PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIV - N. 10
pag. 107-116

SOPRA LE INVOLUZIONI APPARTENENTI AD UNA VARIETÀ DI PICARD (*)

A. ANDREOTTI

SVMMARIVM. — Theoremata ENRIQUES-SEVERI, de possibilate generandi, per birationales transformationes, involutiones quae insunt in superficiebus hyperellipticis, ad varietates Abelianas extenduntur.

La classificazione delle superficie iperellittiche, com'è stata fatta nelle classiche memorie di ENRIQUES-SEVERI e BAGNERA-DE FRANCHIS([1]), riposa essenzialmente sopra i fatti seguenti:

a) ogni corrispondenza razionale $(1, n)$ fra due superficie iperellittiche di rango uno F, F′, dà luogo su F′ ad una involuzione generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali di 2ª specie di F′ in sè;

b) ogni involuzione sopra una superficie iperellittica di rango uno, la quale possegga un numero finito di coincidenze e non sia composta con un'involuzione abeliana di rango uno, è generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali della superficie sostegno, in sè.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi il 15 maggio 1951.

([1]) ENRIQUES-SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, « Acta Mathematica », t. 32 e 33 pagg. 283-392 e 321-403; prix Bordin, 1907; BAGNERA-DE FRANCHIS, *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti*, « Memorie della società italiana delle sienze (detta dei XL) », s. 3, t. 15, pag. 251-343 (1908). La prima dimostrazione completa dei teoremi sottoindicati è di ENRIQUES-SEVERI; solo più più tardi DE FRANCHIS (« Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », giugno 1936) riuscì a liberare da ogni ipotesi restrittiva la dimostrazione addotta nella citata Memoria.

In questa nota ci proponiamo di estendere questi teoremi alle varietà abeliane di dimensione qualsiasi (n. 1-3) (1).

L'estenzione non presenta eccessive difficoltà (se si suppone che la varietà imagine della involuzione abbia almeno un plurigenere uguale ad 1), ma ci pare opportuno rilevare come solo in questa direzione sia lecito ricercare un ampliamento del campo di validità di detti teoremi. Si è cercato infatti di trasportare ad una superficie algebrica qualunque (e poi ad una varietà) un teorema analogo al teorema ***b*** asserendo la possibilità di generare con trasformazioni birazionali ogni involuzione dotata di un numero finito di coincidenze. L'assersione si è dimostrata erronea dopo alcuni esempi addotti da DANTONI e recentemente da GAETA (2), pur rimanendo aperta l'ipotesi che la non validità del teorema dipendesse come nell'esempio di DANTONI dalla assoluta mancanza di coincidenze o, come in quello di GAETA dalla presenza di curve fondamentali. Ebbene qui proviamo che nella forma suaecennata il teorema *è falso già sulle superficie iperellittiche* adducendo come esempio una involuzione con un numero finito non nullo di coincidenze e priva di curve fondamentali. La ragione di questo fenomeno viene illustrata al n. 4.

1. – Cominciamo a dimostrare che *una varietà* W_p *d'irregolarità superficiale p, imagine d'una involuzione sopra una varietà di* PICARD V_p *è essa stessa una varietà di* PICARD *e l'involuzione su* V_p *si genera con un gruppo di trasformazioni birazionali di 2ª specie.*

Indichiamo invero con $\Omega = (\Omega_{rs})$ $(r = 1, \ldots, p\,;\ s = 1, \ldots, 2p)$ la matrice dei periodi degli integrali semplici di prima specie $U_1, \ldots U_p$ di W_p e con $\omega = (\omega_{rs})$ $(r = 1, \ldots, p;\ s = 1, \ldots, 2p)$ l'analoga matrice per gli integrali semplici di prima specie $u_1, \ldots, u_p$ di V_p. Siano:

$$[1] \qquad \left\{ \begin{array}{l} U_i(y) \equiv \sum_h^{p}{}_{1} \lambda_{ih}\, u_h(x) + c_i \\ {\scriptstyle i=1,\ldots,p} \end{array} \right. \qquad (\mathrm{mod}\ \omega)$$

(1) Si veda pel problema la rubrica «Problemi, risultati e discussioni» dei «Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni», s. 5, t. 4, pag. 108; (1943).

