PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XIII – N. 3
pag. 29-54

SULLE VARIETÀ RIEMANNIANE NORMALI A TRE DIMENSIONI (*)

ANGELO TONOLO

SVMMARIVM. — Varietas riemanniana trium dimensionum dicitur regularis seu normalis cum ex tribus ipsius congruentiis principalibus effici possit triplex quoddam systema ortogonale superficiei. Hac in Nota ostendit Auctor aequationes necessarias et sufficientes quibus satisfacere debent componentes intrinsecae duplicis tensoris covariantis RICCI, vel componentes tensoris fundamentalis varietatis, ut varietas ipsa vere normalis sit.

PREFAZIONE

Come è noto, il BIANCHI ha chiamato *normali* quelle varietà riemanniane a tre dimensioni nelle quali le congruenze principali sono normali, nelle quali, cioè, le linee di tali congruenze sono le traiettorie ortogonali di un triplo sistema ortogonale di superficie. Sorge spontaneo il problema di caratterizzare tutte le varietà V_3 nelle quali si verifica tale circostanza.

Al problema ho dato dapprima, com'era naturale, una trattazione puramente geometrica: fissata in V_3 una, comunque scelta, terna ortogonale di congruenze di linee, i canoni della geometria intrinseca del RICCI permettono di determinare una terna di invarianti $r'_i (i=1,2,3)$, il cui annullarsi caratterizza le congruenze principali normali della varietà. I §§ I e II servono per dare a queste funzioni quella forma che è essenziale per lo sviluppo dei calcoli seguenti e per stabilire un'identità che è fondamentale: essa è fornita da un giudizioso trasporto alle varietà riemanniane di una identità chè il WEINGARTEN segnalò in un problema di elasticità per lo spazio ordinario e in

(*) Memoria presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Francesco Severi nella Riunione del 7 giugno 1949.

coordinate cartesiane. Nel § IV si mostra che l'annullamento simultaneo degli invarianti r_i', porta, in forza della identità in discorso, all'annullamento di altri tre invarianti I_i. Pertanto, le varietà normali V_3 sono caratterizzate dall'essere identicamente nulle tali funzioni I_i. Queste sono scritte in una forma assai compendiosa, e contengono solo elementi geometrici della varietà, quali sono i coefficienti di rotazione di Ricci della fissata terna di congruenze di linee, le componenti intrinseche del tensore doppio di Ricci, che in tale varietà sostituisce con vantaggio quello quadruplo di Riemann-Christoffel, e loro derivate ordinarie rispetto agli archi delle linee della terna fissata.

Nell'ultimo § le equazioni $I_i = 0$ vengono trasformate in modo da ottenerne altre tre, ove figurano le componenti del tensore fondamentale della varietà, le componenti del tensore doppio di Ricci e loro derivate covarianti rispetto al ds^2 di V_3, cioè, in definitiva, le equazioni caratteristiche delle varietà normali contengono solo operazioni di derivazione eseguite sulle componenti del tensore fondamentale della varietà fino a quelle del terz'ordine incluso (1).

§ I. – Preliminari

1. – Sia $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu, \rho, \tau;\ h, k, i, j, l, p, q, r, s = 1, 2, 3)$

[1] $$ds^2 = a_{\mu\nu}(x^\lambda)\, dx^\mu\, dx^\nu$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di una varietà riemanniana V_3 a tre dimensioni con riferimento alle variabili x^λ. Denotiamo con $\alpha_{\mu\nu}$ le componenti del tensore doppio covariante simmetrico di Ricci, che nelle V_3 sostituisce con vantaggio il tensore quadruplo di Riemann-Christoffel. Supporremo che tale varietà abbia distinte le sue tre curvature principali, cioè, che siano distinte le tre radici dell'equazione cubica in ρ

[2] $$D(\rho) = \|\alpha_{\mu\nu} - \rho\, a_{\mu\nu}\| = 0\ .$$

In tale ipotesi, il sistema di equazioni lineari ed omogenee nelle incogite $\underset{h}{z^\nu}$

[3] $$(\alpha_{\mu\nu} - \rho_h\, a_{\mu\nu})\, \underset{h}{z^\nu} = 0\ , \quad (\mu = 1, 2, 3)\ ,$$

(1) Un riassunto della presente Memoria si trova nella mia Nota: *Sulle varietà riemanniane a tre dimensioni.* «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei», seri 8ª, Vol. VI, (1949).

ammette, per ogni radice ρ_h della [2], una e una sola soluzione

$$\underset{h}{z}^{\nu} = \underset{h}{\lambda}'^{\nu},$$

per la quale si ha

$$[4] \qquad a_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}'^{\mu} \underset{h}{\lambda}'^{\nu} = 1 .$$

Inoltre, a due radici distinte ρ_h, ρ_k della equazione [2], corrispondono due soluzioni

$$\underset{h}{z}^{\nu} = \underset{h}{\lambda}'^{\nu} \quad , \quad \underset{k}{z}^{\nu} = \underset{k}{\lambda}'^{\nu}$$

vincolate fra loro dalla relazione

$$[5] \qquad a_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}'^{\mu} \underset{k}{\lambda}'^{\nu} = 0 .$$

Pertanto, nella fatta ipotesi, è sempre possibile determinare nella V_3 una e una sola terna di congruenze di linee di parametri $\underset{h}{\lambda}'^{\nu}$ che soddisfano alle [4], [5]; queste si possono compendiare nella scrittura

$$[6] \qquad a_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}'^{\mu} \underset{k}{\lambda}'^{\nu} = \delta_{hk} ,$$

ove δ_{hk} denota il simbolo di KRONECKER. Le linee di tale congruenza sono quindi mutuamente ortogonali nella varietà V_3. Denotando con $\underset{h}{\lambda}'_{\nu}$ i momenti della congruenza in discorso, definiti dalle posizioni

$$\underset{h}{\lambda}'_{\nu} = a_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}'^{\mu} ,$$

alle [6] possiamo dare la forma

$$\underset{h}{\lambda}'^{\mu} \underset{k}{\lambda}'_{\mu} = \delta_{hk} .$$

Queste identità, come è notissimo, sono equivalenti alle seguenti:

$$[7] \qquad \underset{h}{\lambda}'_{\mu} \underset{h}{\lambda}'^{\nu} = \delta^{\nu}_{\mu} ,$$

essendo sempre δ^{ν}_{μ} il simbolo di KRONECKER.

Le tre congruenze di linee individuate dai parametri $\underset{h}{\lambda}'^{\nu}$ o dai momenti $\underset{h}{\lambda}'_{\nu}$, si chiamano le *congruenze principali della varietà* V_3. L'insieme delle tre congruenze verrà in seguito indicato con Λ'.

2. – Per il seguito, è opportuno sottoporre il sistema [3] ad una trasformazione. A questo scopo, associamo alla terna principale Λ' di congruenze una seconda terna ortogonale di congruenze, comunque

scelta in V_3, che denoteremo con Λ, i cui parametri e momenti verranno indicati rispettivamente con $\underset{h}{\lambda}^{\nu}$, $\underset{h}{\lambda}_{\nu}$. Avremo intanto le relazioni

$$[8] \qquad \underset{h}{\lambda}^{\mu}\,\underset{k}{\lambda}_{\mu}=\delta_{hk} \ , \qquad \underset{h}{\lambda}_{\mu}\,\underset{h}{\lambda}^{\nu}=\delta^{\nu}_{\mu} \ .$$

Designiamo rispettivamente con $[h]$, $[h']$ le congruenze delle due terne Λ e Λ', con h, h' le linee di queste congruenze passanti per un medesimo punto di V_3, e infine con β_{hk} i coseni degli angoli formati dalle linee delle due terne, sulle quali, naturalmente, è stato fissato un verso come positivo, e precisamente, β_{hk} indica il coseno dell'angolo che la linea h' forma con la linea k passanti per uno stesso punto della varietà. Si ha

$$[9] \qquad \beta_{hk}=\underset{h}{\lambda}'^{\mu}\,\underset{k}{\lambda}_{\mu} \ .$$

Avendosi

$$\underset{h}{\lambda}_{\mu}=a_{\mu\nu}\,\underset{h}{\lambda}^{\nu} \ ,$$

si trae, in forza del secondo gruppo delle [8],

$$[10] \qquad a_{\mu\nu}=\underset{h}{\lambda}_{\mu}\,\underset{h}{\lambda}_{\nu} \ .$$

Introduciamo gli invarianti ω_{hk} definiti dalle posizioni.

$$[11] \qquad \alpha_{\mu\nu}=\omega_{ij}\,\underset{i}{\lambda}_{\mu}\,\underset{j}{\lambda}_{\nu} \ .$$

Dalle identità

$$(\alpha_{\mu\nu}-\rho_h\, a_{\mu\nu})\,\underset{h}{\lambda}'^{\nu}=0 \ , \quad (\mu=1,2,3) \ ,$$

ricaviamo, sostituendovi le [10], [11],

$$(\omega_{ij}\,\underset{i}{\lambda}_{\mu}\,\underset{j}{\lambda}_{\nu}-\rho_h\,\underset{i}{\lambda}_{\mu}\,\underset{i}{\lambda}_{\nu})\,\underset{h}{\lambda}'^{\nu}=0 \ ,$$

od anche, in virtù delle [9],

$$(\omega_{ij}\,\beta_{hj}-\rho_h\,\beta_{hi})\,\underset{i}{\lambda}_{\mu}=0 \ , \quad (\mu=1,2,3) \ .$$

