

SUL CALCOLO DI SCHIERE ALARI
DI PROFILI SOTTILI
DI CURVATURA NON TRASCURABILE (*)

(Con due figure)

ETTORE FUNAIOLI

SVMMARIVM. — Ad alarum agmina, quae parvae sint crassitudinis neque minimae curvaturae, computanda, rationem vero proximam Auctor exprimit. Primum alam solam curvatam observat, eandem secutus rationem, qua GLAUBERT usus est ad alam minimae curvaturae computandam; deinde Auctor alas in agmine perpendit, ratione a BETZ reperta usus, cuius fundamentum suppositionis vortices sunt. Ratio, quam supra diximus, apta est alis quarum curvamen non multum sit circuli arcui dissimile.

1. — Consideriamo dapprima un profilo isolato privo di spessore ed avente la forma di arco di circonferenza. Effettuiamo sul profilo una distribuzione di vorticità e determiniamo la legge di questa distribuzione con la condizione che la corrente risulti tangente al profilo in ogni suo punto. Per questa determinazione conviene procedere a mezzo della trasformazione conforme.

Più precisamente consideriamo la corrente attorno al profilo come la trasformata, mediante una trasformazione Joukowski, della corrente attorno ad un cerchio. Indicando con ζ il piano del cerchio e con z il piano del profilo suo trasformato, applichiamo la trasformazione

$$z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{c^2}{\zeta} \right)$$

con il che, come è noto, un punto P del profilo viene a trovarsi (vedi fig. 1) sul punto medio del segmento P' P'' essendo P' P'' punti corrispondenti sul cerchio, ossia punti di intersezione del cerchio con

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Enrico Pistolesi nella riunione del 5 Dicembre 1950.

raggi uscenti dall'origine delle coordinate simmetricamente disposti rispetto all'asse delle ascisse. L'arco di circonferenza trasformato del cerchio viene a passare per il centro del cerchio ed ha i suoi estremi nei punti C e C' intersezioni del cerchio con l'asse delle ascisse.

La distribuzione di vorticità sull'arco di circonferenza costituente il profilo, dovuta ad una velocità asintotica di componenti U e V secondo gli assi x ed y , può facilmente trovarsi determinando la differenza di potenziale sull'arco di circonferenza e derivando lungo l'arco l'espressione di detta differenza di potenziale.

Riferendoci per i simboli alla fig. 1, indichiamo in particolare con α l'angolo che la congiungente il punto M con il punto P forma con l'asse delle ordinate, con α_1 il valore di α per P coincidente con C. Come verso positivo di α prendiamo il verso antiorario. Poniamo inoltre:

$$\operatorname{tag} \alpha = \delta; \quad \operatorname{tag} \alpha_1 = \Delta; \quad \cos \varphi = \frac{\delta}{\Delta}$$

Questa ultima relazione fa corrispondere ad ogni punto P del profilo un valore di φ ed ha una interpretazione geometrica molto semplice che risulta chiara dall'esame della fig. 1.

Con le posizioni precedenti, e prendendo per verso positivo della circolazione il verso antiorario, ad una velocità U diretta secondo l'asse x corrisponde sul profilo una distribuzione di vorticità

$$\gamma_u = -2U \frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta^2}} \frac{1 - (2+\Delta^2) \cos^2 \varphi}{\operatorname{sen} \varphi (1+\Delta^2 \cos^2 \varphi)}$$

Analogamente, ad una velocità V diretta secondo l'asse y corrisponde una distribuzione di vorticità:

$$\gamma_v = -2V \frac{\cot \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} \frac{1+\Delta^2 (2 - \cos^2 \varphi)}{1+\Delta^2 \cos^2 \varphi}$$

