

CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO DEL FONDO MOBILE DI UN CORSO D'ACQUA (*)

(Con due figure)

STEFANO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Perpenso aequilibrio unius particulae in fluvii alveo mobili, Auctor determinat quam aequatione differentiali, quam autem aequatione finita exprimi possit figura, quam exhibet imus alveus, qui a variis hydraulicis et mechanicis viribus sollicitetur.

Elencare le varie circostanze dalle quali dipende l'erosione di un alveo non è semplice. Poche ricerche sistematiche esistono in questo campo e la maggior parte si riferiscono a casi particolari.

Il VERONESE⁽¹⁾, nella premessa ad alcune sue esperienze, ha espresso il convincimento che sull'escavo dovuto ad erosione influiscano le condizioni idrauliche determinanti il flusso dell'acqua ed il peso specifico del materiale di fondo, e che esso prevalentemente prenda origine dagli urti e dalla conseguente formazione di vortici i quali producono sia impulsi verticali, di sollevamento, sia orizzontali, di trascinamento. In proposito è mia opinione che la intuizione del VERONESE circa la formazione di vortici trovi la sua esauriente spiegazione nella teoria dello strato limite, che è lo strato nel quale, nel caso idraulico, a partire dalla parete di fondo, il gradiente della velocità, preso normalmente ad essa, è molto grande, ed il cui spessore è determinabile con la legge di Blasius.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giuseppe Armellini il 12 ottobre 1950.

(1) A. VERONESE, *Erosioni di fondo a valle di uno scarico*. «Annali LL. PP.», F. 9, 1937.

È noto infatti, dalla teoria svolta dal PRANDTL⁽¹⁾, che nell'interno dello strato limite, ad una certa distanza verso valle, dipendente dalla natura e forma della parete investita dalla corrente, questa subisce una inversione. Invero, poichè lo strato di liquido infimo aderisce alla parete, allora lo strato immediatamente superiore, trattenuto da quello sottostante, rallenta e, diminuendo la sua velocità di avanzamento, provoca più a valle, in base al principio di BERNOULLI, un aumento di pressione. A questo aumento segue, allora un richiamo di fluido verso la regione di minore pressione, formando così una controcorrente verso monte. Questa controcorrente, accoppiandosi con quella principale, dà luogo alla formazione del vortice, la cui energia rotatoria, assorbita a spese di quella cinetica posseduta dalla corrente principale, fornisce il lavoro necessario all'escavo; il vortice opera così a modo di macchina escavatrice.

Il fenomeno dell'erosione continuerà fintanto che il fondo non assume quella tale configurazione, la quale consenta l'equilibrio tra le forze dovute alla natura dissipativa dell'attrito, alla viscosità e alle forze di massa.

Nel presente lavoro, basandomi sull'ipotesi di un siffatto equilibrio e, compatibilmente con le condizioni che si verificano nella pratica, schematizzando al massimo il problema, al fine di evitare gravi complicazioni analitiche, sono riuscito a determinare ed integrare l'equazione che permette di tracciare la configurazione assunta dall'escavo, in funzione delle varie caratteristiche della corrente e del materiale dell'alveo.

Lo schema adottato è naturalmente suscettibile di perfezionamenti, in ogni modo mi è sembrato già abbastanza interessante esibire questo primo saggio a carattere esclusivamente teorico, del quale, in una successiva nota, potrà darsi la verifica attraverso apposite esperienze attualmente in preparazione presso il Laboratorio di Idraulica dell'Università di Roma.

§ 1. - EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PROFILO DI EQUILIBRIO. - Si tratti di studiare il fenomeno dell'erosione quando il moto dell'acqua sia in condizioni di regime, per il quale cioè non si veri-

(1) PRANDTL & TIELTIENS, « *Hydro* » und *Aeromechanik*, II Bd, pag. 80.

fichino più variazioni, né di livelli, né di velocità. Immagineremo il primo strato del fondo dell'alveo, quello immediatamente a contatto con la corrente, come costituito di particelle disposte a formare, da monte a valle, una successione di cilindri ad asse orizzontale, di diametro \mathcal{D} , eguale a quello medio che le singole particelle hanno nella realtà, e lunghezza eguale alla larghezza dell'alveo considerato. Lo schema, valido per tutto il corso d'acqua, varrà anche per il tratto

