

## IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE E LE LEGGI DELL'ELETTRODINAMICA (\*)

(Con due figure)

MARIO GALLI

SUMMARIVM. — Auctor ostendere vult nonnullos physicos nuper conatos esse defendere, sine validis rationibus, primariam legem circuituum electricorum ab Ampère statutam. Speciatim autem disputat an validum sit in electrodyamica principium, quo actio et reactio inter se aequales dicuntur.

Da alcune discussioni recentemente avvenute è emersa di nuovo la preoccupazione di volere conciliare il principio di azione e reazione della meccanica con le leggi elementari dei circuiti elettrici. Ed è curioso che questa stessa preoccupazione induca a conclusioni opposte.

Così L. MATHUR dichiara: « Non sempre ci si rende conto che la legge di Newton dell'azione e reazione non è generalmente valida per le forze mutue fra elementi di corrente. L'inapplicabilità delle leggi di Newton non è comunemente sottolineata nei testi di elettrodinamica. ed il non riconoscere questo fatto è spesso causa di confusione nei calcoli elettrici ». (1)

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio S. E. Giovanni Giorgi il 23 gennaio 1950.

(1) S.B. L. MATHUR, *Biot-Savart Law and Newton Third Law of Motion*. « Phil. Mag. », XXXII, pag. 171 (1941).

A. ROBERTSON invece conclude la sua apologia della legge elementare di Ampère con le parole: « Quantunque la formola di Ampère non sia perfetta essa è certo superiore a quella di Biot e Savart, la sola presentemente in uso » (1). La ragione della superiorità consisterebbe nel fatto che essa rispetta il principio di azione e reazione.

Ma questa preoccupazione di conciliare il terzo principio della dinamica di Newton con le leggi fondamentali dei circuiti elettrici è poi veramente fondata?

Per rispondere adeguatamente alla domanda premettiamo alcune considerazioni.

1. In ogni legge naturale bisogna distinguere il contenuto empirico e la forma. Il contenuto empirico è il dominio sperimentale che essa pretende di regolare e la totalità delle previsioni che consente di fare. Il suo aspetto formale concerne le operazioni che dobbiamo fare per coordinare ed anticipare i risultati dell'esperienza.

Nel caso presente il contenuto empirico è l'interazione tra circuiti completi percorsi da correnti stazionarie.

Ora tanto la legge di Biot e Savart quanto quella di Ampère fanno dipendere la forza ponderomotrice che un circuito A esplica su un circuito A' da un integrale doppio di linea:

$$\vec{F} = \iint \vec{Q} \, ds \, ds'$$

dove però  $\vec{Q}$  è una funzione vettoriale diversa nei due casi.

Nella formola di Biot e Savart:

$$\vec{Q} = C \frac{ii'}{r^3} [\vec{a}' \vec{b}]_v$$

essendo  $\vec{b} = [\vec{a} \, r]_v$  ed indicando  $a$  ed  $a'$  rispettivamente i vettori unitari tangenti rispettivamente a  $ds$  e  $ds'$ . Nella formola di Ampère invece

$$\vec{Q} = -C \frac{ii'}{r^3} \left( \cos \varepsilon - \frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' \right) \vec{r}$$

(1) A. ROBERTSON, *An historical Note on a Paradox in Electrodynamik*. « Phil. Mag. », XXXVI, pag. 32, (1945).

essendo  $\varepsilon$ ,  $\theta$ ,  $\theta'$  rispettivamente gli angoli che i vettori paralleli a  $ds$  e  $ds'$  formano tra se stessi e con la retta congiungente gli elementi considerati.  $C$  è in ambedue i casi una costante dipendente dalle unità prescelte.

Quando poniamo la questione se queste leggi sono vere o false possiamo rispondere adeguatamente solo esplorandone il contenuto empirico e facendo delle verifiche sperimentali. Bisognerà per conseguenza confrontare l'interazione prevista ed osservata tra circuiti completi. Impostando così la questione, si dimostra razionalmente che le due leggi sono necessariamente coincidenti. O sono ambedue vere o ambedue false. Anzi si può dimostrare che esistono infinite leggi circuitali ad esse equivalenti. Alcune di queste sono state effettivamente proposte da vari fisici <sup>(1)</sup>.

Per conseguenza, finchè non amplifichiamo il contenuto empirico delle due leggi, la questione della preferenza all'una piuttosto che all'altra è circoscritta al loro aspetto formale. Converrà scegliere quella di uso più facile. Ora la legge di Biot e Savart è indubbiamente più semplice e più comoda.

