PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIV - N. 13
pag. 143-152

UNA NUOVA VISIONE DELLA GEOMETRIA SOPRA UNA CURVA (*)

FRANCESCO SEVERI
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Super algebricam curvam Auctor, intrinseco praesertim modo, constituit geometriam invariantem relate ad birationales transformationes, quae non postulat praeviam multiplorum punctorum remotionem; quorum insuper omnium remotionem a posteriori operatur methodus quae in hac Nota exponitur.

Il metodo rapido per costruire la geometria sopra una curva, esposto dall'Autore (1), poggia sopra un lemma proiettivo. Qui si vuol compiere un passo ulteriore per una formulazione del tutto intrinseca della geometria sopra una curva, sostituendo a quel lemma un teorema intrinseco nella deduzione e nell'espressione; con migliori possibilità, dunque, di ulteriori avvicinamenti all'algebra astratta (2).

Il metodo qui sviluppato a un certo momento si fonde con quello esposto nel 1920 e sbocca nell'eliminazione globale delle singolarità, senza che occorra alcun processo infinitesimale o alcuna nozione di singolarità infinitamente vicine.

1. – Supporremo acquisite proiettivamente talune proprietà elementari relative alle curve algebriche e alle loro serie lineari; e cioè:

(*) Nota presentata nella riunione del 22 novembre 1951.

(1) F. SEVERI, *Una rapida ricostruzione della geometria sopra una curva algebrica*, « Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », 1920, pag. 930. Vedi pure SEVERI, *Trattato di geometria algebrica*, Bologna, Zanichelli, 1926, pag. 145. Questo metodo fu didatticamente elaborato in forma ancor più elementare da ALBANESE (Vedi il *Trattato* citato, pag. 75).

(2) L'avvicinamento del metodo rapido all'algebra astratta fu compiuto da GRÖBNER, *Idealtheoretischer Aufbau der algebraischen Geometrie,* Berlin-Leipzig, Teubner, 1941.

a) La circostanza ovvia che il punto « generico » d'una curva algebrica irriducibile qualunque è semplice (ossia che i punti multipli sono in numero finito).

b) La nozione di serie lineare g_n^r, d'ordine n e dimensione r, di gruppi di n punti sopra una curva algebrica irriducibile C, quale intersezione di C con un sistema lineare (che senza restrizione può supporsi ∞^r) di forme, dell'ambiente proiettivo di C.

Se non esistono punti fissi dei gruppi di g_n^r, ed è quindi $r \geqslant 1$, il gruppo « generico » di g_n^r consta di n punti semplici, distinti di C, in ciascun dei quali la forma del sistema, che sega il gruppo, ha con C un'intersezione semplice.

Ciò significa che le forme del sistema secante, che intersecano C, fuori degli eventuali punti base, giacenti su C, in meno di n punti, costituiscono entro il sistema una varietà (algebrica) subordinata.

Quanto ai punti semplici di C, che sieno punti base del sistema secante, se in un tal punto, P, la forma « generica » del sistema ha con C in P molteplicità d'intersezione μ (ossia se le forme che hanno con C in P molteplicità maggiore di μ formano in esso una varietà subordinata), il punto P potrà esser considerato come punto fisso dei gruppi di g_n^r, con una molteplicità $\nu (0 \leqslant \nu \leqslant \mu)$.

Dei gruppi della serie contenenti punti multipli di C, ci disinteressiamo, in quanto ci basta ora di considerare gruppi costituiti soltanto da punti semplici di C.

Osservazione. – Abbiamo insistito a precisare ogni volta, nelle varie circostanze in cui è stata usata, il senso della parola « generico » per chi eventualmente lo considerasse tuttora non ben definito! Rinviamo in proposito ad altri nostri lavori sull'argomento e non insistiamo più su questa banale ed ormai inutile precisazione.

2. La precedente definizione *b)* riconduce senz'altro alla definizione della serie lineare quale insieme dei gruppi di livello d'una funzione razionale del punto di C, combinazione lineare di r funzioni razionali linearmente indipendenti, aventi in comune un gruppo di dato livello, costituito da n punti semplici, distinti di C.

Dei gruppi di livello contenenti punti non distinti o punti multipli di C, possiamo qui disinteressarci.

c) Quest'interpretazione conduce poi subito al teorema di unicità e di esistenza per la serie lineare completa di ordine n (ossia non ulteriormente ampliabile) individuata da n punti semplici distinti di C, ivi compreso il caso in cui non esiste alcuna funzione razionale avente quei soli punti come punti del dato livello: nel qual caso la serie individuata si assume di dimensione $r = 0$.

