spostamenti. Anzi si può osservare che la approssimazione fino ai termini del secondo ordine negli spostamenti è sufficiente solo per spostamenti infinitesimi, cioè quando si assuma la ordinaria impostazione euleriana dei problemi di stabilità. È però ben nota [2] la fondamentale osservazione per cui un velo curvo, per effetto di spostamenti finiti può trovarsi in condizioni più gravi che per lo imbozzamento incipiente, e cioè sopportare un carico inferiore allo euleriano. Di qui l'interesse teorico ed applicativo, per la teoria generale della stabilità dell'equilibrio elastico, di conoscere l'espressione del tensore della deformazione per un corpo elastico soggetto a spostamenti finiti. Questo appunto è il problema studiato nella presente nota.

Nella prima parte del lavoro sono date, in forma adatta alle applicazioni, le espressioni di e_1, e_2, ω, per un velo qualsiasi e per spostamenti finiti, mentre nella seconda parte della nota si è data la

---

(1) W. FLÜGGE, *Statik und Dynamik der Schalen*, Cap. IX, Springer, Berlin, 1934; G. KRALL, *Moltiplicatore critico di una distribuzione di carico su una volta autoportante*. Nota I. « Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », 1946, vol. I.

(2) THEODOR VON KÀRMÀN.

espressione delle componenti del tensore delle deformazioni per spostamenti finiti anche nel caso di un mezzo tridimensionale per il quale, come è noto, la struttura del potenziale elastico per spostamenti finiti non è peranco del tutto precisata [1].

Vale forse la pena rilevare da ultimo che il metodo geometrico di cui ci si è giovati nella presente indagine ha carattere di generalità e potrebbe di conseguenza trovare vantaggiosa applicazione allo studio di svariate altre questioni di meccanica.

2. – Nei problemi della elasticità gli allungamenti unitari e scorrimenti debbono avere espressione coerente a quella degli sforzi e debbono perciò farsi dipendere da coordinate intrinseche alla struttura che si studia. In tale ordine di idee il LOVE [2] ha calcolato e_1, e_2, ω, per un velo qualsiasi, ma limitatamente ai termini del primo ordine in u, v, w. Il FLÜGGE [3] ha fornito, per il cilindro circolare e_1, e_2 fino ai termini del secondo ordine. Nello stesso ordine di approssimazione il GALLI [4] ha ottenuto, sempre per il velo cilindrico circolare, tutte e tre le quantità e_1, e_2, ω. Il KRALL, nella nota citata, ha fornito le espressioni esplicite di e_1, e_2, ω fino ai termini del 2° ordine nel caso del velo cilindrico quale si voglia.

Come casi particolari si ritrovano, in questa nota, i risultati del LOVE e del KRALL, non esattamente quelli del FLÜGGE e del GALLI i quali due ultimi autori hanno assunto una diversa definizione per gli spostamenti [5].

3. – Considero dapprima un velo cilindrico quale si voglia, soggetto a spostamenti finiti. Indico con P e P′ le posizioni occupate da un generico punto del velo prima e dopo la deformazione di questo ultimo. Lo spostamento (P′ – P) abbia componenti u, v, w secondo la terna intrinseca in P, costituita dalla generatrice, dalla tangente e dalla

---

(1) A. SIGNORINI, *Recenti progressi della teoria delle trasformazioni termoelastiche finite*, « Atti del Convegno Matematico », 8-12 Nov. 1942.

(2) LOVE A. E. H., *A Treatise On The Mathematical Theory of Elasticity.*

(3) *Op. cit.*

(4) A. GALLI, *Premesse analitiche alla stabilità delle volte autoportanti.* « Rend. Mat. Università di Roma », 1943.

(5) G. KRALL, *op. cit.*, pag. 1290.

normale in P alla direttrice del cilindro. La terna intrinseca sia destra. Volendo studiare la deformazione nell'intorno di P, assumo come riferimento una terna x, y, z fissa, cioè non vincolata al velo, e coincidente, per comodità, con la terna intrinseca in P dianzi descritta. Gli spostamenti dei punti P_1 e P_2, infinitamente vicini a P nelle direzioni x ed y, hanno ovviamente, riferiti alle terne intrinseche locali, le componenti

$$[1] \qquad u + u'\,dx \qquad v + v'\,dx \qquad w + w'\,dx$$

$$[2] \qquad u + \frac{\dot u}{R}dy \qquad v + \frac{\dot v}{R}dy \qquad w + \frac{\dot w}{R}dy$$

essendo $\frac{\partial}{\partial x} = (\ \ )'$, $\frac{\partial}{\partial \psi} = (\ \ )^{\cdot}$; $\frac{1}{R}$ e ψ rispettivamente curvatura in P della direttrice ed angolo che la normale in P alla direttrice forma con una direzione assegnata.