(2) GAETA, *Sull'esistenza di una serie infinita discontinua di trasformazioni razionali...* «Atti dell'Istuto Veneto», t. 109, pag. 135-139; (1950).

le equazioni trascendenti della corrispondenza fra W_p e V_p, e

[2] $$\begin{cases} \sum_1^p {}_h \lambda_{ih}\, \omega_{hr} = \sum_1^{2p} {}_s \alpha_{rs}\, \Omega_{is} \\ i=1,\dots,p;\ r=1,\dots,2p \end{cases}$$

le corrispondenti relazioni di Hurwitz.

Poichè il determinante delle λ_{ih} è diverso da zero, possiamo cambiare su V_p gli integrali $u_1, \dots, u_p$ e sostituirli con gli integrali $v_i = \sum_1^p {}_h \lambda_{ih} u_h$. Con ciò le equazioni [1], [2] assumono la forma

$$\begin{cases} U_i(y) \equiv v_i(x) + c_i \quad (\mathrm{mod}\ \omega) \\ i=1,\dots,p \end{cases} \qquad \begin{cases} \omega_{ir} = \sum_1^{2p} {}_s \alpha_{rs}\, \Omega_{is} \\ i=1,\dots,p;\ r=1,\dots 2p \end{cases}$$

avendo indicato con $\omega = (\omega_{rs})$ ancora la matrice dei periodi dei nuovi integrali v_i.

Cambiando il sistema di periodi primitivi di Ω e ω, si può far sì che (α_{rs}), che in tal guisa viene moltiplicata a destra e a sinistra per matrici unimodulari, si riduca alla forma diagonale canonica. In tal modo le [2] assumonono la forma

$$\begin{cases} \omega_{ir} = \nu_r\, \Omega_{ir} \\ i=1,\dots,p;\ r=1,\dots,2p \end{cases}$$

colle ν_r interi (che possono supporsi positivi e ciascuno divisore del successivo).

È chiaro allora che l'involuzione (1) esistente su V_p è generata dal gruppo delle trasformazioni di 2^a specie date al variare delle μ frai numeri interi dalle equazioni

$$\begin{cases} v_i(y) \equiv v_i(x) + \sum_1^{2p} {}_r \mu_r \dfrac{\omega_{ir}}{\nu_r} \\ i=1,\dots,p \end{cases}$$

ciò dimostra l'asserto.

Per $p = 2$ si ritrova il teorema $\boldsymbol{a}$ dell'introduzione.

---

(1) D'ordine $\alpha = \mathrm{Det}\,(\alpha_{rs}) = \nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2p}$.

2. – Veniamo all'estensione del teorema ***b***: *Ogni involuzione sopra una varietà di* PICARD V_p, *possedente al più* ∞^{p-2} *coincidenze con almeno un plurigenere uguale ad uno e non composta con un'involuzione abeliana di rango uno* (¹), *è generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali della varietà di* PICARD V_p *in sè.*

Osserviamo subito che se la verietà W_p imagine dell'involuzione ha un plurigenere $P_n = 1$, non vi possono essere su V_p punti coniugati nell'involuzione a varietà a $p-1$ dimensioni. Infatti, consideriamo su W_p l'n-esima forma tensoriale (²) corrispondente all'n-genere di W_p

$$A(y_1, \ldots, y_{p+1}) \left(\frac{\partial(y_1, \ldots, y_p)}{\partial(s_1, \ldots, s_p)}\right)^n$$

essendo $y_1, \ldots, y_{p+1}$ le coordinate non omogenee di un punto corrente su W_p supposta immensa in uno spazio lineare a $p+1$ dimensioni $(y_1, \ldots, y_{p+1})$ ed A una funzione razionale su W_p la cui varietà di zero, fuori della sezione di W_p coll'iperpiano improprio è una varietà n-canonica di W_p.