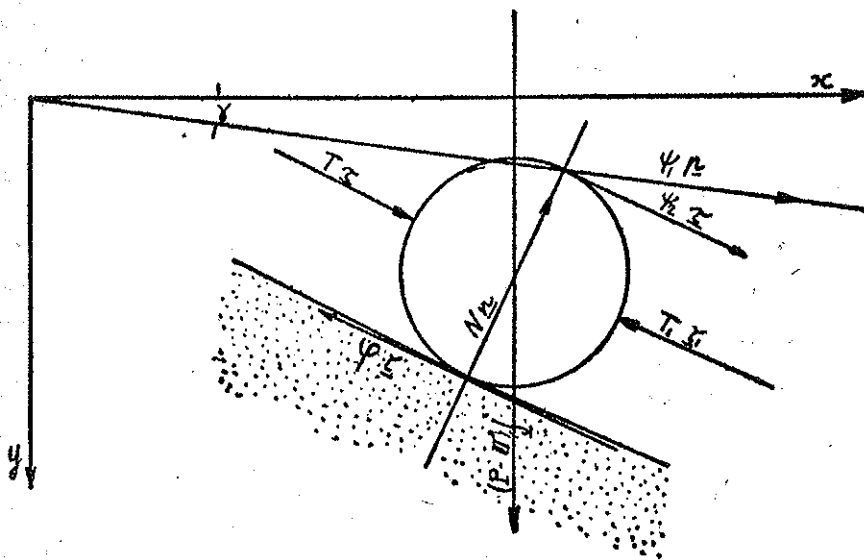


FIG. 1.

nel quale si verifica l'escavo, dove i grani del materiale di fondo si considereranno dunque come solidi adagiati sulle generatrici del cilindroide costituente lo scavo stesso. Lo schema indicato permetterà di concepire il moto del materiale come un moto piano, almeno nel piano longitudinale verticale, della mezzeria dell'alveo.

Supporremo anche che nessuna azione dei materiali leganti, di natura in prevalenza argillosa, venga svolta in modo da modificare le conclusioni del presente studio sull'erosione, poichè essi certamente vengono eliminati dall'azione dilavatrice della corrente, prima che si inizi la formazione dell'escavo. Così i cilindri, nei quali si è schematizzato il fondo, si possono considerare appoggiati l'uno all'altro

e capaci di muoversi strisciando e rotolando rispetto allo strato di fondo immediatamente sottostante a quello in movimento.

Siano al solito ρ_a, ρ_s rispettivamente la massa specifica dell'acqua e del materiale solido di fondo; siano $\underline{j}, \underline{\tau}, \underline{n}$, rispettivamente i versori della verticale (rivolta verso il basso), della tangente (nella figura diretta da sinistra verso destra), e della normale (diretta dal fondo verso la corrente), questi ultimi due versori, tangente e normale, appartengono alla linea s che rappresenta il profilo del fondo in equilibrio con le azioni della corrente. Infine sia \underline{p} il versore della linea che rappresenta il pelo libero dell'acqua. Riferendosi alla disposizione del sistema di forze raffigurato nella fig. 1, si dovranno prendere in considerazione le seguenti grandezze:

a) La forza di trascinamento, che si ritiene eguale alla somma vettoriale delle due seguenti azioni distinte: quella derivante dal moto dell'acqua e che risulta agire sul fondo anche in assenza dell'escavo e quella derivante dal moto dell'acqua nello spessore dello strato limite, nel quale si manifestano le azioni della viscosità, in immediato contatto con le singole particelle delle quali si ricerca la legge di equilibrio. Sarà cioè:

$$[1] \quad \underline{\psi} = \psi_1 \underline{p} + \psi_2 \underline{\tau}$$

nella quale ψ_1 e ψ_2 sono rispettivamente le intensità dei due vettori che rappresentano le due distinte azioni, ambedue quantità costanti. La prima azione di trascinamento, quella di intensità ψ_1 , potrà ritenersi proporzionale alla pendenza piezometrica del corso d'acqua: questa legge, di carattere *macroscopico*, si deduce dalle equazioni globali del movimento (1). Perciò la ψ_1 , che eguaglia il prodotto $\psi_1 \underline{p}$, è da ritenersi nel nostro caso costante in media, prescindendo quindi dalle variazioni di pelo libero che possono riscontrarsi nel corso d'acqua allorchè si forma lo scavo. La seconda azione di trascinamento, quella dovuta alla viscosità, può rappresentarsi mediante la seguente espressione:

$$\underline{\psi}_2 = \int_{\sigma} \mu \frac{dV}{dn} d\sigma \cdot \underline{t} = \psi_2 \underline{\tau}$$

