PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XV - N. 1
pag. 1-14

SULLE CONDIZIONI DI VALIDITÀ DELLA FORMULA DI GREEN-STOKES GENERALE (*)

GIULIO ARUFFO

SVMMARIVM. — Auctor demonstrat generalem GREEN-STOKES formulam tunc tantum valere, cum coëfficientia formae integrandae gradus minoris sunt differentiabilia, coëfficientia autem formae gradus maioris sunt continua. Integrale autem theorema CAUCHY deduci potest per formulam GREEN, (iuxta viam a RIEMANN indicatam) etiam in hypothesi a GOURSAT proposita.

1. – È ben noto che il teorema integrale di CAUCHY per una funzione analitica $f(z)$ di una variabile complessa $z=x+iy$, può dedursi immediatamente (con RIEMANN) dalla formula di GREEN nel piano, spezzando $f(z)$ nella sua parte reale $u(x,y)$ e nella immaginaria $iv(x,y)$. Tale dimostrazione necessita non soltanto dell'esistenza delle derivate parziali di u e v [già conseguente dall'esistenza di $f'(z)$], ma anche della loro continuità, poichè essa interviene nelle ordinarie formulazioni del teorema di GREEN.

D'altronde GOURSAT ha dimostrato, per altra via, il teorema di CAUCHY medesimo, nella sola ipotesi dell'esistenza di $f'(z)$ [1]. Il ragionamento di GOURSAT sfrutta essenzialmente il fatto che se in un

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi nella riunione del 22 novembre 1951.

Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Genova.

[1] Cfr. E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*. Gauthier-Villars (1943), Tome II, pag. 74.

punto z_0 interno al campo di definizione di $f(z)$ esiste $f'(z_0)$, ivi la $f(z)$ è differenziabile (1).

Si riconosce subito che ciò implica la differenziabilità di $u(x,y)$, $v(x,y)$. Perciò si affaccia spontaneamente la domanda se sia possibile, imitando il ragionamento di GOURSAT, stabilire la formula di GREEN nelle ipotesi corrispondenti, più generali del consueto, e precisamente ammettendo soltanto la differenziabilità dei coefficienti della forma differenziale integranda semplicemente, insieme alla continuità della funzione integranda doppiamente.

Anzi ci si può chiedere più in generale se, sotto analoghe ipotesi, valga la formula di GREEN-SOKES

$$\int_{\Gamma_k} \omega_k = \int_{V_{k+1}} d\,\omega_k \tag{1}$$

essendo ω_k una forma differenziale esterna di grado k nelle variabili reali $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n > k)$, $d\omega_k$ la forma di grado $k+1$ che si ottiene con la differenziazione di E. CARTAN, V_{k+1} una varietà $(k+1)$-dimensionale orientata dello spazio euclideo $S_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e Γ_k il ciclo k-dimensionale contornante V_{k+1}.

Scopo di questa nota è appunto quello di dare risposta affermativa al precedente interrogativo, dimostrando il teorema seguente:

La formula [1] *sussiste nelle ipotesi che:*

1) *La varietà orientata* V_{k+1} *possa considerarsi come una catena di* $(k+1)$*-simplessi (eventualmente singolari) di classe* $u \geqslant 1$ (2) *dello spazio* S_n *e sia* $V_{k+1} \to \Gamma_k$ (3);

(1) Diciamo che una funzione di una o più variabili (reali o complesse) è «differenziabile» in un punto P_0 interno al campo di definizione, quando l'incremento della funzione per uno spostamento da P_0 ad un punto prossimo P differisce dal differenziale corrispondente (differenziale totale se trattasi di più variabili) per un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla distanza $P_0 P$. Mentre per le funzioni di una sola variabile (reale o complessa) derivabilità e differenziabilità coincidono, per le funzioni di più variabili l'esistenza delle derivate parziali in P_0 *non* trae seco la differenziabilità in P_0; d'altronde la continuità delle derivate parziali è più restrittiva delle differenziabilità. Cfr. F. SEVERI, *Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili reali.* «Annali di Mamatica», Serie IV, Tomo XIII, pag. 1.