Mediante la trasformazione razionale τ essa si muta nella forma tensoriale che dà l'n-genere di V_p, la quale, quando si assumono come variabili indipendenti su V_p le p variabili uniformizzanti la varietà: $u_1, \ldots, u_p$ (cioè in altri termini i suoi p integrali semplici di prima specie) assume la forma:

$$\left(\frac{\partial(u_1, \ldots, u_p)}{\partial(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)}\right)^n$$

In due punti a, b coniugati nella involuzione dovrà essere

$$\left(\frac{\partial(u_1, \ldots, u_p)}{\partial(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)}\right)^n_{(a)} = \left(\frac{\partial(u_1, \ldots, u_p)}{\partial(\sigma_1, \ldots, \sigma_p)}\right)^n_{(b)}$$

ossia il determinante Jacobiano delle $u_1, \ldots, u_p$ nell'intorno di a rispetto alle $u_1, \ldots, u_p$ nell'intorno di b uguaglia una radice n-esima dell'unità

(¹) Cioè rappresentata a sua volta da una varietà di PICARD.

(²) Vedi KÄHLER, *Forme differenziali e funzioni algebriche,* «Memorie dell'Accademia d'Italia», t. 3, pagg. 5-19; (1932). La dimostrazione che adduciamo è l'estensione di quella data da BAGNERA-DE FRANCHIS nella memoria citata nell'introduzione.

è perciò costante e diverso da zero. Ciò esclude la possibilità di varietà fondamementali a $p-1$ dimensioni coniugate a punti nell'involuzione data.

3. – Supponiamo ora V_p immersa in uno spazio lineare a $p+1$ dimensioni e siano $x_1, ..., x_{p+1}$ coordinate non omogenee del punto corrente su V_p. Indichiamo con $(x_1, ..., x_{p+1})$, $(x'_1, ..., x'_{p+1})$ due punti di V_p coniugati nell'involuzione data e corrispondenti rispettivamente ai valori $(u_1, ..., u_p)$, $(u'_1, ..., u'_p)$ degli integrali u.

Le x'_i sono funzioni analitiche delle x_i e quindi delle u_i nell'intorno del punto considerato: $x'_i = x'_i(u_1, ..., u_p)$.

Dimostriamo che per prolungamento analitico le $x'_i = x'_i(u_1, ..., u_p)$ danno luogo a funzioni uniformi e meromorfe in tutto lo spazio S_p delle u. Ed invero esse possono essere prolungate analiticamente in tutto S_p eccezion fatta al più per la varietà D a $p-2$ dimensioni che corrisponde alle coincidenze dell'involuzione, avendo in ogni punto carattere di funzione razionale; d'altra parte ogni cammino chiuso di S_p si può ridurre tenendone fisso un punto, omotopicamente a zero senza incontrare D. Ciò prova che le funzioni considerate sono uniformi e moromorfe.

Di più le funzioni $x'_i = x'_i(u_1, ..., u_p)$ sono funzioni abeliane certo appartenenti alla matrice di Rieman $n!\,\omega$, essendo $\omega = (\omega_{rs})$ la matrice dei periodi degli integrali u ed n l'ordine dell'involuzione. Ed invero ad una linea di S_p congiungente due punti congrui mod $n!\,\omega$, corrisponde su V_p un cammino chiuso percorso $n!$ volte il quale quando si pensi percorso da $(x_1, ..., x_{p+1})$ produce nei punti coniugati nell'involuzione la sostituzione identica. Ciò non significa affatto che $n!\,\omega$ dia un sistema di periodi primitivi per le funzioni $x'_i = x'_i(u_1, ..., u_p)$; quei periodi sono invece primitivi per le funzioni $x_i = x_i\left(\frac{u_1}{n!}, ..., \frac{u_p}{n!}\right)$ sicchè le x'_i risultano funzioni razionali di quest'ultime. Le equazioni trascendenti della corrispondenza razionale che così si genera fra la varietà V_p pensata come ottenuta dalle equazioni parametriche $x'_i = x'_i(u_1, ..., u_p)$ e quella (birazionalmente identica a V_p) ottenuta dalle equazioni parametriche $x_i = x_i\left(\frac{u_1}{n!}, ..., \frac{u_p}{n!}\right)$, mostrano come si passi dai valori degli integrali $u_1, \ldots, u_p$ a quelli $u'_1, \ldots, u'_p$ mediante una sostituzione lineare

$$[3] \qquad \begin{cases} u'_i = \sum_h^{1 \ldots p} \lambda_{ih} u_h + c_i \qquad (\mathrm{mod}\; n!\, \omega) \\ i=1, \ldots, p \end{cases}$$

a determinante $|\lambda_{ih}| \neq 0$.