2. Quando però si fissa l'attenzione sui differenziali, cioè sull'espressione isolata  $Q ds ds'$ , i punti di vista sono due.

Alcuni li riguardano come espressioni un senso fisico diretto anche isolatamente considerati. Secondo costoro un elemento infinitesimo di circuito esplica su un altro elemento infinitesimo un'azione elementare per la quale deve essere possibile, almeno concettualmente, dare una formulazione differenziale precisa. Sommando poi questi contributi infinitesimi si dovrebbe ottenere l'interazione macroscopica tra circuiti completi.

Invece, secondo l'altro punto di vista oggi più comune, i differenziali in questione non esprimono alcun fatto fisico. Sono semplicemente elementi di una integrazione. Solo la quantità ottenuta con l'integrazione è empiricamente significativa.

Che cosa dobbiamo pensare di questi due punti di vista? Intanto premettiamo che, per quanto riguarda il primo, indebitamente si estende il contenuto empirico delle leggi che stiamo esaminando. Noi ci siamo

(1) O. D. CHWOLSON, *Traité de Physique*. IV, 2, pag. 599. Paris (1913).

proposti di esprimere adeguatamente l'interazione tra circuiti completi. L'interazione elementare è fuori causa. Anche se essa avesse un significato fisico, non saremmo rigorosamente obbligati a prenderla in considerazione. Questo almeno finchè ci proponiamo di coordinare razionalmente la fenomenologia macroscopica.

Ma supponiamo di volere andare oltre. Si può attribuire un significato fisico diretto all'interazione elementare tra elementi infinitesimi di circuito?

Stando all'orientamento eminentemente positivo della scienza moderna, la risposta è indubbiamente negativa. L'interazione tra due elementi di circuito è praticamente e concettualmente inverificabile. Non esiste nessuna esperienza, neppure ideale, il cui risultato si possa definire come tale presunta interazione elementare. Anche la conformità di tale legge differenziale a certi supremi principî, quali il principio di azione e reazione, non costituirebbe un criterio sufficiente per individuarla fra le altre possibili. La questione così impostata diventa oggettivamente insolubile, poichè non si potrà mai risolvere nè con l'esperienza nè col raziocinio.

3. Tuttavia il fatto che anche oggi alcuni fisici si ostinino ad attribuire un senso indipendente alla formulazione differenziale delle leggi circuitali deve avere una spiegazione se non una giustificazione.

Molto probabilmente la causa di tale errata posizione della questione consiste nell'ignorare la distinzione tra le leggi elementari ora esaminate e la legge d'interazione tra corpuscoli elettrici <sup>(1)</sup>. Questa interazione ha indubbiamente un senso, ma per riuscire ad esprimerla adeguatamente bisogna abbandonare il concetto delle azioni a distanza, il che esclude la possibilità di soddisfare al principio di azione e reazione, almeno nella sua forma primitiva.

SCHWARZSCHILD <sup>(2)</sup> fondandosi sulla teoria di Maxwell-Lorentz, riuscì a determinare la forza con la quale un elettrone *e'* mobile con

<sup>(1)</sup> Da alcune espressioni contenute negli articoli citati si rileva che tale confusione non è stata evitata.

<sup>(2)</sup> K. SCHWARZSCHILD, *Göttinger Nachrichten*. (1908) pag. 132. Cf. anche V. RITZ, *Recherches sur l'électrodynamique générale*. « Ann. de Physique », XIII, pag. 217 (1908) « Frenkel. Lehrbuch der Elektrodynamik », I, pag. 170, Leipzig 1926.

velocità  $v'$  e con l'accelerazione  $w'$  agisce su un elettrone  $e$  mobile con velocità  $v$ .

$$F_x = \frac{ee'}{R^2} \gamma \left[ A \cos(R, x) + B \frac{v'_x}{c} + C \frac{R w'_x}{c^2} \right]$$

con espressioni analoghe per  $F_y$  ed  $F_z$ .

$$\gamma = \frac{1}{1 - \frac{v_R^2}{c^2}}$$

$$A = \gamma^2 \left[ 1 - \frac{v_x v'_x + v_y v'_y + v_z v'_z}{c^2} \right] \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{R w'_R}{c^2} \right] - \frac{R \gamma}{c^3} [v_x w'_x + v_y w'_y + v_z w'_z]$$

$$B = \gamma^2 \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{R w'_R}{c^2} \right] \left[ \frac{v_R}{c} - 1 \right]$$

$$C = -\gamma \left[ 1 - \frac{v_R}{c} \right]$$

L'espressione è molto complicata, specialmente se si tiene conto che le grandezze relative alla carica  $e'$  devono essere riferite al tempo effettivo  $t'$  legato al tempo  $t$  della relazione:  $t' = t - \frac{R}{c}$ .