Per regolarizzare la corrente allo spigolo (per $\varphi = \pi$), occorre sovrapporre alla corrente di componenti U e V una circolazione Γ a cui corrisponde una distribuzione di vorticità sul profilo:

$$\gamma_\Gamma = \frac{\Gamma}{2\pi R} \frac{\sqrt{1+\Delta^2}}{\Delta \operatorname{sen} \varphi}$$

essendo Γ dato dalla espressione:

$$\Gamma = -4\pi R \frac{\Delta}{1+\Delta^2} (V + \Delta U)$$

valore determinato con la condizione che, per $\varphi = \pi$, risulti:

$$\gamma = \gamma_u + \gamma_v + \gamma_r = 0.$$

Pertanto la distribuzione di vorticità dovuta ad una corrente indisturbata, di velocità V_0 e di incidenza β rispetto alla corda del profilo, ha la espressione:

$$[1] \quad \gamma = -\frac{2 V_0}{\sqrt{1+\Delta^2}} \left[2 \cos \beta \frac{\Delta \sin \varphi}{1+\Delta^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\sin \beta}{\sin \varphi} \left(\frac{1+\Delta^2 (2-\cos^2 \varphi)}{1+\Delta^2 \cos^2 \varphi} \cos \varphi + 1 \right) \right]$$

2. - Se il profilo non è un arco di circonferenza, ma si discosta poco da un arco di circonferenza, si può determinare la distribuzione di vorticità con un metodo perfettamente analogo al metodo del Glauert per profili poco curvi⁽¹⁾. Il concetto è ancora quello di effettuare una distribuzione di vorticità non sul profilo, ma su di una curva di forma più semplice che si discosti poco dal profilo⁽²⁾. In questo modo la velocità indotta da una distribuzione di vorticità in un punto della curva su cui essa è distribuita, può ritenersi coincidente con la velocità indotta nel punto corrispondente del profilo effettivo dalla stessa vorticità distribuita sul profilo effettivo. Nel caso attuale la distribuzione di vorticità viene effettuata su di un arco di circonferenza che abbia la medesima corda del profilo e che poco si discosti da esso. Inoltre si considerano punti corrispondenti sul profilo e sull'arco di circonferenza i punti che appartengono al medesimo raggio dell'arco di circonferenza.

La distribuzione di vorticità può, in questo caso, considerarsi come somma della distribuzione corrispondente al profilo circolare

(1) GLAUERT, *A Theory of Thin Airfoils*, «A.R.C. Rep. and Mem.», 910.

(2) Su questo concetto si basa il metodo proposto dal Prof. FERRARI in «L'Aerotecnica», Dicembre 1947: *Sulla determinazione del flusso attraverso ad una schiera di profili alari di curvatura non trascurabile*.

(sia essa γ_0) data dalla [1] e di una distribuzione correttiva γ_c , per la quale è conveniente scegliere una espressione del tipo:

$$[2] \quad \gamma_c = V_0 (1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi) \left(a_0 \cot \frac{\varphi}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \operatorname{sen} n \varphi \right)$$

A queste distribuzioni di vorticità corrispondono, su ogni punto dell'arco di circonferenza, delle velocità indotte di cui è, di solito, opportuno considerare le componenti radiale e tangenziale. Dette componenti possono essere facilmente determinate tenendo presente che, in generale, per una distribuzione di vorticità γ si ha:

$$[3] \quad v_r = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1 + \Delta^2 \cos \varphi \cos \varphi'}{(\cos \varphi - \cos \varphi') (1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi)} \gamma \operatorname{sen} \varphi d\varphi$$

$$[4] \quad v_t = \frac{\Delta}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi} \gamma d\varphi$$

dove φ' è l'angolo che definisce la posizione del punto per il quale si cercano i valori di v_r e v_t e dove v_r è positiva se diretta verso l'esterno dell'arco di circonferenza, mentre v_t è positiva se percorre l'arco in senso antiorario. Interessa osservare che, come risulta dalla [4], v_t è costante su tutto l'arco di circonferenza.

Se indichiamo con v_{rc} la velocità radiale indotta dalla distribuzione di vorticità correttiva γ_c , con v_{r0} la velocità tangenziale indotta dalla distribuzione di vorticità fondamentale γ_0 , con δ l'angolo che formano tra loro le tangenti al profilo ed all'arco di circonferenza in punti corrispondenti, la condizione di tangenza della corrente al profilo è data da:

$$[5] \quad \frac{v_{rc}}{-V_0 \cos(\beta - 2\alpha) + v_{r0}} = \operatorname{tag} \delta$$

essendo δ positivo se, misurato a partire dalla tangente all'arco di circonferenza, ruota in senso orario.