L'insieme di tutte le possibili sostituzioni [3] che così si ottengono per passaggio da un punto $(x_1, \ldots, x_{p+1})$ ad uno qualunque degli n punti del gruppo dell'involuzione individuato da $(x_1, \ldots, x_{p+1})$ costiuisce un gruppo G.

Entro G consideriamo il sottogruppo Γ delle trasformazioni di 2ª specie di G:

$$\begin{cases} u'_i = u_i + c_i \\ i=1, \ldots, p \end{cases}$$

Poichè le coordinate $y_1, \ldots, y_{p+1}$ del punto corrente su W_p sono, pensate come funzioni meromorfe delle u_i, invarianti per le sostituzioni di G e quindi di Γ, quest'ultimo gruppo ammette un sistema di $2p$ sostituzioni generatrici

$$[4] \qquad \begin{cases} u'_i = u_i + \Omega_{ih} \\ i=1, \ldots, p;\; h=1, \ldots, 2p \end{cases}$$

e la varietà abeliana Z_p corrispondente alla matrice $\Omega = (\Omega_{ih})$ è tale che:

a) le coordinate $y_1, \ldots, y_{p+1}$ del punto corrente su W_p, come funzioni delle u_i appartengono alla matrice Ω e come tali risultano funzioni razionali delle coordinate $z_1, \ldots, z_{p+1}$ non omogenee del punto corrente su Z_p quando questa varietà s'imagini immersa in uno spazio lineare $(z_1, \ldots, z_{p+1})$ a $p+1$ dimensioni;

b) le coordinate $z_1, \ldots, z_{p+1}$ del punto variabile su Z_p per la medesima ragione addotta in ***a*** si esprimono razionalmente per quelle $x_1, \ldots, x_{p+1}$ del punto variabile su V_p in quanto fra le sostituzioni di G quelle che fanno passare dal punto $(x_1, \ldots, x_{p+1})$ al punto stesso hanno le costanti

$$\begin{cases} c_i = \sum_r^{1 \ldots 2p} \mu_{ir}\, \omega_{ir} \\ i=1, \ldots, p \end{cases}$$

colle μ_{ir} interi qualsiasi.

Ma per l'ipotesi che l'involuzione W_p non sia composta con un'involuzione abeliana di rango 1 la corrispondenza razionale fra Z_p e V_p è di necessità birazionale sicchè si può senz'altro supporre $\Omega_{ih}=\omega_{ih}$. D'altra parte la possibilità di generare W_p su $Z_p=V_p$ con un gruppo di trasformazioni birazionali di V_p in sè discende dal fatto che nelle [3] se si incrementano le u_h di periodi $\Omega_{hr}=\omega_{hr}$, anche le u'_i si incrementano di periodi appartenenti allo stesso sistema chè altrimenti le [4] non sarebbero le sostituzioni generatrici del gruppo Γ. Il teorema è perciò dimostrato.

4. – *L'ipotesi ammessa al n. 2 che l'involuzione* W_p *non sia composta con un'involuzione abeliana di rango 1 è essenziale.*

Riprendendo invero il ragionamento precedente, e supponiamo l'involuzione W_p generata su Z_p dal gruppo delle trasformazioni birazionali

$$[5] \qquad \begin{cases} u_i(z') = \sum_h\limits_1^p \eta^l_{ih}\, u_h(z) + c_l \qquad (\mathrm{mod}\ \Omega) \\ i=1,\dots,p\,;\ \ l=1,2,\dots \end{cases}$$

e l'involuzione che rappresenta Z_p su V_p generata (n. 1) dal gruppo delle trasformazioni birazionali:

$$[6] \qquad \begin{cases} u_i(x') = u_i(x) + \sum_r\limits_1^{2p} \mu_r \dfrac{\omega_{ir}}{\nu_r} \qquad (\mathrm{mod}\ \omega) \\ i=1,\dots,p\,;\ \ \mu_r=0,1,\dots,\nu_r-1 \end{cases}$$

essendo

$$\begin{cases} u_i(z) \equiv u_i(x) \qquad (\mathrm{mod}\ \omega) \\ i=1,\dots,p \end{cases}$$

le equazioni trascendenti della corrispandenza fra Z_p e V_p.