(2) Vale a dire trasformati univoci (e non necessariamente biunivoci) di un $(k+1)$-simplesso *rettilineo* (poliedro elementare) di uno spazio euclideo a $k+1$ dimensioni, essendo di classe u le funzioni che rappresentano la trasformazione (cfr. n. 3).

(3) Seguendo il simbolismo di ALEXANDER, con la scrittura $A \to B$ intendiamo esprimere che la varietà A ha la varietà B come contorno orientato in relazione positiva con A. Il ciclo Γ_k risulta anche esso una catena di k-simplessi di classe u.

2) *i coefficienti* $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *di* ω_k *siano differenziabili (e quindi continui) in una regione aperta* R *di* S_n *contenente* V_{k+1};

3) *siano continui in* R *i coefficienti della forma* $d\omega_k$ *(senza che tali siano di necessità le singole derivate delle* $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ *che compongono quei coefficienti).*

Nel caso $n=2, k=1$ (formula di Green nel piano) l'ipotesi 1) può anche venir sostituita con quella che la linea chiusa Γ_1 sia una *linea di Jordan semplice e regolare*, secondo proveremo al n. 5 [1].

Ne segue che la dimostrazione di Riemann del teorema integrale di Cauchy conserva la sua validità anche nelle condizioni generali di Goursat.

Osserviamo infine che, sempre con riferimento al caso $n=2, k=1$, una volta provata nelle condizioni dette la formula di Green, che scriveremo:

$$\int_\gamma (A\, dx + B\, dy) = \iint_D (B_x - A_y)\, dx\, dy \qquad (D \to \gamma) \;,$$

possiamo argomentarne che, se le funzioni $A(x, y)$, $B(x, y)$ sono differenziabili in una regione R semplicemente connessa ed ivi sussiste l'eguaglianza $B_x = A_y$, si ha:

$$\int_\gamma (A\, dx + B\, dy) = 0$$

per ogni linea di Jordan chiusa regolare situata in R. Ne segue che $A\, dx + B\, dy$ è differenziale totale della funzione

$$G(x, y) = \int_{(x_0 y_0)}^{(xy)} (A\, dx + B\, dy) \;,$$

univocamente definita qualunque sia in R l'arco regolare di integrazione che conduce da $(x_0\, y_0)$ ad $(x\, y)$.

Invece l'uguaglianza $B_x = A_y$, nella sola ipotesi della continuità di A, B insieme all'esistenza delle derivate parziali, non basta a garantire che $A\, dx + B\, dy$ sia un differenziale esatto, come ha dimostrato Tolstoff con un esempio [2].

---

[1] Avvertiamo però che il ragionamento ivi sviluppato non sembra facilmente generalizzabile quando ci si ponga in condizioni analoghe per n, k qualunque.

[2] Cfr. Tolstoff, *Recueil mathématique*, Moscou, (2), 9, pag. 461.

Questo fatto mostra che l'ipotesi 2) nel precedente enunciato generale non è sostituibile con la sola ipotesi dell'esistenza delle derivate parziali dei coefficienti della forma ω_k.

2. - Proveremo dapprima la [1] nel caso che V_{k+1} sia un simplesso rettilineo n-dimensionale $E_n (k+1=n)$, il cui contorno indicheremo con e_{n-1}.