(1) G. DI RICCO, *Lezioni di Idraulica*.

nella quale con σ si è indicata la superficie della particella solida rivolta verso la corrente e perciò lambita dallo strato limite, nel quale l'acqua ha la velocità V , alla distanza n , presa normale alla σ , e con \underline{t} il versore della tangente in un generico punto di σ . Il terzo membro della precedente espressione si potrà scrivere considerando che la media dei vettori diretti secondo \underline{t} nella σ può ritenersi diretto secondo il versore $\underline{\tau}$, della tangente al profilo di equilibrio s , nel punto ove la particella si appoggia al fondo.

In base a quanto si è esposto, si deve concludere che il valore della azione di trascinamento $\underline{\psi}$ dipende sia dalla velocità della corrente e perciò dalla scala del modello usato per le esperienze, sia dallo spessore dello strato limite e perciò dal numero di Reynolds che si riesce a realizzare nel modello stesso.

b) Siano ancora T e T_1 le forze dovute alle pressioni esercitate dai cilindri contigui, rispettivamente a monte e a valle, su quello considerato. Tali forze dipendono ovviamente dalle condizioni secondo le quali avviene il primo urto della corrente sull'alveo mobile (efflusso da bocca a battente, da stramazzo, ecc.). Ad ogni modo l'urto dell'acqua da sempre luogo alla trasformazione dell'energia cinetica in energia di pressione, perciò la pressione iniziale, esercitata sul fondo dell'alveo, potrà ritenersi dipendente dalla pressione di ristagno che compete alla corrente.

c) Siano P e Π rispettivamente il peso e la spinta idrostatica della particella in esame; sia N la reazione perpendicolare all'appoggio, azione esercitata dal fondo contro la particella.

d) Infine siano presenti nello studio dell'equilibrio le azioni dovute agli attriti al moto: la forza φ , esercitata dal fondo sulla particella, la quale si oppone al moto di strisciamento, e la coppia $M_a = N\epsilon$, di attrito al rotolamento, nella quale ϵ è talvolta chiamata « spostamento del contatto ».

Le condizioni alle quali soddisfa l'equilibrio della particella si ottengono in primo luogo annullando il momento risultante del sistema di forze rispetto al punto di appoggio, così si ha:

$$[2] \quad \mathcal{D}(\psi_1 \cos \hat{p} \underline{\tau} + \psi_2) + \frac{\mathcal{D}}{2}(P - \Pi) \cos \hat{j} \underline{\tau} + N\epsilon = 0$$

A questa relazione dovrà aggiungersi l'equazione vettoriale che esprime l'annullarsi del risultante del sistema di forze:

$$[3] \quad \psi_1 \underline{p} + (\psi_2 - \varphi) \underline{\tau} + (T \underline{\tau} - T_1 \underline{\tau}_1) + (P - \Pi) \underline{j} + N \underline{n} = 0$$

Assumeremo l'asse delle ascisse x orizzontale e quello delle ordinate y verticale e diretto verso il basso. Considerando escavi poco profondi ed ad andamento molto graduale, potrà ritenersi il rapporto dy/dx quantità piccolissima rispetto all'unità, sicchè il quadrato di esso sia da considerare quantità trascurabile. Allora, dalla espressione dell'elemento lineare: $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, risulta:

$$[4] \quad \frac{ds}{dx} = \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \dots \cong 1$$

mentre la curvatura del profilo di equilibrio, $1/R$, tenendo conto di quanto ora si è detto, è data da:

$$[5] \quad \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} : \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{3/2} \cong \frac{d^2y}{dx^2}$$

Inoltre la variazione delle forze di compressione può scriversi:

$$[6] \quad T \underline{\tau} - T_1 \underline{\tau}_1 = -\Delta(T \underline{\tau}) = - \left\{ \Delta s \frac{d(T \underline{\tau})}{ds} \right\} = - \left\{ \Delta s \frac{dT}{ds} \underline{\tau} + \Delta s \frac{T}{R} \underline{n} \right\}$$