È manifesto che formole come questa non possono essere assunte come punto di partenza per determinare l'interazione tra circuiti elettrici. Ma a noi importa soprattutto rilevare che il principio newtoniano dell'azione e reazione non è minimamente soddisfatto.

Peraltro LORENTZ <sup>(1)</sup> e POINCARÉ <sup>(2)</sup> hanno dimostrato che esso può essere riabilitato per un sistema di corpuscoli elettrici a patto di considerare come elemento del sistema anche il campo elettromagnetico ed attribuendo ad esso una quantità di moto secondo la legge:

$$dQ = \frac{1}{4\pi c} \left[ \begin{matrix} \mathbf{E} & \mathbf{H} \\ \rightarrow & \rightarrow \end{matrix} \right]_v dV.$$

È facile rendersi conto che per certi sistemi macroscopici il principio di azione e reazione non è verificato a meno che in realtà non

<sup>(1)</sup> H. A. LORENTZ, *The theory of electrons*. Pag. 32, Leipzig, 1909.

<sup>(2)</sup> H. POINCARÉ, « Arch. Néerland. », (2) 5 pag. 252 (1900) Cf. anche ZERNER « Handbuch der Physik. », XII, pag. 175, Berlin 1927.

si adottò la convenzione ora riferita. Un chiaro esempio è costituito da un proiettore parabolico isolato e libero di muoversi. Quando esso emette luce, lo specchio parabolico, a causa della pressione di radiazione, si muove in direzione opposta a quella di propagazione del fascio luminoso, senza essere sollecitato da forze esterne. Accettando però la concezione predetta si dimostra che il teorema della conservazione della quantità di moto vale per il sistema proiettore-radiazione.

La necessità di conglobare corpuscoli elettrici e campo, se si vuole salvare, almeno formalmente, il principio di azione e reazione, non è stata adeguatamente riconosciuta nelle polemiche recenti alle quali abbiamo accennato. Scrive ad esempio ROBERTSON: « Poynting credeva all'esistenza dell'etere e derivò una espressione per calcolare il suo momento ... però un gran numero di esperimenti eseguiti negli ultimi cinquant'anni per scoprire un tale etere non lasciano alcun dubbio che il metodo di Poynting è destituito di ogni realtà fisica » (1).

Rispondiamo: È verissimo che le teorie meccaniche dell'elettricità sono tramontate, ma questo non favorisce nel caso presente la tesi che si vorrebbe patrocinare ma piuttosto milita contro di essa. Se infatti la concezione di Poynting fosse ammissibile, il principio di azione e reazione sarebbe salvo nel senso letterale della parola. Infatti qui entrerebbe nei fenomeni un etere dotato di proprietà meccaniche, capace di assorbire o cedere quantità di moto in senso proprio. Quando questo si esclude, il principio in questione si salva, ma solo formalmente. Volendolo salvare ad ogni costo sarebbe più conveniente attenersi alle vedute meccanicistiche di alcuni illustri elettricisti del secolo scorso. Tale posizione sarebbe però oggi insostenibile.

Comunque risulta chiaro che è del tutto infondata la pretesa di subordinare le leggi elementari dei circuiti al principio di azione e reazione, anche se si volesse dare un significato fisico (cioè che peraltro non concediamo) all'analisi del circuito in tratti elementari.

4. C'è tuttavia una obiezione di Cleveland (2) dalla quale risulterebbe che il principio di azione e reazione è violato anche con riferimento a sistemi macroscopici, qualora si voglia adoperare la for-

(1) Memoria citata, pag. 47.