Sostituendo la [2] nella [3] ed integrando si ha:

$$[6] \quad v_{rc} = \frac{V_0}{2} \left\{ a_0 \left[1 + \Delta^2 \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) \right] + a_1 \frac{\Delta^2}{2} \cos \varphi - \right. \\ \left. - (1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi) \sum_1^{\infty} a_n \cos n\varphi \right\}$$

Introducendo, poi, la [1] nella [4] ed integrando si ha:

$$[7] \quad v_{10} = - \frac{V_0 \Delta}{1 + \Delta^2} (\Delta \cos \beta + \operatorname{sen} \beta)$$

Imponendo che la [5] sia soddisfatta in n punti del profilo, possono determinarsi n coefficienti ($a_0 \dots a_{n-1}$) della γ_0 la quale, sommata alla [1], fornisce la distribuzione di vorticità sul profilo, evidentemente con tanta maggiore approssimazione quanto più elevato è il numero n di condizioni imposte per la determinazione dei coefficienti della [2]. In pratica può essere sufficiente determinare i coefficienti a_0, a_1, a_2 , imponendo ad es. la tangenza della corrente al profilo nei punti $\varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \pi$.

Qualunque sia il numero dei coefficienti dello sviluppo di γ_0 presi in considerazione, la circolazione complessiva sul profilo ha l'espressione:

$$[8] \quad \Gamma = \int_{-S}^S \gamma ds = 2 R \Delta \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi} \gamma d\varphi = \\ = -4 \pi R V_0 \frac{\Delta}{1 + \Delta^2} (\Delta \cos \beta + \operatorname{sen} \beta) + 2 \pi R V_0 \Delta \left(a_0 + \frac{a_1}{2} \right)$$

3. - Quotora il profilo, pur sempre sottile, non possa più considerarsi infinitamente sottile, si potrà effettuare sull'arco di circonferenza una distribuzione di sorgenti capace di conferire al profilo il dovuto spessore ⁽¹⁾. Il valore della distribuzione di sorgenti su di un arco ds si determina mediante la condizione di continuità: si impone, cioè, che la variazione di portata tra due sezioni del profilo distanti $2R d\alpha$ sia uguale alla portata della distribuzione di sorgenti tra le sezioni stesse. Si considera come portata attraverso ad una sezione del profilo quella dovuta alla velocità media sulla sezione stessa e si assume per velocità media la somma della proiezione della velocità indisturbata sulla tangente all'arco di circonferenza in corrispondenza della sezione considerata e della velocità tangenziale indotta dai vor-

⁽¹⁾ PISTOLESI, *Sulla teoria della ali sottili*. « Acta, Pont. Acad. Scientiarum », anno I, vol. I, n. 8, 1937.

tici aderenti (1). La velocità tangenziale indotta dai vortici, come risulta dalla [4], è costante lungo l'arco di circonferenza. Per questo, chiamando con σ lo spessore del profilo e con ε la distribuzione delle sorgenti per l'arco di lunghezza unitaria, si ha:

$$2\varepsilon R d\alpha = \sigma V_0 \cos(\beta - 2\alpha) - \sigma v_i - \\ - \left(\sigma + \frac{d\sigma}{d\alpha} d\alpha \right) V_0 \cos(\beta - 2\alpha + 2d\alpha) + v_i \left(\sigma + \frac{d\sigma}{d\alpha} d\alpha \right)$$

da cui:

$$[9] \quad \sigma_s = \frac{1}{v_i - V_0 \cos(\beta - 2\alpha_s)} \int_{-s}^s \varepsilon ds$$

Inoltre, se indichiamo con τ l'angolo che formano tra loro le tangenti in due punti corrispondenti sul ventre e sul dorso del profilo (vedi fig. 2, essendo τ positivo se ha il vertice a sinistra), si ha:

$$[10] \quad \tau = - \frac{d\sigma}{2R d\alpha}$$

Per la distribuzione di sorgenti prendiamo una espressione del tipo:

$$\varepsilon = V_0 \left(b_0 \cot \frac{\varphi}{2} + \sum b_n \sin n\varphi \right)$$

È anche qui opportuno limitare lo sviluppo di ε ad un numero piccolo di termini. Volendo, in questo caso, avere un angolo τ , tra le tangenti al profilo al bordo di uscita, diverso da zero, basta introdurre nello sviluppo di ε un termine nel coseno di φ (vedi PISTOLESI *op. cit.*). In pratica può essere sufficiente limitare lo sviluppo di ε ai termini:

$$[11] \quad \varepsilon = V_0 \left(b_0 \cot \frac{\varphi}{2} + b_1 \sin \varphi + b_2 \sin 2\varphi + b_3 \cos \varphi \right)$$