Moltiplicando queste identità per $\underset{k}{\lambda}^{\mu}$, sommando rispetto a μ, otteniamo, tenendo conto del primo gruppo delle [8],

$$[12] \qquad \omega_{kj}\,\beta_{hj}-\rho_h\,\beta_{hk}=0 \ , \quad (k=1,2,3) \ ,$$

cioè, per un fissato h, il sistema delle tre identità

$$[12_1] \qquad \begin{cases} (\omega_{11} - \rho_h)\,\beta_{h1} + \omega_{12}\,\beta_{h2} + \omega_{13}\,\beta_{h3} = 0 \,, \\ \omega_{21}\,\beta_{h1} + (\omega_{22} - \rho_h)\,\beta_{h2} + \omega_{23}\,\beta_{h3} = 0 \,, \\ \omega_{31}\,\beta_{h1} + \omega_{32}\,\beta_{h2} + (\omega_{33} - \rho_h)\,\beta_{h3} = 0 \,. \end{cases}$$

Pertanto, le ρ_h sono radici dell'equazione cubica in ρ

$$[13] \qquad \|\omega_{hk} - \rho\,\delta_{hk}\| = 0 \,.$$

3. – Denotiamo con γ'_{hij}, γ_{hij} rispettivamente i coefficienti di rotazione di Ricci relativi alle due terne Λ' e Λ, definiti dalle posizioni

$$[14] \quad \gamma'_{hij} = \underset{i}{\lambda}'^{\mu}\,\underset{j}{\lambda}'^{\nu}\,\nabla_\nu \underset{h}{\lambda}'_{\mu} \,, \qquad [15] \quad \gamma_{hij} = \underset{i}{\lambda}^{\mu}\,\underset{j}{\lambda}^{\nu}\,\nabla_\nu \underset{h}{\lambda}_{\mu} = \underset{i}{\lambda}_{\mu}\,\underset{j}{\lambda}_{\nu}\,\nabla^\nu \underset{h}{\lambda}^{\mu} \,.$$

ove il simbolo ∇_ν (∇^ν) denota derivazione covariante (contravariante) rispetto alla forma [1]. Per il seguito, interessa esprimere le γ'_{hij} per le γ_{hij}. A questo scopo, osserviamo che si trae dalle [9]

$$\underset{h}{\lambda}'_{\mu} = \beta_{hk}\,\underset{k}{\lambda}_{\mu} \,,$$

donde, derivando covariantemente rispetto alla forma [1],

$$\nabla_\nu \underset{h}{\lambda}'_{\mu} = \beta_{hk}\,\nabla_\nu \underset{k}{\lambda}_{\mu} + \underset{k}{\lambda}_{\mu}\,\nabla_\nu \beta_{hk} \,.$$

Ma dalle [15] si ottiene, in virtù del secondo gruppo delle [8],

$$\nabla_\nu \underset{h}{\lambda}_{\mu} = \gamma_{hij}\,\underset{i}{\lambda}_{\mu}\,\underset{j}{\lambda}_{\nu} \,,$$

quindi, sostituendo nelle [14], si ricava, per le [9],

$$\gamma'_{hij} = \beta_{hk}\,\beta_{ip}\,\beta_{jq}\,\gamma_{kpq} + \beta_{ik}\,\underset{j}{\lambda}'^{\nu}\,\nabla_\nu \beta_{hk} \,.$$

Indichiamo con il simbolo ∂_j derivazione ordinaria rispetto all'arco σ_j della linea j; si ha, per un generico scalare $f(x^\lambda)$,

$$[16] \qquad \partial_j f(x^\lambda) = \frac{\partial}{\partial x^\nu} f(x^\lambda)\,\frac{dx^\nu}{d\sigma_j} = \underset{j}{\lambda}^{\nu}\,\frac{\partial}{\partial x^\nu} f(x^\lambda) = \underset{j}{\lambda}^{\nu}\,\nabla_\nu f(x^\lambda) \,.$$

Avendosi

$$\underset{h}{\lambda}'^{\nu} = \beta_{hk}\,\underset{k}{\lambda}^{\nu} \,,$$

tenendo conto delle [16], risulta

$$[17] \qquad \gamma'_{hij} = \beta_{jq} [\beta_{ip} \beta_{hk} \gamma_{kpq} + \beta_{ik} \partial_q \beta_{hk}] \; .$$

Queste formule risolvono il problema che ci eravamo proposto. Ad esse si può attribuire un'altra forma. Intanto osserviamo che, essendo nove il numero dei coefficienti di rotazione distinti nella V_3 di una generica terna ortogonale di congruenze di linee, possiamo liberarci dalla notazione a tre indici, per sostituirvi quella a due indici, ponendo (¹)

$$[18] \qquad \rho'_{hk} = \gamma'_{h+1\,h+2\,k} \; , \quad \rho_{hk} = \gamma_{h+1\,h+2\,k} \; .$$

Ricordando che

$$\gamma_{kkq} = 0 \; , \quad \gamma_{kpq} + \gamma_{pkq} = 0 \; ,$$

si trae dalle [17], con ovvio scambio di indici,

$$[19] \quad \gamma'_{h+1\,h+2\,k} = \beta_{kq} [\beta_{h+2\,i+1} \beta_{h+1\,i} - \beta_{h+2\,i} \beta_{h+1\,i+1}] \gamma_{ii+1q} + \beta_{kq} \beta_{h+2\,i} \partial_q \beta_{h+1\,i} \; .$$

Ma nel determinante $[\beta_{hi} \beta_{h+1\,i+1} \beta_{h+2\,i+2}]$ l'elemento β_{hi+2} è eguale al sua complemento algebrico, cioè alla differenza che figura fra le parentesi quadre [ ] dei secondi membri delle [19]. Abbiamo pertanto le formule definitive, scambiando q in j,

$$[20] \qquad \rho'_{hk} = \beta_{kj} [\beta_{hi} \rho_{ij} + \beta_{h+2\,i} \partial_j \beta_{h+1\,i}] \; .$$

§ II. – Condizioni di normalità delle tre congruenze principali. Identità fondamentale

1. – In un generico punto P della V_3 consideriamo le tre linee h' che appartengono alle tre congruenze principali $[h']$ e le tre giaciture ad esse rispettivamente perpendicolari. In generale, queste tre giaciture non saranno tangenti ad un sistema triplo di superficie necessariamente ortogonali nel punto P.

(¹) Ora, e in seguito, considereremo equivalenti gli indici che differiscono tra loro per tre o per un multiplo di tre.

Noi vogliamo caratterizzare quelle varietà V_3 nelle quali invece si verifica tale circostanza, non solo nel punto P, ma in ogni altro punto della varietà. Per tali V_3, e solo per esse, accadrà che le linee principali costituiranno le traiettorie ortogonali di un sistema triplo di superficie ortogonali, cioè le congruenze principali saranno *normali.* Come dicemmo nella Prefazione, il BIANCHI chiamava allora *normale* la varietà corrispondente (1).

Prendiamo in considerazione la congruenza $[h']$, e ricordiamo che essa è normale solo e soltanto quando è nullo l'invariante

$$r'_h = \rho'_{h+1\,h+1} + \rho'_{h+2\,h+2}\,. \tag{21}$$

Dalle [20] ricaviamo

$$\begin{cases} \rho'_{h+1\,h+1} = \beta_{h+1\,j}[\beta_{h+1\,i}\,\rho_{ij} + \beta_{hi}\,\partial_j\,\beta_{h+2\,i}]\,, \\ \rho'_{h+2\,h+2} = \beta_{h+2\,j}[\beta_{h+2\,i}\,\rho_{ij} + \beta_{h+1\,i}\,\partial_j\,\beta_{hi}]\,. \end{cases}$$

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \rho'_{h+1\,h+1} = {} & \beta_{h+1\,i}[\beta_{h+1\,i}\,\rho_{ii} + \beta_{hi}\,\partial_i\,\beta_{h+2\,i}] + \beta_{h+1\,i+1}[\beta_{h+1\,i}\,\rho_{i\,i+1} + \beta_{hi}\,\partial_{i+1}\,\beta_{h+2\,i}] + \\ & + \beta_{h+1\,i+2}[\beta_{h+1\,i}\,\rho_{i\,i+2} + \beta_{hi}\,\partial_{i+2}\,\beta_{h+2\,i}]\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho'_{h+2\,h+2} = {} & \beta_{h+2\,i}[\beta_{h+2\,i}\,\rho_{ii} + \beta_{h+1\,i}\,\partial_i\,\beta_{hi}] + \beta_{h+2\,i+1}[\beta_{h+2\,i}\,\rho_{i\,i+1} + \beta_{h+1\,i}\,\partial_{i+1}\,\beta_{hi}] + \\ & + \beta_{h+2\,i+2}[\beta_{h+2\,i}\,\rho_{i\,i+2} + \beta_{h+1\,i}\,\partial_{i+2}\,\beta_{hi}]\,, \end{aligned}$$

donde, sommando, si ricava

$$\begin{aligned} r'_h = {} & \rho_{ii}[\beta^2_{h+1\,i} + \beta^2_{h+2\,i}] + \rho_{i\,i+1}[\beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+1\,i+1} + \beta_{h+2\,i}\,\beta_{h+2\,i+1}] + \\ & + \rho_{i\,i+2}[\beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+1\,i+2} + \beta_{h+2\,i}\,\beta_{h+2\,i+2}] + \\ & + \beta_{hi}\,\beta_{h+1\,i}\,\partial_i\,\beta_{h+2\,i} + \beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+2\,i}\,\partial_i\,\beta_{hi} + \\ & + \beta_{hi}\,\beta_{h+1\,i+1}\,\partial_{i+1}\,\beta_{h+2\,i} + \beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+2\,i+1}\,\partial_{i+1}\,\beta_{hi} + \\ & + \beta_{hi}\,\beta_{h+1\,i+2}\,\partial_{i+2}\,\beta_{h+2\,i} + \beta_{h+1\,i}\,\beta_{h+2\,i+2}\,\partial_{i+2}\,\beta_{hi}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

(1) BIANCHI, *Ricerche sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche*, [«Annali di matematica», Serie III, Tomo XXIII, (1914)]. È in questa Memoria [§ 2] che il BIANCHI adopera per la prima volta tale locuzione.