D'altronde la serie lineare completa individuata dal dato gruppo di n punti semplici, distinti, può nel fatto possedere alcuni di quei punti come fissi (cioè di livello indeterminato).

È l'ipotesi che ha per caso estremo una serie completa g_n^0.

Dal teorema di unicità e di esistenza segue infine, quale ovvio corollario, il Restsatz invariantivo, inerente ai concetti di somma e di differenza di serie lineari, limitatamente (in questa fase costruttiva) a operazioni che facciano intervenire serie senza punti fissi in punti multipli di C.

d) Si suppone altresì acquisita la distinzione delle serie lineari in semplici e composte. Tale distinzione non richiede che l'intervento dei gruppi della serie che passano per un punto generico di C, e, astrazion fatta dai punti fissi, il generico di questi gruppi consta di punti semplici e distinti.

Un *gruppo neutro* di una g_n^r data su C $(r > 1)$ è un gruppo di ν punti $(1 < \nu < n)$ semplici e distinti di C, che presenta ai gruppi della serie che debbon contenerlo, una sola condizione; cioè tale che nessun suo punto sia fisso per g_n^r e che tutti i gruppi di g_n^r che passano per uno qualsiasi dei ν punti del gruppo, contengono in conseguenza i $\nu - 1$ rimanenti.

Orbene, *se una* g_n^r *è semplice, non esiste sulla curva che un numero finito* $(\geqslant 0)$ *di gruppi neutri per la serie.*

Data la g_n^r costruiscasi invero la curva irriducibile C′ – definita a meno di un'omografia – detta imagine proiettiva della g_n^r di C. Allora: o C′ risulta in corrispondenza birazionale con C e la g_n^r data è semplice; oppure C′ risulta in corrispondenza $(1, \nu)$ (ove ν è un certo intero, $1 < \nu < n$, divisore di n) e la g_n^r è composta con un'involuzione di grado ν, in corrispondenza birazionale con C. Nel primo caso ogni gruppo neutro di g_n^r dà luogo ad un punto multiplo di C′;

sicchè, per la proprietà a), i gruppi neutri di g_r^n sono in numero finito (¹).

3. Premesso tutto ciò dimostriamo il teorema:

Sieno $|G_m|$, $|H_n|$ *due serie lineari complete, semplici, prive di punti fissi, di dimensioni* >1, *individuate da due gruppi* G_m, H_n, *rispettivamente di* m, n *punti semplici, distinti, privi di punti comuni. Sussiste allora per* l *abbastanza grande* [$\geqslant max\,(m-1, n-1)$], *la relazione:*

$$[1] \qquad lm - \delta(l\,G_m) = ln - \delta(l\,H_n) \ ,$$

ove $\delta(A)$ *denota la dimensione della serie lineare completa* $|A|$.

Consideriamo la serie completa, d'ordine $l(m+n)$, $|l(G_m + H_n)|$ e cerchiamo di calcolarne la dimensione $\delta[l(G_m + H_n)]$.

All'uopo osserviamo che, se $l \geqslant n-1$, un generico gruppo $\overline{\overline{H}}_n$ di $|H_n|$ presenta ai gruppi di $|lG_m|$, che debbon contenerlo, esattamente n condizioni indipendenti.

Invero, essendo $|G_m|$ semplice, non esiste in C che un numero finito di gruppi neutri di $|G_m|$, epperò, essendo inoltre $|H_n|$ priva di punti fissi, $\overline{\overline{H}}_n$ non contiene alcun punto appartenente a qualche gruppo neutro di $|G_m|$. Pertanto i gruppi di $|G_m|$ passanti per un punto qualunque di $\overline{\overline{H}}_n$, non contengono altri punti di $\overline{\overline{H}}_n$; e le serie, almeno ∞^1, residue dei singoli punti di $\overline{\overline{H}}_n$ rispetto a $|G_m|$, sono n distinte fra loro e ciascuna non ha che il punto fisso imposto. Si posson in conseguenza trovare $n-1$ gruppi distinti $G_m^1, G_m^2, \ldots, G_m^{n-1}$ di $|G_m|$ contenenti i punti $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ di $\overline{\overline{H}}_n$ e non il punto restante P_n. I gruppi scelti non hanno inoltre a due a due punti comuni. Il gruppo $G_m^1 + G_m^2 + \ldots + G_m^{n-1}$, insieme ed altri $l-n+1$ gruppi generici di $|G_m|$, costituisce dunque un gruppo X di $|lG_m|$, formato da lm punti semplici di C e distinti, il quale passa per $n-1$ punti di $\overline{\overline{H}}_n$, senza contenere il punto rimanente. Questo prova che $\overline{\overline{H}}_n$ presenta ai gruppi di $|lG_m|$ n condizioni indipendeni.