Nel caso presente le forme integrande possono scriversi:

$$[2] \qquad \begin{aligned} \omega_{n-1} &= \sum_1^n {}_i A_i(x_1, \dots, x_n)\, d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ d\,\omega_{n-1} &= \left\{ \sum_1^n {}_i (-1)^{i-1} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \right\} d(x_1, x_2, \dots, x_n) \ . \end{aligned}$$

Per le ipotesi ammesse la funzione:

$$[3] \qquad \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_1^n {}_i (-1)^{i-1} \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

è continua in $E_n + e_{n-1}$ ed inoltre, essendo $\overline{P}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ un punto di R prossimo a $P(x_1, \dots, x_n)$, può scriversi:

$$[4] \qquad A_i(x_1, \dots, x_n) = A_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_1^n {}_r \frac{\partial A_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\partial x_r}(x_r - \bar{x}_r) + \alpha_i(P, \overline{P})\, \overline{P\overline{P}}$$

dove le funzioni $\alpha_i(P, \overline{P})$ sono tali che, fissato $\varepsilon > 0$ può trovarsi $\delta_\varepsilon > 0$ siffatto che risulti:

$$|\alpha_i(P, \overline{P})| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

per tutti i punti P aventi da $\overline{P}$ distanza $\overline{P\overline{P}} < \delta_\varepsilon$ (1).

Sia ora Q un ipercubo contenente E_n nel suo interno. Fissati ad arbitrio due numeri positivi λ, ε, mediante successive suddivisioni di Q in ipercubi parziali, possiamo supporre di aver decomposto Q in k ipercubi $Q^1, \dots, Q^k$ di massima diagonale $\delta < \lambda$ siffatti che in

(1) Le funzioni $\alpha_i(P, \overline{P})$ non sono definite per $P \equiv \overline{P}$; ma quando ci occorra considerarle per $P \equiv \overline{P}$, intenderemo $\alpha_i(\overline{P}, \overline{P}) = \lim_{P \to \overline{P}} \alpha_i(P, \overline{P}) = 0$.

ognuna delle $h \leqslant k$ regioni $C^s = E_n \cdot Q^s$ non vuote (e siano quelle per cui $s = 1, 2, \ldots, h$) esista almeno un punto $Y^s(y_1^s, y_2^s, \ldots, y_n^s)$ tale che risulti:

$$[5] \qquad |\alpha_i(P, Y^s)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

per ogni P di $C^s + c^s$ essendo $C^s \to c^s$ (1).

Sarà allora:

$$E_n = C^1 + C^2 + \ldots + C^h, \qquad e_{n-1} = c^1 + c^2 + \ldots + c^h$$

$$\int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d\omega_{n-1} = \sum_1^h {}_s \left\{ \int_{c^s} \omega_{n-1} - \int_{C^s} d\omega_{n-1} \right\} .$$

In ciascuno dei domini $C^s + c^s$ possiamo esprimere i coefficienti di ω_{n-1} mediante la [4] nella quale si scelga $\overline{P} \equiv Y^s$, cosicchè risulta:

$$\omega_{n-1} = \sum_1^n {}_i A_i(y_1^s, \ldots, y_n^s)\, d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) +$$
$$+ \sum_1^n {}_i \left\{ \sum_1^n {}_r \frac{\partial A_i(y_1^s, \ldots, y_n^s)}{\partial x_r} (x_r - y_r^s) \right\} d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) +$$
$$+ \sum_1^n {}_i \alpha_i(P, Y^s) \cdot \overline{PY^s}\, d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) .$$

D'altronde la [1] applicata nel dominio $C^s + c^s$ alle forme elementari qui di seguito indicate (per le quali la formula stessa può provarsi direttemente), dà:

$$[6] \qquad \int_{c^s} d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$$

$$[7] \qquad \int_{c^s} x_r\, d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) =$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ per } r \neq i \\ (-1)^{i-1} \int_{C^s} d(x_1, \ldots, x_n) = (-1)^{i-1} C^s \text{ per } r = i \end{cases}$$

ove con C^s si indica ad un tempo l'ipercubo considerato e la sua misura.

---

(1) Cfr. ad es. F. SEVERI e G. SCORZA DRAGONI: *Lezioni di analisi*, Zanichelli (1944), vol. II, Parte I, pag. 366, n. 10. Quanto interessa è ivi dimostrato nel caso $n = 2$, ma le considerazioni ivi esposte sono ovviamente di carattere generale.