Si ha

$$[23]\begin{cases} \rho_{ii}[\beta^2_{h+1i}+\beta^2_{h+2i}]=\rho_{ii}[1-\beta^2_{hi}]=\rho_{ii}[\beta^2_{hi+1}+\beta^2_{hi+2}]=[\rho_{i+1i+1}+\rho_{i+2i+2}]\beta^2_{hi}\ , \\ \rho_{ii+i}[\beta_{h+1i}\beta_{h+1i+1}+\beta_{h+2i}\beta_{h+2i+1}]=-\rho_{ii+1}\beta_{hi}\beta_{hi+1}\ , \\ \rho_{ii+2}[\beta_{h+1i}\beta_{h+1i+2}+\beta_{h+2i}\beta_{h+2i+2}]=-\rho_{ii+2}\beta_{hi}\beta_{hi+2}=-\rho_{i+1i}\beta_{hi}\beta_{hi+1}\ , \end{cases}$$

$$[24]\quad \beta_{hi}\beta_{h+1i}\partial_i\beta_{h+2i}+\beta_{h+2i}\beta_{h+1i}\partial_i\beta_{hi}=-\beta_{h+1i}[\beta_{hi+1}\partial_i\beta_{h+2i+1}+ \\ +\beta_{h+2i+1}\partial_i\beta_{hi+1}+\beta_{hi+2}\partial_i\beta_{h+2i+2}+\beta_{h+2i+2}\partial_i\beta_{hi+2}]\ .$$

Con ovvî scambi di indici si vede allora che quella parte di sommatoria che figura nelle [22], i cui addendi contengono le derivate rispetto agli archi σ_j, si riduce soltanto alla sommatoria

$$[25]\quad \beta_{h+2i+1}\beta_{h+1i}\partial_{i+1}\beta_{hi}+\beta_{h+2i+2}\beta_{h+1i}\partial_{i+2}\beta_{hi}-\beta_{h+1i+2}\beta_{h+2i}\partial_{i+2}\beta_{hi}- \\ -\beta_{h+1i+1}\beta_{h+2i}\partial_{i+1}\beta_{hi}=\beta_{hi+2}\partial_{i+1}\beta_{hi}-\beta_{hi+1}\partial_{i+2}\beta_{hi}= \\ =\beta_{hi}[\partial_{i+2}\beta_{hi+1}-\partial_{i+1}\beta_{hi+2}]\ .$$

In virtù delle [23], [24], [25], risulta dalle [22], scambiando l'indice i in k,

$$[26]\qquad r'_h=\beta_{hh}[\partial_{k+2}\beta_{hk+1}-\partial_{k+1}\beta_{hk+2}]+\beta^2_{hk}\Gamma_{kk}+\beta_{hk}\beta_{hk+1}\Gamma_{kk+1}\ ,$$

ove

$$[27]\qquad \Gamma_{kk}=\rho_{k+1k+1}+\rho_{k+2k+2}\ ,\qquad\qquad [28]\qquad -\Gamma_{kk+1}=\rho_{kk+1}+\rho_{k+1k}\ .$$

Concludiamo pertanto che la congruenza $[h']$ è normale quando

$$[29]\qquad r'_h=0\ ,$$

ove r'_h ha l'espressione [26], e soltanto in questo caso.

2. – Facciamo le posizioni

$$[30]\qquad g_{hk}=\omega_{hk}-\rho\,\delta_{hk}\ ,$$

consideriamo i due determinanti

$$[31]\quad G(\rho)=\|g_{hk}\|\ ,\qquad\qquad [32]\quad \Omega=\|\omega_{hk}\|\ ,$$

e designiamo con G_{hk} il complemento algebrico dell'elemento g_{hk} nel determinante $G(\rho)$, e analogo significato abbia il simbolo Ω_{hk} con riferimento al determinante Ω. La ρ che figura nelle [30], è una funzione delle x^λ, per ora arbitraria. Poniamo:

$$
[33]\left\{\begin{array}{l}
K'_\varrho = G_{hk}[\partial_{k+2} G_{hk+1} - \partial_{k+1} G_{hk+2}]\ ,\quad K''_\varrho = G^2_{hk}\Gamma_{hh} + G_{hk}G_{h+1\,k}\Gamma_{hh+1}\ ,\\
\qquad\qquad K_\varrho = K'_\varrho + K''_\varrho\ ,\\
I_1 = \omega_{hk}[\nabla_{k+2}\omega_{hk+1} - \nabla_{k+1}\omega_{hk+2}]\ ,\quad I_2 = \Omega_{hk}[\nabla_{k+2}\omega_{hk+1} - \nabla_{k+1}\omega_{hk+2}]\ ,\\
\qquad\qquad I_3 = \Omega_{hk}[\nabla_{k+2}\Omega_{hk+1} - \nabla_{k+1}\Omega_{hk+2}]\ .
\end{array}\right.
$$

In queste posizioni il simbolo ∇_k indica derivazione covariante intrinseca con riferimento alla terna di congruenze Λ, i parametri di derivazione essendo quindi i coefficienti di rotazione di essa, cioè le ρ_{hk}.

Vogliamo stabilire la seguente identità fondamentale (1)

$$
[W]\qquad K_{\varrho_i} = I_1\rho_i^2 + 2I_2\rho_i + I_3\ ,
$$

ove ρ_i denota una qualunque radice dell'equazione $G(\rho)=0$, che è la [13] già considerata.

Cominciamo intanto a dimostrare l'identità

$$
[W']\qquad K'_\varrho = I'_1\rho^2 + 2I'_2\rho + I'_3\ ,
$$

valevole per ogni funzione ρ delle x^λ, e dove è

$$
[34]\left\{\begin{array}{l}
I'_1 = \omega_{hk}\psi_{hk}\ ,\qquad I'_2 = \Omega_{hk}\psi_{hk}\ ,\qquad I'_3 = \Omega_{hk}\Psi_{hk}\ ,\\
\psi_{hk} = \partial_{k+2}\omega_{hk+1} - \partial_{k+1}\omega_{hk+2}\ ,\quad \Psi_{hk} = \partial_{k+2}\Omega_{hk+1} - \partial_{k+1}\Omega_{hk+2}\ .
\end{array}\right.
$$

A tale scopo osserviamo che si ha

$$
[35]\left\{\begin{array}{l}
G_{hh} = \rho^2 - (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\rho + \Omega_{hh}\ ,\\
G_{hh+1} = G_{h+1\,h} = \omega_{hh+1}\rho + \Omega_{hh+1} = \omega_{h+1\,h}\rho + \Omega_{h+1\,h}\ .
\end{array}\right.
$$

(1) WEINGARTEN, *Zur Theorie der isostatischen Flächen*, [« Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 90, (1881)]. Nel caso dello spazio ordinario e in coordinate cartesiane la (W) si riduce all'identità stabilita in questa Memoria [§ 2]. Va osservato che qui si trova un errore di stampa, dovendo il secondo addendo del secondo membro essere preceduto dal segno +. L'errore è corretto nella Errata-corrige del Volume.

Nella espressione di K'_ϱ data dalle [33], sostituiamo le [35]: tenendo conto solo dei termini che contengono le derivate della ρ, abbiamo che tale somma parziale è

$$\begin{aligned}&[\rho^2-(\omega_{h+1\,h+1}+\omega_{h+2\,h+2})\,\rho+\Omega_{hh}]\,[\omega_{hh+1}\,\partial_{h+2}\,\rho-\omega_{hh+2}\,\partial_{h+1}\,\rho]+\\ &+[\omega_{hh+1}\,\rho+\Omega_{hh+1}]\,[\omega_{hh+2}\,\partial_h\,\rho+(\omega_{h+1\,h+1}+\omega_{h+2\,h+2})\,\partial_{h+2}\,\rho-2\,\rho\,\partial_{h+2}\,\rho]+\\ &+[\omega_{hh+2}\,\rho+\Omega_{hh+2}]\,[2\,\rho\,\partial_{h+1}\,\rho-(\omega_{h+1\,h+1}+\omega_{h+2\,h+2})\,\partial_{h+1}\,\rho-\omega_{hh+1}\,\partial_h\,\rho]\,.\end{aligned}$$

Vogliamo ora determinare il coefficiente, in tale somma, della derivata $\partial_h\,\rho$: con ovvio scambi di indici si trova che tale coefficiente è

$$\begin{aligned}&[\rho^2-(\omega_{hh}+\omega_{h+2\,h+2})\,\rho+\Omega_{h+1\,h+1}]\,\omega_{h+1\,h+2}-[\rho^2-(\omega_{hh}+\omega_{h+1\,h+1})\,\rho+\Omega_{h+2\,h+2}]\,\omega_{h+2\,h+1}+\\ &+[\omega_{hh+1}\,\rho+\Omega_{hh+1}]\,\omega_{hh+2}+[\omega_{h+1\,h+2}\,\rho+\Omega_{h+1\,h+2}]\,[\omega_{hh}+\omega_{h+2\,h+2}-2\,\rho]+\\ &+[\omega_{h+2\,h+1}\,\rho+\Omega_{h+2\,h+1}]\,[2\,\rho-(\omega_{hh}+\omega_{h+1\,h+1})]-[\omega_{h\,h+2}\,\rho+\Omega_{h\,h+2}]\,\omega_{h\,h+1}\,.\end{aligned}$$

Eseguendo il calcolo, si riconosce che il coefficiente in discorso vale

$$[36]\qquad \begin{aligned}&\omega_{h\,h+2}\,\Omega_{h\,h+1}+\omega_{h+1\,h+2}\,\Omega_{h+1\,h+1}+\omega_{h+2\,h+2}\,\Omega_{h+2\,h+1}-\\ &-\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+2}-\omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+1\,h+2}-\omega_{h+2\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h+2}\,.\end{aligned}$$

La somma dei termini nella [36] preceduti dal segno + è nulla, perchè, con riferimento al determinante $\|\omega_{hk}\|$, essa è la somma dei prodotti degli elementi della colonna $h+2$-esima per i complementi algebrici degli elementi corrispondenti della colonna $h+1$-esima. Per la stessa ragione è nulla la somma dei termini della [36] che sono preceduti dal segno $-$.

