PONTIFICIA ACADEMIA SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIV - N. 1
pag. 1-8

TEOREMA D'UNICITÀ PER LE EQUAZIONI INTEGRALI NON LINEARI OTTENUTE DA FUNZIONI DI COMPOSIZIONI A NUCLEO SOMMABILE (*)

GIULIO PLATONE

SVMMARIVM. — Auctor demonstrat, in classe $[l]$ functionum quae pseudo-limitatae dicuntur, theorema unicitatis quod attinet ad aequationes integrales non lineares huius generis

[1] $$a_1 Y + \sum_{r}^{1,m} (P_r * \overset{\wedge}{Y^r})_A = k_0 \quad \text{in quibus} \quad \begin{cases} 1 \leq m \leq +\infty \\ a_1 \neq 0 \end{cases}$$

quae obtineantur aequando functioni cognitae pseudo-limitatae $k_0(x, y)$ functionem generalis compositionis (erga pondus $A(y)$, quod addi possit) alicuius functionis ignotae $Y(x, y)$.

DEFINIZIONI, CONVENZIONI

1. – Sia:

a) E un lebesghiano, limitato o no, di misura finita sullo spazio euclideo $S_r(x_1, x_2, \ldots, x_r)$;

b) $A(x)$, con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ una funzione sommabile in E;

c) $[l]$ la classe delle funzioni pseudo limitate (1) nell'insieme $E^{(2)} = (E^x \cdot E^y)$ dello spazio $S_{2r} = (x_1, x_2, \ldots, x_r; y_1, \ldots, y_r)$ e permutabili tra loro rispetto al poso $A(y)$;

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Ugo Amaldi il 25 maggio 1950.

d) $k_0(x, y)$, $k_1(x, y), \dots, k_n(x, y)$, $n+1$ funzioni di $[l]$;

e) M un confine superiore dell'integrale, esteso ad E, di $|A(y)|$;

[1] $$\int_E |A(y)|\, dy \leqslant M \;;$$

f) l_s un pseudo confine superiore (³) di $|k_s(x, y)|$ in $E^{(2)}$;

[2] $$|k_s(x, y)| \leqslant l_s \qquad (s = 1, 2, \dots, n)$$

g) Posto

[3] $$\mathcal{S}_r(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_n}^{0,\, s_r} a^{(r)}_{i_1, i_2, \dots i_n} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \dots z_n^{i_n} \qquad (r = 1, 2, \dots, m)$$

la funzione delle $n+2$ variabili complesse $z, z_0, z_1, \dots, z_n$

[4] $$F(z_1, z_2, \dots, z_n) = a_1 z + \sum_{r}^{1,\, m} \mathcal{S}_r(z_1, z_2, \dots, z_n) \cdot z^r - z_0 \;, \qquad a_1 \neq 0$$

sia olomorfa nell'intorno dell'origine $z = z_0 = z_1 = \dots = z_n = 0$ (*).

Osservazione: Siccome nella presente nota considero solo prodotti di composizione col peso $A(y)$ per brevità rappresenterò tale operazione col simbolo $f * \varphi$ della composizione ordinaria anzichè con $(f * \varphi)_A$. Conseguentemente scriverò $\overset{A}{f^r} * \overset{A}{\varphi^s} * \overset{A}{\psi^t}$ al posto di $[(\overset{A}{f^r} * \overset{A}{\varphi^s})_A * \overset{A}{\psi^t}]_A$ e così via.

