PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

*ACTA*
*Vol. XIV – n. 4*
pag. 33-44

# DETERMINAZIONE DELLA CORRENTE SUPERSONICA TRIDIMENSIONALE COL METODO DELLE CARATTERISTICHE (*)

## (GENERALIZZAZIONE DEL PROBLEMA)

PIETRO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Methodus, quae « characterum » dicitur, in supersonicis currentibus investigandis adhibita est utiliter in duobus tantum casibus: cum de motu plano agitur et cum de motu axiali symmetria praedito.

Cum autem adhuc videretur non posse ea methodus adhiberi quod attinet ad missilia, quae ita volent ut incidentia non sit nulla, de hac re investigatum est, idque magno cum labore, motum tridimensionalem reducendo ad complexionem quamdam motuum axialem symmetriam habentium. Auctor autem efficit ut methodo « characterum » investigari directo iam possit circa currentem tridimensionalem supersonicam.

§ 1. ESTENSIONE DEL METODO DELLE CARATTERISTICHE. – Si consideri un'equazione differenziale a derivate parziali del secondo ordine, lineare, i cui coefficienti siano funzioni olomorfe qualsiasi, tanto delle $n$ variabili indipendenti, quanto delle derivate prime della funzione. Nel presente lavoro noi esporremo un metodo di integrazione al passo della suddetta equazione, supponendo note le derivate prime sopra una varietà ad $n-1$ dimensioni dello spazio ad $n$ dimensioni. Il metodo è applicabile quando nello spazio ora nominato od in una sua parte (in tal caso limitatamente a questa) esistano varietà caratteristiche reali, ad $n-1$ dimensioni, nel senso di LEVI-CIVITA (1).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini nella riunione del 5 dicembre 1950.

(1) LEVI CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa.* Zanichelli 1931.

La trattazione che segue è condotta per tre sole variabili perchè questo è il caso che interessa l'Aerodinamica ultrasonica, come appunto avviene per un proietto il quale voli ad incidenza non nulla. Il campo tridimensionale relativo ad una corrente supersonica soddisfa infatti una equazione come quella poco sopra accennata, la quale ammette varietà caratteristiche reali.

I calcoli richiesti nel problema tridimensionale sono necessariamente alquanto più complicati di quelli del problema bidimensionale, studiato dal Ferrari (1) e successivamente dal Ferri (2); la maggior complessità è da imputare soltanto alla natura delle cose, e non al procedimento adottato.

Quando poi non esistono varietà caratteristiche, come avviene nel moto subsonico, l'integrazione può ancora eseguirsi ma, a prezzo di calcoli più laboriosi. Esiste in proposito il metodo di Cauchy.

§ 2. Le varietà caratteristiche. – Si abbia l'equazione in $\varphi$:

$$\sum A_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial y_j} + \theta = 0 \tag{1}$$

$$(A_{ij} = A_{ji}\,;\ \ i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

con $A_{ij}$ e $\theta$ olomorfe nelle variabili $x_1 x_2 \ldots\ldots x_n$ e nelle derivate prime $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$. La condizione di *normalità* secondo il Levi Civita, rispetto ad un altro sistema di variabili $z_1 z_2 \ldots\ldots z_n$, porta alla ricerca delle varietà caratteristiche.

Se $z_1(x_1 x_2 \ldots\ldots x_n) =$ costante, deve essere una caratteristica, occorre che sia nullo il coefficiente di $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_1^2}$. Ora, nelle nuove variabili, la [1] diventa:

$$\sum_{i,j} A_{ij} \sum_{r,s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_r \partial z_s} \frac{\partial z_r}{\partial x_i} \frac{\partial z_s}{\partial x_j} + \theta = 0 \tag{2}$$

(1) C. Ferrari, *Campi di corrente ipersonora attorno a solidi di rivoluzione*, 1937, Giugno « L'Aerotecnica ».