Rispetto la terna fissa x, y, z le componenti di $(P'_1 - P_1)$ sono ancora date dalle [1] e così la componente secondo x di $(P'_2 - P_2)$ è ancora data dalla prima delle [2]. Poichè, invece, tangente e normale in P_2 sono ruotate di un angolo $d\psi$ rispetto le analoghe in P, segue che le componenti secondo y e z di $(P'_2 - P_2)$ valgono rispettivamente

$$\left[v + \frac{\dot v}{R}dy\right]\cos d\psi - \left[w + \frac{\dot w}{R}dy\right]\operatorname{sen} d\psi \quad \text{e} \quad \left[w + \frac{\dot w}{R}dy\right]\cos d\psi + \left[v + \frac{\dot v}{R}dy\right]\operatorname{sen} d\psi\,.$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e ponendo

$$[3] \qquad \begin{array}{lll} U_1 = u' & V_1 = v' & W_1 = w' \\ U_2 = \dfrac{\dot u}{R} & V_2 = \dfrac{\dot v - w}{R} & W_2 = \dfrac{\dot w + v}{R} \end{array}$$

si conclude che le componenti di $(P'_1 - P_1)$ e di $(P'_2 - P_2)$ secondo x, y, z valgono

$$[4] \qquad \begin{array}{lll} u + U_1\,dx & v + V_1\,dx & w + W_1\,dx \\ u + U_2\,dx & v + V_2\,dx & w + W_2\,dx \end{array}$$

Il problema è ridotto ad essere identico a quello in coordinate cartesiane. Si può scrivere

$$(P'_1 - P') = (P'_1 - P_1) + (P_1 - P) - (P' - P)$$
$$(P'_2 - P') = (P'_2 - P_2) + (P_2 - P) - (P' - P)$$

e cioè i vettori $(P'_1 - P')$ e $(P'_2 - P')$ hanno, secondo x, y, z, in base alle [4] le componenti

$$[6] \qquad \begin{array}{ccc} (1+U_1)\,dx & V_1\,dx & W_1\,dx \\ U_2\,dy & (1+V_2)\,dy & W_2\,dy \end{array}$$

Si ottengono allora immediatamente gli allungamenti unitari e_1, e_2 e lo scorrimento ω:

$$[7] \qquad \begin{aligned} e_1 &= \sqrt{(1+U_1)^2 + V_1^2 + W_1^2} - 1 \\ e_2 &= \sqrt{(1+V_2)^2 + W_2^2 + U_2^2} - 1 \end{aligned} \qquad \sin\omega \frac{U_2 + V_1 + U_1 U_2 + V_1 V_2 + W_1 W_2}{(1+e_1)(1+e_2)}$$

Naturalmente, per $R \to \infty$, le [3] forniscono

$$U_2 = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad V_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad W_2 = \frac{\partial w}{\partial y}$$

e si ha il caso della lastra piana.

Se, per un velo cilindrico qualsiasi, nelle [7] si suppone che le quantità U_h, V_h, W_h, siano piccole rispetto la unità e tra loro dello stesso ordine di grandezza, sviluppando in serie le [7] e ricordando che per ξ, η, ω piccoli si ha:

$$[8] \qquad \begin{aligned} \sqrt{(1+\xi)^2 + \eta^2} &= 1 + \xi + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{1}{2}\xi\eta^2 + \ldots \\ \text{arc}\sin\omega &= \omega + \frac{\omega^3}{6} + \ldots \end{aligned}$$

si ottengono e_1, e_2, ω in serie di potenze fino all'ordine di approssimazione desiderato.