Proprietà preliminari e posizione del problema

2. – Premetto che nelle ipotesi poste si ricava facilmente, per i monomi di composizione col peso $A(y)$, la maggiorazione

[5] $$\left| \overset{A}{k}{}_1^{i_1} * \overset{A}{k}{}_2^{i_2} * \dots * \overset{A}{k}{}_n^{i_n} \right| \leqslant \frac{1}{M} |M l_1|^{i_1} |M l_2|^{i_2} \dots |M l_n|^{i_n}$$

valida quasi ovunque in $E^{(2)}$. Quindi, se si pone $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n$ e se

$$P(x, y, \lambda) = \sum_{i}^{0,\, s} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \overset{A}{k}{}_1^{i_1} * \overset{A}{k}{}_2^{i_2} * \dots * \overset{A}{k}{}_n^{i_n}$$
$$(0 \leqslant i \leqslant i_1 + i_2 + \dots + i_n \leqslant s \leqslant +\infty)$$

(*) È chiaro che questa condizione è necessaria solo se m o qualche s_r è infinito.

rappresenta una serie multipla di composizione col peso $A(y)$ (4), risulta pure, quasi ovunque in E (2),

[6]
$$|P(x,y,\lambda)| \leqslant |a_{0,0,\dots,0}| + \frac{1}{M} \sum_{i}^{0,s} |a_{i_1,i_2,\dots,i_n}| \, |\lambda_1 l_1 M|^{i_1} |\lambda_2 l_2 M|^{i_2} \dots |\lambda_n l_n M|^{i_n}$$

Se poi $k_1(x,y)$ e $k_2(x,y)$ sono due funzioni qualunque di $[l]$ e $\boldsymbol{d}$ un pseudo confine superiore di $|k_1(x,y)-k_2(x,y)|$ in E (2), dalla relazione

$$\overset{A}{k_1}{}^r - \overset{A}{k_2}{}^r = (k_1-k_2) * \overset{A}{k_2}{}^{r-1} + k_1 * (k_1-k_2) * \overset{A}{k_1}{}^{r-2} + \dots + \overset{A}{k_1}{}^{r-1} * (k_1-k_2)$$

di immediata verifica è valida anche per le funzioni non permutabili, maggiorando, risulta, quasi ovunque in E,

$$[7] \qquad \left|\overset{A}{k_1}{}^r - \overset{A}{k_2}{}^r\right| \leqslant \boldsymbol{d}\, M^{r-1} S_r$$

avendo posto

$$S_1 = 1 \qquad S_r = \sum_{i}^{0,r-1} |l_1|^{r-1-i} |l_2|^i \qquad r>1$$

3. – Ciò premesso dimostro che:

Teorema di unicità. Se le funzioni

$$[8] \qquad P_r(x,y,\lambda) = \sum_{r}^{0,s_r} a^{(r)}_{i_1 i_2 \dots i_n} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \dots \lambda_n^{i_n} \overset{A}{k_1^{i_1}} * \overset{A}{k_2^{i_2}} * \dots * \overset{A}{k_n^{i_n}}$$

rappresentano serie multiple di composizione col peso $A(y)$ delle $n+1$ funzioni $k_i(x,y)$ di $[l]$, l'equazione integrale non lineare (5)

$$[9] \qquad a_1 Y(x,y;\lambda) + \sum_{r}^{1,m} \int_E A(\xi) P_r(x,\xi,\lambda) \overset{A}{Y^r}(\xi,y,\lambda)\, d\xi - k_0(x,y) = 0$$

con $a_1 \neq 0$ (sotto condizioni abbastanza larghe e per $\lambda \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ in un conveniente e determinabile intorno dell'origine $\lambda = 0$) ammette in $[l]$, una ed una sola soluzione.

Ritengo distinte due soluzioni quando in E (2) differiscono in un insieme di misura non nulla.

Dimostrazione: Dato che la serie multipla di composizione che figura al primo membro della [9] si ottiene dalla [4] mediante una trasformazione di VOLTERRA ([6]) estesa, e siccome nell'origine $z = z_0 = z_1 = = \dots = z_n = 0$ è $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 = a_1 \neq 0$ l'equazione

$$[9'] \qquad F(z, z_0, z_1, \dots, z_n) = 0$$

si trova nelle condizioni richieste per applicare il teorema fondamendel VOLTERRA sulle equazioni integrali già esteso nel caso attuale nella memoria citata in [5] ([7]). Ne consegue, a norma del ricordato teorema, che la [8], per $|\lambda| = |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n|$ convenientemente piccolo, ammette in $[l]$ soluzione, soluzione che si ottiene sostituendo, nella funzione ottenuta risolvendo la [9'] rispetto alla z, al posto delle $z_1, z_2, \dots z_n$ rispettivamente le funzioni $k_1(x, y)$, $k_2(x, y) \dots k_n(x, y)$ e considerando i loro prodotti e le loro potenze come prodotti e potenze di composizione col peso $A(y)$. Affermo che questa soluzione in $[l]$ è unica.