Tenuto conto delle [6], [7], [3], si ha:

$$\int_{c^s} \omega_{n-1} = \sum_1^n {}_i \frac{\partial A_i(y_1^s, \dots, y_n^s)}{\partial x_i} (-1)^{i-1} C^s +$$

$$+ \sum_1^n {}_i \int_{c_s} \overline{PY^s}\, \alpha_i(P, Y^s)\, d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$= \varphi(y_1^s, \dots, y_n^s)\, C^s + \sum_1^n {}_i \int_{c^s} \overline{PY^s}\, \alpha_i(P, Y^s)\, d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad .$$

Si ottiene così:

$$\int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d\,\omega_{n-1} = \sum_1^h {}_s \Big\{ \varphi(y_1^s, \dots, y_n^s)\, C^s - \int_{C^s} d\,\omega_{n-1} \Big\} +$$

$$+ \sum_1^h {}_s \sum_1^n {}_i \int_{c^s} \overline{PY^s}\, \alpha_i(P, Y^s)\, d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

o anche, ricordando le [2], [3] e applicando il teorema della media:

$$[8] \qquad \int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d\,\omega_{n-1} = \sum_1^h {}_s \Big\{ \varphi(y_1^s, \dots, y_n^s) - \varphi(z_1^s, \dots, z_n^s) \Big\} C^s +$$

$$+ \sum_1^h {}_s \sum_1^n {}_i \int_{c^s} \overline{PY^s}\, \alpha_i(P, Y^s)\, d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

con $Z^s(z_1^s, \dots, z_n^s)$ punto opportuno di $C^s + c^s$.

Per l'uniforme continuità di $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in $E_n + e_{n-1}$, restringendo eventualmente λ possiamo ottenere che sia:

$$[9] \qquad |\varphi(y_1^s, \dots, y_n^s) - \varphi(z_1^s, \dots, z_n^s)| < \varepsilon \qquad (s = 1, 2, \dots, h) .$$

Tenuto conto della [5] e della [9] si ha allora:

$$\left| \int_{e_{n-1}} \omega_{n-1} - \int_{E_n} d\,\omega_{n-1} \right| < \varepsilon \sum_1^h {}_s C^s + \varepsilon \sqrt{n} \sum_1^h {}_s l^{(s)} \sum_1^n {}_i \left| \int_{c^s} |d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)| \right| ,$$

giacchè PY^s è minore o uguale della diagonale di Q^s, la quale vale $l^{(s)} \sqrt{n}$, indicando con l^s il lato di Q^s.

Ora, se Q è tutto interno ad E_n, c^s si riduce al contorno di Q^s e l'ultimo integrale scritto all'estensione di tale contorno, cioè $2nl^{(s)n-1}$. Se invece Q^s esce fuori di E_n, c^s comprende una porzione di e_{n-1}, che indicheremo (insieme alla sua misura) con $e^s{}_{n-1}$.

In ogni caso si può scrivere:

$$\left|\int_{e_{n-1}}\omega_{n-1}-\int_{E_n}d\,\omega_{n-1}\right|<\varepsilon\left[E_n+n\sqrt{n}\sum_{1}^{h}{}_s\, l^{(s)}\{2nl^{(s)n-1}+e^{(s)}{}_{n-1}\}\right]$$

e infine, ricordando che la lunghezza $l^{(s)}\sqrt{n}$ della diagonale di Q^s si è assunta $<\lambda$,

$$\left|\int_{e_{n-1}}\omega_{n-1}-\int_{E_n}d\omega_{n-1}\right|<\varepsilon\,[E_n+2n^2\sqrt{n}\,Q+n\sqrt{n}\,\lambda\, e_{n-1}]\ ,$$

indicando al solito con E_n, Q, e_{n-1} le estensioni delle varietà omonime.

Stante l'arbitrarietà di ε, il primo membro dell'ultima diseguaglianza scritta è nullo, come volevamo provare.