Sostituendo poi all'elemento di linea Δs , per la sua piccolezza, la dimensione \mathcal{D} del diametro medio del materiale di fondo, e tenendo conto delle [4], [5] e [6] si ottiene, dalla [3]:

$$[7] \quad \psi_1 \underline{p} + (\psi_2 - \varphi) \underline{\tau} - \mathcal{D} \frac{dT}{dx} \underline{\tau} - \mathcal{D} T \frac{d^2y}{dx^2} \underline{n} + (P - \Pi) \underline{j} + N \underline{n} = 0$$

Per passare dall'equazione vettoriale ora scritta a quelle scalari è necessario eseguire i prodotti tra i versori delle direzioni lungo le quali agiscono le varie forze e quelli della tangente e della normale al profilo s di equilibrio del fondo. In questo calcolo, senza commettere apprezzabile errore, si confonderà il seno dell'angolo tra il pelo libero dell'acqua e l'orizzontale, con l'arco, indicato con γ nella figura 1. Allora dalla [7], proiettando dapprima sulla tangente e poi

sulla normale, si otterranno rispettivamente le due seguenti equazioni scalari:

$$[8] \quad \frac{dy}{dx} [\psi_1 \gamma + (P - \Pi)] - \mathcal{D} \frac{dT}{dx} + (\psi_1 + \psi_2 - \varphi) = 0$$

e

$$[9] \quad -\mathcal{D} T \frac{d^2 y}{dx^2} - \psi_1 \frac{dy}{dx} + [\psi_1 \gamma + N - (P - \Pi)] = 0$$

Mentre dalla [2] si ricava:

$$[10] \quad -\frac{\mathcal{D}}{\varepsilon} \left\{ \left(\psi_1 \gamma + \frac{P - \Pi}{2} \right) \frac{dy}{dx} + \psi_1 + \psi_2 \right\} = N$$

Eseguita la integrazione della [8], introducendovi la costante di integrazione C_0 , si giunge alla seguente espressione:

$$[11] \quad \mathcal{D} T = (\psi_1 + \psi_2 - \varphi) x + [\psi_1 \gamma + (P - \Pi)] y + C_0$$

la quale con più semplici notazioni, si scrive anche:

$$[11a] \quad -\mathcal{D} T = Ax + By - C_0$$

Eliminando T ed N fra la [9], [10] e [11a], risulta:

$$[12] \quad (Ax + By - C_0) \frac{d^2 y}{dx^2} - \left\{ \psi_1 + \frac{\mathcal{D}}{\varepsilon} \left(\psi_1 \gamma + \frac{P - \Pi}{2} \right) \right\} \frac{dy}{dx} - \frac{\mathcal{D}}{\varepsilon} (\psi_1 + \psi_2) - (P - \Pi) + \psi_1 \gamma = 0$$

La quale, più semplicemente, con evidente significato dei nuovi simboli si scrive così:

$$[12a] \quad (Ax + By - C_0) \frac{d^2 y}{dx^2} + D \frac{dy}{dx} + F = 0$$

Che è l'equazione differenziale del profilo di equilibrio assunto dell'escavo.

§ 2. - INTEGRAZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PROFILO DI EQUILIBRIO. - Posto allora:

$$[13] \quad Ax + By - C_0 = \eta$$

la [12a] può esprimersi così:

$$[14] \quad \frac{d}{dx} \left(\eta \frac{d\eta}{dx} \right) + A^2 + (D - 2A) \frac{d\eta}{dx} - DA + FB = 0$$

da cui, integrando:

$$[15] \quad \eta \frac{d\eta}{dx} + (D - 2A)\eta + (A^2 - DA + FB)x - C_1 = 0$$

nella quale C_1 rappresenta una costante integrazione. La [15], con più semplici notazioni, può scriversi:

$$[15a] \quad \eta \frac{d\eta}{dx} + H\eta + Kx - C_1 = 0$$

Assunte le nuove variabili z e ξ date da:

$$[16] \quad z = \frac{\eta}{\xi}; \quad \xi = Kx - C_1;$$

la [15a] diventa:

$$[17] \quad \frac{z dz}{z^2 + \frac{H}{K}z + \frac{1}{K}} = \frac{-d\xi}{\xi}$$

Ora esistono due tipi di soluzioni del problema in esame, a seconda che le radici z_1 e z_2 della espressione a denominatore del primo membro della [17], che è un polinomio di secondo grado in z , sono reali o complesse.