Assumasi ora in C un'altra serie lineare qualunque $|A|$, individuata da un gruppo A di punti semplici e distinti della curva.

(¹) È quasi superfluo ricordare che esistono serie semplici: per esempio quelle segate su C dalle forme di dato ordine dell'ambiente. Non val la pena che spendiamo parole a dimostrare l'esistenza di serie composte, perchè non intervengono nella nostra trattazione.

È facile constatare che anche ai gruppi della serie completa $|l\,G_m + A|$, per l abbastanza grande, il generico $\overline{\overline{H}}_n$ presenta n condizioni indipendenti. Infatti, $\overline{\overline{H}}_n$, essendo generico entro una serie priva di punti fissi, non ha alcun punto comune col gruppo $\overline{A}$ genericamente prefissato in $|A|$, epperò aggiunto $\overline{A}$ al gruppo X sopra costruito, s'ottiene un gruppo di $|l\,G_m + A|$ contenente $n-1$ punti di $\overline{\overline{H}}_n$ e non il rimanente: donde l'asserto.

Ne segue, per gradi successivi, che le serie

$$|l(G_m + H_n) - \overline{\overline{H}}_n|,\ |l(G_m+H_n) - 2\overline{\overline{H}}_n|, \ldots, |l(G_m + H_n) - l\overline{\overline{H}}_n|\ ;$$

cioè le serie:

$$|l\,G_m + (l-1)\,H_n|,\ |l\,G_m + (l-2)\,H_n|, \ldots, |l\,G_m|,$$

le quali son tutte individuabili con gruppi di punti semplici e distinti (tanti quant'è l'ordine di ciascuna di esse), per $l \geqslant n-1$ hanno le dimensioni

$$\delta[l(G_n + H_n)] - n\ ,\ \delta[l(G_m + H_n)] - 2n, \ldots, \delta[l(G_m + H_n)] - ln\ .$$

Dunque è:

$$\delta[l(G_m + H_n)] - ln = \delta(l\,G_m)\ .$$

Similmente, per $l \geqslant m-1$, sarà:

$$\delta[l(G_m + H_n)] - lm = \delta(l H_n)\ .$$

Sottraendo a membro a membro le ultime due relazioni, se ne trae la relazione [1], che si voleva dimostrare (¹).

4. - Si osservi ora che è certo $lm \geqslant \delta(l\,G_m)$, il segno $=$ valendo allora e soltanto allora che tutti i gruppi di lm punti di C formano una g_{lm}^{lm}. Ma se così è, lo stesso avviene dei resti di un gruppo di

(¹) Il ragionamento esposto è la radice d'un procedimento che ho seguito in generale per dimostrare l'invarianza del genere aritmetico d'una varietà di dimensione qualunque. Vedi SEVERI, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche: seconda memoria*, «Annali di matematica», 1951. Nella conferenza che feci in proposito alla Harvard University l'8 settembre 1950, mi fermai anzi proprio sulle curve per mostrare in questo caso semplice la trama del processo generale.

$lm-1$ punti generici di C, rispetto alla g^{lm}_{lm}, cosicchè C è birazionalmente equivalente ad una g^1_1, cioè ad una retta, e secondo la locuzione corrente, è una *curva razionale.* Poniamo, per l abbastanza grande:

[2] $$lm - \delta(l\mathrm{G}_m) = p \ .$$

L'intero $p \geqslant 0$ risulta indipendente da l e da $|\mathrm{G}_m|$. Il suo annullarsi caratterizza inoltre le curve razionali.

Già la [2], comparata con l'ordinario teorema di Riemann-Roch per le serie non speciali, mostra che p non è che il carattere conosciuto classicamente con la denominazione di *genere* della curva (vedi il successivo n. 5).

Ma qui si tratta di costruire ex novo la teoria, mostrando viceversa, che assunto p a genere della curva, si ricade nel carattere conosciuto con questo nome.