3. – Per giungere alla dimostrazione della formula di Green-Stokes nelle ipotesi generali del n. 1, faremo uso di un cambiamento di variabili. Ci occorre perciò premettere il seguente

Lemma: Se

$$y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

è funzione differenziabile nella regione R e se:

$$x_i=x_i(u_1, u_2, \dots, u_{k+1}) \tag{10}$$

sono funzioni di classe $u\geqslant 1$, le quali pongono una corrispondenza univoca (non necessariamente biunivoca) tra i punti del simplesso rettilineo $\overline{E}_{k+1}+\bar{e}_k\,(\overline{E}_{k+1}\to\bar{e}_k)$ dello spazio euclideo $(u_1, \dots, u_{k+1})$ e i punti del simplesso (eventualmente singolare) $E_{k+1}+e_k(E_{k+1}\to e_k)$ appartenente ad R, allora la funzione:

$$F(u_1, u_2, \dots, u_{k+1})=f[x_1(u_1, \dots, u_{k+1}), \dots, x_n(u_1, \dots, u_{k+1})]$$

riesce differenziabile in ogni punto di $\overline{E}_{k+1}+\bar{e}_k$.

Consideriamo infatti in $\overline{E}_{k+1} + \bar{e}_k$ un punto comunque fissato $Q(u_1, \ldots, u_{k+1})$ ed un punto $Q'(u_1 + \Delta u_1, \ldots, u_{k+1} + \Delta u_{k+1})$ variabile nell'intorno di Q, e diciamo $P(x_1, \ldots, x_n)$, $P'(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$ i punti che le [10] fanno corrispondere rispettivamente a P e P'.

Per le ipotesi le [10] sono differenziabili, e quindi:

[11] $$\Delta x_i = x_i(Q') - x_i(Q) = \sum_1^{k+1}{}_r \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} \Delta u_r + \alpha_i$$

con:

[12] $$\lim_{Q' \to Q} \frac{\alpha_i}{\sqrt{\sum_1^{k+1}{}_r \Delta u_r^2}} = 0 \, .$$

Inoltre, per la differenziabilità di $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\Delta F = F(Q') - F(Q) = f(P') - f(P) = \sum_1^n{}_i \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \Delta x_i + \omega$$

con:

[13] $$\lim_{P' \to P} \frac{\omega}{\sqrt{\sum_1^n{}_i \Delta x_i^2}} = 0 \, .$$

A causa della [11] l'incremento della funzione $F(u_1, \ldots, u_{k+1})$ può scriversi:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \sum_1^n{}_i \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \left\{ \sum_1^{k+1}{}_r \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} \Delta u_r + \alpha_i \right\} + \omega = \\ &= \sum_1^n{}_r \Delta u_r \sum_1^n{}_i \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \alpha_i + \omega = \\ &= \sum_1^{k+1}{}_r \frac{\partial F(Q)}{\partial u_r} \Delta u_r + \sum_1^n{}_i \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} \alpha_i + \omega \, . \end{aligned}$$

Ricordando la [12], per dimostrare il lemma siamo ridotti a provare che:

[14] $$\lim_{Q' \to Q} \frac{\omega}{\sqrt{\sum_1^{k+1}{}_r \Delta u_r^2}} = 0 \, .$$

Ora, se eventualmente accade che in ogni intorno di Q esistono posizioni di $Q' \neq Q$ per le quali si abbia $P' = P$, quando $Q' \to Q$ assumendo le dette posizioni si ha costantemente $\omega = 0$, cosicchè la [14] è soddisfatta limitatamente al modo specificato di far tendere Q' a Q.

Escluse codeste posizioni di Q', si ha ad un tempo $Q' \neq Q$ e $P' \neq P$, onde può scriversi:

$$\left| \frac{\omega}{\sqrt{\sum_1^{k+1}{}_r \Delta u_r^2}} \right| = \left| \frac{\omega}{\sqrt{\sum_1^n{}_i \Delta x_i^2}} \right| \sqrt{\frac{\sum_1^n{}_i \Delta x_i^2}{\sum_1^{k+1}{}_r \Delta u_r^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\omega}{\sqrt{\sum_1^n{}_i \Delta x_i^2}} \right| \sum_1^n{}_i \frac{|\Delta x_i|}{\sqrt{\sum_1^{k+1}{}_r \Delta u_r^2}} .$$

Per la [13] e la continuità delle [10] il primo fattore del prodotto ad ultimo membro è infinitesimo per $Q' \to Q$; per provare la [14] basterà quindi far vedere che in un intorno di Q il secondo fattore è limitato.