a) *Prima soluzione.*

Ammettiamo dapprima che le radici z_1 e z_2 sopra indicate siano reali; allora dalla [17], integrando, si ottiene la seguente espressione:

$$[18] \quad \xi(z) = \left\{ \frac{|z - z_1|}{|z_0 - z_1|} \right\}^{z_1/(z_2 - z_1)} \left\{ \frac{|z_0 - z_2|}{|z - z_2|} \right\}^{z_2/(z_2 - z_1)} \cdot \xi_0$$

da cui, per le [13] e [16], discendono:

$$[19] \quad x = \frac{1}{K} \{ \xi(z) + C_1 \}; \quad y = \frac{1}{B} \left\{ C_0 - \frac{A C_1}{K} + \xi(z) \left(z - \frac{A}{K} \right) \right\}$$

che insieme forniscono, tramite il parametro z e la funzione $\xi(z)$ data dalla [18], la rappresentazione del profilo di equilibrio del fondo.

b) *Seconda soluzione.*

Se invece le radici z_1 e z_2 sono complesse, cioè date da:

$$[20] \quad z_1, z_2 = \frac{-H \pm i\sqrt{4K - H^2}}{2K} = a \mp ib,$$

allora, integrando la [17], si ottiene:

$$[21] \quad \xi(z) = \xi_0 e^{\left(\frac{a}{b}\right) \left(\operatorname{arctg} \frac{z_0 - a}{b} - \operatorname{arctg} \frac{z - a}{b} \right)} \sqrt{\frac{(z_0 - a)^2 + b^2}{(z - a)^2 + b^2}}$$

la quale prende il posto della [18].

c) *Osservazione.*

Anzitutto si osservi che dalla prima delle [16], tenendo conto della [13], si ha:

$$[22] \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{B} \left(A + H - \frac{1}{z} \right)$$

che si annulla per il valore di $z = z_+$:

$$[23] \quad z_+ = \frac{-1}{A + H}$$

Dunque l'annullarsi della derivata $\frac{dy}{dx}$ si verifica per un solo valore del parametro $z = z_+$, valore che dipende soltanto dalle grandezze fisiche del problema, come sono l'attrito, la viscosità, la dimensione dei grani, il loro peso specifico e non dipende affatto dalle condizioni estremali.

d) *Determinazione delle costanti di integrazione.*

Il profilo dell'escavo, quale risulta nella realtà, ha un andamento che può generalmente schematizzarsi con quello rappresentato nella figura 2. Così, riferendosi a tale rappresentazione, a partire dalla progressiva $x=0$, l'approfondimento dell'alveo dal valore iniziale nullo, $y=0$, cresce fino a raggiungere un valore massimo, di qui esso torna a diminuire fino a raggiungere, in un certo punto di ascissa $x=l$, la retta r che costituisce il fondo del canale prima dell'escavo.

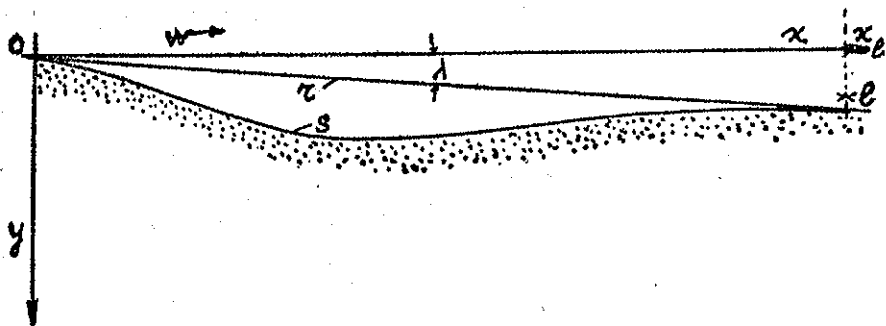


FIG. 2.

In questo punto sarà $y=0$ se l'inclinazione iniziale, λ , del fondo rispetto all'orizzontale è molto piccola e lo scavo di lunghezza limitata, mentre nello stesso punto, secondo l'esperienza, il profilo risulta tangente alla linea r .