Da notarsi anzitutto che *il genere d'una curva irriducibile (secondo la definizione cui siamo giunti) ha senso sopra una curva con singolarità qualunque (di un qualsiasi spazio ambiente) ed esso risulta invariante per ogni trasformazione birazionale della curva.*

Invero, ad una serie lineare semplice $|\mathrm{G}_m|$, almeno ∞^2, priva di punti fissi su C, risponde, sopra una trasformata birazionale C′ di C, una serie analoga $|\mathrm{G}'_m|$ e gl'interi lm, $\delta(l\,\mathrm{G}_m)$, permangono immutati nel passaggio da $|\mathrm{G}_m|$ a $|\mathrm{G}'_m|$, perchè una serie completa semplice, almeno ∞^2, priva di punti fissi, ha per corrispondente su C′ una serie analoga.

La ragione intima del successo del procedimento è che *ci siamo fondati su proprietà delle serie lineari, le quali hanno senso, non soltanto se riferite all'insieme di tutti i punti semplici o multipli della curva, ma anche al solo insieme dei punti semplici* (1).

5. Dato su C un gruppo H_n di n punti semplici, distinti, esiste sempre qualche serie lineare completa $|\mathrm{G}_m|$, semplice, almeno ∞^2, i cui eventuali gruppi neutri non hanno alcun punto comune con H_n.

(1) È questa la bussola orientatrice per simili procedimenti, come avevo già osservato a pag. 335 del *Trattato di geometria algebrica.*

Una tal serie è per esempio quella individuata da una sezione iperpiana generica di C.

Da quest'osservazione, tenuto conto di quanto precede, si trae il teorema:

La dimensione della serie lineare completa $|H_n|$, *individuata da un gruppo* H_n *di* n *punti semplici, distinti della curva, soddisfa alla disuguaglianza:*

$$\delta(H_n) \geqslant n - p \ .$$

Sia infatti $|G_m|$ una serie lineare completa, almeno ∞^2, soddisfacente rispetto ad H_n alle ipotesi dell'osservazione premessa. Allora n gruppi generici G_m passanti pei singoli punti di H_n sono tra loro distinti e non hanno a due a due punti comuni. Per $l \geqslant n$ esistono dunque in $|lG_m|$ gruppi passanti per H_n, i cui residui sono gruppi K di $lm - n$ punti semplici, distinti della curva, sicchè è $lG_m \equiv H_n + K$.

Ora il gruppo K, costituito da punti semplici, distinti, presenta ai gruppi della $|lG_m|$, che debbano contenerlo, per lo meno tante condizioni quant'è il numero $lm - n$ dei suoi punti; epperò la dimensione della serie residua $|H_n| = |lG_m - K|$ è $\geqslant \delta(lG_m) - (lm - n) = n - p$; c. d. d.

Questo teorema, confrontato con l'analogo della geometria algebrica classica, permette di affermare che il numero p non è altro che il genere riemanniano.

Chiameremo *non speciale* una $|H_n|$ completa per cui $\delta(H_n) = n - p$. Come risulta dai nn. 3, 4, esistono serie non speciali. Se invece $\delta(H_n) > n - p$, la serie sarà detta *speciale.*

6. - Dal teorema precedente si deduce che «i gruppi di lm punti di C, per l abbastanza grande, si distribuiscono in ∞^p serie lineari complete non speciali». Infatti, se $|G_m|$ è una serie soddisfacente alle ipotesi del n. 3, per l abbastanza grande, $|lG_m|$ è non speciale.

D'altronde, a norma del teorema precedente, una serie qualsiasi di ordine lm, individuata da lm punti distinti, semplici di C, ha dimensione $\geqslant lm - p$. E siccome la dimensione di una tal serie, variando il gruppo degli lm punti, non può che crescere per gruppi particolari, così devesi concludere che *ogni* serie di ordine lm (l grande) ha la dimensione $lm-p$. Donde la proprietà enunciata.

Ne deriva che:

Un gruppo Γ *di* p *punti generici, semplici, distinti, della curva* C, *individua una serie lineare di dimensione zero.*

Assumiamo invero due serie $|B'|$, $|B''|$ di ordine lm, appartenenti dunque alla predetta varietà ∞^p. La serie $|\Gamma+B'-B''|$ esiste effettiva, perchè $|\Gamma+B'|$ ha la dimensione $\geqslant (lm+p)-p=lm$ e il gruppo B'' presenta al più ai gruppi di una tal serie lm condizioni. Siccome, tenuto fisso B', due serie distinte $|B''|$ dànno luogo a due serie distinte $|\Gamma+B'-B''|$, la varietà delle serie $|\Gamma|$ contiene almeno ∞^p serie distinte. E questo significa che un generico Γ individua una g_p^0 completa.