Così, ad esempio, arrestandosi ai termini del 2° ordine, poichè

$$\sqrt{(1+\xi)^2 + \eta^2} = 1 + \xi + \frac{1}{2}\eta^2$$

$$\frac{\xi + \eta^2}{(1+e_1)(1+e_2)} = \xi + (\eta^2 - e_1\xi - e_2\xi)$$

dalle [7] si ricava:

$$[9] \qquad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= U_1 + \frac{1}{2}(V_1^2 + W_1^2) + \ldots \\ e_2 &= V_2 + \frac{1}{2}(W_2^2 + U_2^2) + \ldots \end{aligned} \right.$$

$$[10] \qquad \omega = (U_2 + V_1) + [(U_1 U_2 + V_1 V_2 + W_1 W_2) - (U_2 + V_1) U_1 - (U_2 + V_1) V_2]$$

cioè

$$\omega = (U_2 + V_1) + [W_1 W_2 - U_1 V_1 - U_2 V_2] + \dots$$

Le [9] e [10], naturalmente insieme con le [3], coincidono con i risultati trovati dal Love, per i termini del 1° ordine, e dal Krall per i termini del 2° ordine, nei lavori citati.

4. – Nel caso di un velo qualsiasi soggetto a spostamenti finiti, le formule precedenti, dalle [4] in poi, valgono integralmente. Si tratta quindi semplicemente di precisare, per questo problema più generale, le formule corrispondenti alle [3]. Indico ancora con P e P′ le posizioni occupate da un generico punto del velo prima e dopo la deformazione. Lo spostamento (P′ – P) abbia componenti u, v, w, secondo la terna intrinseca in P, costituita dalle tangenti alle due linee α e β di curvatura, e della normale al velo in P. Assumo ancora – per studiare la deformazione nell'intorno di P – come riferimento fisso una terna x, y, z coincidente, per comodità, con la terna intrinseca in P ora descritta. Gli spostamenti dei punti P_1 e P_2 infinitamente vicini a P nella direzione x ed y hanno ovviamente, riferiti alle terne intrinseche locali, le componenti

$$[1'] \qquad u + \frac{u'}{A}\,dx \qquad v + \frac{v'}{A}\,dx \qquad w + \frac{w'}{A}\,dx$$

$$[2'] \qquad u + \frac{\dot u}{B}\,dy \qquad v + \frac{\dot v}{B}\,dy \qquad w + \frac{\dot w}{B}\,dy$$

essendo $\frac{\partial}{\partial\alpha} = (\ \ )'$, $\frac{\partial}{\partial\beta} = (\ \ )^{\cdot}$; $A\,d\alpha = dx$, $B\,d\beta = dy$ gli elementi lineari sulle due linee di curvatura uscenti da P.

Per ottenere le componenti di $(P'_1 - P_1)$ e $(P'_2 - P_2)$ secondo x, y, z basta rilevare i coseni direttori delle terne x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, intrinseche in P_1 e P_2, rispetto x, y, z, secondo la seguente tabella, ove R_1 ed R_2 stanno ad indicare i raggi di curvatura delle sezioni normali del velo che hanno per tangente in P gli assi x ed y rispettivamente.

[11]

	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2
x	1	$\frac{\dot{A}}{AB}dx$	$-\frac{dx}{R_1}$	1	$-\frac{B'}{AB}dy$	0
y	$-\frac{\dot{A}}{AB}dx$	1	0	$\frac{B'}{AB}dy$	1	$-\frac{dy}{R_2}$
z	$\frac{dx}{R_1}$	0	1	0	$\frac{dy}{R_2}$	1

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e ponendo

$$[3] \quad \begin{aligned} U_1 &= \frac{u'}{A} + \frac{\dot{A}}{AB}v - \frac{w}{R_1}\,; \quad V_1 = -\frac{\dot{A}}{AB}u + \frac{v'}{A}\,; \quad W_1 = \frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A} \\ U_2 &= \frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'}{AB}v\,; \quad V_2 = \frac{B'}{AB}u + \frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{R_2}\,, \quad W_2 = \frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B} \end{aligned}$$

si ottengono nuovamente le formule [4] e quindi tutte le seguenti fino alle [10] incluse.