Dalla [11] risulta:

$$\sum_1^n{}_i \frac{|\Delta x_i|}{\sqrt{\sum_1^{k+1}{}_r \Delta u_r^2}} \leqslant \sum_1^n{}_i \frac{\sum_1^{k+1}{}_r \left| \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} \right| \cdot |\Delta u_r|}{\sqrt{\sum_1^{k+1}{}_r \Delta u_r^2}} +$$

$$+ \sum_1^n{}_i \frac{|\alpha_i|}{\sqrt{\sum_1^{k+1}{}_r \Delta u_r^2}} \leqslant \sum_{i,r} \left| \frac{\partial x_i(Q)}{\partial u_r} \right| + \sum_1^n{}_i \frac{|\alpha_i|}{\sqrt{\sum_1^{k+1}{}_r \Delta u_r^2}}$$

L'ultimo addendo è, per la [12], infinitesimo per $Q' \to Q$, mentre il primo è indipendente da Q'; da ciò segue la limitatezza del quoziente a primo membro in un intorno di Q, e quindi la tesi.

4. – Passiamo ora alla dimostrazione della [1] nelle condizioni generali. Per le ipotesi fatte al n. 1, è

$$V_{k+1} = \sum_1^p{}_i a_i E_{k+1}^{(i)} \qquad \Gamma_k = \sum_1^p{}_i a_i e_k^{(i)}$$

ove ciascuno degli $E_{k+1}^{(i)} \to e_k^{(i)}$ è un simplesso di classe $u \geqslant 1$ e gli a_i sono interi.

Per la linearità degli operatori che entrano in gioco basterà provare che la [1] vale per ciascuno dei simplessi $E_{k+1}^{(i)}$. Sopprimendo l'indice i, indicheremo questo semplicemente con $E_{k+1} \to e_k$.

Essendo E_{k+1} simplesso di classe $u \geqslant 1$, esso può rappresentarsi su un simplesso rettilineo $\overline{E}_{k+1} \to \bar{e}_k$ dello spazio euclideo $(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$ mediante una trasformazione del tipo [10].

Risulta allora:

$$\int_{e_k} \omega_k = \int_{\bar{e}_k} \bar{\omega}_k ; \quad \int_{E_{k+1}} d\,\omega_k = \int_{\overline{E}_{k+1}} \overline{d\,\omega_k} \tag{15}$$

ove con $\bar{\omega}_k$, $\overline{d\,\omega_k}$ s'indicano le forme differenziali trasformate di ω_k, $d\,\omega_k$ mediante le [10].

Per la nota invarianza della differenziazione di Cartan rispetto ai cambiamenti di variabili, risulta $\overline{d\,\omega_k} = d\,\bar{\omega}_k$, mentre, per quanto si è provato al n. 3, le forme $\bar{\omega}_k$, $d\,\bar{\omega}_k$ soddisfano a quelle ipotesi di differenziabilità e continuità dei coefficienti sotto le quali è valido il risultato acquisito al n. 2.

Ne segue:

$$\int_{\bar{e}_k} \bar{\omega}_k = \int_{\overline{E}_{k+1}} d\,\bar{\omega}_k = \int_{\overline{E}_{k+1}} \overline{d\,\omega_k}$$

e quindi per le [15]:

$$\int_{e_k} \omega_k = \int_{E_{k+1}} d\,\omega_k \quad .$$

Il teorema enunciato al n. 1 è così completamente provato.