(2) A. Ferri, *Application on the method of caracteristics to supersonic rotational flow*, N. A. C. A., Rep. 841, 1946.

e perciò $z =$ costante sarà una caratteristica se:

$$[3] \qquad \sum_{i,j} A_{ij} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} \frac{\partial z_1}{\partial x_j} = 0, \; (A_{ij} = A_{ji}) \; .$$

Supponiamo di conoscere in un punto $M(x_1{}^0 x_2{}^0 \dots x_n{}^0)$ il valore delle derivate prime della funzione $\varphi$; risulteranno allora noti i valori $A^0_{ij}$ delle $A_{ij}$ in quel punto, e l'equazione differenziale [3], *nell'intorno infinitesimo* del punto M, si ridurrà a:

$$[4] \qquad \sum_{i,j} A^0_{ij} \frac{\partial z_1}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x_j} = 0$$

e nel suddetto intorno si potrà porre:

$$[5] \qquad z_1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x_i - x_i{}^0) \; ,$$

purchè le $\mu_i$ soddisfacciano, a causa della [4], alla condizione:

$$[6] \qquad \sum A^0_{ij} \mu_i \mu_j = 0 \, .$$

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di varietà caratteristiche è che il primo membro della [6] sia una forma quadratica *non* definita, altrimenti tutte le $\mu_i$ della [6] risulterebbero nulle e quindi l'equazione [5] della caratteristica diverrebbe illusoria.

Limitiamo per semplicità le considerazioni allo spazio tridimensionale infinitesimo di M e chiamiamone $x_1 - x_1{}^0, x_2 - x_2{}^0, x_3 - x_3{}^0$ le coordinate cartesiane. Queste stesse, con l'aggiunta di una quarta coordinata nulla, possono considerarsi come coordinate omogenee di un punto all'infinito, mentre $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 = 1$ possono considerarsi come coordinate omogenee di piano, per modo che la [5], assunto $z_1 = 0$, oltre a dare l'equazione di un elemento di superficie caratteristica, cioè:

$$[7] \qquad \mu_1(x_1 - x_1{}^0) + \mu_2(x_2 - x_2{}^0) + \mu_3(x_3 - x_3{}^0) = 0 \; ,$$

darà anche l'equazione del su accennato punto all'infinito in coordinate omogenee di piano. Allora la [6] rappresenta un inviluppo di piani del secondo ordine. I piani inviluppĕranno un cono (*varietà caratteristica*) del secondo ordine, la cui equazione in coordinate di punto attesa la polarità definita dal cono, avrà per coefficienti i complementi algebrici $\alpha_{rs}$ degli elementi $A_{rs}$ della matrice $\|A_{rs}\|$, e sarà dunque:

$$[8] \qquad \sum \alpha_{rs} (x_r - x_r{}^0)(x_s - x_s{}^0) = 0 \; .$$

Nel caso di due sole variabili, poichè nella matrice $\|A_{rs}\|$ il complemento algebrico di $A_{rs}$ è $A_{sr}$, col segno più o meno secondo che $r+s$ è pari o dispari, la [8] si riduce semplicemente a:

$$A_{11}\,dx_2^2 - 2A_{12}\,dx_1\,dx_2 + A_{22}\,dx_1^2 = 0 \ , \tag{9}$$

la quale è la ben nota equazione delle linee caratteristiche connesse alla equazione:

$$A_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1^2} + 2A_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2} + A_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2^2} + \theta = 0 \ , \quad (^1)$$

con $A_{ij}$ funzione delle $x_r$ e delle $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_r}$. Esse sono linee di indeterminazione e, se reali, non permettono l'applicazione del metodo di Cauchy.

§ 3. Il problema bidimensionale. – L'integrazione al passo col metodo delle caratteristiche nel campo bidimensionale è stato adottato dal Ferrari e dal Ferri [2]. Torna però utile dare qui una esposizione su traccia del tutto diversa, tale che renda possibile il passaggio da due a tre e più dimensioni. Siano $a'\,a''$ le proiezioni sugli assi $x_1\,x_2$ di un elemento MN spiccato dal punto $M(x_1^0\,x_2^0)$ e denotino $\varphi_1(P), \varphi_2(P)$ le derivate prime di $\varphi$ rispetto ad $x_1$ ed $x_2$ prese nel generico punto P, ed (1MN), (2MN) le espressioni relative ai punti M ed N così formate:

$$(1MN) = \varphi_1(N) - \varphi_1(M)\ , \quad (2MN) = \varphi_2(N) - \varphi_2(M)\ . \tag{10}$$