Concludiamo pertanto che i coefficienti delle derivate della funzione ρ che figurano nella [W'] sono identicamente nulli: quindi la esplicita espressione di K'_ϱ non contiene tali derivate: essa è perciò un polinomio nella ρ. Si riconosce ovviamente che in esso è nullo il coefficiente di ρ^3. Possiamo allora scrivere

$$[37]\qquad K'_\varrho=A\rho^2+B\rho+C\,,$$

qualunque sia ρ. Calcoliamo A, B, C. Intanto, la espressione di C è subito trovata, perchè dalla [37] si deduce che C è il valore di K'_ϱ per $\rho=0$. Perciò, dalla prima delle [33] si trae

$$C=[K'_\varrho]_{\varrho=0}=\Omega_{hh}[\partial_{k+2}\,\Omega_{hk+1}-\partial_{k+1}\,\Omega_{hk+2}]\,,$$

cioè

[38] $$C = \Gamma'_3 \ .$$

Calcoliamo A; il coefficiente di ρ^2 si determina dalla K'_ϱ ove al posto delle G_{hk} si pongano le [35]: per tale coefficiente si ha l'espressione

$$\begin{aligned} A = &\partial_{h+2}\,\Omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\Omega_{h\,h+2} - (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\,(\partial_{h+2}\,\omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\omega_{h\,h+2}) + \\ &+ \{\partial_h\,\omega_{h\,h+2} + \partial_{h+2}\,\omega_{h+1\,h+1} + \partial_{h+2}\,\omega_{h+2\,h+2}\}\,\omega_{h\,h+1} - \\ &- \{\partial_h\,\omega_{h\,h+1} + \partial_{h+1}\,\omega_{h+1\,h+1} + \partial_{h+1}\,\omega_{h+2\,h+2}\}\,\omega_{h\,h+2} \ . \end{aligned}$$

Nella sommatoria, rispetto ad h, di $\partial_{h+2}\,\Omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\Omega_{h\,h+2}$, i termini si elidono due a due; la somma rimanente si può scrivere così:

$$\omega_{hh}\,[\partial_{h+2}\,\omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\omega_{h\,h+2}] + \omega_{h\,h+1}\,[\partial_h\,\omega_{h\,h+2} - \partial_{h+2}\,\omega_{hh}] + \\ + \omega_{h\,h+2}\,[\partial_{h+1}\,\omega_{hh} - \partial_h\,\omega_{h\,h+1}] \ .$$

In definitiva risulta

$$A = \omega_{hh}\,[\partial_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}] \ ,$$

cioè

[39] $$A = \Gamma'_1 \ .$$

Calcoliamo B: questo coefficiente di ρ nella espressione di K'_ϱ vale

$$\begin{aligned} &\Omega_{hh}\,[\partial_{h+2}\,\omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\omega_{h\,h+2}] - [\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}]\,[\partial_{h+2}\,\Omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\Omega_{h\,h+2}] + \\ &+ [\partial_h\,\omega_{h\,h+2} + \partial_{h+2}\,\omega_{h+1\,h+1} + \partial_{h+2}\,\omega_{h+2\,h+2}]\,\Omega_{h\,h+1} + [\partial_h\,\Omega_{h\,h+2} - \partial_{h+2}\,\Omega_{hh}]\,\omega_{h\,h+1} - \\ &- [\partial_h\,\omega_{h\,h+1} + \partial_{h+1}\,\omega_{h+1\,h+1} + \partial_{h+1}\,\omega_{h+2\,h+2}]\,\Omega_{h\,h+2} + [\partial_{h+1}\,\Omega_{hh} - \partial_h\,\Omega_{h\,h+1}]\,\omega_{h\,h+2} \ , \end{aligned}$$

cioè

[40] $$\begin{aligned} &\Omega_{hh}\,[\partial_{h+2}\,\omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\omega_{h\,h+2}] + \Omega_{h\,h+1}\,[\partial_h\,\omega_{h\,h+2} - \partial_{h+2}\,\omega_{hh}] + \\ &+ \Omega_{h\,h+2}\,[\partial_{h+1}\,\omega_{hh} - \partial_h\,\omega_{h\,h+1}] + \omega_{hh}\,[\partial_{h+2}\,\Omega_{h\,h+1} - \partial_{h+1}\,\Omega_{h\,h+2}] + \\ &+ \omega_{h\,h+1}\,[\partial_h\,\Omega_{h\,h+2} - \partial_{h+2}\,\Omega_{hh}] + \omega_{h\,h+2}\,[\partial_{h+1}\,\Omega_{hh} - \partial_h\,\Omega_{h\,h+1}] \ . \end{aligned}$$

Prendendo in considerazione il determinante $\|\omega_{hk}\|$, usufruendo della proprietà già richiamata per il calcolo del coefficiente C, con ovvie derivazioni delle identità in discorso, si riconosce che la sommatoria (rispetto ad h) applicata alle quarta, quinta e sesta espressione che figura nella [40], è eguale alla sommatoria (rispetto ad h) riferita alla prima, seconda e terza espressione che figura nella medesima. Concludiamo pertanto che è

$$B = 2\,\Omega_{hk}\left[\partial_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}\right] ,$$

cioè

$$B = 2\,I_2' . \tag{41}$$

L'identità [W'] è pertanto completamente verificata.

Eseguendo nella K_ρ'' delle [33] la sostituzione delle [35], ed effettuando il calcolo, si troverebbe per K_ρ'' un polinomio di quarto grado nella ρ; ma se, come supporremo d'ora in avanti, ρ indica una radice dell'equazione secolare $G(\rho)=0$, vedremo che questo polinomio si trasforma in uno di secondo grado in ρ.

Fissiamo un valore per h e consideriamo le somme

$$G^{hh} = G_{h1}^2 + G_{h2}^2 + G_{h3}^2 , \tag{42}$$

$$G^{h\,h+1} = G_{h1}\,G_{h+1\,1} + G_{h2}\,G_{h+1\,2} + G_{h3}\,G_{h+1\,3} . \tag{43}$$

che figurano nel secondo membro della K_ρ''. Cominciamo a trasformare la [42]. Ponendo al posto delle G_{hk} le loro espressioni [35], e sviluppando i quadrati, otteniamo

$$\begin{aligned} G^{hh} = {} & \rho^4 - 2\left[\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}\right]\rho^3 + \left[\omega_{h\,h+1}^2 + \omega_{h\,h+2}^2 + (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})^2 + \right. \\ & \left. + 2\,\Omega_{hh}\right]\rho^2 + 2\left[\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+1} + \omega_{h\,h+2}\,\Omega_{h\,h+2} - (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{hh}\right]\rho + \\ & + \Omega_{hh}^2 + \Omega_{h\,h+1}^2 + \Omega_{h\,h+2}^2 . \end{aligned} \tag{44}$$

Indichi ora e nel seguito ρ una qualunque radice dell'equazione [13]: per tale valore è nullo il determinante $G(\rho)$ e quindi è nullo anche il suo aggiunto $\|G_{hk}\|$; sono perciò nulli, per un noto teorema, tutti i minori del second'ordine che si estraggono da questo; in particolare, sono nulli tutti i minori principali dell'aggiunto di ordine due: abbiamo pertanto le identità

$$G_{hh}\,G_{h+1\,h+1} = G_{h\,h+1}^2 ,$$

le quali dànno, surrogandovi le [35],

$$\rho^4 - [\omega_{hh} + \omega_{h+1\,h+1} + 2\,\omega_{h+2\,h+2}]\,\rho^3 = [\omega^2_{h\,h+1} - (\omega_{hh} + \omega_{h+2\,h+2})\,(\omega_{h+1\,h+1} +$$

$$+ \omega_{h+2\,h+2}) - \Omega_{hh} - \Omega_{h+1\,h+1}]\,\rho^2 + [(\omega_{hh} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{hh} +$$

$$+ (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h+1\,h+1} + 2\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+1}]\,\rho + \Omega^2_{h\,h+1} - \Omega_{hh}\,\Omega_{h+1\,h+1}\,.$$

Queste sono tre identità: fissato il valore h, associamo alla identità, (α), relativa a tale indice quella, (β), che corrisponde al valore $h+1$ dell'indice, e poi l'altra, che diremo (γ), che corrisponde al valore $h+2$ dell'indice: poi sommiamo (α) con (γ) e sottraghiamo (β). Si ottiene

$$[45]\qquad \rho^4 - 2[\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}]\,\rho^3 = [\omega^2_{h\,h+1} + \omega^2_{h\,h+2} - \omega^2_{h+1\,h+2} - (\omega_{hh} + \omega_{h+2\,h+2})$$

$$(\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}) - (\omega_{hh} + \omega_{h+1\,h+1})\,(\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2}) +$$

$$+ (\omega_{hh} + \omega_{h+1\,h+1})\,(\omega_{hh} + \omega_{h+2\,h+2}) - 2\,\Omega_{hh}]\,\rho^2 +$$

$$+ [(\omega_{hh} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{hh} + (\omega_{hh} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h+1\,h+1} + (\omega_{hh} + \omega_{h+1\,h+1})\,\Omega_{hh} +$$

$$+ (\omega_{h+1\,h+1} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h+2\,h+2} - (\omega_{hh} + \omega_{h+1\,h+1})\,\Omega_{h+1\,h+1} -$$

$$- (\omega_{hh} + \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h+2\,h+2} + 2(\omega_{h\,h+1} + \Omega_{h\,h+1} + \omega_{h\,h+2}\Omega_{h\,h+2} - \omega_{h+1\,h+2}\,\Omega_{h+1\,h+2}]\,\rho +$$

$$+ \Omega^2_{h\,h+1} - \Omega_{hh}\,\Omega_{h+1\,h+1} + \Omega^2_{h\,h+2} - \Omega_{hh}\,\Omega_{h+2\,h+2} + \Omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h+2} - \Omega^2_{h+1\,h+2}\,.$$