4. – Esamino in un primo tempo, il caso abbastanza generale che le $P_r(x, y, \lambda)$ siano nulle nell'origine $\lambda = 0$ (*) sicchè la funzione $\sum_r^{1,m} P_r \overset{A}{Y}{}^r$, che figura al primo membro della [9], oltre che a risultare olomorfe nelle λ_r si annulla per $\lambda = 0$.

Se ora, per assurda ipotesi, la [9] ammettesse in $[l]$ due soluzioni distinte $Y_1(x, y)$ e $Y_2(x, y)$ lo pseudo estremo superiore ([8]) $\boldsymbol{d}$ della funzione $|Y_1 - Y_2|$ in $E^{(2)}$ risulterebbe positivo e finito, e si avrebbe

$$[10] \qquad |a_1| \, |Y_1 - Y_2| \leqslant \sum_r^{1,m} |P_r * (\overset{A}{Y}{}_1^r - \overset{A}{Y}{}_2^r)|$$

e la serie differenza $\sum_r^{1,m} P_r * (\overset{A}{Y}{}_1^r - \overset{A}{Y}{}_2^r)$ risulterebbe anch'essa olomorfa nelle λ_r e nulla nell'origine $\lambda = 0$.

(*) È chiaro che le $P_r(x, y, \lambda)$ si annullano per $\lambda = 0$ se e solo se i coefficienti $a^{(r)}_{00\dots0}$ sono nulli, ossia se nelle serie $P_r(x, y, \lambda)$ è sempre $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n \geq 1$, sicchè i sommatori che figurano nelle [8] andranno estesi da 1 a s_r anzichè da 0 a s_r.

Conseguirebbe allora che prefissato ad arbitrio un numero positivo $\delta < \boldsymbol{d}$, in un intorno completo e sufficientemente piccolo di $\lambda = 0$, e quasi ovunque in $E^{(2)}$, sarebbe

$$\sum_{r}^{1,m} |P_r * (\hat{Y}_1{}^r - \hat{Y}_2{}^r)| \leqslant |a_1| \delta$$

e quindi per la [10]

$$|Y_1 - Y_2| < \delta < \boldsymbol{d}$$

quasi ovunque in $E^{(2)}$, il che è assurdo, in quanto si è supposto che lo pseudo esterno superiore di $|Y_1 - Y_2|$ in $E^{(2)}$ fosse $\boldsymbol{d} > \delta$. Si conclude che:

Se tutti i coefficienti $a^{(r)}_{00\ldots0}$ *sono nulli l'equazione integrale non lineare* [9], *nelle ipotesi abbastanza generali di cui alle lettere* a), b), ... g) *e per* $|\lambda|$ *convenientemente piccolo, ammette nella classe* [l] *una ed una sola soluzione.*

In particolare l'equazione integrale omogenea

$$a_1 Y + \sum_{r}^{1,m} P_r * \hat{Y}{}^r = 0$$

ammette, nella classe [l] una sola soluzione e precisamente quella quasi ovunque nulla in $E^{(2)}$.

Osservazione: È manifesto che, se il termine noto k_0 è una funzione pseudo limitata della sola x in E, le soluzioni della [9] andranno cercate nella classe delle funzioni della sola x, pseudo limitate in E e permutabili con le $k_r(x, y)$ rispetto al peso $A(y)$, ed in questa classe, vale il teorema di unicità pocanzi dimostrato.