Per N infinitamente vicino ad M, indicando con $\varphi_{rs}$ la derivata seconda di $\varphi$ rispetto ad $x_r\,x_s$ e prendendo tanto le $A_{rs}$ che $\theta$ e le $\varphi_{rs}$ nel punto M, si avrà dalle [10]:

$$\begin{aligned} (1MN) &= \varphi_{11}\,a' + \varphi_{12}\,a'' \\ (2MN) &= \qquad\quad \varphi_{12}\,a' + \varphi_{22}\,a'' \\ -\theta &= \varphi_{11}\,A_{12} + \varphi_{12}(2A_{12}) + \varphi_{22}\,A_{22}\ . \end{aligned} \tag{11}$$

(1) Frank-Mises, *Differentialgleichungen der Physik*. 1930, pag. 682.

(2) *Loc. cit.*

La matrice dei coefficienti delle $\varphi_{rs}$ è

[12] $$\|D\| = \left\| \begin{matrix} a' & a'' & 0 \\ 0 & a' & a'' \\ A_{11} & 2A_{12} & A_{22} \end{matrix} \right\|$$

e pertanto nell'ipotesi di $D \neq 0$, indicando per brevità i primi membri delle [11] rispettivamente con $c_1 c_2 c_3$, cioè:

[13] $$c_1 = (1\,M\,N)\ ,\quad c_2 = (2\,M\,N)\ ,\quad c_3 = -\theta$$

e indicando infine con $D_{ij}$ i complementi algebrici degli elementi della matrice $\|D\|$, si avrà secondo la regola di Cramer:

$$\varphi_{11} = \left[\sum_{i=1}^{3} D_{i1} c_i\right] : D\ ,\quad \varphi_{12} = \left[\sum_{i=1}^{3} D_{i2} c_i\right] : D\ ,\quad \varphi_{22} = \left[\sum_{i=1}^{3} D_{i3} c_i\right] : D$$

Evidentemente, se si scelgono $a' a''$ in modo da soddisfare la condizione:

[15] $$D \equiv A_{22} a'^2 - 2 A_{12} a' a'' + A_{11} a''^2 = 0$$

di necessità, essendo per ipotesi le $\varphi_{rs}$ finite, devono risultare nulle le espressioni in parentesi quadra che figurano nelle [14], e si ha allora un sistema di tre equazioni lineari omogenee nelle $c_1 c_2 c_3$, che effettivamente si riducono ad una sola, perchè l'annullarsi di D porta che i complementi algebrici di una linea o colonna siano proporzionali a quelli di ogni altra. Sceglieremo allora una soltanto come indipendente dalle altre e precisamente per semplicità la seconda, la quale, essendo per la [12]:

[15*bis*] $$D_{12} = a'' A_{11}\ ,\quad D_{22} = a' A_{22}\ ,\quad D_{32} = -a' a''$$

ed essendo le $c_i$ date dalla [13], si scriverà:

[16] $$[\varphi_1(N) - \varphi_1(M)]\, a'' A_{11} + [\varphi_2(N) - \varphi_2(M)]\, a' A_{22} + a' a'' \theta = 0\ .$$

Analogamente, per un punto P teoricamente infinitamente vicino ad M, dette $\bar{a}' \bar{a}''$ le proiezioni di MP, avremo:

[16*bis*] $$[\varphi_1(N) - \varphi_1(P)]\, \bar{a}'' A_{11} + [\varphi_2(N) - \varphi_2(P)]\, \bar{a}' A_{22} + \bar{a}' \bar{a}'' \theta = 0$$

dove $\bar{a}' \bar{a}''$ soddisfano ancora alla [15]. È facile vedere che la [16] e [16*bis*] coincidono con le formole del Ferrari (1). Infatti, indicando il quoziente $a'':a'$ con $\lambda$, e denotando con $\lambda_1, \lambda_2$ i due valori di $\lambda$ soddisfacenti alla [15], si ha: $\lambda_1 \lambda_2 = A_{11} : A_{22}$, per modo che la [16] si riduce all'equazione del Ferrari:

$$[17] \qquad d\varphi_1 + \lambda_2 d\varphi_2 + \frac{\theta}{A_{11}} a' = 0$$

nella quale i differenziali sono presi nella direzione di $\lambda_1$.