Sommando la [44] con la [45] si trae l'espressione definitiva

$$[46]\qquad G^{hh} = [\omega^2_{hh} + \omega^2_{h\,h+1} + \omega^2_{h\,h+2} + \Omega_{hh} - \Omega_{h+1\,h+1} - \Omega_{h+2\,h+2}]\,\rho^2 +$$

$$+ [4\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+1} + 4\,\omega_{h\,h+2}\,\Omega_{h\,h+2} - 2\,\omega_{h+1\,h+2}\,\Omega_{h+1\,h+2} +$$

$$+ (2\,\omega_{hh} - \omega_{h+1\,h+1} - \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{hh} + (\omega_{h+2\,h+2} - \omega_{hh})\,\Omega_{h+1\,h+1} +$$

$$+ (\omega_{h+1\,h+1} - \omega_{hh})\,\Omega_{h+2\,h+2}]\,\rho + \Omega^2_{hh} + \Omega^2_{h\,h+1} + \Omega^2_{h\,h+2} + \Omega^2_{h\,h+1} - \Omega_{hh}\,\Omega_{h+1\,h+1} +$$

$$+ \Omega^2_{h\,h+2} - \Omega_{hh}\,\Omega_{h+2\,h+2} + \Omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h+2} - \Omega^2_{h+1\,h+2}\,,$$

che è un polinomio di secondo grado nella ρ, radice della equazione secolare [13].

Trasformiamo ora la somma [43]. Poichè, come dicemmo, sono nulli tutti i minori del secondo ordine del determinate aggiunto $\|G_{hk}\|$, possiamo scrivere

$$\frac{G_{h1}}{G_{h+1\,1}} = \frac{G_{h2}}{G_{h+1\,2}} = \frac{G_{h3}}{G_{h+1\,3}} ,$$

donde

[47] $$G^{h\,h+1} = G_{h\,h+1}\left[G_{11} + G_{22} + G_{33}\right] ,$$

dalle quali, sostituendo le [35], si ricava

[48] $$G^{h\,h+1} = 3\,\omega_{h\,h+1}\,\rho^3 + \left[3\,\Omega_{h\,h+1} - 2\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega_1\right]\rho^2 + \\ + \left[\omega_{h\,h+1}\,\Omega_2 - 2\,\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_1\right]\rho + \Omega_{h\,h+1}\,\Omega_2 ,$$

ove

$$\Omega_1 = \omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} \quad , \quad \Omega_2 = \Omega_{11} + \Omega_{22} + \Omega_{33} .$$

Ma essendo ρ radice dell'equazione [13], abbiamo

[49] $$\rho^3 = \Omega_1\,\rho^2 - \Omega_2\,\rho + \Omega \quad , \quad \Omega = \|\omega_{hk}\| .$$

Ponendo nella [48] la [49] otteniamo l'espressione definitiva

[50] $$G^{h\,h+1} = \left[\omega_{h\,h+1}\,\Omega_1 + 3\,\Omega_{h\,h+1}\right]\rho^2 - 2\left[\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_1 + \omega_{h\,h+1}\,\Omega_2\right]\rho + \\ + \Omega_{h\,h+1}\,\Omega_2 + 3\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega .$$

Infine, sostituendo nella K''_ϱ data dalle [33], con ρ radice dell'equazione [13], le [46] e [50], si trae

$$[W''] \qquad K''_\varrho = I''_1\,\rho^2 + 2\,I''_2\,\rho + I''_3 ,$$

ove

[51] $$I''_1 = \Gamma_{hh}\left[\omega^2_{hh} + \omega^2_{h\,h+1} + \omega^2_{h\,h+2} + \Omega_{hh} - \Omega_{h+1\,h+1} - \Omega_{h+2\,h+2}\right] + \\ + \Gamma_{h\,h+1}\left[\omega_{h\,h+1}\,\Omega_1 + 3\,\Omega_{h\,h+1}\right] ,$$

$$[52] \qquad \mathrm{I}_2'' = \frac{1}{2}\Gamma_{hh}\,[4\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h+1} + 4\,\omega_{h\,h+2}\,\Omega_{h\,h+2} - 2\,\omega_{h+1\,h+2}\,\Omega_{h+1\,h+2} +$$

$$+ (2\,\omega_{h\,h} - \omega_{h+1\,h+1} - \omega_{h+2\,h+2})\,\Omega_{h\,h} + (\omega_{h+2\,h+2} - \omega_{h\,h})\,\Omega_{h+1\,h+1} +$$

$$+ (\omega_{h+1\,h+1} - \omega_{h\,h})\,\Omega_{h+2\,h+2}] - \Gamma_{h\,h+1}\,[\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_1 + \omega_{h\,h+1}\,\Omega_2] \;,$$

$$[53] \qquad \mathrm{I}_3'' = \Gamma_{hh}\,[\Omega_{hh}^2 + \Omega_{h\,h+1}^2 + \Omega_{h\,h+2}^2 + \Omega_{h\,h+1}^2 - \Omega_{h\,h}\,\Omega_{h+1\,h+1} +$$

$$+ \Omega_{h\,h+2}^2 - \Omega_{h\,h}\,\Omega_{h+2\,h+2} + \Omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h+2} - \Omega_{h+1\,h+2}^2] +$$

$$+ \Gamma_{h\,h+1}\,[\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_2 + 3\,\omega_{h\,h+1}\,\Omega] \;.$$

Queste espressioni di I_1'', I_2', I_3'' possono subire una notevole trasformazione.

Le esplicite espressioni delle Ω_{hk} si traggono dalle [35] ponendovi $\rho = 0$: esse sono pertanto

$$[54] \qquad \begin{cases} \Omega_{h\,h} = \omega_{h+1\,h+1}\,\omega_{h+2\,h+2} - \omega_{h+1\,h+2}^2 \;, \\ \Omega_{h\,h+1} = \Omega_{h+1\,h} = \omega_{h\,h+2}\,\omega_{h+1\,h+2} - \omega_{h\,h+1}\,\omega_{h+2\,h+2} \;. \end{cases}$$

Ponendole nella [51] e sostituendo nella medesima al posto delle $\Gamma_{h\,h}$, $\Gamma_{h\,h+1}$ le [27], [28], si trova

$$[51_1] \qquad \mathrm{I}_1'' = \omega_{h\,k}[(\rho_{k+1\,k+1} + \rho_{k+2\,k+2})\,\omega_{hk} - \rho_{k\,k+1}\,\omega_{h\,k+1} - \rho_{k\,k+2}\,\omega_{h\,k+2} +$$

$$+ \rho_{h+1\,k+2}\,\omega_{h+2\,k+1} - \rho_{h+1\,k+1}\,\omega_{h+2\,k+2} + \rho_{h+2\,k+1}\,\omega_{h+1\,k+2} - \rho_{h+2\,k+2}\,\omega_{h+1\,k+1}] \;.$$

Più laborioso è invece il calcolo per mettere I_2'' sotto la forma seguente:

$$[52_1] \qquad \mathrm{I}_2'' = \Omega_{h\,k}[(\rho_{k+1\,k+1} + \rho_{k+2\,k+2})\,\omega_{h\,k} - \rho_{k\,k+1}\,\omega_{h\,k+1} - \rho_{k\,k+2}\,\omega_{h\,k+2} +$$

$$+ \rho_{h+1\,k+2}\,\omega_{h+2\,k+1} - \rho_{h+1\,k+1}\,\omega_{h+2\,k+2} + \rho_{h+2\,k+1}\,\omega_{h+1\,k+2} - \rho_{h+2\,k+2}\,\omega_{h+1\,k+1}] \;.$$

A questo scopo osserviamo, che se facciamo la differenza fra i secondi membri delle [52] e [52_1], la differenza fra i termini che contengono a fattore $\Omega_{h\,h}$ vale

$$[55] \qquad \Omega_{h\,h}[(2\,\rho_{h\,h+1} + \rho_{h+1\,h})\,\omega_{h\,h+1} + (2\,\rho_{h\,h+2} + \rho_{h+2\,h})\,\omega_{h\,h+2}] \;,$$

mentre quella fra i termini che contengono a fattore $\Omega_{h\,h+1}$ è

[56] $$\Omega_{h\,h+1}\left[(2\rho_{h+1\,h}+\rho_{h\,h+1})\,\omega_{h\,h}+(2\rho_{h\,h+1}+\rho_{h+1\,h})\,\omega_{h+1\,h+1}+\right.$$
$$\left.+(2\rho_{h\,h+2}+\rho_{h+2\,h})\,\omega_{h+1\,h+2}+(2\rho_{h+1\,h+2}+\rho_{h+2\,h+1})\,\omega_{h\,h+2}\right].$$

La differenza in discorso è eguale pertanto alla somma delle [55] e [56]: questa si può scrivere così:

[57] $$\rho_{h+1\,h}[(\omega_{h\,h+1}\,\Omega_{h\,h}+\omega_{h+1\,h+1}\,\Omega_{h+1\,h}+\omega_{h+2\,h+1}\,\Omega_{h+2\,h})+$$
$$+2(\omega_{h\,h}\,\Omega_{h\,h+1}+\omega_{h+1\,h}\,\Omega_{h+1\,h+1}+\omega_{h+2\,h}\,\Omega_{h+2\,h+1})]+$$
$$+\rho_{h+2\,h}[(\omega_{h\,h+2}\,\Omega_{h\,h}+\omega_{h+1\,h+2}\,\Omega_{h+1\,h}+\omega_{h+2\,h+2}\,\Omega_{h+2\,h})+$$
$$+2(\omega_{h\,h}\,\Omega_{h\,h+2}+\omega_{h+1\,h}\,\Omega_{h+1\,h+2}+\omega_{h+2\,h}\,\Omega_{h+2\,h+2})]\quad.$$

Ciascuna delle somme contenuta fra le parentesi rotonde è nulla, perchè somma di prodotti degli elementi di una riga del determinante $\|\omega_{hk}\|$ per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga. Il nostro asserto è quindi provato, essendo identicamente nulla la [57].