Per la determinazione dei coefficienti dello sviluppo [11] occorrono quattro condizioni, una delle quali deriva dalla considerazione

(1) Tenendo conto della variazione della velocità lungo il raggio, in corrispondenza di una sezione del profilo, si perviene, nella determinazione dello spessore, ad un risultato che differisce dal risultato trovato prescindendo da questa variazione per termini del secondo ordine che, per spessori sottili quali quelli considerati, possono essere senz'altro trascurati.

che il contorno del profilo è una linea chiusa, e si traduce nella relazione $\int_{-S}^S \varepsilon ds = 0$, un'altra è determinata dal valore τ_b (negativo) allo spigolo, mentre le altre due si possono ad es. determinare fissando il valore dello spessore del profilo σ_c e dell'angolo τ_c al centro del profilo, ossia per $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

In definitiva si ottengono, in questo caso, per i coefficienti dello sviluppo di ε le espressioni seguenti:

$$b_0 = -\tau_c \left(\cos \beta - \frac{v_t}{V_0} \right) \sqrt{1 + \Delta^2}$$

$$b_1 = \tau_c \left(\cos \beta - \frac{v_t}{V_0} \right) (1 + \sqrt{1 + \Delta^2})$$

$$b_2 = \frac{1}{4} \frac{\Delta \left(\cos \beta - \frac{v_t}{V_0} \right) \left(\frac{\sigma_c}{R} + \tau_c \ln \frac{\sqrt{1 + \Delta^2} + \Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2} - \Delta} \right) + \left[\cos(\beta + 2\alpha_1) - \frac{v_t}{V_0} \right] \tau_b \ln(1 + \Delta^2)}{\frac{\sqrt{1 + \Delta^2}}{2\Delta} \ln \frac{\sqrt{1 + \Delta^2} + \Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2} - \Delta} - 1}$$

$$b_3 = -\tau_b \left[\cos(\beta + 2\alpha_1) - \frac{v_t}{V_0} \right]$$

essendo, per le [4] [8]:

$$[12] \quad v_t = \frac{\Gamma}{4\pi R} = -V_0 \frac{\Delta}{1 + \Delta^2} (\Delta \cos \beta + \sin \beta) + V_0 \frac{\Delta}{2} \left(a_0 + \frac{a_1}{2} \right)$$

4. - Possiamo applicare le considerazioni precedenti al calcolo della distribuzione di vorticità sul profilo in schiera. In quanto segue indichiamo, per brevità, con profilo centrale della schiera il profilo di riferimento, con profili laterali i rimanenti profili della schiera.

Consideriamo dapprima il profilo privo di spessore. La distribuzione di vorticità su di esso, ossia sull'arco di circonferenza che lo sostituisce, può essere considerata come somma della distribuzione di vorticità γ_0 sul profilo circolare isolato, data dalla [1], e di una distribuzione correttiva, che poniamo ancora sotto la forma [2], che tenga conto sia del fatto che il profilo non è isolato, ma in schiera, sia del fatto che esso non è in generale un arco di circonferenza.

La distribuzione correttiva può essere determinata imponendo la condizione di tangenza al profilo della velocità risultante della velocità indisturbata, della velocità indotta dalla vorticità distribuita sul profilo stesso e della velocità indotta dalla vorticità distribuita sui profili laterali.

Indichiamo con v_{rc} e v_{lc} rispettivamente le velocità radiale e tangenziale indotte sul profilo dalla vorticità correttiva distribuita sul profilo stesso, con v_{i0} la velocità indotta sul profilo dalla distribuzione principale γ_0 distribuita sul profilo stesso, con v'_{rc} , v'_{lc} , v'_{i0} le corrispondenti velocità indotte dalla vorticità distribuita sui profili laterali, con v'_{r0} la velocità radiale indotta da γ_0 distribuita sui profili laterali. La relazione di tangenza può allora essere posta sotto la forma:

$$[13] \quad \frac{v_{rc} + v'_{rc} + v'_{r0}}{-V_0 \cos(\beta - 2\alpha) + v_{lc} + v_{i0} + v'_{lc} + v'_{i0}} = \tan \delta$$