5. – Nell'eventualità precedentemente esclusa, che non tutte le $P_r(x, y; \lambda)$ siano nulle per $\lambda = 0$ riesco a dimostrare il teorema di unicità non in [l] ma nella classe delle funzioni equi-pseudo limitate da un prefissato numero positivo $\bar{l}$ e ciò purchè sia soddisfatta la maggioranza

$$h) \qquad |a_1| > \sum_{r}^{1,m} r\,|a^{(r)}_{00\ldots0}|\, M^r \bar{l}^{r-1} .$$

Infatti anche se qualche coefficiente $a^{(r)}_{00\dots0}$ è $\neq 0$, se la [9] ammettesse due soluzioni distinte Y_1 e Y_2 di [l] la differenza $\sum_{r}^{1,m} P_r * (\overset{\Lambda}{Y}_1{}^r - \overset{\Lambda}{Y}_2{}^r)$ rappresenterebbe ancora, nell'intorno completo dell'origine $\lambda = 0$, e quasi ovunque in $E^{(2)}$, una funzione olomorfa delle λ_r. Ma mentre al n. 4 questa differenza era infinitesima con $|\lambda|$ ora essa (che è una serie multipla delle λ_r uniformemente ed assolutamente convergente nell'intorno di $\lambda = 0$) tenderebbe uniformemente a $\sum_{r}^{1,m} a^{(r)}_{00\dots0} * (\overset{\Lambda}{Y}_1{}^r - \overset{\Lambda}{Y}_2{}^r)$ per $\lambda \to 0$. Pertanto, prefissato ad arbitrio un numero positivo ε, comunque piccolo, esisterebbe in corrispondenza un intorno completo e sufficientemente ristretto dell'origine $\lambda = 0$, e sia J_ε, tale che per λ in J_ε e quasi ovunque in $E^{(2)}$, risulterebbe

$$[11] \qquad \sum_{r}^{1,m} |P_r * (\overset{\Lambda}{Y}_1{}^r - \overset{\Lambda}{Y}_2{}^r)| < \sum_{r}^{1,m} |a^{(r)}_{00\dots0} * (\overset{\Lambda}{Y}_1{}^r - \overset{\Lambda}{Y}_2{}^r)| + \varepsilon \ .$$

Ma per la [7], e sempre rappresentando $\boldsymbol{d}$ lo pseudo estremo superiore di $|Y_1 - Y_2|$ in $E^{(2)}$, e

$$[12] \qquad \left|\overset{\Lambda}{Y}_1{}^r - \overset{\Lambda}{Y}_2{}^r\right| \leqslant r\boldsymbol{d}(M\bar{l})^{r-1}$$

dove $\bar{l}$ è il prefissato comune modulo di limitatezza delle eventuali soluzioni Y della [10]. Pertanto maggiorando il secondo membro della [10] con la [11] e la [12] risulterebbe, quasi ovunque in $E^{(2)}$, e per λ contenuto in J_ε

$$|a_1|\,|Y_1 - Y_2| \leqslant \boldsymbol{d} \sum_{r}^{1,m} r\,|a^{(r)}_{00\dots0}|\, M^r l^{r-1}$$

e quindi

$$|Y_1 - Y_2| \leqslant \frac{\sum_{r}^{1,m} r\,|a^{(r)}_{00\dots0}\, M^r\, l^{r-1}|}{|a_1|}\, \boldsymbol{d}$$

il che, tenuta presente la condizione h), è assurdo. Si conclude che:

Nell'eventualità che non tutti i coefficienti $a^{(r)}_{00\dots0}$ delle [8] *siano nulli, la* [9] *– una volta soddisfatte le condizioni $a) \dots h)$ – ammette,* *nella classe delle funzioni equi pseudo limitate dal numero $\bar{l} > 0$ e per $|\lambda|$ sufficientemente piccolo una ed una sola soluzione.*

Vale anche in questo caso l'osservazione fatta alla fine del n. 4.

6. – Le deduzioni di cui sopra ed altre ancora si potrebbero ottenere considerando l'equazione (1) come una trasformazione funzionale di insieme $[l]$ e di coinsieme contenuto in $[l]$. Ma di ciò mi occuperò in una nota successiva.