Quasi senza calcoli si verifica che l'espressione [53] di I_3'' si può dare la forma seguente:

[53₁] $$I_3''=\Omega_{h\,k}[(\rho_{k+1\,k+1}+\rho_{k+2\,k+2})\,\Omega_{h\,k}-\rho_{k\,k+1}\,\Omega_{h\,k+1}-\rho_{k\,k+2}\,\Omega_{h\,k+2}+$$
$$+\rho_{h+1\,k+2}\,\Omega_{h+2\,k+1}-\rho_{h+1\,k+1}\,\Omega_{h+2\,k+2}+\rho_{h+2\,k+1}\,\Omega_{h+1\,k+2}-\rho_{h+2\,k+2}\,\Omega_{h+1\,k+1}]\ .$$

Infatti, ricordiamo dalla teoria dei determinanti, che denotando con Ω^*_{hk} il complemento algebrico dell'elemento Ω_{hk} nel determinante $\|\Omega_{hk}\|$, sussiste l'identità

$$\omega_{hk}\,\Omega=\Omega^*_{hk}\quad.$$

Con questa osservazione, il coefficiente di $\Gamma_{h\,h+1}$ nell'espressione [53] di I_3'' si può scrivere

$$\Omega_{h\,h+1}\,\Omega_2+3\,\Omega^*_{h\,h+1}\ .$$

Dopo di ciò, basta confrontare le espressioni di I_1'' e di I_3'' date dalle [51] e [53]: si scorge che si passa dalla prima alla seconda per materiale sostituzione degli elementi ω_{hk} e relativi complementi algebrici Ω_{hk}, con gli elementi Ω_{hk} e relativi complementi algebrici Ω^*_{hk}. Perciò, per avere la trasformata di I''_3 data dalla [53], basterà sostituire nella [51$_1$] alle ω_{hk} rispettivamente le Ω_{hk}. Abbiamo così provato quanto avevamo asserito.

Ricordiamo ora che, prendendo in esame, per fissare le idee, le ω_{hk}, le loro derivate prime covarianti ∇_l, con referenza alla terna Λ, i parametri di derivazione essendo, naturalmente, i coefficienti di rotazione di RICCI γ_{hij}, sono date dalle formule

$$\nabla_l \, \omega_{hk} = \partial_l \, \omega_{hk} + \gamma_{ihl} \, \omega_{ik} + \gamma_{ikl} \, \omega_{hi} \ . \tag{58}$$

Consideriamo la somma

$$I_1 = I'_1 + I''_1 \ .$$

Ponendo al posto delle I'_1, I''_1 le espressioni date dalle [39] e [51$_1$], si ha

$$\begin{aligned} I_1 = \omega_{hk} [& \partial_{k+2} \, \omega_{hk+1} - \partial_{k+1} \, \omega_{h\,k+2} + (\rho_{k+1\,k+1} + \rho_{k+2\,k+2}) \, \omega_{hk} - \\ & - \rho_{k\,k+1} \, \omega_{h\,k+1} - \rho_{k\,k+2} \, \omega_{h\,k+2} + \rho_{h+1\,k+2} \, \omega_{h+2\,k+1} - \\ & - \rho_{h+1\,k+1} \, \omega_{h+2\,k+2} + \rho_{h+2\,k+1} \, \omega_{h+1\,k+2} - \rho_{h+2\,k+2} \, \omega_{h+1\,k+1}] \ . \end{aligned} \tag{59}$$

Dalle [58] si trae (si ricordi che $\gamma_{hhj} = 0$)

$$\begin{aligned} \nabla_{k+2} \, \omega_{h\,k+1} = & \partial_{k+2} \, \omega_{h\,k+1} + \gamma_{h+1\,h\,k+2} \, \omega_{h+1\,k+1} + \gamma_{h+2\,h\,k+2} \, \omega_{h+2\,k+1} + \\ & + \gamma_{k\,k+1\,k+2} \, \omega_{hk} + \gamma_{k+2\,k+1\,k+2} \, \omega_{h\,k+2} \ , \end{aligned}$$

ovvero, con la notazione a due indici per le γ_{hij} mediante la posizione [18],

$$\begin{aligned} \nabla_{k+2} \, \omega_{h\,k+1} = & \partial_{k+2} \, \omega_{h\,k+1} - \rho_{h+2\,k+2} \, \omega_{h+1\,k+1} + \rho_{h+1\,k+2} \, \omega_{h+2\,k+1} + \\ & + \rho_{k+2\,k+2} \, \omega_{hk} - \rho_{k\,k+2} \, \omega_{h\,k+2} \ . \end{aligned} \tag{60}$$

Analogamente si trova

$$\begin{aligned} \nabla_{k+1} \, \omega_{h\,k+2} = & \partial_{k+1} \, \omega_{h\,k+2} - \rho_{h+2\,k+1} \, \omega_{h+1\,k+2} + \rho_{h+1\,k+1} \, \omega_{h+2\,k+2} - \\ & - \rho_{k+1\,k+1} \, \omega_{hk} + \rho_{k\,k+1} \, \omega_{h\,k+1} \ . \end{aligned} \tag{61}$$

Sottraendo la [61] dalla [60], si ottiene il coefficiente ω_{hk} nella [59]. Abbiamo pertanto la formula definitiva

$$[62] \qquad I_1 = \omega_{hk}[\nabla_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}] \;.$$

In modo analogo si ottiene

$$[63] \qquad I_2 = I_2' + I_2'' = \Omega_{hk}[\nabla_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}] \;,$$

$$[64] \qquad I_3 = I_3' + I_3'' = \Omega_{hk}[\nabla_{k+2}\,\Omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1}\,\Omega_{h\,k+2}] \;.$$

L'identità [W] è pertanto completamente dimostrata.

§ III. – Condizioni necessarie e sufficienti affinchè la varietà V_3 sia normale

Ricordiamo l'ipotesi fatta che la varietà V_3 abbia distinte le sue tre curvature principali ρ_i, cioè, si supponga che le tre radici ρ_i dell'equazione [13] siano distinte. Consideriamo le identità [12_1] nelle quali abbiamo fissato un valore i per l'indice h: poichè la radice ρ_i è semplice, la caratteristica della matrice $\|\omega_{hk} - \delta_{hk}\,\rho_i\|$ è due; inoltre i complementi algebrici degli elementi d'una sua riga sono proporzionali a quelli degli elementi di ogni altra sua riga. Possiamo pertanto scrivere

$$[65] \qquad m_h^{(i)}\,\beta_{ik} = G_{hk}^{(i)} \;,$$

ove $m_h^{(i)}$ è scelta in modo che risulti

$$\beta_{i1}^2 + \beta_{i2}^2 + \beta_{i3}^2 = 1 \;.$$

Costruiamo la funzione

$$[66] \qquad H_{\varrho_i} = m_h^{(i)}\,\beta_{ik}[\partial_{k+2}\,m_h^{(i)}\,\beta_{ik+1} - \partial_{k+1}\,m_h^{(i)}\,\beta_{ik+2}] + \\ + [\Gamma_{hk}\,\beta_{ik}^2 + \Gamma_{h\,k+1}\,\beta_{ik}\,\beta_{ik+1}]\,m_h^{(i)2} \;.$$

Si ha ovviamente

$$H_{\varrho_i} = \{ \beta_{ik} [\partial_{k+2} \beta_{ik+1} - \partial_{k+1} \beta_{ik+2}] + [\Gamma_{kk} \beta^2_{ik} + \Gamma_{k\,k+1} \beta_{ik} \beta_{i\,k+1}] \} m^{(i)2}_h ,$$

Cioè, in virtù delle [23],

$$[67] \qquad H_{\varrho_i} = M r'_i \;, \quad M = \Sigma_h m^{(i)2}_h \neq 0 \;.$$

Sostituendo le [65] nella [66] ricaviamo, tenendo conto della simmetria del determinante $\| G^{(i)}_{hk} \|$,

$$H_{\varrho_i} = G^{(i)}_{hk} [\partial_{k+2} G^{(i)}_{h\,k+1} - \partial_{k+1} G^{(i)}_{h\,k+2}] + \Gamma_{kk} G^{(i)2}_{kh} + \Gamma_{k\,k+1} G^{(i)}_{kh} G^{(i)}_{k+1\,h} \;,$$

e quindi, per la identità [W],

$$[68] \qquad H_{\varrho_i} = K_{\varrho_i} = I_1 \rho_i^2 + 2 I_2 \rho_i + I_3 \;.$$

Supponiamo dapprima che le congruenze principali della V_3 siano normali: allora in ogni punto della varietà sono nulli gli invarianti r'_i dati dalle [23], e perciò, in forza della [67] sono ivi nulle le tre funzioni H_{ϱ_i}; in virtù della [68] in ogni punto di V_3 sono allora valide le tre identità

$$I_1 \rho_i^2 + 2 I_2 \rho_i + I_3 = 0 \;.$$

Questo significa che l'equazione di secondo grado in ρ

$$I_1 \rho^2 + 2 I_2 \rho + I_3 = 0$$

ammette tre radici distinte, che sono le ρ_i. Deve quindi aversi in ogni punto di V_3,

$$I_1 = 0 \;, \qquad I_2 = 0 \;, \qquad I_3 = 0 \;,$$

cioè

$$[70] \qquad \begin{cases} I_1 = \omega_{hk} [\nabla_{k+2}\, \omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1}\, \omega_{h\,k+2}] = 0 \;, \\ I_2 = \Omega_{hk} [\nabla_{k+2}\, \omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1}\, \omega_{h\,k+2}] = 0 \;, \\ I_3 = \Omega_{hk} (\nabla_{k+2}\, \Omega_{h\,k+1} - \nabla_{k+1}\, \Omega_{h\,k+2}] = 0 \;. \end{cases}$$

Inversamente, se queste identità [70] sono valide in ogni punto della varietà V_3, allora risultano nulle ivi le K_{ϱ_i}, cioè le H_{ϱ_i}, e infine in forza delle [67], le r'_i; le congruenze principali di V_3 sono quindi normali.