In particolare, dalle [7] e [3′] si ottengono gli allungamenti unitari e_1, e_2 e lo scorrimento ω per un velo qualsiasi e spostamenti finiti:

$$e_1 = \sqrt{\left(1 + \frac{u'}{A} + \frac{\dot{A}}{AB}v - \frac{w}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{v'}{A} - \frac{\dot{A}}{AB}u\right)^2 + \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A}\right)^2} - 1$$

$$[7'] \quad e_2 = \sqrt{\left(1 + \frac{B'}{AB}u + \frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B}\right)^2 + \left(\frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'}{AB}v\right)^2} - 1$$

$$\sin\omega = \frac{\left(\frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'}{AB}v\right) + \left(\frac{v'}{A} - \frac{\dot{A}}{AB}\right) + \left(\frac{u'}{A} + \frac{\dot{A}}{AB}v - \frac{w}{R_1}\right)\left(\frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'v}{AB}\right) + \left(\frac{B'}{AB}u + \frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{R_2}\right)\left(\frac{v'}{A} - \frac{\dot{A}u}{AB}\right) + \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A}\right)\left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B}\right)}{(1 + e_1)(1 + e_2)}$$

In base alle [9], [10] e [3′] i termini di e_1, e_2, ω del 2° ordine valgono:

$$[9'] \quad \begin{aligned} e_1^{(2)} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{v'}{A} - \frac{\dot{A}}{AB}u\right)^2 + \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A}\right)^2\right] \\ e_2^{(2)} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\dot{u}}{B} - \frac{B'}{AB}v\right)^2 + \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Per i veli nei quali sia nulla la derivata logaritmica di A secondo β e di B secondo α si ha, più semplicemente:

$$[9''] \quad \begin{aligned} e_1^{(2)} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{v'}{A}\right)^2 + \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A}\right)^2\right] \\ e_2^{(2)} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\dot{u}}{B}\right)^2 + \left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B}\right)^2\right] \end{aligned}$$

$$[10''] \quad \omega_2^{(2)} = \left(\frac{u}{R_1} + \frac{w'}{A}\right)\left(\frac{v}{R_2} + \frac{\dot{w}}{B}\right) - \left(\frac{u'}{A} - \frac{w}{R_1}\right)\frac{v'}{A} - \left(\frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{R_2}\right)\frac{\dot{u}}{B} \; .$$

5. – Nel caso infine di un mezzo tridimensionale soggetto a spostamenti finiti, non si tratta che di ripetere, generalizzandole, le considerazioni precedenti. Indico ancora con P e P′ le posizioni occupate da un punto del mezzo prima e dopo la deformazione. Lo spostamento $P' - P$ abbia componenti u, v, w secondo la terna intrinseca in P costituita dalle tangenti in P alle tre linee coordinate α, β, γ del sistema di coordinate curvilinee generali alle quali il mezzo si intende riferito. Per studiare la deformazione nello intorno di P, assumo ancora come riferimento una terna destra x, y, z fissa e coincidente, per comodità con la terna intrinseca in P dianzi descritta. Gli spostamenti dei punti P_1, P_2, P_3 infinitamente vicini a P nelle direzioni x, y, z hanno ovviamente, riferiti alle terne intrinseche locali, le componenti:

$$[1''] \quad \begin{array}{lll} u + \dfrac{u'}{A}\,dx & v + \dfrac{v'}{A}\,dx & w + \dfrac{w'}{A}\,dx \\ u + \dfrac{\dot{u}}{A}\,dy & v + \dfrac{\dot{v}}{B}\,dy & w + \dfrac{\dot{w}}{B}\,dy \\ u + \dfrac{u^*}{C}\,dz & v + \dfrac{v^*}{C}\,dz & w + \dfrac{w^*}{C}\,dz \end{array}$$

essendo $\dfrac{\partial}{\partial x} = (\ )'$; $\dfrac{\partial}{\partial \beta} = (\ )^{\cdot}$; $\dfrac{\partial}{\partial \gamma} = (\ )^*$ e $A\,d\alpha = dx$, $B\,d\beta = dy$; $C\,d\gamma = dz$ gli elementi lineari sulle tre linee coordinate uscenti da P. Per ottenere le componenti di $(P'_1 - P_1)$, $(P'_2 - P_2)$, $(P'_3 - P_3)$ secondo x, y, z basta rilevare i coseni direttori delle terne $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$ (intrinseche in $P_1 P_2 P_3$) rispetto x, y, z secondo la seguente tabella in cui, ad esempio, r_{23} rappresenta il raggio di curvatura in P della sezione normale alla superficie $\beta = \text{cost}$ che ha in P per tangente l'asse z.