(2) F. F. CLEVELAND. « Phil. Mag. », XXI, pag. 415 (1936).

mola di Biot e Savart, senza che sia possibile salvarlo con l'attribuire al campo elettromagnetico una quantità di moto. L'obbiezione si può così riassumere:

Si consideri il circuito rettangolare (figura 1) e si ammetta che i lati  $\alpha$  e  $\gamma$  siano notevolmente più piccoli dei lati  $\beta$  e  $\delta$ . I lati  $\alpha$  e  $\gamma$  sono sollecitati da due forze uguali e contrarie dirette verso l'esterno. Lo stesso vale per i due lati  $\beta$  e  $\gamma$ . Ora supponiamo che i lati  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  siano rigidamente collegati, ed  $\alpha$  invece sia da essi separabile. Affinchè si salvi il principio di azione e reazione bisogna ammettere che le forze operanti su  $\alpha$  e sul sistema  $\beta \gamma \delta$  siano uguali e contrarie. Tale è effettivamente il caso poichè le due forze  $F_1$  ed  $F_2$  si elidono. L'esperienza diretta effettuata da Cleveland conferma questa previsione. Tuttavia questo fisico ritiene che l'applicazione della formola di Biot e Savart conduca ad un errore in quanto essa fa prevedere il giusto valore della forza operante sul sistema  $\beta \gamma \delta$ , ma induce ad attribuirle ai tratti di conduttore  $\beta$  e  $\delta$ , e non già al tratto  $\alpha$ , come dovrebbe essere. Si avrebbe quindi il risultato paradossale che il sistema  $\beta \gamma \delta$  solleva se stesso, in virtù di forze dovute alle sue varie parti, ciò che si ritiene comunemente impossibile. Questo inconveniente invece non si avrebbe applicando la legge di Ampère.

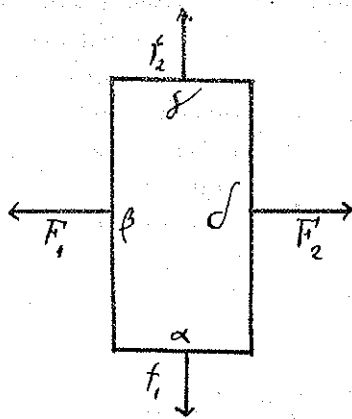


FIG. 1.

Cleveland aggiunge pure l'importante considerazione che il principio di azione e reazione è osservato senza eccezione anche nei fenomeni atomici, cioè proprio là dove tutte le leggi ritenute una volta sicurissime sembra vengano meno. È quindi per lo meno temerario metterlo in dubbio nei fenomeni macroscopici.

Questa riflessione ha certo molta importanza, ma bisogna completarla. Se infatti consideriamo tra i fenomeni atomici quelli nei quali interviene il fotone, constatiamo che il principio di azione e reazione è osservato, ma a condizione di includere nel sistema anche il fotone e di attribuire ad esso la quantità di moto  $\frac{h\nu}{c}$ . In termini classici

ciò equivale ad attribuire al campo elettromagnetico una quantità di moto conformemente alla legge sopra riferita.

Ma tornando all'obbiezione fondata sulla considerazione di tratti finiti di circuito si deve dire che la forza operante nel tratto di conduttore  $\gamma$  non è attribuibile in senso proprio all'una piuttosto che all'altra parte del circuito, nè la legge di Biot e Savart rettamente intesa ci autorizza a fare questa indebita attribuzione. Questa legge è stata istituita per il calcolo giusto delle forze che operano su conduttori finiti e su tratti infinitesimi di conduttore non già per stabilire a quali tratti di conduttore si debbano attribuire. La cosa diventa più chiara quando accettiamo la teoria delle azioni di contatto. La forza operante su  $\gamma$  è dovuta ad un certo stato dell'etere ambiente, stato che si è costituito precedentemente ed alla cui realizzazione ha cooperato tutto il circuito. I tratti  $\beta$  e  $\delta$  non potrebbero operare se non fossero congiunti con  $\alpha$ . Ed allora non si può concludere che il sistema  $\beta\gamma\delta$  sollevi se stesso, come se  $\alpha$  non esistesse.

5. Ma c'è ancora un'altra ragione che giustificherebbe secondo Robertson il ripristino della legge di Q. Ampère, ed è fondata su una famosa esperienza di Hering che in breve si può così riferire:

Sia dato un circuito del tipo rappresentato in figura 2. HB è una scalanatura a forma di arco circolare riempito di mercurio, sul quale è appoggiato il tratto metallico OP libero di rotare intorno a O. MN sia abbastanza lontano da OB così che l'azione su di esso sia trascurabile. La corrente circola nel verso indicato dalla freccia. Vogliamo citare le parole precise di ROBERTSON: « Quando Hering richiese a numerosi fisici quale avrebbe dovuto essere la direzione del moto del tratto di conduttore OP, tutti dichiararono senza eccezione che essa doveva muoversi verso l'esterno. Ed infatti questo risultato sperimentale è così opposto ai giudizi preconcepiuti che uno quasi sempre sospetta un trucco, e subito Hering ebbe contrari molti critici, ma non vi fu alcuno che ripeté gli esperimenti di Hering e non trovò che il filo OP si muove verso l'interno a condizione che i lati QM e RS non siano piccoli in confronto di MN ».