Pertanto, le identità [70] sono necessarie e sufficienti perchè la varietà V_3 a tre dimensioni sia normale nel senso del BIANCHI.

Osservazione. - Vogliamo esplicitamente rilevare che nelle relazioni [70] figurano solo elementi geometrici connessi con la varietà V_3. E infatti, noi abbiamo definiti gli invarianti ω_{hk} a mezzo delle posizioni [11] nelle quali intervengono le componenti del tensore doppio covariante di RICCI, ma, come è noto, per queste funzioni si hanno anche le espressioni

$$\omega_{hk} = \partial_{k+2}\, \rho_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\, \rho_{h\,k+2} + \sigma \rho_{hk} - P_{hk} - \rho_{hj}\, \rho_{kj} \ , \quad \sigma = \Sigma_j\, \rho_{jj} \ ,$$

ove P_{hk} è il complemento algebrico dell'elemento ρ_{hk} nel determinante $\|\rho_{hk}\|$. Inoltre, le derivate covarianti ∇_j si riferiscono alle linee della congruenza Λ, i parametri di derivazione essendo i coefficienti di rotazione ρ_{hk} relativi a questa terna.

§ IV. - TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI $I_1 = 0$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$.

Le equazioni [70] possono essere sottoposte ad una trasformazione atta a cambiarle in altre tre nelle quali figurano solo le componenti del tensore fondamentale $a_{\mu\nu}$ e loro derivate ordinarie rispetto alle variabili x^λ fino a quelle del terz'ordine incluso.

D'ora in avanti denoteremo con il simbolo ∇_σ derivazione covariante con riferimento alla forma [1]: se ricordiamo che per un generico scalare delle variabili x^λ la derivazione parziale ordinaria rispetto alla x^μ si identifica con la ∇_μ della stessa funzione, abbiamo

[71] $$\partial_l = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{d x^\mu}{d \sigma_l} = \underset{l}{\lambda}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \underset{l}{\lambda}^\mu \nabla_\mu \ .$$

Indichiamo con e_{ijl} le componenti intrinseche rispetto alla terna Λ del tensore ternario ε di RICCI, cioè poniamo

[72] $$e_{ijl} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\, \underset{i}{\lambda}_\alpha\, \underset{j}{\lambda}_\beta\, \underset{l}{\lambda}_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\, \underset{i}{\lambda}^\alpha\, \underset{j}{\lambda}^\beta\, \underset{l}{\lambda}^\gamma \ ,$$

donde

[73] $$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = e_{ijl} \underset{i}{\lambda^\alpha} \underset{j}{\lambda^\beta} \underset{l}{\lambda^\gamma} \,, \quad \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = e_{ijl} \underset{i}{\lambda_\alpha} \underset{j}{\lambda_\beta} \underset{l}{\lambda_\gamma} \,.$$

Per la definizione del tensore ternario ε, e per le proprietà dei determinanti dei parametri $\underset{h}{\lambda^\mu}$ e dei momenti $\underset{h}{\lambda^\mu}$, risulta che le e_{ijl} hanno per valore zero, se almeno due degli indici i, j, l sono eguali fra loro, e valgono invece $+1$, oppure -1, secondo che la permutazione $i j l$ a indici tutti diversi, è di classe pari o dispari rispetto alla permutazione 1 2 3.

Ricordiamo intanto le posizioni [11]

[74] $$\alpha_{\mu\nu} = \omega_{hk} \underset{h}{\lambda_\mu} \underset{k}{\lambda_\nu} \,,$$

dalle quali si traggono le equivalenti

[75] $$\omega_{hk} = \alpha_{\mu\nu} \underset{h}{\lambda^\mu} \underset{k}{\lambda^\nu} \,.$$

Consideriamo il tensore doppio contravariante simmetrico le cui componenti $\Phi^{\mu\nu}$ sono definite dalle posizioni

[76] $$\Phi^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\sigma\beta\mu} \varepsilon^{\varrho\tau\nu} \alpha_{\sigma\varrho} \alpha_{\beta\tau} \,.$$

Per le proprietà del tensore ternario ε, ogni componente $\Phi^{\mu\nu}$ è eguale al complemento algebrico dell'elemento $\alpha_{\mu\nu}$ del determinante $\|\alpha_{\mu\nu}\|$ diviso per il discriminante della forma [1]. Poniamo al posto delle $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ e delle $\alpha_{\mu\nu}$ le loro espressioni [73] e [74]; ove si osservi che si può scrivere

$$\Omega_{hk} = \frac{1}{2} e_{irh} e_{jsk} \omega_{ij} \omega_{rs} \,,$$

si riconosce, usufruendo delle [8], che si ha

[77] $$\Phi^{\mu\nu} = \Omega_{hk} \underset{h}{\lambda^\mu} \underset{k}{\lambda^\nu} \,,$$

dalle quali si traggono le equivalenti

[78] $$\Omega_{hk} = \Phi^{\mu\nu} \underset{h}{\lambda_\mu} \underset{k}{\lambda_\nu} \,.$$

Tutto questo premesso, prendiamo in esame la [39]

$$\mathrm{I}'_1 = \omega_{hk}[\partial_{k+2}\,\omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\,\omega_{h\,k+2}]\,;$$

a questa possiamo dare le forme seguenti

$$\mathrm{I}'_1 = e_{kql}\ \omega_{hk}\ \nabla_l\,\omega_{hq} = e_{kql}\ \omega_{hk}\ \underset{l}{\lambda}{}^{\sigma}\,\nabla_\sigma\,\omega_{hq}\ .$$

Sostituiamo al posto delle e_{kql} e delle ω_{hk} che sono fuori del simbolo ∇_σ le loro espressioni [72], [75]; teniamo conto delle [8] e inoltre che

$$\underset{h}{\lambda}{}_\mu = a^{\mu\tau}\,\underset{h}{\lambda}{}_\tau\ .$$

Otteniamo così la formula definitiva, scambiando q in j,

$$\mathrm{I}'_1 = \varepsilon^{\nu\beta\sigma}\ a^{\mu\tau}\,\alpha_{\mu\nu}\,\underset{j}{\lambda}{}_\beta\,\underset{h}{\lambda}{}_\tau\,\nabla_\sigma\,\omega_{hj}\ . \tag{79}$$

Per trasformare la [51_1]

$$\begin{aligned}\mathrm{I}''_1 = \omega_{hk}\,[(\rho_{k+1\,k+1} + \rho_{k+2\,k+2})\,\omega_{hk} - \rho_{k\,k+1}\,\omega_{h\,k+1} - \rho_{k\,k+2}\,\omega_{h\,k+2} +\\ + \rho_{h+1\,k+2}\,\omega_{h+2\,k+1} - \rho_{h+1\,k+1}\,\omega_{h+2\,k+2} +\\ + \rho_{h+2\,k+1}\,\omega_{h+1\,k+2} - \rho_{h+2\,k+2}\,\omega_{h+1\,k+1}]\ ,\end{aligned}$$

conviene far uso della notazione a tre indici γ_{hkl} per indicare i coefficienti di rotazione ρ_{hk} della terna Λ. Si può allora scrivere

$$\mathrm{I}''_1 = \omega_{hj}\,[(\gamma_{kj+1\,j+2} - \gamma_{kj+2\,j+1})\,\omega_{hk} + \gamma_{h\,kj+1}\,\omega_{kj+2} - \gamma_{h\,kj+2}\,\omega_{kj+1}]\ ,$$

od anche

$$\mathrm{I}''_1 = \omega_{hj}[e_{qrs}\,\gamma_{jrs}\,\omega_{hq} + e_{qjs}\,\gamma_{hrs}\,\omega_{rq}]\ .$$

Sostituiamo al posto delle γ_{hkl}, delle e_{hkl} e delle ω_{hk} che sono dentro le parentesi quadre le loro espressioni [15], [72], [75]; in forza delle [8] e delle

$$a^{\mu\tau} = \underset{h}{\lambda}{}^{\mu}\,\underset{h}{\lambda}{}^{\nu}\ ,$$

si ha

$$\mathrm{I}''_1 = \varepsilon^{\nu\beta\sigma}\,\omega_{hj}\,\alpha_{\mu\nu}\,[\underset{h}{\lambda}{}^{\mu}\,\nabla_\sigma\,\underset{j}{\lambda}{}_\beta + \underset{j}{\lambda}{}_\beta\,a^{\mu\tau}\,\nabla_\sigma\,\underset{h}{\lambda}{}_\tau]\ .$$