In questa ipotesi, dunque, di scavo di lunghezza limitata e piccola inclinazione iniziale del fondo, segue allora dalla seconda delle [16], per $x=0$:

$$[24] \quad \xi_0 = -C_1$$

mentre dalla seconda delle [19], ponendovi $x=0$, $y=0$, tenendo conto della precedente relazione [24] e assunto z_0 corrispondente ad $x=0$, si ha:

$$[25] \quad C_0 - C_1 z_0 = 0$$

sempre dalla seconda delle [16] per $x=l$; segue, indicando con ξ_l il valore assunto da ξ in corrispondenza:

$$[26] \quad \xi_l + C_1 = Kl$$

siccome poi per $x=l$ si deve avere $\frac{dy}{dx} = \lambda$, dove λ è l'inclinazione iniziale del fondo, allora dalla [22] segue:

$$[27] \quad \lambda = \frac{-1}{B} \left(A + H - \frac{1}{z_1} \right)$$

dove z_1 è legata a ξ_1 dalla [26] dalla funzionalità espressa da $\xi = \xi(z)$ secondo la [18] o [21].

In conclusione il sistema di equazioni formato dalle [24], [25], [26], [27] cui si aggiungerà la [18] oppure la [21], a seconda che trattasi di soluzioni reali o complesse del polinomio di secondo grado in z a denominatore del primo membro della [17], stabilisce i legami intercorrenti tra le grandezze $C_0, C_1; z_0, \xi_0, z_1, \xi_1$, e sufficienti alla loro determinazione.

§ 3. - CRITICA DEI RISULTATI ANALITICI. - Dalla descrizione dell'andamento del profilo dell'escavo si nota che per inclinazioni del fondo trascurabili, cioè per $\lambda \cong 0$, in due punti di tale profilo si deve verificare l'annullarsi della derivata $\frac{dy}{dx}$, mentre per quanto si è detto nella osservazione del precedente paragrafo (lettera c), il valore del parametro z che rende nulla tale derivata è unico, dipendente dalle sole quantità fisiche del problema e non dalle sue condizioni estremali. Per soddisfare allora alle esigenze della rappresentazione del profilo in parola segue che la funzione $\xi(z)$, mediante la quale si esprime il legame esistente tra il parametro stesso z e la progressiva x , dovrà risultare una funzione reale a più valori.

Ciò è solamente possibile qualora sussista la [21] anziché la [18]. Difatti nella [21] figura la quantità:

$$[28] \quad e^{-\frac{a}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z-a}{b}}$$

e posto:

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z-a}{b} = \Theta$$

si conclude che i valori di ξ che si ottengono dalla [21] formano una progressione geometrica la cui ragione è data da:

$$[29] \quad e^{-\frac{a}{b}\pi}$$

poichè i valori del fattore [28] si ottengono aggiungendo a Θ multipli di π .

Ora resta da verificare se, attese le varie condizioni fisiche alle quali è soggetto il fenomeno dell'escavo dovuto ad erosione dell'alveo, nella realtà sussista o meno la possibilità che le radici z_1 e z_2 siano quantità complesse.

Perchè ciò sia verificato dovrà risultare positiva e non nulla la quantità sotto il segno del radicale nella [20], che, tenendo conto delle varie posizioni fatte, si può scrivere:

$$[30] \quad 4K - H^2 = 4FB - D^2 > 0,$$

questa rappresenta in forma sintetica la diseuguaglianza:

$$4(P - \Pi)^2 + 4\frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon}(\psi_1 + \psi_2)(\psi_1\gamma + P - \Pi) - 4(\psi_1\gamma)^2 - \left[\psi_1 + \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon}\left(\psi_1\gamma + \frac{P - \Pi}{2}\right)\right]^2 > 0.$$

Delle grandezze che figurano in questa espressione si può dire che è noto il diametro \mathfrak{D} del grano di sabbia del fondo; che la ψ_1 può essere data in funzione della profondità dell'acqua, quando si conosca la pendenza di pelo libero del corso d'acqua; mentre la P e Π possono determinarsi a priori facilmente. Grande incertezza invece permane nella scelta del valore da attribuire alla ε . Nei trattati specifici essa ha il valore compreso tra 0,5 e 0,05 mm., nel caso di rotolamento sia di legno su legno, sia di ferro su ferro.