[12]

	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3
x	1	$-\frac{dx}{r_{21}}$	$-\frac{dx}{r_{31}}$	1	$\frac{dy}{r_{12}}$	0	1	0	$\frac{dz}{r_{13}}$
y	$\frac{dx}{r_{21}}$	1	0	$-\frac{dy}{r_{12}}$	1	$-\frac{dy}{r_{32}}$	0	1	$\frac{dz}{r_{23}}$
z	$\frac{dx}{r_{31}}$	0	1	0	$\frac{dy}{r_{32}}$	1	$\frac{dz}{r_{13}}$	$\frac{dz}{r_{23}}$	1

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e ponendo

$$[3''] \qquad \begin{aligned} U_1 &= \frac{u'}{A} - \frac{v}{r_{21}} - \frac{w}{r_{31}} & V_1 &= \frac{u}{r_{21}} + \frac{v'}{A} & W_1 &= \frac{u}{r_{31}} + \frac{w'}{A} \\ U_2 &= \frac{\dot{u}}{B} + \frac{v}{r_{12}} & V_2 &= -\frac{u}{r_{12}} + \frac{\dot{v}}{B} - \frac{w}{r_{32}} & W_2 &= \frac{v}{r_{32}} + \frac{\dot{w}}{B} \\ U_3 &= \frac{u^*}{C} + \frac{w}{r_{13}} & V_3 &= \frac{v^*}{C} + \frac{w}{r_{23}} & W_3 &= -\frac{u}{r_{13}} - \frac{v}{r_{23}} + \frac{w^*}{C} \end{aligned}$$

si conclude che le componenti di $(P'_1 - P_1)$, $(P'_2 - P_2)$, $(P'_3 - P_3)$ secondo x, y, z valgono

$$[4''] \qquad \begin{matrix} u + U_1\,dx & v + V_1\,dx & w + W_1\,dx \\ u + U_2\,dy & v + V_2\,dy & w + W_2\,dy \\ u + U_3\,dz & v + V_3\,dz & w + W_3\,dz \end{matrix}$$

Il problema è ancora una volta ricondotto ad essere come se il mezzo fosse riferito a coordinate cartesiane ordinarie.

Con il solito ragionamento si conclude che le componenti di $(P'_1 - P')$ $(P'_2 - P')$ $(P'_3 - P')$ secondo x, y, z valgono:

$$[6''] \qquad \begin{matrix} (1 + U_1)\,dx & V_1\,dx & W_1\,dx \\ U_2\,dy & (1 + V_2)\,dy & W_2\,dy \\ U_2\,dz & V_3\,dz & (1 + W_3)\,dz \end{matrix}$$

cosicchè i tre allungamenti e_1, e_2, e_3 ed i tre scorrimenti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ valgono:

[7″]

$$e_1 = \sqrt{1+U_1)^2 + V_1^2 + W_1^2} - 1 \qquad \sin\omega_1 = \frac{V_3 + W_2 + U_2 U_3 + V_2 V_3 + W_2 W_3}{(1+e_2)(1+e_3)}$$

$$e_2 = \sqrt{(1+V_2)^2 + U_2^2 + W_2^2} - 1 \qquad \sin\omega_2 = \frac{W_1 + U_3 + U_3 U_1 + V_3 V_1 + W_3 W_1}{(1+e_1)(1+e_3)}$$

$$e_3 = \sqrt{(1+W_3)^2 + U_3^2 + V_3^2} - 1 \qquad \sin\omega_3 = \frac{U_2 + V_1 + U_1 U_2 + V_1 V_2 + W_1 W_2}{(1+e_1)(1+e_2)}$$

Conclusione. – Le formule [7″] forniscono le sei componenti del tensore delle deformazioni in un punto qualsiasi di un mezzo elastico tridimensionale soggetto a spostamenti finiti. Le formule [7′] particolarizzano il risultato stesso per un mezzo bidimensionale soggetto a spostamenti finiti. Tali risultati possono utilizzarsi, come detto al n. 1, per lo studio della stabilità elastica di strutture complesse quali le grandi coperture e le ali e le fusoliere a guscio dei moderni velivoli.