Infine, poichè

$$\underset{h}{\lambda}^{\mu} = a^{\mu\tau} \underset{h}{\lambda}_{\tau} \ ,$$

si trae l'espressione definitiva

[80] $$I_1'' = \varepsilon^{\nu\beta\sigma} a^{\mu\tau} \alpha_{\mu\nu} [\omega_{hj} \underset{h}{\lambda}_{\tau} \nabla_\sigma \underset{j}{\lambda}_{\beta} + \omega_{hj} \underset{j}{\lambda}_{\beta} \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_{\tau}] \ .$$

Sommando la [79] e [80], otteniamo

$$I_1 = \varepsilon^{\nu\beta\sigma} a^{\mu\tau} \alpha_{\mu\nu} [\omega_{hj} \underset{h}{\lambda}_{\tau} \nabla_\sigma \underset{j}{\lambda}_{\beta} + \omega_{hj} \underset{j}{\lambda}_{\beta} \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_{\tau} + \underset{j}{\lambda}_{\beta} \underset{h}{\lambda}_{\tau} \nabla_\sigma \omega_{hj}] \ .$$

La somma fra parentesi, in virtù della [74], è la derivata covariante ∇_σ con riferimento alla [1] del tensore $\alpha_{\tau\beta}$ di Ricci. Abbiamo pertanto la trasformata della I_1 nella forma

[70₁] $$I_1 = \varepsilon^{\nu\beta\sigma} a^{\mu\tau} \alpha_{\mu\nu} \nabla_\sigma \alpha_{\tau\beta} \ .$$

Trasformiamo ora l'espressione della I'_2 data dalla [41]

$$I'_2 = \Omega_{hk} [\partial_{k+2}\, \omega_{h\, k+1} - \partial_{k+1}\, \omega_{h\, k+2}] \ .$$

In conformità a quanto vedemmo per la I'_1, si ha

$$I'_2 = e_{kql}\, \Omega_{hk}\, \underset{l}{\lambda}^{\sigma} \nabla_\sigma \omega_{hq} \ .$$

Sostituendo al posto delle e_{kql} e delle Ω_{hk} le loro espressioni [72], [78], tenendo conto delle [8], e ricordando che

$$a_{\mu\nu} = \underset{h}{\lambda}_{\mu} \underset{h}{\lambda}_{\nu} \ ,$$

si trova, scambiamando q in j,

$$I'_2 = \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma} a_{\alpha\nu} \underset{j}{\lambda}_{\varrho} \underset{h}{\lambda}_{\mu} \Phi^{\mu\nu} \nabla_\sigma \omega_{hj} \ .$$

L'espressione [52₁] di I_2''

$$\begin{aligned} I_2'' = \Omega_{hk} [(\rho_{k+1\, k+1} + \rho_{k+2\, k+2})\, \omega_{hk} - \rho_{k\, k+1}\, \omega_{h\, k+1} - \rho_{k\, k+2}\, \omega_{h\, k+2} + \\ + \rho_{h+1\, k+2}\, \omega_{h+2\, k+1} - \rho_{h+1\, k+1}\, \omega_{h+2\, k+2} + \\ + \rho_{h+2\, k+1}\, \omega_{h+1\, k+2} - \rho_{h+2\, k+2}\, \omega_{h+1\, k+1}] \ , \end{aligned}$$

con riferimento alla parte contenuta fra le parentesi quadre, è quella stessa di I'_1 (formula [51_1]): si può quindi scrivere

$$I''_2 = \Omega_{hj}[e_{qrs}\gamma_{jrs}\omega_{hq} + e_{qjs}\gamma_{hrs}\omega_{rq}] ,$$

la quale espressione è identica alla seguente:

[82] $$I''_2 = \omega_{hj}[e_{jrs}\gamma_{qrs}\Omega_{hq} + e_{jqs}\gamma_{rhs}\Omega_{rq}] .$$

Sostituendo alle γ_{hkl}, e_{hkl}, Ω_{hk} le loro espressioni [15], [72], [75], si ottiene, in virtù delle [8] e delle identità

$$a_{\mu\nu} = \underset{h}{\lambda}_\mu \underset{h}{\lambda}_\nu , \quad \underset{h}{\lambda}_\mu \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_\nu + \underset{h}{\lambda}_\nu \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_\mu = 0 ,$$

[83] $$I''_2 = \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma} a_{\alpha\nu} \Phi^{\mu\nu}[\omega_{hj} \underset{h}{\lambda}_\mu \nabla_\sigma \underset{j}{\lambda}_\varrho + \omega_{hj} \underset{j}{\lambda}_\varrho \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_\mu] .$$

Infine, sommando le [81], [83], si trae

[84] $$I_2 = \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma} a_{\alpha\nu} \Phi^{\mu\nu}[\omega_{hj} \underset{h}{\lambda}_\mu \nabla_\sigma \underset{j}{\lambda}_\varrho + \omega_{hj} \underset{j}{\lambda}_\varrho \nabla_\sigma \underset{h}{\lambda}_\mu + \underset{j}{\lambda}_\varrho \underset{h}{\lambda}_\mu \nabla_\sigma \omega_{hj}] .$$

Con riferimento alla [75], con ovvio scambio di indici, si vede che la somma fra parentesi quadre nella [84] si identifica con

$$\nabla_\sigma \alpha_{\mu\varrho} .$$

Arriviamo così alla trasformata definitiva della I_2

[70_2] $$I_2 = \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma} a_{\alpha\nu} \Phi^{\mu\nu} \nabla_\sigma \alpha_{\mu\varrho} .$$

Trasformiamo infine l'espressione della I'_3 data dalla [38]

$$I'_3 = \Omega_{hk}[\partial_{k+2}\Omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\Omega_{h\,k+2}] .$$

Si ha, in conformità ai calcoli precedenti,

[85] $$I'_3 = \Omega_{hk}[\partial_{k+2}\Omega_{h\,k+1} - \partial_{k+1}\Omega_{h\,k+2}] = e_{kql}\Omega_{hk} \underset{l}{\lambda}^\sigma \nabla_\sigma \Omega_{hq} =$$
$$= e_{kql}\Omega_{hk} \underset{l}{\lambda}_\sigma \nabla^\sigma \Omega_{hq} = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma} a_{\tau\mu} \Phi^{\mu\nu} \underset{h}{\lambda}^\tau \underset{j}{\lambda}^\varrho \nabla^\sigma \Omega_{hj} .$$

All'espressione di I_3'' data dalla [53$_1$] possiamo dare la forma seguente:

$$I_3'' = \Omega_{hj}\left[e_{qrs}\,\gamma_{jrs}\,\Omega_{hq} + e_{qjs}\,\gamma_{hrs}\,\Omega_{rq}\right] \;.$$

Ponendo al posto delle γ_{hkl}, e_{hkl}, Ω_{hk} le espressioni date dalle [15], [72], [75], si ottiene, in virtù delle [8],

$$[86] \qquad I_3'' = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma}\, a_{\tau\mu}\, \Phi^{\mu\nu}\left[\Omega_{hj}\, \underset{h}{\lambda^\tau}\, \nabla^\sigma \underset{j}{\lambda^\varrho} + \Omega_{hj}\, \underset{j}{\lambda^\varrho}\, \nabla^{\sigma\tau} \underset{h}{\lambda^\tau}\right] \;.$$

Sommando le [85], [86] si trae

$$[87] \qquad I_3 = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma}\, a_{\tau\mu}\, \Phi^{\mu\nu}\left[\Omega_{hj}\, \underset{h}{\lambda^\tau}\, \nabla^\sigma \underset{j}{\lambda^\varrho} + \Omega_{hj}\, \underset{j}{\lambda^\varrho}\, \nabla^\sigma \underset{h}{\lambda^\tau} + \underset{h}{\lambda^\tau}\, \underset{j}{\lambda^\varrho}\, \nabla^\sigma \Omega_{hj}\right] \;.$$

Se infine si osserva che la somma fra le parentesi quadre nella [87] è la derivata contravariante di $\Phi^{\tau\varrho}$ ottenuta dalla [77], si arriva alla trasformata definitiva di I_3

$$[70_3] \qquad I_3 = \varepsilon_{\nu\varrho\sigma}\, a_{\tau\mu}\, \Phi^{\mu\nu}\, \nabla^\sigma\, \Phi^{\tau\varrho} \;.$$

Osservazione. – Le equazioni

$$[88] \qquad \left\{\begin{aligned} I_1 &= \varepsilon^{\nu\beta\sigma}\, a^{\mu\tau}\, \alpha_{\mu\nu}\, \nabla_\sigma\, \alpha_{\tau\beta} = 0 \;, \\ I_2 &= \varepsilon^{\alpha\varrho\sigma}\, a_{\alpha\nu}\, \Phi^{\mu\nu}\, \nabla_\sigma\, \alpha_{\mu\varrho} = 0 \;, \\ I_3 &= \varepsilon_{\nu\varrho\sigma}\, a_{\tau\mu}\, \Phi^{\mu\nu}\, \nabla^\sigma\, \Phi^{\tau\varrho} = 0 \;, \end{aligned}\right.$$

sono necessarie e sufficienti affinchè la varietà riemanniana V_3 sia normale nel senso del Bianchi: avuto riguardo alle espressione [76] delle componenti $\Phi^{\mu\nu}$, nei primi membri delle [88] figurano le componenti del tensore fondamentale $a_{\mu\nu}$ della varietà, quelle del tensore doppio simmetrico covariante $\alpha_{\mu\nu}$ di Ricci e le derivate prime di quest'ultime componenti rispetto al ds^2 di V_3. Pertanto, le equazioni soprascritte contengono soltanto i coefficienti $a_{\mu\nu}$ della forma [1] che definisce la varietà riemanniana e loro derivate parziali ordinarie fino a quelle del terz'ordine incluso.