Così assumendo il diametro del materiale che costituisce l'alveo del corso d'acqua eguale in media a 2 mm, il suo peso specifico eguale a 2500 Kg/m³ e facendo variare la grandezza ε nel campo compreso tra 0,05 e 0,5 mm, si è determinato per tre differenti valori della pendenza del pelo libero: $\gamma = 0,0005$, $\gamma = 0,0010$ e $\gamma = 0,0015$, l'intervallo, h_1, h_2 , delle profondità della corrente, nel quale esistono le radici complesse del polinomio di secondo grado in z , a denominatore della [17].

Nella seguente tabellina si riportano i risultati della applicazione numerica eseguita:

ϵ (m)	$\gamma = 0,0005$		$\gamma = 0,0010$		$\gamma = 0,0015$	
	h_1 (m)	h_2 (m)	h_1 (m)	h_2 (m)	h_1 (m)	h_2 (m)
$0,5 \cdot 10^{-4}$	36,9	569,5	8,1	244,4	5,4	201,5
$2,0 \cdot 10^{-4}$	3,6	131,0	1,7	70,3	1,1	47,2
$3,5 \cdot 10^{-4}$	1,2	79,3	0,6	40,1	0,4	26,9
$5,0 \cdot 10^{-4}$	0	57,8	0	28,6	0	19,1

Dai risultati ora esposti, che sono validi per alvei con inclinazione di fondo, prima che in essi si manifestino gli effetti della erosione, trascurabile o nulla, cioè per i quali $\lambda \cong 0$, si trae che all'aumentare della pendenza di pelo libero, a parità del valore di ϵ , lo intervallo $h_2 - h_1$ diminuisce di ampiezza, abbassandosi anche il valore assunto dall'estremo h_1 .

Inoltre a parità di pendenza di pelo libero, aumentando il valore della grandezza ϵ , la profondità h_1 , che limita inferiormente il campo di esistenza delle radici complesse della [17], diminuisce assai rapidamente e tende ad annullarsi.

In conclusione, le soluzioni analitiche derivanti dalla [18], per la esistenza delle quali è condizione necessaria la possibilità di ottenere radici complesse dalla [17], individuano, per gli alvei a fondo inizialmente orizzontale, o assai lievemente inclinati, la configurazione di equilibrio assunta dal materiale mobile che li costituisce.

Ciò, infine si dovrebbe verificare tanto più facilmente quanto più elevato è l'attrito al rotolamento delle particelle, poichè il limite inferiore dell'intervallo di profondità, h_1 , entro il quale si hanno radici complesse della [17], tende a zero, qualunque sia la pendenza del pelo libero del corso d'acqua, al crescere di ϵ .

La possibilità di ottenere soluzioni analitiche che si identificano con la configurazione ondulata di fondo, sempre per alvei orizzontali o a lieve pendio, esiste anche per altri campi di profondità della corrente, il cui limite inferiore, h_1 , è tanto più piccolo quanto maggiore è la pendenza del pelo libero, per qualsiasi valore assunto dalla grandezza ϵ .

BIBLIOGRAFIA

- H. ROTH, *Kolk-erfahrungen und ihre Berücksichtigung bei der Ausbildung beweglicher Wehre.* «Schweiz. Bauz.», Bd. LXX, 1917.
- M. E. GRUSSER, E. D. LOCHER, *Mitteilungen über Versuche zur Verhütung von Kolkten an Wehren.* «Schweiz. Bauz.», Bd. LXXI, 1918.
- B. GENTILINI, *L'erosione a valle di traverse, esperienze comparative su modelli.* «Memorie ecc. Politecnico di Milano Ist. Idraulica», f. 92, 1938.
- G. NEBBIA, *Sui fenomeni di escavazione di fondo a valle di luci a battente e a Stramazzo.* «Acqua e Gas», aprile 1938.
- E. SCIMEMI, *Sulla relazione che intercede tra gli scavi osservati nelle opere idrauliche originali e nei modelli.* «Energia Elettrica», vol. XVI, f. XI, 1939.
- G. DE MARCHI, G. FILIPPELLI, *Esperienze sull'erosioni di alveo a valle di traverse.* «Memorie ecc. Politecnico di Milano, Ist. Idraulica», f. 51, 1942.