La [16] e [16*bis*] costituiscono un sistema di equazioni algebriche di primo grado in $\varphi_1(\mathrm{N})$, $\varphi_2(\mathrm{N})$. Così dalla conoscenza delle $\varphi_r$ in M e P si passa a quella delle $\varphi_r$ in N, punto intersezione della retta di direzione $(a' a'')$ spiccata da M con l'altra di direzione $(\bar{a}' \bar{a}'')$ spiccata da P; e si è così proceduto nella integrazione al passo.

§ 4. Il problema tridimensionale. – Indicheremo, analogamente a quanto sopra, le differenze $\varphi_r(\mathrm{Y}) - \varphi_r(\mathrm{X})$ con $(r\mathrm{X}\,\mathrm{Y})$, dove però adesso è $r = 1, 2, 3$.

Siano $a' a'' a'''$ le proiezioni sugli assi $x_1\, x_2\, x_3$ di MN, e $b' b'' b'''$ quelle di MP, dove M N P sono tre punti infinitamente vicini nei quali sono noti i valori delle derivate prime della funzione $\varphi$ soddisfacente alla [1]. Si hanno allora in totale per le sei derivate seconde, prese nel punto M, le sette equazioni seguenti.

$$[18] \quad \begin{aligned}
(1\mathrm{MN}) &= \varphi_{11} a' + \varphi_{12} a'' + \varphi_{13} a''' \\
(1\mathrm{MP}) &= \varphi_{11} b' + \varphi_{12} b'' + \varphi_{13} b''' \\
(2\mathrm{MN}) &= \varphi_{12} a' + \varphi_{22} a'' + \varphi_{23} a''' \\
(2\mathrm{MP}) &= \varphi_{12} b' + \varphi_{22} b'' + \varphi_{23} b''' \\
(3\mathrm{MN}) &= \varphi_{13} a' + \varphi_{23} a'' + \varphi_{33} a''' \\
(3\mathrm{MP}) &= \varphi_{13} b' + \varphi_{23} b'' + \varphi_{33} b''' \\
-\theta &= \varphi_{11} A_{11} + \varphi_{12}(2A_{12}) + \varphi_{13}(2A_{13}) + \varphi_{22} A_{22} + \varphi_{23}(2A_{23}) + \varphi_{33} A_{33}
\end{aligned}$$

Anzitutto si osservi che comunque si scelgano i punti M N P (purchè vicini) le prime sei delle [18] non sono indipendenti; sussiste infatti la relazione:

$$[19] \quad -b'(1\mathrm{MN}) + a'(1\mathrm{MP}) - b''(2\mathrm{MN}) + a''(2\mathrm{MP}) - b'''(3\mathrm{MN}) + a'''(3\mathrm{MP}) = 0$$

se le $\varphi_{rs}$, come abbiamo supposto, esistono nei punti M N P e sono derivabili nel punto M. Possiamo allora scartare dalle [18] la sesta equazione, che è combinazione lineare delle prime cinque e ricavare le $\varphi_{rs}$ dalle [18] restanti, purchè il determinante:

$$[20] \qquad D \equiv \begin{vmatrix} a' & a'' & a''' & . & . & . \\ b' & b'' & b''' & . & . & . \\ . & a' & . & a'' & a''' & . \\ . & b' & . & b'' & b''' & . \\ . & . & a' & . & a'' & a''' \\ A_{11} & 2A_{12} & 2A_{13} & A_{22} & 2A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero. Ricavate così le $\varphi_{rs}$ in M, si possono conoscere le derivate prime (componenti di velocità, se $\varphi$ è il potenziale di velocità) in tutto un intorno (teoricamente infinitesimo) del punto M, e si avvia così la integrazione al passo (caso del moto potenziale subsonico).

Vi sono però casi nei quali è $D = 0$ (ciò accade per alcune direzioni spiccate da M, nel moto potenziale supersonico). Ora, posto:

$$[21] \qquad \alpha_1 = a''b''' - a'''b'', \quad \alpha_2 = a'''b' - a'b''', \quad \alpha_3 = a'b'' - a''b',$$

$$[22] \qquad \sigma \equiv \sum_{r,s=1}^{3} A_{rs}\, \alpha_r\, \alpha_s$$

si trova facilmente essere:

$$[23] \qquad D \equiv - a'''\sigma .$$

Sicchè, nell'ulteriore ipotesi che specificheremo meglio appresso, di $D = 0$, le direzioni $a'\,a''\,a'''$, $b'\,b''\,b'''$ dovranno scegliersi in modo da soddisfare:

$$[24] \qquad \sigma \equiv \sum A_{rs}\, \alpha_r\, \alpha_s = 0 \quad ,$$

dove la forma quadratica, nel caso supersonico soltanto, *non* è definita.