Imponendo che questa relazione sia soddisfatta in n punti del profilo, possono determinarsi n coefficienti dello sviluppo [2] della vorticità correttiva. Infatti v_{rc} , v'_{rc} , v_{lc} , v'_{lc} sono funzioni dei coefficienti dello sviluppo [2]. Precisamente v_{rc} è ancora data dalla [6], o da espressioni più semplici ottenute limitando opportunamente lo sviluppo [6], mentre v_{lc} è data dal secondo termine del secondo membro della [12]. I valori di v'_{rc} , v'_{lc} (e lo stesso dicasi per v'_{r0} e v'_{i0}) possono essere determinati, in via approssimata, sostituendo alla distribuzione continua di vorticità sui profili laterali più vortici concentrati equivalenti, seguendo un metodo già indicato dal BETZ ⁽¹⁾ e successivamente impiegato da altri autori ⁽²⁾, ⁽³⁾. È, anzi, conveniente utilizzare alcuni diagrammi tracciati dal BETZ (vedi BETZ *op. cit.*), nei quali sono rappresentati i campi delle velocità indotte, secondo l'asse della schiera e secondo la perpendicolare a questo asse, da una schiera di vortici unitari dalla quale sia stato sottratto il profilo centrale.

⁽¹⁾ BETZ, *Diagramme zur Berechnung von Flügelreihen*, «Ingenieur Archiv», vol. II, 1931, pag. 359.

⁽²⁾ FERRARI, *Un metodo rapido approssimato di calcolo delle caratteristiche aerodinamiche delle schiere di profili alari*. «Atti Accad. Scienze Torino», 1947, pag. 264.

⁽³⁾ KATZOFF, FINN, LAURENCE, *Interference Method for obtaining the Potential Flow past an arbitrary Cascade of Airfoils*. «N.A.C.A.» Rep. 879, 1947.

Per ottenere risultati di buona approssimazione, nella determinazione delle velocità indotte dai profili laterali, è generalmente sufficiente limitare a quattro o cinque il numero dei vortici che su ogni profilo sostituiscono la distribuzione continua di vorticità. Ciascun vortice si può ritenere applicato nel punto medio dell'arco di cui sostituisce la vorticità, chè nella suddivisione del profilo in più archetti i baricentrid ella vorticità, nei quali dovrebbero esser posti i vortici, vengono praticamente a coincidere con detti punti medi (1). L'intensità del vortice i -esimo, che sostituisce la distribuzione continua di vorticità tra la sezione $(i-1)$ -esima e la sezione i -esima, è data da:

$$\Gamma_i = -4R V_0 \frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta^2}} \left\{ \Delta \cos \beta \left(-\frac{\operatorname{tg} \varphi}{1+\Delta^2 + \operatorname{tg}^2 \varphi} + \frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2}} \operatorname{artg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{sen} \beta \left(\frac{\operatorname{sen} \varphi}{1+\Delta^2 \cos^2 \varphi} + \frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2}} \operatorname{artg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} \right) - \frac{\sqrt{1+\Delta^2}}{2} \left[a_0 (\varphi + \operatorname{sen} \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + a_1 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{4} \right) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} (n-1)\varphi}{n-1} - \frac{\operatorname{sen} (n+1)\varphi}{n+1} \right) \right] \right\}_{\varphi_{i-1}}$$

5 - Se i profili della schiera hanno spessore non nullo, si effettua sugli archi di circonferenza che li sostituiscono la distribuzione di sorgenti già esaminata nel caso del profilo isolato e si procede in maniera analoga a quanto già veduto per la distribuzione di vorticità.