5. – Ferme rimanendo le ipotesi 2) e 3) dell'enunciato al n. 1, dimostriamo che la formula di Green nel piano:

$$\int_{\gamma} (A\,dx + B\,dy) = \iint_{D} (B_x - A_y)\,dx\,dy \quad , \tag{16}$$

sussiste anche se l'ipotesi 1) viene sostituita da quella che γ sia una linea regolare semplice chiusa di Jordan, circondante il dominio D.

Dal n. 2 risulta intanto la validità della [16] quando γ sia un triangolo tutto interno alla regione R e D sia la regione triangolare delimitata da γ. È allora ovvio che la [16] stessa continua a valere quando γ sia una poligonale chiusa non intrecciata p tutta interna ad R e D la regione poligonale delimitata da p.

È poi noto [1] che nelle ipotesi ammesse per la linea γ si può scegliere su di essa un numero finito di punti $P_0, P_1, \ldots, P_n \equiv P_0$ succedentisi nel senso positivo su γ, in modo tale che la poligonale p_δ di vertici consecutivi P_i non sia intrecciata, abbia il massimo lato δ^* minore di un segmento comunque prefissato, e che il verso di percorrenza determinato su p_δ dai punti P_i risulti positivo per p_δ.

Inoltre, detti D′ e D″ due qualsiasi domini tali che $D' \subset D \subset D''$ senza che le frontiere abbiano punti a comune, può trovarsi un $\bar{\delta}$ tale che, ogni qualvolta sia $\delta^* < \bar{\delta}$, risulti $D' \subset \mathcal{P}_\delta \subset D''$, essendo $\mathcal{P}_\delta$ la regione poligonale delimitata da p_δ. Segue da ciò che l'area di $\mathcal{P}_\delta$ tende all'area di D per $\delta^* \to 0$.

Si controlla poi facilmente che, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, può trovarsi un $\delta_\varepsilon^* > 0$ tale che, se P e Q sono due qualsiasi punti di γ aventi distanza minore di δ_ε^* sia: $|\text{arco } PQ| < \varepsilon$. [2] Negli enunciati precedenti si può pertanto sostituire ovunque la considerazione di δ^* con quella del massimo, δ, degli archi $P_i P_{i+1}$.

Ciò premesso, consideriamo in R un dominio $\overline{D}$ che contenga D nel suo interno; in base a quel che si è detto per δ minore di un opportuno $\bar{\delta}$, $\mathcal{P}_\delta$ è tutta interna a D. Considereremo nel seguito quelle sole poligonali p_δ per cui $\delta < \bar{\delta}$.

---

(1) Cfr. F. Severi e G. Scorza Dragoni, *Lezioni di analisi*, già cit., II_1, pag. 163.

(2) Ed infatti assunta l'ascissa curvilinea s come parametro su γ, notiamo che, nelle ipotesi ammesse, s è funzione univoca del punto P variabile nell'insieme chiuso γ. Per provare l'affermazione fatta basterà mostrare che tale funzione è continua (e quindi uniformemente continua) in γ, e cioè che, fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, ad ogni punto $P_0(s_0)$ di γ può associarsi un numero $\rho_\varepsilon(P_0)$ tale che a tutti i punti di γ interni al cerchio di centro P_0 e raggio $\rho_\varepsilon(P_0)$ corrispondano valori di s soddisfacenti la $|s - s_0| < \varepsilon$, vale a dire costituenti un intorno $\gamma_\varepsilon(P_0)$ di P_0 su γ. Ora, se così non fosse, in ogni cerchio di centro P_0 cadrebbero punti di $\gamma - \gamma_\varepsilon(P_0)$ e quindi P_0 medesimo sarebbe punto di $\gamma - \gamma_\varepsilon(P_0)$ (insieme chiuso), cosicchè P_0 proverrebbe oltrechè da s_0, da qualche valore di $s \neq s_0$, contro l'ipotesi che γ sia costituita di punti semplici.