Con tale assunzione le $\varphi_{rs}$ risulteranno finite se, e solo se, saranno nulli i sei determinanti che si ottengono rispettivamente sostituendo ad una delle sei colonne di D la colonna formata dai termini noti delle [18], toltovi beninteso (3 M P), avendo messo da parte la sesta equazione [18]. Le sei equazioni che si ottengono annullando questi sei determinanti, quando al posto di:

$$[25] \qquad (1\,M\,N),\ (1\,M\,P),\ (2\,M\,N),\ (2\,M\,P),\ (3\,M\,N),\ -\theta$$

si ponga rispettivamente:

$$[26] \qquad c_1 \; c_2 \; c_3 \; c_4 \; c_5 \; c_6$$

e quando con $D_{ij}$ si indichino i complementi algebrici degli elementi del determinante $\|D\|$, si scrivono:

$$[27] \qquad \sum_{i=1}^{6} D_{ij} c_i = 0, \quad (j=1,2,3,\ldots 6) \; .$$

Però, a causa dell'annullarsi del determinante D in virtù delle [23] e [24], i minori $D_{ij}$ di una colonna di $\|D\|$ sono proporzionali a quelli di un'altra colonna e perciò le sei equazioni [27] si riducono ad una sola. Sceglieremo la seconda perchè di più facile sviluppo, trascrivendola qui sotto insieme con l'altra indicata nella [19]:

$$[28] \qquad \begin{aligned} &(1MN)D_{12}+(2MN)D_{32}+(3MN)D_{52}=-0D_{02}-(1MP)D_{22}-(2MP)D_{42} \\ &(1MN)b' \;+(2MN)b'' \;+(3MN)b''' =(1MP)a'+(2MP)a''+(3MP)a''' \end{aligned}$$

le quali costituiscono un sistema di due equazioni nelle tre incognite $(rMN)$, essendo conosciute le $\varphi_r$ nei punti M e P.

Per procurarci la terza equazione occorrente alla determinazione delle $\varphi_r(N)$, dovremo valerci ancora di un terzo punto Q della varietà da cui si parte per eseguire l'integrazione della [1]. Indicheremo allora con $q' \; q'' \; q'''$ le proiezioni infinitesime di Q M, e scambieremo nelle precedenti considerazioni l'ufficio di P con quello di Q, fermo restando l'ufficio di M. Di conseguenza, dovremo nella [28] sostituire Q a P e $q' \; q'' \; q'''$ alle $b' \; b'' \; b'''$, ed avremo:

$$[29] \quad (1MN)q'+(2MN)q''+(3MN)q'''=(1MQ)a'+(2MQ)a''+(3MQ)a'''$$

Con le due [28] e la [29] abbiamo tante equazioni quante incognite e possiamo quindi estendere la cognizione del campo di velocità, se $\varphi$ ne è il potenziale, al punto N che giace fuori della superficie su cui stanno M P Q.

§ 5. Determinazione del punto N cui si estende la conoscenza del campo. – Dobbiamo ricordare che le componenti $a' \; a'' \; a'''$ di M N e le componenti $b' \; b'' \; b'''$ di M P devono soddisfare, per il tramite delle $\alpha_1 \; \alpha_2 \; \alpha_3$ date dalle [21], alla [24], la quale si può pensare come equazione di un cono C del secondo ordine, avente per generatrici le direzioni $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3)$. D'altra parte, atteso il significato delle $\alpha_r$, espresse dalle [21], le due direzioni $a'\, a''\, a'''$ e $b'\, b''\, b'''$ giacciono in un piano $\gamma$ perpendicolare ad una generatrice del cono C individuato dalla [24]; ed altrettanto dicasi per il piano formato dalle direzioni $a'\, a''\, a'''$ e $q'\, q''\, q'''$.