D'altronde, preso un gruppo generico di $p+1$ punti, questo, a norma del teorema del n. 5, individua almeno una g_{p+1}^1. Si ricade dunque nella definizione del genere secondo WEIERSTRASS, già da me raggiunta nella trattazione del 1920, sulla base di un lemma prettamente proiettivo.

Da ciò tutte le conseguenze tratte intrinsecamente nella Nota del 1920 o nel passo citato del *Trattato di geometria algebrica*. In particolare, il fatto che per $n>2p-2$ o per $r>p-1$ ogni g_n^r completa su C è non speciale e il teorema che l'imagine proiettiva d'una serie completa $|H_n|$ individuata su C da un gruppo di $n>2p$ punti semplici e distinti, è birazionalmente equivalente a C e priva di punti multipli.

Così i punti multipli eventuali di C spariscono in blocco, mediante una conveniente trasformazione birazionale.

7. – Tralascio di esporre altri teoremi, che si presentano successivamente nello sviluppo della geometria sopra una curva, nei quali occorrerebbe di ridurre al minimo i richiami di carattere proiettivo, pei migliori accostamenti all'algebra astratta. Uno dei punti essenziali è il teorema di riduzione, alla cui dimostrazione occorrerebbe dare un andamento intrinseco, stabilendo in primo luogo che su C esiste sempre qualche serie speciale di ordine $2p-2$. Da ciò seguirebbero facilmente in modo intrinseco le proprietà della serie canonica, il teorema di riduzione e il teorema di RIEMANN-ROCH.

Preferisco chiudere con talune rapide considerazioni relative alla geometria sopra una curva C con singolarità qualunque.

Una volta provato che C possiede un modello privo di punti multipli è noto (vedi per es. il mio *Trattato* citato) come si possa introdurre il concetto di *ramo* e arrivare agli sviluppi in serie che rappresentano il ramo stesso.

Ma si può pensare anche a tale proposito (con vantaggio forse rispetto alle applicazioni all'algebra astratta) di capovolgere la trattazione, stabilendo a priori in modo intrinseco sulla curva C, dotata di singolarità qualunque, il concetto di ramo.

Introdotta in una delle tante maniere possibili (per es. attraverso l'espressione formale della distanza complessa di due punti di C) la nozione d'intorno di un punto di C, al finito o all'infinito, un *ramo* avente l'*origine* in un punto O di C, si può definire come un insieme di punti appartenente all'intorno di O, il quale, mediante una conveniente trasformazione birazionale di C, può ricondursi ad essere l'intorno completo di un sol punto della trasformata di C e non può mai scindersi in insiemi parziali appartenenti a intorni di due o più punti della curva trasformata.

Il ramo è invariante per trasformazioni birazionali e la geometria sopra un modello non singolare della curva si trasferisce senz'altro al modello C, dotato di singolarità qualunque, sostituendo ai punti (semplici) del modello non singolare i *punti-origine* di C, ossia le associazioni di ciascun ramo della curva con la rispettiva origine.

Così per esempio il teorema di unicità e d'esistenza della serie lineare individuata da un gruppo di G di m punti-origine distinti o coincidenti (i quali naturalmente possono anche non coincidere, pur avendo la stessa origine), acquista valore appunto rispetto a gruppi siffatti di punti-origine, ciascun dei quali resta definito intrinsecamente sulla curva.

Ogni serie lineare g_n^r sulla C, dà luogo, nei riguardi d'un dato ramo γ, di origine O, a un *ciclo*, costruito a partire da un gruppo G di g^r, contenente il punto-origine (O, γ). Il ciclo è formato dagli i punti di un gruppo $\overline{G}$ di g_n^r, mobile nell'intorno di G, i quali appartengono a γ e si permutano fra loro per le circolazioni di $\overline{G}$ attorno a G.

Si può anche considerare l'*ordine* (intrinseco) s di un ramo γ di C rispetto a g_γ^r. È la molteplicità s dell'origine O del ramo pel gruppo generico di g_n^r contenente il punto-origine (O, γ). Quando $s=1$ il ramo è *lineare* rispetto alla data serie; ma la sua molteplicità cambia naturalmente quando la serie cangia.

La possibilità di costruire un modello non singolare di C equivale alla possibilità di costruire su C una serie lineare rispetto a cui ogni ramo di C sia lineare.

Come ed in qual misura concetti analoghi posson esser trasportati alle falde di varietà algebriche?