---

(1) Una funzione $f(x, y)$ si dirà col PICONE pseudo limitata in un insieme E se è ivi quasi continua secondo TONELLI e se esiste un numero positivo $L < +\infty$ tale che risulti, quasi ovunque in E, $|f(x, y)| < L$. Vedi: M. PICONE, *Fondamenti analisi funzionale lineare*, libreria dell'Università di Roma, 1943, pag. 200.

(2) Ricordo che per prodotto di composizione col peso $A(y)$, sommabile in E, di due funzioni $f(x, y)$ e $\varphi(x, y)$, pseudo limitate in E (3), intendo l'espressione $\int_E A(\xi) f(x, \xi) \varphi(\xi, y) d\xi$ che altrove ho rappresentato col simbolo $(f * \varphi)_A$. Nell'ipotesi poste l'integrale ora scritto ha senso. Se risulta $(f * \varphi) = (\varphi * f)_A$ le due funzioni si diranno permutabili fra loro col peso $A(y)$. Ciò posto si definisce il prodotto (associativo) di composizione di più funzioni e quindi, con la posizione $\overset{A}{f^r} = (\overset{A}{f^{r-1}} * f)_A = (f * \overset{A}{f^{r-1}})_A$ $(r > 1)$ la potenza di composizione col peso $A(y)$ ed infine i polinomi e le serie di composizione col peso $A(y)$ che risultano tutte funzioni di $[l]$. Per maggiori ragguagli vedi la mia memoria di cui in (5).

(3) Cioè un nnmero l_s tale che risulti quasi onunque in E (2) $|K_s(x, y)| \leq l_s$.

(4) Dove il sommatorio va esteso a tutte le permutazioni con ripetizioni degli interi non negativi $i_1, i_2, \ldots\ldots, i_n$ la cui somma i è compresa tra 0 e s. Osservo inoltre che, detto $R = \lim'' |a_{i_1 i_2 \ldots i_n}| \dfrac{1}{i_1 + i_2 + \ldots + i_n}$ il raggio ristretto di convergenza della serie $\sum\limits_{i}^{0, s} a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \ldots \lambda_n^{i_n}$, la $P(x, y, \lambda)$ è una funzione olomorfa delle λ_r nell'intorno $\lambda_r \leq \dfrac{R}{l_r M}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ dell'origine $\lambda = 0$.

(5) Che si risolve con le considerazioni da me fatte nella memoria *Teoria della composizione col peso* $A(y)$ *sommabile nella classe delle funzioni pseudo limitate ecc.* negli «Atti del congresso della Soc. Italiana Progresso Scienze», del 1949 a Roma. In corso di stampa.

(6) V. VOLTERRA et J. PÉRÈS, *Leçons sur la composition ecc.* Gauthier-Villars, Paris, pag. 24 e seg.

(7) In questa memoria il teorema in questione è stato esteso al caso della composizione col peso $A(y)$ di funzioni di classe $[l]$ ed alla composizione ordinaria delle funzioni di classe $[l_A]$, ossia del tipo $A(y)\, k(x, y)$, con $A(y)$ somma-

bile in E ed $k(x, y)$ in [l]. Confrontare anche: G. PLATONE, *Sul passaggio di certe equazioni algebrico funzionali a quelle integro-funzionali ecc.* in « Acta, Pontificia Academia Scientiarum », Vol. IX, n. 22, 1946.

(8) Per pseudo-estremo superiore di una funzione $f(x, y)$ in un insieme C di misura non nulla su $S_{2r}^{x,y}$ intendo l'estremo inferiore $\boldsymbol{d}$ dei numeri l per cui avviene, quasi ovunque in C, $|f(x, y)| \leq l$. Esso è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1) $|f(x, y)| \leq \boldsymbol{d}$, quasi ovunque in C.

2) Prefissato ad arbitrio un numero positivo $\delta < \boldsymbol{d}$ risulta positiva la misura dell'insieme $U(|f|, \boldsymbol{d} - \delta)$ dei punti di C in cui è $|f(x, y)| > \boldsymbol{d} - \delta$.