I piani $\gamma$, rispettivamente perpendicolari alle generatrici del cono C, a loro volta inviluppano un cono $\Gamma$, che, come vedremo tra poco, è anch'esso del secondo ordine; quindi il piano MNP è perfettamente determinato perchè tangente al cono $\Gamma$ e passante per la retta MP, che è data. Analogamente il piano MNQ è determinato perchè tangente allo stesso cono $\Gamma$ e passante per la retta data MQ. L'intersezione di questi due piani fornisce la retta MN e quindi sopra di essa si assumerà il punto N al quale si estende la cognizione del campo di velocità, a partire da M, P, Q. Alla determinazione geometrica di N facciamo ora seguire quella analitica.

Siano $\mu_1\, \mu_2\, \mu_3\, \mu_4$ le coordinate omogenee di piano ed $x_r - x_r^0$, $(r=1, 2, 3, 4)$ quelle di punto; la condizione di ortogonalità tra la direzione $(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3\, 0)$ ed il piano suddetto è espressa da:

$$[30] \qquad \mu_i = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

così che la [24] darà:

$$[31] \qquad \sum_{r,s=1}^{3} A_{rs}\, \mu_r\, \mu_s = 0$$

che sarà l'equazione del cono $\Gamma$ in coordinate omogenee di piano.

Non è poi fuor di luogo osservare che, in coordinate omogenee di punto, dalla [31] si passa alla [8].

Le coordinate $\mu_1\, \mu_2\, \mu_3\, \mu_4$ del piano MNP soddisferanno alla condizione:

$$[32] \qquad \mu_1 b' + \mu_2 b'' + \mu_2 b''' = 0$$

Per risolvere il sistema [31] [32] che deve fornire i mutui rapporti delle $\mu_r$, individuanti la direzione della normale al piano MNP, conviene anzitutto soddisfare la [32] ponendo ad esempio:

$$[33] \qquad \mu_1 = b'' \,, \;\; \mu_2 = b''' t - b' \,, \;\; \mu_3 = - b'' t \,,$$

oppure mettendo $\mu_r$ nelle forme che si ottengono dalle [33] con permutazione circolare degli apici e degli indici.

Sostituendo le [33] in [31] si ha l'equazione di secondo grado in t:

$$[34] \qquad t^2 [A_{22} b'''^2 - 2 A_{23} b'' b''' + A_{33} b''^2] + 2t +$$
$$+ [A_{12} b'' b''' - A_{22} b' b''' - A_{13} b''^2 + A_{23} b'' b'] + [A_{11} b''^2 - 2A_{12} b' b'' + A_{22} b'^2] = 0$$

Ricavato $t$, lo sostituirà nelle [33] e si avranno le $\mu_r$, cioè i valori proporzionali ai coseni della normale al piano MNP.

Per passare al piano MNQ, le cui tre prime delle coordinate omogenee sono $\bar{\mu}_1\, \bar{\mu}_2\, \bar{\mu}_3$, basterà applicare lo stesso procedimento di sopra, considerando in luogo del sistema [31] [33], l'altro analogo:

$$[35] \qquad \sum A_{rs} \bar{\mu}_r \bar{\mu}_s = 0$$

$$[36] \qquad \bar{\mu}_1 = q'', \quad \bar{\mu}_2 = q''' t - q', \quad \bar{\mu}_3 = - q'' t$$

Invece della [34] avremo:

$$[37] \qquad \bar{t}^2 [A_{22} q'''^2 - 2A_{23} q'' q''' + A_{33} q''^2] + 2\bar{t} +$$
$$+ [A_{12} q'' q''' - A_{22} q' q'' - A_{13} q''^2 + A_{23} q'' q'] + [A_{11} q''^2 - 2A_{12} q' q'' + A_{22} q'^2] = 0$$

Da questa si ricaverà $\bar{t}$ e si sostituirà nelle [36]; si avranno così i valori $\bar{\mu}_1\, \bar{\mu}_2\, \bar{\mu}_3$ proporzionali ai coseni direttori della normale al piano MNQ.