Per ognuna di esse, secondo si è detto, vale la eguaglianza:

[17] $$\int_{p_\delta} (\mathrm{A}\, dx + \mathrm{B}\, dy) = \iint_{\mathcal{G}_\delta} (\mathrm{B}_x - \mathrm{A}_y)\, dx\, dy \;.$$

Se proveremo che è:

[18] $$\lim_{\delta \to 0} \int_{p_\delta} (\mathrm{A}\, dx + \mathrm{B}\, dy) = \int_\gamma (\mathrm{A}\, dx + \mathrm{B}\, dy)$$

[19] $$\lim_{\delta \to 0} \iint_{\mathcal{G}_\delta} (\mathrm{B}_x - \mathrm{A}_y)\, dx\, dy = \iint_{\mathrm{D}} (\mathrm{B}_x - \mathrm{A}_y)\, dy$$

sarà stabilita la [16].

Cominciamo col dimostrare la [18]. Indicati genericamente con $\mathrm{P}_k(x_k, y_k)$ i vertici di p_δ e posto:

$$\mathrm{S}_\delta = \sum_1^n{}_k \left\{ \mathrm{A}(\mathrm{P}_k)(x_k - x_{k-1}) + \mathrm{B}(\mathrm{P}_k)(y_k - y_{k-1}) \right\} \;,$$

risulta:

$$\lim_{\delta \to 0} \mathrm{S}_\delta = \int_\gamma \left\{ \mathrm{A}\, dx + \mathrm{B}\, dy \right\}$$

onde per provare la [18] basta mostrare che la differenza $\int_{p_\delta}(\mathrm{A}dx+\mathrm{B}dy)-\mathrm{S}_\delta$ tende a zero per $\delta \to 0$.

All'uopo si può scrivere:

[20]
$$\int_{p_\delta} (\mathrm{A}\, dx + \mathrm{B}\, dy) - \mathrm{S}_\delta = \sum_1^n{}_k \int_{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \left\{ [\mathrm{A}(x,y) - \mathrm{A}(\mathrm{P}_k)]\, dx + [\mathrm{B}(x,y) - \mathrm{B}(\mathrm{P}_k)]\, dy \right\}$$

ed osservare che, per l'uniforme continuità di $\mathrm{A}(x,y)$, $\mathrm{B}(x,y)$ in D, scelto $\varepsilon > 0$ può trovarsi un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per $\delta < \delta_\varepsilon$ le espressioni in parentesi quadre nella [20] risultino in valore assoluto minori di $\frac{\varepsilon}{2\gamma}$ (ove con γ s'indica la lunghezza della linea omonima).

Risulta allora:

$$\left| \int_{p_\delta} (\mathrm{A}\, dx + \mathrm{B}\, dy) - \mathrm{S}_\delta \right| < \frac{\varepsilon}{\gamma}\, p_\delta \leqslant \varepsilon \;.$$

Passiamo a dimostrare la [19]. Detto M il massimo in D della funzione continua $|B_x(x,y) - A_y(x,y)|$ e fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, siano D' e D'' due domini tali che:

$$D' \subset D \subset D'' \subset \overline{D}$$

scelti in modo che le aree di D' e D'' differiscano per meno di $\dfrac{\varepsilon}{M}$. Si è detto che esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per $\delta < \delta_\varepsilon$ sia:

$$D' \subset \mathcal{D}_\delta \subset D''.$$

Indicheremo con G_δ il dominio (e la sua area) costituito da tutti i punti del piano interni ad uno solo dei due domini D, $\mathcal{D}_\delta$ e dai loro punti di accumulazione. Tutti i punti di G sono esterni a D' ed interni a D'', e pertanto è:

$$G_\delta \leqslant D'' - D' < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Inoltre:

$$\left|\iint_D (B_x - A_y)\, dx\, dy - \iint_{\mathcal{D}_\delta} (B_x - A_y)\, dx\, dy\right| \leqslant \iint_{G_\delta} |B_x - A_y|\, dx\, dy \leqslant M G_\delta < \varepsilon$$

e con ciò è provata la [19].