Si osservi peraltro che, nei limiti di approssimazione del presente metodo, si può ritenere che la distribuzione di sorgenti non vari nel passaggio dal profilo isolato al profilo in schiera. Si può inoltre trascurare la velocità tangenziale indotta sul profilo dalle sorgenti distribuite sul profilo stesso, chè essa ha il solo effetto di variare in maniera trascurabile la distribuzione della portanza, ma non il valore della circolazione totale. Infine la velocità radiale indotta dalle sorgenti distribuite sul profilo centrale è nulla su tutto l'arco di circon-

(1) Se fosse necessaria una più accurata indagine, una volta determinata la distribuzione della vorticità in prima approssimazione, si potrebbe ottenere una più approssimata distribuzione della vorticità collocando i vortici di sostituzione nel baricentro della vorticità di prima approssimazione.

ferenza relativo allo stesso profilo; infatti, dovendo il contorno del profilo essere una linea chiusa, deve essere $\int_{-s}^s ds = 0$; d'altra parte la velocità radiale indotta in un punto dell'arco di circonferenza di raggio R da una distribuzione di sorgenti effettuata sull'arco stesso ha la espressione: $v_r = \frac{1}{4\pi R} \int_{-s}^s ds$; perciò si ha $v_r = 0$.

Di solito è opportuno limitare a tre o quattro il numero delle sorgenti di sostituzione. I punti di sostituzione dovrebbero essere alquanto ravvicinati nella porzione anteriore del profilo, ove esso varia rapidamente di spessore. L'intensità della sorgente i -esima, che sostituisce la distribuzione continua di sorgenti tra la sezione $(i-1)$ -esima e la sezione i -esima, è data dalla espressione:

$$\varepsilon_i = 2RV_0 \Delta \left\{ b_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1+\Delta^2}} \operatorname{artg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} + \frac{1}{2\Delta\sqrt{1+\Delta^2}} \ln \frac{\sqrt{1+\Delta^2} + \Delta \operatorname{sen} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2} - \Delta \operatorname{sen} \varphi} \right) + \right. \\ \left. + \frac{b_1}{\Delta^2} \left(\sqrt{\Delta^2+1} \operatorname{artg} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1+\Delta^2}} - \varphi \right) - \left(b_2 + \frac{b_3}{2} \right) \frac{1}{\Delta^2} \ln \frac{1 + \Delta^2 \cos^2 \varphi}{\Delta^2} \right\}_{\varphi_{i-1}}$$

In questa espressione, come si è detto, i coefficienti b_n hanno i valori già determinati per il profilo isolato. Per questo il tener conto dello spessore dei profili non viene ad accrescere il numero delle incognite del sistema delle equazioni [13], restando ancora come incognite i soli coefficienti dello sviluppo della vorticità correttiva.

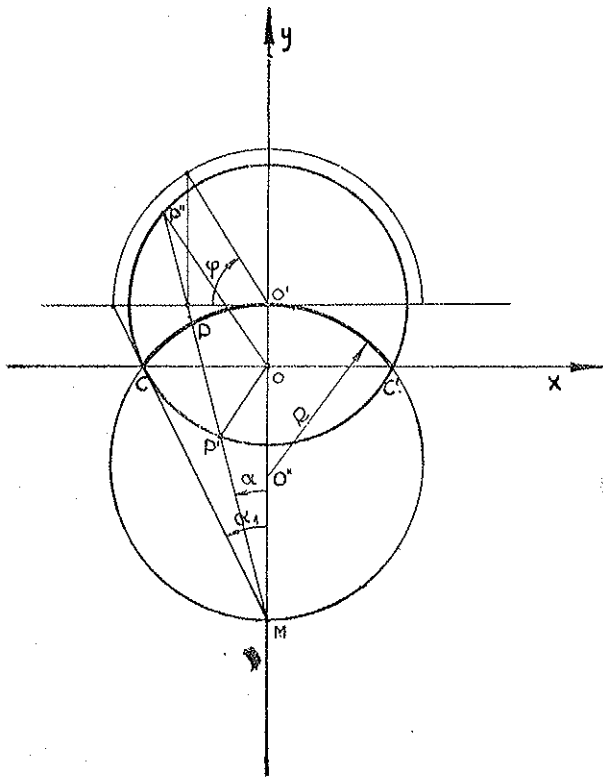


FIG. 1.

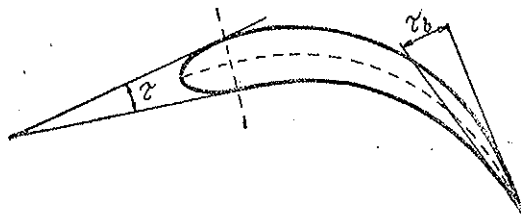


FIG. 2.