La direzione MN di proiezioni $a'\ a''\ a'''$ che andiamo cercando si otterrà assumendo $a'\ a''\ a'''$ proporzionali ai minori che, col proprio segno si estraggono dalla matrice:

$$[38] \qquad \begin{vmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_3 \end{vmatrix}$$

§ 6. Schema dei calcoli. – Sia data l'equazione [1] e si conoscano le tre derivate prime $\varphi_r\ [x_1\ x_2\ x_3]$ in ciascuno dei punti:

$$M[x_1^0\, x_2^0\, x_3^0],\ P[x_1^0 + b',\ x_2^0 + b'',\ x_3^0 + b'''],\ Q[x_1^0 + q',\ x_2^0 + q'',\ x_3^0 + q''']$$

con le $b$ e le $q$ sufficientemente piccole, tanto da potersi considerare i tre punti suddetti come vicini tra loro.

Anzitutto si calcoleranno le $A_{rs}$ e $\theta$ nel punto M; indi si costruiranno le due equazioni di secondo grado [34] e [37]; risolte, daranno rispettivamente $t$ e $\bar{t}$. Assunto a piacere un fattore di proporzionalità $k$, lo si applicherà ai minori della matrice [38], ottenendo così in virtù di [33] e [36]:

$$
[39] \qquad \begin{aligned}
a' &= k\{t\,\bar{t}(b''q - b'''q'') + (b'q''\bar{t} - b''q't)\} \\
a'' &= k\,b''q''(\bar{t} - t) \\
a &= k\{(b''q'''\bar{t} - b'''q''t) + (b'q'' - b''q')\}
\end{aligned}
$$

Naturalmente $k$ si sceglierà tale che il segmento MN di proiezioni $a'\,a''\,a'''$ risulti nell'ordine di MP ed MQ. Le coordinate di N saranno: $x_1{}^0 + a'$, $x_2{}^0 + a''$, $x_3{}^0 + a'''$.

Trovati $a'\,a''\,a'''$, si è in grado di costruire i complementi algebrici della seconda colonna della matrice $\|D\|$, i quali figurano nella prima delle equazioni [28]. Essi sono:

$$
[40] \qquad \begin{aligned}
D_{12} &= \alpha_1(A_{11}a'''b''' - 2A_{13}a'''b' + A_{33}a'b') \\
D_{22} &= -\alpha_1(A_{33}a'^2 - 2A_{13}a'a''' + A_{11}a'''^2) \\
D_{32} &= -\alpha_2(A_{33}a''b'' - 2A_{22}a'''b'' + A_{22}a'''b''') \\
D_{42} &= \alpha_2(A_{33}a''^2 - 2A_{23}a''a''' + A_{22}a'''^2) \\
D_{52} &= \alpha_1\alpha_2\,A_{33} \\
D_{62} &= \alpha_1\alpha_2\,a'''
\end{aligned}
$$

dove le $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ sono esplicitate nelle [21].

Si formeranno quindi le sei differenze $\varphi_r(P) - \varphi_r(M)$, $\varphi_r(Q) - \varphi_r(M)$, per $r = 1, 2, 3$, cioè le differenze che abbiamo indicato con $(r\,MP)$ $(r\,MQ)$ che figurano nei termini noti delle [28] e [29], e si passerà infine a risolvere il sistema delle tre equazioni algebriche lineari [28] e [29]. Dalle differenze $(r\,MN)$ che così si ricaveranno, si dedurranno immediatamente le $\varphi_r(N)$ ossia le tre derivate prime di $\varphi$ nel punto N. In questo modo nella integrazione, siamo passati dai punti MPQ al punto N.

§ 7. Confronto con i calcoli nelle due dimensioni. – Nel campo bimensionale i calcoli devono di necessità risultare più semplici. Anzitutto, i coefficienti della [1] sono tre, invece di sei. In secondo luogo, invece di due equazioni di secondo grado [34] e [37], se ne ha una sola, la [15]. Terzo: i complementi algebrici $D_{i2}$ sono tre (come dalla [15*bis*]), invece di sei come nelle [40], e sono estratti da un determinante D di terzo ordine anzichè di sesto. Quarto: le derivate prime incognite sono due invece di tre, e pertanto occorrono due sole equazioni per determinarle, invece di tre.

Naturalmente più cresce il numero delle dimensioni e più complicati riescono i calcoli, ed è fatale che ciò accada. Qui, siccome abbiamo calcato la falsariga che abbiamo prima ideato per le due dimensioni, e che ha dato, come si è visto, gli stessi risultati del Ferrari, non potevamo, nel passaggio alle tre dimensioni introdurre semplificazioni ulteriori.