E subito dopo aggiunge a giustificazione della legge di Ampère: « Secondo questa formola vi è una repulsione longitudinale fra gli elementi di corrente (ovvero gli elettroni) in un filo metallico. Queste



forze in pratica si elidono reciprocamente, ma in un liquido come il mercurio queste forze longitudinali sono capaci di spingere l'estremo P del conduttore mobile verso l'interno ».

Ma qui occorre una precisazione sperimentale. Occorre cioè precisare se l'estremo del conduttore OP scorre sul mercurio ovvero è trascinato da esso nell'atto in cui esso si espande longitudinalmente. Nel primo caso non si vede proprio a che cosa possano servire le

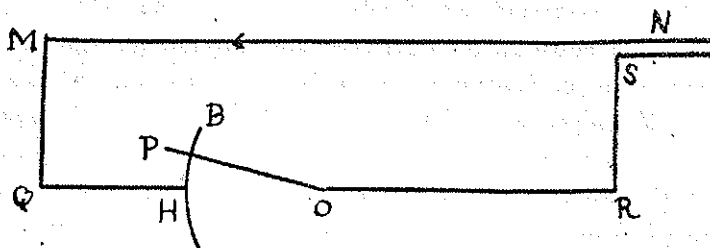


FIG. 2.

repulsioni longitudinali di Ampère. Nel secondo caso non vi sarebbe niente di scandaloso per chi si attiene ai comuni principi di elettrodinamica. Che un conduttore liquido mostri una tendenza ad allungarsi è sperimentalmente provato, ma il fatto rientra nelle formule comunemente accettate. Lo ha dimostrato egregiamente il Professore G. GIORGI nel 1925 a proposito di varie esperienze di Hering <sup>(1)</sup>.

Ma consideriamo pure giusta la prima alternativa. Procuriamo di precisare il vero significato del teorema che si vorrebbe contestare. Questo dice che qualora un circuito possa variare la sua configurazione, come nel caso riferito, esso si modifica in modo da conseguirne un incremento della sua induttanza. Il teorema è solidissimo perchè fondato sul concetto di energia <sup>(2)</sup>. Ora comunemente in casi simili il tratto di conduttore mobile su contatti striscianti deve spostarsi verso l'esterno perchè si abbia un incremento di induttanza. Ciò avviene sempre se il circuito è ovunque convesso <sup>(3)</sup>. Ma in casi speciali può aversi un incremento di induttanza anche con una contrazione della superficie interna abbracciata dal circuito in quanto tale con-

(1) G. GIORGI, *L'elettrotecnica*, XII, pag. 435 (1925).

(2) J. JEANS, *Electricity and Magnetism*, pag. 505. Cambridge, 1946.

(3) G. GIORGI, *L'elettrotecnica*, pag. 436, n. 6 (1925).

trazione è compensata da un incremento del campo magnetico. Purtroppo il calcolo teorico dell'induttanza è estremamente difficile, poichè, in ordine a questo scopo, il circuito non si può schematizzare con una linea, neppure approssimativamente, come invece si può fare per l'induttanza mutua di due circuiti.

Ma si può vedere con considerazioni non troppo affrettate che non sempre un incremento di induttanza richiede una espansione del circuito. Per conseguenza non è affatto vero che ogni fisico (ma quali fisici sono stati consultati?) basandosi sul teorema del massimo flusso debba prevedere un contrasto tra teoria ed esperienza di Hering. Del resto J. H. Morecroft citato da Robertson, ha determinato sperimentalmente l'induttanza per il circuito in questione ed ha trovato che essa aumenta anche quando il tratto OP si sposta verso l'interno. Ed allora di fronte al responso irrefragabile dell'esperienza è inutile insistere nell'obbiezione.

Si può quindi concludere che anche questo argomento non giustifica una riabilitazione della formola elementare di Ampère.