Ebbene si riconosce subito che condizione necessaria e sufficiente perchè l'involuzione W_p su V_p sia generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali di V_p in sè è che il gruppo delle sostituzioni [5] sia permutabile col gruppo delle sostituzioni ([1])

$$\begin{cases} u_i(z') = u_i(z) + \sum_r\limits_1^{2p} \lambda_r\, \omega_{ir} \\ i=1,\dots,p \end{cases}$$

([1]) Cioè per incremento delle $u_i(z)$ di periodi (mod ω) le $u_i(z')$ s'incrementano pure di periodi (mod ω).

colle λ interi arbitrari. In tal caso le [5] e [6] insieme pensate come sostituzioni fra i valori degli integrali u_i in due punti di V_p (cioè mod ω) danno le trasformazioni birazionali del gruppo che genera su V_p l'involuzione W_p.

Tale è per esempio il caso in cui le [5] siano tutte sostituzioni di prima o seconda specie ma può ben accadere che il fenomeno indicato non si presenti come lo mostra il seguente esempio, che esponiamo per $p = 2$, ma che ha evidentemente carattere generale.

Sopra la superficie di PICARD Z, corrispondente alla matrice di periodi

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

degli integrali u_1, u_2 di prima specie semplice di Z, cioè sulla superficie prodotto di due curve ellittiche armoniche, consideriamo l'involuzione del 4° ordine generata dalla trasformazione birazionale

$$[7] \qquad \begin{cases} u'_1 \equiv i u_1 \\ u'_2 \equiv i u_2 \end{cases} \quad (\text{mod}\, \Omega)$$

Quest'involuzione possiede 4 punti quadrupli e 12 punti doppi ed è rappresentata da una supesficie razionale **W**.

Ed invero sono uniti per la [7] epperò quadrupli per l'involuzione generata i punti $u_1 = u_2 = 0$, $u_1 = u_2 = \frac{1+i}{2}$; $u_1 = 0, u_2 = \frac{1+i}{2}$; $u_1 = \frac{1+i}{2}$, $u_2 = 0$.

Sono invece uniti pel quadrato della [7] epperò doppi per l'involuzione W i punti

$$u_1 = u_2 \frac{1}{2}; \quad u_1 = u_2 = \frac{i}{2}; \quad u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{i}{2}; \quad u_1 = \frac{i}{2}, u_2 = \frac{1}{2};$$

$$u_1 = 0, u_2 = \frac{1}{2}; \; u_1 = 0, u_2 = \frac{i}{2}; \; u_1 = \frac{1+i}{2}, u_2 = \frac{i}{2}; \; u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = 0;$$

$$u_1 = \frac{i}{2}, u_2 = 0; \; u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1+i}{2}; \; u_1 = \frac{i}{2}, u_2 = \frac{1+i}{2}.$$

Non vi sono altri punti uniti.

Che la superficie W sia razionale discende sia dalla rappresentazione parametrica sia anche dal fatto che essa rappresenta una involuzione del 2° ordine sopra la superficie di Kummer relativa alla trasformazione $u'_1 = -u_1$, $u'_2 = -u_2$; involuzione che presenta diramazione nelle 4 curve razionali della superficie di Kummer provenienti dai 4 punti quadrupli della involuzione W su Z.

Ciò posto consideriamo la trasformazione razionale $(1, \nu_1 \cdot \nu_2)$ che muta la superficie Z nella superficie di Picard V corrispondente alla matrice

$$\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \nu_1 i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \nu_2 i \end{pmatrix} \qquad (\nu_1 > 1,\ \nu_2 > 1)$$

dei periodi degli integrali semplici di prima specie v_1, v_2 di V, le equazioni trascendenti della corrispondenza essendo:

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases} \pmod{\omega}$$

L'involuzione W si muta così in un'involuzione d'ordine $4\nu_1\nu_2$ su V non generabile con un gruppo di trasformazioni birazionali inquantochè le equazioni [7] su V non rappresentano più una corrispondenza birazionale di V in sè.

Su V l'involuzione W ha $4\nu_1\nu_2$ punti quadrupli $12\nu_1\nu_2$ punti doppi.